Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

IV. Zahnreibung

urn:nbn:de:bsz:31-282938

IV. Zahnreibung.

§. 76. Zahnreibung von Cylinderrädern.

Es werde zunächst ein äusserer Eingriff vorausgesetzt und angenommen, dass die Zähne nur hinter der Axenebene, d. h. nach dem Durchgange durch dieselbe auf einander wirken, jedes Zähnepaar so lange, bis das folgende in der Axenebene, nämlich in der Polaxe zur Berührung kommt. Die Bogenlängen $Pa = Pa'$ (Fig. 93), mit denen sich unterdessen die Theilkreise B, B' auf einander abwälzen, sei $= b$. Indem dabei die Berührungslinie des treibenden Zahnkopfes, von der Axe A des betreffenden Rades sich entfernend, den Weg $ap = s$, die Berührungslinie des getriebenen Zahnfusses dagegen, der betreffenden Radaxe A' sich nähernd, den Weg $a'p$ durchläuft, ist $s - s'$ der dem Abwälzungsbogen b der Theilkreise entsprechende Weg der Reibung, nämlich der Betrag der relativ gleitenden Bewegung der Zähne, während sie zugleich längs einem Wege $= s'$ sich auf einander abwälzen. Ist b hinlänglich klein in Vergleich mit den Radien r, r' der Theilkreise B, B', so kann jener Reibungsweg ohne erheblichen Fehler = der Projection der Geraden aa' auf die Centrale AA' (Fig. 93), also

$$s - s' = r\left(1 - \cos\frac{b}{r}\right) + r'\left(1 - \cos\frac{b}{r'}\right)$$

und dabei $$\cos\frac{b}{r} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r^2},\quad \cos\frac{b}{r'} = 1 - \frac{1}{2}\frac{b^2}{r'^2},$$

also $$s - s' = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{b^2}{2}$$

gesetzt werden. Der Druck, den die Zähne auf einander ausüben, ist im Allgemeinen veränderlich und von der Theilrisskraft $= P$ nach Grösse und Richtung verschieden, mit der sie bei ihrer Berührung in der Polaxe im Sinne der gemeinsamen Tangente der Theilkreise auf einander wirken; wird aber von diesen Abweichungen abgesehen, also die Reibungsgrösse constant $= \mu P$ gesetzt, unter μ den Reibungscoefficient verstanden, so ist die dem Abwälzungsbogen b der Theilkreise entsprechende Reibungsarbeit:

$$\mu P(s - s') = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b^2}{2}P,$$

woraus die auf die Theilkreise reducirte Reibung R durch Division mit b sich ergiebt:

$$R=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2}P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

$\frac{R}{P}$ ist der durch die Zahnreibung verursachte verhältnissmässige Arbeitsverlust, nämlich das Verhältniss der Reibungsarbeit $= Rb$ zu der Arbeit $= Pb$, die ohne Reibung gleichzeitig durch die Räder übertragen würde.

Dieselben, somit auch zu derselben Gleichung (1) führenden Betrachtungen gelten offenbar für den Fall, dass die Berührung der Zähne nur vor der Axenebene stattfindet. Wenn ferner mehr als ein Paar Zähne hinter oder vor der Axenebene sich gleichzeitig berühren, so zerfällt zwar der ganze Zahndruck P in eine entsprechende Zahl von Theilen, doch bleibt Gl. (1) gültig, da für jedes der in Berührung befindlichen Zähnepaare der betreffende Theil von P mit demselben Factor

$$\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2}$$

zu multipliciren ist, um in der Summe aller dieser Producte = dem Producte jenes gemeinschaftlichen Factors und der Summe aller Theilwerthe von P wieder die auf die Theilkreise reducirte Zahnreibung zu erhalten.

