Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

V. Walzenreibung

urn:nbn:de:bsz:31-282938

Von der Spurzapfenreibung der Schnecke sind M und η in viel höherem Grade abhängig, als von der Tragzapfenreibung der Schneckenradwelle (da $\mu' \frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch ist), und ist es deshalb rathsam, das Getriebe möglichst so anzuordnen, dass jene Spurzapfenreibung nicht in einer Ringfläche ($r' > r$), sondern in einer vollen Kreisfläche ($r' < r$), somit nicht an einer mit entsprechendem Bundringe versehenen mittleren Stelle, sondern am Ende der Schneckenwelle stattfindet. Wenn z. B. wie in §. 75

$$\alpha = 5^0\,12',\ \varrho = 5^0\,43',\ r' = 0{,}57\,r,\ \mu' = 0{,}1$$

gesetzt wird und $\pi\mu = 0{,}4$ (§. 76), $z = 20$, $b = 0{,}1\,a$,
so findet man

$$\eta = 0{,}091\,\frac{1 - 0{,}02 - 0{,}01}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}35.$$

V. Walzenreibung.

§. 81. Wesen und Gesetze der Walzenreibung.

Während man sich bisher meistens damit begnügt hat, den Widerstand gegen die wälzende Bewegung dadurch zu erklären, dass in Folge theils der Rauhigkeit der Oberflächen, theils der Deformation von Walze und Unterlage durch die Wirkung des Normaldruckes P die wälzende Bewegung als eine Folge von Umkantungen, nämlich von Drehungen um Axen vorzustellen sei, die im Sinne ihrer Aufeinanderfolge etwas neben der jeweiligen Richtungslinie von P vorbei gehen, ist von Prof. Osborne Reynolds* 1875 eine mit Versuchen verbundene eingehendere Untersuchung über das Wesen dieses Bewegungswiderstandes angestellt und danach derselbe als hauptsächlich auf relativ gleitender Bewegung beruhend, somit auch dieser Widerstand als gleichartig mit der im engeren Sinne so genannten Reibung erkannt worden.

Auf das Vorhandensein von relativ gleitender Bewegung deutet schon der Umstand, dass bei der rollenden Bewegung einer Walze (eines Cylinders) auf einer horizontalen ebenen Unterlagsplatte die von jener längs dieser durchlaufene Strecke im Allgemeinen merklich von der geometrischen Wälzungsstrecke, d. h. von derjenigen (= Product aus Radius und

* Philosophical Transactions, Vol. 166, auszugsweise in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure für 1877, S. 417.

Drehungswinkel der Walze) verschieden und zwar meistens kleiner gefunden wird, die bei demselben Drehungswinkel die vollkommen starre Walze auf der vollkommen starren Unterlage bei rein rollender Bewegung durchlaufen hätte, eine Thatsache, die an und für sich von Interesse ist und von Reynolds zunächst einer näheren Prüfung unterworfen wurde. Erklärlich ist sie folgendermaassen. Wenn die schwere Walze auf der Unterlagsplatte ruht, so berühren sich beide Theile nicht nur in einer Linie, sondern in einer Fläche, längs welcher die Walze eine Verflachung, d. h. eine Verminderung ihrer convexen Krümmung, die Unterlage dagegen einen Eindruck, d. h. eine concave Krümmung erleidet. Da mit der Abflachung der Walze an und für sich eine Verkleinerung ihres Umfanges, mit dem Eindruck der Unterlage dagegen eine Vergrösserung ihrer Oberfläche verbunden ist, so würde daraus eine Verkleinerung der von der Walze rollend durchlaufenen Strecke im Vergleich mit der geometrischen Wälzungsstrecke folgen. Indem aber ferner, auch abgesehen von der Oberflächengestaltung beider Körper, durch ihre verticale Zusammendrückung eine horizontale Ausdehnung an und in der Nähe ihrer Berührungsfläche bedingt wird (verbunden mit theilweiser seitlicher Verdrängung ihrer materiellen Theile über die Ränder der Berührungsfläche hinaus), so wird dadurch jene Oberflächenvergrösserung der Unterlage noch vermehrt, die Verkleinerung der Walzenoberfläche aber vermindert und möglicher Weise auch in Vergrösserung verwandelt: jenes um so mehr, je weicher (zusammendrückbarer) das Material der Unterlage, dieses um so mehr, je weicher das Material der Walze ist. Die Folge beider Umstände wird sein, dass die von einer harten Walze auf einer weicheren ebenen Unterlage rollend durchlaufene Strecke stets kleiner ist als die geometrische Wälzungsstrecke, dass es dagegen beim Rollen einer Walze auf härterer Unterlage von dem Härteverhältnisse beider Körper und vom Durchmesser der Walze abhängt, ob die von ihr rollend durchlaufene Strecke kleiner oder grösser ist, als die geometrische Wälzungsstrecke.