Wenn aber, wie es im Allgemeinen der Fall ist, die Zähne sowohl hinter wie vor der Axenebene auf einander wirken so, dass der Eingriffsbogen, d. h. der Abwälzungsbogen der Theilkreise, welcher der Berührungsdauer eines Zähnepaares entspricht, hinter der Axenebene $= b_1$, vor derselben $= b_2$ ist, so ergiebt sich nach Gl. (1):

$$R=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{\mu}{2}(b_1 P_1 + b_2 P_2) \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

unter P_1 und P_2 die Theile von P verstanden, mit denen beziehungsweise die hinter und die vor der Axenebene sich berührenden Zähne auf einander wirken. Hier ist, falls b_1 und b_2 verschieden gross sind, die Reibung R von dem Verhältnisse abhängig, nach welchem P in die zwei Theile P_1 und P_2 zerfällt. Während dieses Verhältniss bei neuen oder neu gelagerten Rädern mehr oder weniger von zufälligen Umständen abhängen wird, lässt sich ohne Zweifel um so zutreffender

$$P_1 : P_2 = b_1 : b_2,$$

also

$$R=\left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)\frac{\mu}{2}\,\frac{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}}{b_1+b_2}P \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

setzen, je mehr die Vertheilung des Zahndruckes unter die verschiedenen gleichzeitig in Berührung befindlichen Zähnepaare durch ihre zunehmende Abnutzung bedingt wird. Wenn dann der ganze Eingriffbogen $= b_1 + b_2$ mit Rücksicht auf die Anzahl der Zähnepaare, die im Durchschnitt gleichzeitig in Berührung sein sollen, gegeben ist, b_1 und b_2 einzeln aber nicht durch die Verzahnungsart bestimmt sind, so ist es mit Rücksicht auf R am vortheilhaftesten, d. h. es ist R am kleinsten, wenn $b_1 = b_2$ gemacht wird. Mit $b_1 = b_2 = b$ geht aber der Ausdruck (3) von R wieder in den Ausdruck (1) über, der übrigens in diesem Falle auch unmittelbar aus Gl. (2) sich ergiebt, und zwar unabhängig von dem Verhältnisse, in welchem P in die Bestandtheile P_1 und P_2 zerfällt.

Im Durchschnitt pflegt $b_1 = b_2 = b =$ der sogenannten Theilung zu sein, d. h. $=$ der im Theilkreise gemessenen Entfernung homologer Punkte benachbarter Zähne, so dass beständig zwei Zähnepaare (eins hinter, eins vor der Axenebene) in Eingriff sind. Indem dann

$$b = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r'}{z'}, \text{ also } \frac{b}{r} = \frac{2\pi}{z} \text{ und } \frac{b}{r'} = \frac{2\pi}{z'}$$

ist, unter z und z' die Zähnezahlen der betreffenden Räder verstanden, ergiebt sich aus Gl. (1):

$$R = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\pi\mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Wäre $b_1 = b_2 =$ der $m$fachen Theilung, so wäre auch $R =$ dem $m$fachen dieses Werthes, ebenso wenn nur einer der Bögen b_1, $b_2 =$ der $m$fachen Theilung, der andere $=$ Null wäre. —

Für den Eingriff eines Zahnrades und einer Zahnstange ist, wenn r den Theilkreisradius, z die Zähnezahl des Rades bedeutet, in obiger Gleichung $r' = \infty$ resp. $z' = \infty$ zu setzen, so dass insbesondere aus Gl. (4) folgt:

$$R = \frac{1}{z}\pi\mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Den Fall des inneren Eingriffes endlich kann man sich, wenn r den Theilkreisradius, z die Zähnezahl des inneren Rades bedeutet, aus dem Falle eines äusseren Eingriffes durch stetige Aenderung des Radius r' hervorgegangen denken, wobei der letztere, indem er wachsend durch ∞ (einer Zahnstange entsprechend) hindurch geht, für das Hohlrad negativ wird. Oder wenn r' nach wie vor seinen Absolutwerth bedeutet, so ist in den Gleichungen (1)—(3) das Vorzeichen von $\frac{1}{r'}$ umzukehren, wie auch leicht durch eine der obigen ganz analoge directe Ableitung sich ergiebt. Ebenso ist dann, unter z' die Zähnezahl des Hohlrades verstanden, nach Gl. (4):

$$R = \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z'}\right)\pi\mu P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