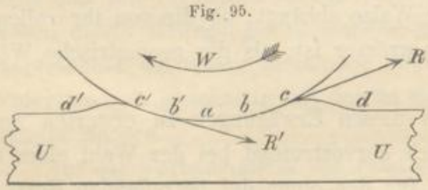
Dem Verhalten, wie es nach diesen Erwägungen zu erwarten war, insbesondere voraussichtlich deutlich hervortretend bei der Wahl eines in hohem Grade dehnbaren Materials für den einen der betreffenden Körper, entsprachen durchaus die Ergebnisse von Versuchen. Indem dabei als Unterlage einer sorgfältig polirten, 14 Pfund schweren gusseisernen Walze von 6 Zoll Durchmesser auf Holz geleimte Kautschukstreifen verschiedener Dicke benutzt wurden, zeigte sich die thatsächlich durchlaufene stets kleiner als die geometrische Wälzungsstrecke, und zwar für je zwei Umdrehungen der Walze beziehungsweise um

	0,44	0,84	0,49 Zoll
	= 1,2	2,2	1,3 Procent der geom. Wälzungsstrecke
bei	0,015	0,08	0,36 Zoll Dicke des Kautschukbandes.

Das in diesen Zahlen sich aussprechende Abhängigkeitsgesetz ist dadurch erklärlich, dass, je dünner das Kautschukband ist, desto mehr seine seitliche Ausdehnung an der oberen Fläche durch die aufgeleimte untere Fläche gehindert wird, dass aber andererseits, je dicker das Band ist, desto beträchtlicher der Eindruck, desto grösser die Berührungsfläche, desto kleiner der specifische Druck und somit desto kleiner auch die seitliche Ausdehnung ausfällt. Wurde auf die Walze ringsum ein $^3/_4$ Zoll dicker Kautschukreif geleimt, so war die auf einer Stahlunterlage oder auf einem sehr dünnen (auf Holz geleimten) Kautschukbande abgerollte Strecke etwas grösser, als die geometrische Wälzungsstrecke, auf einem dickeren Kautschukbande dagegen wieder kleiner; doch blieb der Unterschied zwischen effectiver und geometrischer Wälzungsstrecke stets wesentlich geringer, als beim Rollen der harten Walze auf einer Kautschukunterlage.

Inwiefern nun aber mit der unter solchen Umständen stattfindenden wälzenden Bewegung ein partielles Gleiten und somit Reibung verbunden ist, trotzdem dass (gemäss dem Begriffe einer wälzenden Bewegung) wenigstens in der Mitte der Berührungsfläche zwischen Walze und Unterlage, wo der specifische Druck am grössten ist, kein Gleiten stattfinden, dass nämlich μP, unter μ den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden, grösser als die auf relatives Gleiten der beiden Körper hin wirkende Kraft sein soll, wird am deutlichsten erkennbar aus der Betrachtung des Falles einer harten, z. B. eisernen Walze auf einer weichen, z. B. einer Unterlage von Kautschuk: siehe Fig. 95, entsprechend einer rollenden Bewegung der harten Walze W im Sinne des krummen Pfeils auf der weichen Unterlage UU. Letztere ist längs der Berührungsfläche cc' in verticaler Richtung comprimirt und seitlich entsprechend ausgedehnt, beides in abnehmendem Grade von der Mitte a gegen die Ränder c und c' hin.

Fig. 95.



Der seitlichen Ausdehnung unterhalb der Berührungsfläche entspricht dann nothwendig ausserhalb derselben, etwa von c bis d und von c' bis d', eine seitliche Compression, verbunden mit verticaler Ausdehnung, also wulstförmiger Erhebung der hier convex nach oben gekrümmten Oberfläche der weichen Unterlage. Wenn nun etwa von b bis b' keine Gleitung stattfindet, so nimmt, wenn die Walze, im Sinne des Pfeils W sich drehend, im Sinne $d'd$ weiter rollt, längs bc die verticale Compression und seitliche Ausdehnung zu, entsprechend einer Verschiebung der Kautschukoberfläche längs der Walze in der Richtung bc und somit einer auf die Walze wirkenden Reibung im Sinne des Pfeils R; andererseits nimmt von b' bis c' die verticale Compression und seitliche Ausdehnung ab, entsprechend einer Verschiebung der Kautschukoberfläche längs der Walze in der Richtung $c'b'$ und somit einer auf die Walze wirkenden Reibung im Sinne des Pfeils R'. In diesen beiden Kräften R und R', deren Momente in Bezug auf die Walzenaxe dem Drehungssinne der Walze entgegen wirken, besteht wenigstens in der Hauptsache die hier in Rede stehende Walzenreibung. Wenn auch mit Rücksicht auf die hier ausser Acht gelassene gleichzeitige Deformation der Walze die thatsächlich stattfindenden Verhältnisse modificirt werden mögen, so bleibt doch ihr Gesammtcharakter derselbe.