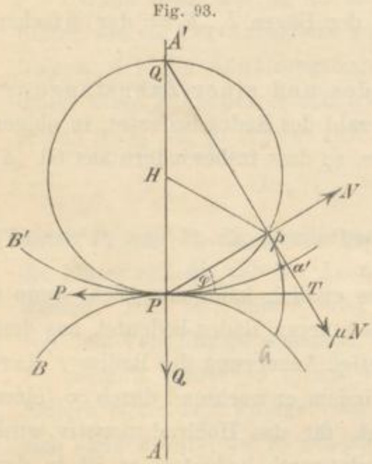
Was schliesslich den Reibungscoefficient betrifft, so kann in der Regel je nach der grösseren oder geringeren Fettigkeit und Glätte der Zahnflächen gesetzt werden:

$$\pi\mu = \frac{1}{3} \text{ bis } \frac{2}{5}, \text{ entsprechend } \mu = 0{,}11 \text{ bis } 0{,}13.$$

§. 77. Einfluss der Zahnform.

Durch die angenäherte Entwickelung im vorigen Paragraphen hat sich die auf die Theilkreise reducirte Zahnreibung R unabhängig von der Zahnform ergeben. Die Frage, ob und in welcher Weise letztere etwa von Einfluss sei, erfordert eine genauere Prüfung, die dann zugleich ein Urtheil gewähren wird über den die Zapfenreibungen der betreffenden Wellen beeinflussenden Druck, den die Räder bei Uebertragung einer gewissen Theilrisskraft im Sinne der Centrale AA' ihrer Theilkreise auf einander ausüben.

Fig. 93.



Sind zu dem Ende (Fig. 93) $ap = \sigma$ und $a'p = \sigma'$ die längs den Zahnprofilen gemessenen Wege ihres Berührungspunktes p, die dem Abwälzungsbogen $Pa = Pa' = x$ der Theilkreise entsprechen, ist $Pp = y$ die Entfernung des Punktes p vom Pol P, ferner N der nach Pp gerichtete Normaldruck zweier Zähne und φ dessen Neigungswinkel gegen die gemeinsame Tangente der Theilkreise, so ist, wenn zunächst wieder ein äusserer Eingriff vorausgesetzt und angenommen wird, dass derselbe nur hinter oder nur vor der Axenebene stattfindet, dass ferner beständig nur ein Paar Zähne in Berührung ist und zwar jedes Paar während einer Abwälzung der Theilkreise mit den Bögen $x = b$, entsprechend den Wegen $\sigma = s$ und $\sigma' = s'$ des Berührungspunktes p der Zahnprofile, der Mittelwerth der auf die Theilkreise reducirten Zahnreibung:

$$R = \frac{\mu}{b} \int_0^{s-s'} N(d\sigma - d\sigma').$$

Dem elementaren Abwälzungsbogen dx der Theilkreise, deren Radien wieder $AP = r$ und $A'P = r'$ seien, entsprechen die elementaren Drehungswinkel $\frac{dx}{r}$ und $\frac{dx}{r'}$ derselben um ihre Mittelpunkte A, A'; die relative Drehung des einen gegen den anderen Theilkreis um den Pol P ist aber die Resultante aus dem einen und dem entgegengesetzten anderen Drehungswinkel, somit = ihrer Summe bei dem hier vorausgesetzten, entgegengesetzten Drehungsrichtungen um A, A' entsprechenden äusseren Eingriffe, und indem dieser elementare relative Drehungswinkel $= \frac{dx}{r} + \frac{dx}{r'}$ durch Multiplication mit $Pp = y$ den relativen Weg des Punktes p des einen Zahnprofils gegen das andere ergiebt, ist

$$d\sigma - d\sigma' = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) y\, dx$$

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right) \frac{\mu}{b} \int_0^b N y\, dx \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1).$$

Ist nun P die constante Theilrisskraft, nämlich der Widerstand, den das getriebene dem treibenden Rade im Sinne der gemeinsamen Tangente der Theilkreise entgegensetzt, Q der im Sinne der Centrale ausgeübte Widerstand, so sind die Kräfte P, Q, N und die Reibung μN in der Weise am getriebenen Rade im Gleichgewicht, wie es die Pfeilspitzen in Fig. 93 unter der Voraussetzung andeuten, dass der Eingriff hinter der Axenebene stattfindet, dass also das um A drehbare Rad das treibende ist. Dem Gleichgewicht jener Kräfte entsprechen die Gleichungen:

$$P = N \cos\varphi + \mu N \sin\varphi$$
$$Q = N \sin\varphi - \mu N \cos\varphi.$$

Findet der Eingriff vor der Axenebene statt, ist also in Fig. 93 das um A' drehbare Rad das treibende, so ist dessen Normaldruck N auf den betreffenden Zahn des getriebenen Rades umgekehrt wie in Fig. 93 gerichtet, und sind ebenso die Widerstände P, Q des getriebenen Rades entgegengesetzt gerichtet zu denken; die Reibung μN wirkt aber auf den getriebenen Zahn nach wie vor in dem durch die Figur angegebenen Sinne. In obigen zwei Gleichgewichtsbedingungen sind deshalb die linken Seiten und die ersten Glieder auf den rechten Seiten entgegengesetzt zu nehmen, oder es ist, was auf dasselbe hinaus läuft, $-\mu$ statt μ zu setzen, so dass sich daraus für beide Fälle zusammen ergiebt:

$$N = \frac{P}{\cos\varphi \pm \mu \sin\varphi} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

$$Q = P\frac{\sin\varphi \mp \mu\cos\varphi}{\cos\varphi \pm \mu\sin\varphi} = P\frac{tg\,\varphi \mp tg\,\varrho}{1 \pm tg\,\varphi\,tg\,\varrho} = P\,tg\,(\varphi \mp \varrho) \ldots . \quad (3),$$

unter ϱ den Reibungswinkel (§. 66) verstanden. Dabei gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, jenachdem der Eingriff hinter oder vor der Axenebene stattfindet, und man erkennt aus Gl. (3), dass Q im letzteren Falle grösser ist. Bei Evolventenzähnen, bei denen φ einen constanten Werth hat, würde Q für den Eingriff hinter der Axenebene = Null sein, wenn $\varphi = \varrho$ wäre. In geringerem Grade, als Q, fällt nach Gl. (2) auch N und somit die Reibung μN vor der Axenebene grösser aus, als dahinter, wozu noch der Umstand hinzukommt, dass der im letzten Falle grössere Druck Q, indem er die Räder aus einander zu drängen strebt, vibrirende Bewegungen derselben verursachen und dadurch die Abnutzung der Zähne noch mehr vergrössern kann, wie es die Erfahrung bestätigt.

Die Einführung des Ausdruckes (2) von N in Gl. (1) giebt:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi \pm \mu\sin\varphi},$$

wofür mit Rücksicht darauf, dass $\mu\sin\varphi$ stets sehr klein in Vergleich mit $\cos\varphi$, dass also $\mu\,tg\,\varphi$ ein sehr kleiner Bruch ist, gesetzt werden kann:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b\,(1 \pm \mu\,tg\,\alpha)}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} \ldots \ldots \ldots . \quad (4),$$

unter α einen Mittelwerth von φ verstanden, oder noch einfacher:

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu P}{b}\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} \ldots \ldots \ldots \ldots . \quad (5).$$