Wenn diese Erklärung der Walzenreibung als Widerstand gegen eine solche Gleitung, die, durch Deformation der betreffenden Körper verursacht, nur an einem Theil ihrer Berührungsfläche stattfindet, richtig ist, so muss zwischen ihr und den bisher besprochenen Reibungen, die als Widerstände gegen relative Gleitungen in allen Punkten der Berührungsfläche zugleich, nämlich der ganzen Körper sich darstellten, insofern ein wesentlicher Unterschied stattfinden, als sie durch Verminderung des Reibungscoefficienten, z. B. durch Fettung der Oberflächen, nicht auch, wenigstens nicht in gleichem Maasse vermindert zu werden braucht. Indem dadurch nämlich die Breite des gleitungslosen Theiles bb' der Berührungsfläche verkleinert wird, ist es jetzt ein grösserer Theil des Gesammtdruckes, der längs bc und $b'c'$ die Reibungen R und R' verursacht, so dass diese grösser werden können trotz der Abnahme des Reibungscoefficienten. Zur experimentalen Prüfung dieses Verhaltens benutzte Reynolds die oben erwähnte polirte gusseiserne Walze auf ebenfalls möglichst glatt hergerichteten ebenen Platten von Gusseisen, Glas, Messing, Buchsbaum (Hirnholz) und Kautschuk, die theils ganz rein, theils leicht gefettet (die drei ersten mit Oel, die anderen mit Graphit) angewendet wurden. Die Versuche selbst sind in allen Fällen auf zweierlei Weise angestellt worden. Erstens wurde die Walze auf die horizontale Platte gelegt und diese allmählig geneigt bis bei einer gewissen Neigung α die Walze zu rollen anfing; zweitens wurde der Walze ein Anstoss gegeben, so dass sie auf der etwas geneigten Platte bis zu einer gewissen Stelle aufwärts rollte, und wurde dabei die Neigung allmählig vergrössert bis bei einem gewissen Werthe β derselben die Walze nicht mehr an jener Stelle liegen blieb, sondern rückwärts rollte. Die so gefundenen Werthe von α

und β (100 000 α und 100 000 β) sind als Mittelwerthe vieler einzelner Versuche folgende:

Art der Platte	100 000 α		100 000 β	
	rein	gefettet	rein	gefettet
Gusseisen	57	56	26	24
Glas	63	60	19	26
Messing	77	65	21	26
Buchsbaum	100	92	57	23
Kautschuk	354	387	319	290

In der That sind diese Werthe von α und β nicht deutlich und wesentlich abhängig von der Fettigkeit der Oberfläche, also von der Grösse des Reibungscoefficienten, sie wachsen aber erheblich mit abnehmender Härte der Unterlage, womit die Grösse der Deformation, also auch die Grösse der Relativbewegung (längs bc und $b'c'$ in Fig. 95) und damit die Arbeit der Reibungskräfte R, R' zunimmt. Dass die Werthe von β so erheblich kleiner sind, als die von α, dürfte zumeist dadurch erklärlich sein, dass die vollständige Wiederausdehnung der comprimirten Substanz wegen ihrer Trägheit und besonders der inneren Reibung eine gewisse Zeit erfordert; in Folge dessen wird hinter der Mitte a der Berührungsfläche (Fig. 95) beim Rollen der Walze ihre eigene Compression und die der Unterlage stets etwas beträchtlicher sein als sie auf der vorderen Seite ist, somit der hintere Theil ac' des Berührungsbogens etwas kleiner als der vordere ac, wodurch die Umkehrung der in gewissem Sinne stattgefundenen Rollung erleichtert wird, verglichen mit der aus dem Zustande der Ruhe beginnenden Rollung, bei der die Compression auf beiden Seiten der Mitte a gleich ist und überhaupt etwas grösser sein mag, als die vorübergehende Compression während der Bewegung der Walze.

Dieser so eben erwähnte Umstand, dass beim Rollen der Walze stets der vordere Theil des Berührungsbogens etwas grösser ist, als der hintere, muss zur Folge haben, dass der resultirende Gegendruck P, den die Unterlage vertical aufwärts auf die Walze ausübt, etwas vor der Walzenaxe vorbeigeht und so den durch die Reibungskräfte R, R' verursachten Widerstand vergrössert um so mehr, je grösser die Geschwindigkeit der rollenden Bewegung ist, weil damit auch der Längenunterschied jener Bögen zunehmen wird. Ob diese Folgerung zutrifft, bleibt durch Versuche nachzuweisen. —

Uebrigens waren die Untersuchungen von Reynolds zunächst nur auf die Aufklärung des Wesens der Walzenreibung, nicht auf die Ermittelung der Abhängigkeitsgesetze ihrer Grösse gerichtet; diese ist lediglich auf Versuche angewiesen, die freilich bisher nur in wenig befriedigender Weise angestellt wurden, so dass sie namentlich den Einfluss der Oberflächenbeschaffenheit von Walze und Unterlage sowie des Durchmessers der ersteren nicht mit Sicherheit erkennen lassen. Sofern diese Walzenreibung sich als ein Widerstandsmoment gegen die Drehung der Walze um die Polaxe (ideale Berührungslinie mit der Unterlagsplatte) darstellt, ist nur so viel durch die Versuche als constatirt zu betrachten, dass das fragliche Moment dem Normaldrucke P proportional ist; wird es aber somit $= mP$ gesetzt, unter m eine Länge verstanden, deren Zahlenwerth von der zu Grunde liegenden Längeneinheit abhängt und nach Coulomb, Rondelet, Poncelet, Pambour, Rittinger, Weisbach u. A.

1) für gusseiserne Walzen von ungefähr 0,5 Mtr. Durchmesser auf gusseisernen Schienen = 0,48 Millimeter,

2) für Eisenbahnwagenräder von ungefähr 1 Mtr. Durchmesser auf den Bahnschienen = 0,5 bis 0,55 Millimeter,

3) für gusseiserne Walzen auf Granitbahnen = 1 Millimeter,

4) für hölzerne Walzen auf gemeisselten Steinflächen = 1,3 Millimeter,

5) für hölzerne Walzen auf Unterlagen von Holz = 0,5 bis 1,5 Millimeter

gefunden wurde, so haben diese Zahlen kaum wissenschaftlichen Werth, so lange nicht ausser dem Walzendurchmesser namentlich die Oberflächenbeschaffenheit beider Theile genauer angegeben wird. Auf den erheblichen Einfluss der letzteren ist aus der Vergleichung dieser Zahlen mit den obigen Werthen von α nach den Versuchen von Reynolds zu schliessen, wenn von der ihnen anhaftenden Unsicherheit abgesehen wird. Zur Vergleichung des Winkels α mit dem Factor m kann man nämlich bemerken, dass, wenn eine Walze vom Gewichte G und Radius r auf einer unter dem Winkel α gegen den Horizont geneigten ebenen Fläche liegt, das auf Einleitung der Drehung um die Polaxe abzielende Kraftmoment $= G \sin \alpha \,.\, r$, der Normaldruck $P = G \cos \alpha$ und somit die beginnende Wälzung an die Gleichung gebunden ist:

$$m\, G \cos \alpha = G \sin \alpha \,.\, r, \text{ woraus } m = r\, tg\, \alpha = r \alpha$$

mit Rücksicht auf die Kleinheit von α folgt. Da hier $r = 3$ Zoll engl. = 76 Millim. war, so würde sich z. B. für die polirte gusseiserne Walze auf eben solcher gusseiserner Platte

$$m = 76 \,.\, 0{,}00057 = 0{,}043$$

ergeben $= \frac{1}{11}$ des oben unter 1) angegebenen Werthes, der sich auf nicht polirte Oberflächen bezieht. Auch wenn es sich bewahrheiten sollte, dass, wie aus neueren Versuchen von Dupuit sowie von Poirée und Sauvage geschlossen wurde, der Factor m proportional $\sqrt{r}$ zu setzen sei, so würde darin jener erhebliche Unterschied doch nur zum kleineren Theil seine Erklärung finden, indem danach der auf gleichen Radius $r = 250$ Millim. (genauer 262 Millim.) reducirte Werth des Reynolds'schen Versuches doch nur

$$m = 0{,}043\sqrt{\frac{262}{76}} = 0{,}08$$

$= \frac{1}{6}$ des obigen Werthes unter 1) gefunden würde. Die nähere Aufklärung dieses Unterschiedes erscheint um so nöthiger, als er mit der sonst so wohlbegründeten Reynolds'schen Auffassung vom Wesen des Rollungswiderstandes und mit der Erfahrung in Widerspruch zu stehen scheint, derzufolge sich der Einfluss einer Verminderung des Reibungscoefficienten durch Fettung der Oberflächen als unerheblich ergeben hat.