Ebenso wie im vorigen Paragraphen ist dann auch wieder die unveränderte Gültigkeit dieser Ausdrücke zu erkennen, wenn gleichzeitig mehrere Zähnepaare auf der einen oder der anderen Seite der Axenebene in Berührung sind, wogegen bei beiderseits von dieser Ebene zugleich stattfindendem Eingriffe die reducirte Reibung R im Allgemeinen als Summe von zwei Bestandtheilen darstellbar ist, die nach Gl. (4) oder (5) sich ergeben auf Grund einer Annahme in Betreff des Vertheilungsverhältnisses von P unter die hinter und die vor der Axenebene sich berührenden Zähne. Nur wenn im letzten Falle die beiderseitigen Eingriffbögen b gleich gross sind, wobei Gl. (4) unbedingt durch die Gleichung (5) zu ersetzen ist, gilt diese unverändert als Ausdruck des resultirenden Werthes von R. Sie (und ebenso dann auch die daraus für einen inneren Eingriff durch Umkehrung des Vorzeichens von r oder r' hervorgehende Gleichung) liefert für verschiedene Verzahnungsarten etwas verschiedene Werthe von R, sofern dabei y und φ verschiedene Functionen von x sind.

Bei Evolventenzähnen (§. 19) ist φ constant und $y = x \cos\varphi$, also

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

übereinstimmend mit der allgemeinen Näherungsformel (1) im vorigen Paragraphen.

Bei Cykloidenzähnen (§. 17) ist, unter H (Fig. 93) den Mittelpunkt, $PQ = h$ den in der Centrale AA' liegenden Durchmesser des Hülfskreises verstanden, der durch äussere resp. innere Abwälzung auf den Theilkreisen B, B' mit dem Punkte p die Zahnprofile ap und $a'p$ beschreibt, und wenn T der Schnittpunkt der Geraden Qp mit der gemeinsamen Tangente der Theilkreise ist,

$$\frac{y}{\cos\varphi} = PT = h\,tg\,(PQp) = h\,tg\,\frac{1}{2}(PHp) = h\,tg\,\frac{x}{h},$$

da der Bogen Pp des Hülfskreises = den Bögen Pa, Pa' der Theilkreise, also $= x$ ist. Somit ergiebt sich das in Gl. (5) vorkommende Integral:

$$\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} = h^2 \int tg\,\frac{x}{h}\, d\left(\frac{x}{h}\right) = -\,h^2\, ln \cos\frac{b}{h}$$

oder auch wegen $tg\,\frac{x}{h} = \frac{x}{h} + \frac{1}{3}\frac{x^3}{h^3} + \ldots$

$$\int_0^b \frac{y\,dx}{\cos\varphi} = h^2\left(\frac{1}{2}\frac{b^2}{h^2} + \frac{1}{12}\frac{b^4}{h^4} + \ldots\right) = \frac{b^2}{2}\left(1 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} + \ldots\right)$$

und damit nach Gl. (5):

$$R = \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{r'}\right)\frac{\mu b}{2} P\left(1 + \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} + \ldots\right) \ldots\ldots\ldots (7).$$

Die Reibung von Cykloidenzähnen ist also etwas grösser, als die von Evolventenzähnen; doch pflegt der Unterschied und überhaupt der Einfluss der Zahnform auf die hier in Rede stehende Reibung nicht so bedeutend zu sein, dass er in Vergleich mit der Unsicherheit des Coefficienten μ bei Schätzung des betreffenden Arbeitsverlustes besondere Beachtung erforderte. Wäre z. B. $h = r'$ (das Zahnprofil $a'p$ in Fig. 93 eine radiale Gerade) und $b =$ der Theilung, so wäre, unter z' die Zähnezahl des um A' drehbaren Rades verstanden,