§. 82. **Beispiele.**

Indem das Product aus dem in vorigem Paragraph besprochenen Factor m und dem Normaldrucke zwischen Walze und Unterlage als ein Widerstandsmoment gegen die relative Drehung beider Theile um ihre ideale Berührungslinie (die Polaxe) sich darstellte, ergiebt sich die Arbeit der betreffenden Walzenreibung für eine gewisse Bewegung durch Multiplication jenes Productes mit dem (in Bogenmaass ausgedrückten) entsprechenden relativen Drehungswinkel. Diese Vorbemerkung ist nützlich zur Behandlung von Aufgaben, bei denen die Walzenreibung in Betracht kommt.

1) Um einen schweren Körper K vom Gewichte Q auf einer horizontalen Bahn B leichter, als bei relativ gleitender Bewegung, nach einer gewissen Richtung AX längs B fortbewegen zu können, sei er auf Walzen W von gleichen Radien r gelegt, die selbst auf der Bahn B so liegen, dass ihre parallelen Axen rechtwinklig gegen AX gerichtet sind. Einem unendlich kleinen Wege dx von K gegen B entspricht dann eine Neigung $= \frac{dx}{2r}$ jedes vorher lothrechten Walzendurchmessers gegen die Lothrechte, also ein ebenso grosser relativer Drehungswinkel von W gegen K sowohl wie von W gegen B. Sind also m_1 und m_2 die Constanten der Walzen-

reibung für W und K resp. W und B, und ist $\varDelta Q$ der auf eine Walze entfallende Theil von Q, so ist die Reibungsarbeit für dieselbe

$$= (m_1 + m_2)\,\varDelta Q\,\frac{dx}{2r}.$$

Indem die Summe dieser Arbeiten für alle Walzen = der Arbeit Pdx der Kraft P gesetzt wird, die am Körper K im Sinne AX angreifend zu seiner Fortbewegung erforderlich ist, ergiebt sich:

$$P = \frac{m_1 + m_2}{2r}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Das Vertheilungsgesetz des Druckes auf die einzelnen Walzen ist in Folge der Voraussetzung gleicher Werthe von m_1 und m_2 für dieselben ohne Einfluss auf P, deshalb auch die Höhe des Angriffspunktes von P am Körper, die jenes Vertheilungsverhältniss insofern bedingt, als, je höher P angreift, desto mehr vorwiegend die vorderen Walzen belastet werden.

2) Wenn die den Körper K unterstützenden Walzen durch Rollen ersetzt werden, die mit Zapfen, deren Radien $= a$ seien, in festen Lagern drehbar sind, so entspricht dem elementaren Wege dx des Körpers K jetzt ein Drehungswinkel $= \frac{dx}{r}$ der Rollen. Ist also wieder $\varDelta Q$ der Druck auf eine derselben, so ist die elementare Arbeit der Walzenreibung zwischen ihr und dem Körper K

$$= m\,\varDelta Q\,\frac{dx}{r}.$$

Dazu kommt eine Zapfenreibungsarbeit

$$= \mu' \varDelta Q \,.\, a\,\frac{dx}{r}$$

und wenn die Summe beider für alle Rollen zusammen wieder $= Pdx$ gesetzt wird, so folgt:

$$P = \frac{m + \mu' a}{r}\,Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Indem hier die Rollen auch verschiedene Radien r und Zapfenradien a haben können, sofern sie nur oben von der horizontalen ebenen Unterfläche des Körpers K berührt werden, ist allgemein:

$$P = \Sigma\,\frac{m + \mu' a}{r}\,\varDelta Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

3) Denkt man sich den aus dem Körper K, den n Rollen R und den unter sich zu einem Gliede L verbundenen Lagern dieser Rollen bestehenden Mechanismus in der Weise umgekehrt, dass K als nunmehr unterstes Glied festgestellt ist, so erscheint L als ein Wagen, der mit n Räderpaaren R

(deren jedes kinematisch als nur eine Rolle zu betrachten ist) auf der jetzt oberen horizontalen Fläche von K als Fahrbahn fortbewegt werden soll. Die dazu mit Rücksicht auf Zapfenreibung und Rollungswiderstand erforderliche horizontale Zugkraft P ergiebt sich aus Gl. (3), unter Q das Gewicht des Wagens verstanden. Insbesondere bei gleichen Durchmessern aller Räder und aller Zapfen (Axschenkel) ist nach Gl. (2):

$$P = \frac{m + \mu' a}{r} Q.$$

Wenn z. B. für Eisenbahnfahrzeuge im Durchschnitt $r = 500$ Millim., $a = 40$ Millim., ferner $m = 0{,}5$ Millim. (§. 81) und im Mittel nach den Bestimmungen von Kirchweger (§. 72) $\mu' = \frac{1}{80} = 0{,}0125$ gesetzt wird, so folgt:

$$P = \frac{0{,}5 + 0{,}5}{500} Q = \frac{Q}{500},$$

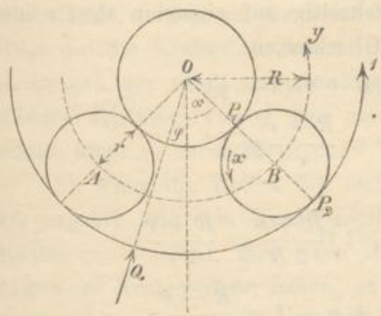
zu gleichen Theilen von der Reibung in den Axenlagern und vom Rollungswiderstande herrührend. (In Folge des Luftwiderstandes und des Anstreifens der Spurkränze an den Schienen ist, auch abgesehen von Krümmungen und Steigungen, das Verhältniss $P : Q$ in der That grösser und mit der Fahrgeschwindigkeit wachsend.)

4) Während im Vorhergehenden immer nur ein solches besonderes Walzenpaar vorausgesetzt wurde, dessen eines Element ein ebenflächig begrenzter Körper ist, kann es im Allgemeinen aus zwei Cylindern bestehen, von denen der eine auch ein Hohlcylinder sein mag. Das Widerstandsmoment gegen die relative Drehung beider um ihre ideale Berührungslinie (Polaxe) ist dann = dem Product aus dem gegenseitigen Normaldrucke und einem Factor m, der ebenso von beiden Cylinderradien abhängig sein wird, wie er in dem bisher betrachteten besonderen Falle von dem einen Radius der Walze abhängt. Weil aber dieses letztere Abhängigkeitsgesetz noch nicht genügend bekannt ist und Versuche über die Walzenreibung im allgemeineren Falle von zwei sich berührenden Cylindern überhaupt nicht vorliegen, so bleibt nichts übrig, als auch auf ihn einstweilen dieselben Werthe von m zu übertragen, die unter sonst gleichen Umständen jenem besonderen Falle erfahrungsmässig entsprechen.

Als Beispiel diene das Rollenlager eines um eine fest stehende verticale Säule drehbaren Krahngerüstes. Während dieses oben mittels eines Spurzapfens von der Säule getragen wird, würde sich seiner Drehung um dieselbe ein sehr beträchtliches Widerstandsmoment entgegensetzen, wenn es die am unteren Ende cylindrisch abgedrehte Säule unmittelbar mit entsprechendem Hohlcylinder umschlösse, in Folge des hier stattfindenden, mit Belastung und Ausladung des Krahnes wachsenden bedeutenden horizontalen Druckes Q. Zur Verminderung dieses Widerstandsmomentes sei deshalb das drehbare Krahngerüst mit einem so viel grösseren Radius $= R + r$ hier hohlcylindrisch gestaltet, dass ein System von gleichmässig ringsum vertheilten Rollen, deren Radien $= r$ sind, in dem ringförmigen Raume zwischen diesem Hohlcylinder und der damit coaxialen Cylinderfläche der Krahnsäule, deren Radius $= R - r$ ist, gerade Platz findet. Die Zahl der Rollen sei $= \frac{\pi}{\alpha}$, nämlich 2α der Winkel, den zwei durch die Axe der Krahnsäule und durch die Axen auf einander folgender Rollen gehende Ebenen mit einander bilden.

Das Verhältniss, in welchem sich der Druck Q auf die Rollen vertheilt, ist streng genommen von ihrer Elasticität und von zufälligen Umständen, insbesondere z. B. von geringen Verschiedenheiten ihrer Durchmesser abhängig; hier genügt indessen die Annahme, dass jeweils nur solche zwei Rollen vom Drucke Q belastet werden, zwischen deren Axen A und B (Fig. 96) seine Richtungslinie hindurch geht. Bildet letztere dabei mit der Mittelebene des Winkels AOB (unter O die Axe der Krahnsäule verstanden) den Winkel φ, so sind die nach AO und BO gerichteten Componenten von Q

Fig. 96.



$$= Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)}{\sin 2\alpha} \text{ und } = Q\frac{\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 2\alpha},$$

ist somit die Gesammtbelastung der Rollen

$$= Q\frac{\sin(\alpha+\varphi)+\sin(\alpha-\varphi)}{\sin 2\alpha} = Q\frac{2\sin\alpha\cos\varphi}{2\sin\alpha\cos\alpha} = Q\frac{\cos\varphi}{\cos\alpha}.$$

Ihr Mittelwerth ergiebt sich, da φ zwischen den Grenzen 0 und α veränderlich ist,

$$= \frac{Q}{\cos\alpha}\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha \cos\varphi\, d\varphi = Q\frac{tg\,\alpha}{\alpha}$$

und folgt daraus weiter der entsprechende Mittelwerth M des Widerstandsmomentes $=$ der Widerstandsarbeit für einen Drehungswinkel $= 1$ des Krahngerüstes:

$$M = (m_1\,\omega_1 + m_2\,\omega_2)\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q,$$

wenn die Constante der Walzenreibung für das aus einer Rolle und der convex-cylindrischen Krahnsäule bestehende Paar mit m_1, für das aus einer Rolle und dem concav-cylindrischen Krahngerüste bestehende Paar mit m_2 bezeichnet wird, und wenn ω_1, ω_2 die relativen Drehungswinkel der Elemente dieser Paare (beziehungsweise um die Berührungslinien wie P_1 und P_2, Fig. 96, als Polaxen) bedeuten, die einem Drehungswinkel $= 1$ des Krahngerüstes entsprechen.

Was letztere betrifft, so sei x der entsprechende Drehungswinkel einer Rolle um ihre Axe B in Bezug auf die Ebene OB, y der Drehungswinkel der Rollenaxen selbst um die Axe O; beide erfolgen (siehe die in Fig. 96 beigesetzten Pfeile) in gleichem Sinne wie die Drehung $= 1$ des Krahngerüstes. Denkt man dann dem ganzen System die gemeinschaftliche Drehung y im umgekehrten Sinne ertheilt, wodurch die relative Drehung x um B gegen OB unberührt bleibt, die Rollenaxen dagegen in Ruhe kommen und der Drehungswinkel des Krahngerüstes $= 1 - y$ wird, so entsprechen der Gleichheit der sich gleichzeitig auf einander abwälzenden Bögen der drei Querschnittskreise die Gleichungen:

$$(R - r)\,y = r\,x = (R + r)(1 - y),$$

woraus folgt:
$$y = \frac{R + r}{2\,R},\quad x = \frac{R - r}{r}\,y$$

und damit:

$$\omega_1 = x + y = \left(\frac{R - r}{r} + 1\right)\frac{R + r}{2\,R} = \frac{R + r}{2\,r}$$

$$\omega_2 = x - (1 - y) = x + y - 1 = \frac{R - r}{2\,r}$$

$$M = \frac{m_1\,(R + r) + m_2\,(R - r)}{2\,r}\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q\,\ldots\ldots\ldots\ (4).$$

Die Kraft P, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, zur Drehung des Krahngerüstes mit alleiniger Rücksicht auf den Widerstand des Rollenlagers erforderlich ist, ergiebt sich $= \dfrac{M}{R + h}$. Sie geht, wie es sein muss, in den durch Gl. (1) bestimmten Grenzwerth über, wenn R ins Unendliche wächst, wobei r und h als Summanden gegen R verschwinden, $\alpha = 0$ und somit $\dfrac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1$ wird.

Setzt man für ein solches Krahnlager im Durchschnitt

$$\frac{r}{R} = \frac{3}{7} \text{ und } \frac{\pi}{\alpha} = 6, \text{ also } \frac{tg\,\alpha}{\alpha} = 1{,}103,$$

entsprechend 6 Rollen, so wird nach Gl. (4):

$$M = 0{,}368\,(5\,m_1 + 2\,m_2)\,Q$$

und mit $m_1 = m_2 = m$: $\quad M = 2{,}58\,m\,Q$,
im Durchschnitt etwa $M = 1{,}2\ Q$ Millimeterkgr.,

entsprechend $m = \dfrac{1{,}2}{2{,}58} = 0{,}465$ Millimeter.

Wäre im Falle eines gewöhnlichen Zapfenlagers der Coefficient μ' (§. 72) auch nur $= 0{,}06$, so wäre doch das Reibungsmoment schon dann grösser, als $1{,}2\ Q$ Millimeterkgr., wenn der Radius der Krahnsäule im Lager nur $> \dfrac{1{,}2}{0{,}06}$, d. i. > 20 Millimeter wäre, während er in Wirklichkeit viel grösser sein wird. Zwar finden bei dem Rollenlager gewisse weitere Reibungen an den Stützflächen der Rollen auf dem Boden der sie aufnehmenden hohlcylindrischen Erweiterung des Krahngerüstes statt, sowie auch dergleichen durch die Hülfsmittel veranlasst werden können, die etwa angewendet werden, um die beständig gleichmässige Vertheilung der Rollen rings um die Krahnsäule herum zu sichern; doch sind solche zusätzliche Reibungen nur theils vom Gewichte der Rollen, theils von zufälligen Umständen abhängig, von Q aber unabhängig und überhaupt als verhältnissmässig klein zu vernachlässigen.

5) Wenn die Rollen des vorbesprochenen Rollenlagers durch Drehkörperpaare mit dem Krahngerüste gepaart sind (durch Zapfen, deren Radien $= a$ seien), ihre Axen A, B ... (Fig. 96) also unveränderliche Lagen im Krahngerüste haben, so tritt an die Stelle derjenigen Walzenreibung, der im vorigen Falle die Grössen m_2 und ω_2 entsprachen, jetzt Zapfenreibung, und wenn die Grössen m_1 und ω_1, die sich auf die aus der Krahnsäule und den Rollen bestehenden Walzenpaare beziehen, jetzt mit m und ω bezeichnet werden, so ist mit übrigens den vorigen Bedeutungen der Buchstaben der Mittelwerth des Widerstandsmomentes:

$$M = (m\,\omega + \mu' a\,x)\,\frac{tg\,\alpha}{\alpha}\,Q.$$

Indem aber jetzt die Rollenaxen dadurch zum Stillstande gebracht werden, dass die ihnen mit dem Krahngerüste gemeinschaftlich zukommende Drehung $= 1$ um die Axe O dem ganzen Systeme im umgekehrten Sinne ertheilt wird, ist

$$x = \frac{R - r}{r} \text{ und } \omega = x + 1 = \frac{R}{r},$$

also $$M = \frac{mR + \mu' a (R - r)}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Die Kraft $P = \frac{M}{R+h}$, welche, an einem Hebelarme $= R + h$ in Bezug auf die Axe O angreifend, mit den hier betrachteten Reibungswiderständen im Gleichgewichte ist, geht in den durch Gl. (2) bestimmten Grenzwerth über, wenn R unendlich gross und $\alpha =$ Null wird.

Uebrigens ist das hier zuletzt betrachtete Rollenlager mit einem grösseren Widerstandsmoment verbunden, als das unter 4) besprochene, für welches nach Gl. (4) insbesondere mit $m_2 = m_1 = m$ sich ergiebt:

$$M = \frac{mR}{r} \frac{tg\,\alpha}{\alpha} Q$$

= dem von der Walzenreibung herrührenden Bestandtheile des Widerstandsmoments nach Gl. (5).

VI. Reibung und Steifigkeit von Zugkraftorganen.

§. 83. Spannung von Zugkraftorganen bei Rollengetrieben.

Die üblichen Zugkraftorgane (§. 28), Riemen, Seile und Ketten, insbesondere die zwei ersteren pflegen zur Getriebebildung mit Rollen kraftschlüssig so gepaart zu werden, dass die Reibung, die dem gegenseitigen Drucke beider Theile, bedingt durch die Spannung des Zugkraftorgans, entspricht, ein relatives Gleiten verhindert, insoweit es nicht die unvermeidliche Folge der verschieden grossen Spannungen und somit auch verschieden grossen Dehnungen ist, die dem Zugkraftorgane beim Auflaufen auf die Rolle und beim Ablaufen von derselben wegen ihres Drehungswiderstandes zukomen. Ausser der Reibung, die bei solcher Paarung einer Rolle mit einem sich gleichzeitig an verschiedenen Stellen auf- und abwickelnden Zugkraftorgane dem durch die Spannungs- und Dehnungsänderung desselben längs dem Rollenumfange bedingten partiellen relativen Gleiten entspricht, kann noch ein weiterer Bewegungswiderstand durch die sogenannte Steifigkeit verursacht werden, nämlich als Widerstand gegen die Krümmung des gestreckten Zugkraftorgans bei seiner Aufwickelung auf eine Rolle oder Trommel resp. gegen die Streckung desselben bei der Abwickelung. Die quantitative Beurtheilung jener Reibung und dieses Steifigkeitswiderstandes erfordert die Kenntniss der Spannung, die das Zugkraftorgan unter gegebenen Umständen haben muss, damit