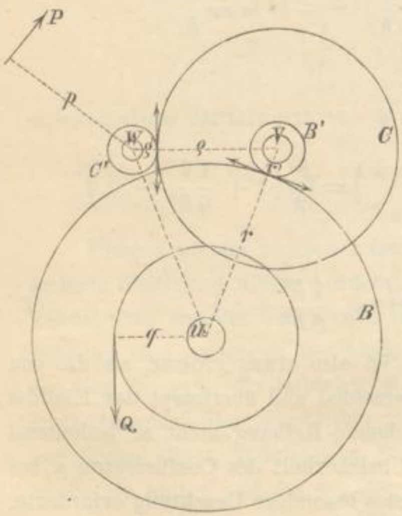
$$\frac{b}{h} = \frac{2\pi b}{2\pi r'} = \frac{2\pi}{z'},$$

$$\text{also } \frac{1}{6}\frac{b^2}{h^2} = \frac{2}{3}\frac{\pi^2}{z'^2} \text{ nahe } = \frac{20}{3\,z'^2} < \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{20}$$
$$\text{für } z' > 8 \quad 10 \quad 12.$$

§. 78. **Beispiel.**

Eine zum Aufwinden und Versetzen schwerer Baustücke (Gewicht $= Q$) dienende Winde enthalte (Fig. 94) zu unterst die Kettentrommel (Radius bis zur Mittellinie der Lastkette gerechnet $= q$), deren horizontale Welle U (Radius in den Lagern $= u$) am einen Ende neben der Trommel das grosse Zahnrad B (Theilkreisradius $= r$, Zähnezahl $= z$) trägt. In dieses greift ein kleineres Rad B' (Theilkreisradius $= r'$, Zähnezahl $= z'$) auf der Vorgelegewelle V (Radius in den Lagern $= v$), und in das am anderen Ende auf letzterer sitzende Rad C (Theilkreisradius $= \varrho$, Zähnezahl $= \zeta$) endlich greift das kleinere Rad C' (Theilkreisradius $= \varrho'$, Zähnezahl $= \zeta'$) auf der Kurbelwelle W (Radius in den Lagern $= w$), die durch entgegengesetzt gerichtete Kurbeln (Länge $= p$) an beiden Enden gedreht wird. Wie gross muss die an diesen zwei Kurbeln normal zu denselben wirkende gesammte Kraft P sein, um mit Rücksicht auf die Zapfen- und Zahnreibungen die an der Kette hängende Last Q zu heben?

Fig. 94.



Ist B die Theilrisskraft zwischen den Rädern B und B', C dieselbe zwischen den Rädern C und C', so hat B als treibende Kraft die Trommelwelle U zu drehen entgegen dem Nutzwiderstande Q und den Bewegungswiderständen, nämlich der Zahnreibung zwischen B und B' sowie der Zapfenreibung in den Lagern der Welle. Das Verhältniss β der auf die Theilkreise reducirten Zahnreibung zur Theilrisskraft B ist nach §. 76, Gl. (4):

$$\beta = \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z'}\right)\pi\mu.$$

Die Zapfenreibung wird (abgesehen vom Eigengewicht der Trommelwelle) durch die Kräfte Q und B verursacht, von denen letztere fast ganz den Wellzapfen zunächst dem Rade B belastet, während Q sich auf beide Zapfen in verschiedenem Verhältnisse vertheilt je nach der Stelle, wo augenblicklich die Kette von der Trommel niederhängt. In den beiden Grenzfällen ihrer vollständigen Auf- oder Abwickelung kann mit Rücksicht darauf, dass die Kraft B nahe horizontal gerichtet ist, der gesammte Zapfendruck näherungsweise

$$= Q + B \text{ resp. } = \sqrt{Q^2 + B^2}$$

gesetzt werden, und da letzterer Ausdruck nach einer hier vollständig genügenden Näherungsformel* $= 0{,}96\ Q + 0{,}4\ B$ gesetzt werden kann, so mag im Durchschnitt der gesammte Zapfendruck zu

$$\frac{1{,}96}{2} Q + \frac{1{,}4}{2} B = 0{,}98\ Q + 0{,}7\ B$$

veranschlagt werden. Dem Gleichgewicht der Kräfte an der Trommelwelle entspricht dann die Gleichung:

$$(1 - \beta) Br = Qq + \mu' (0{,}98\ Q + 0{,}7\ B) u,$$

woraus folgt:

$$B = \frac{q + 0{,}98\ \mu' u}{(1 - \beta) r - 0{,}7\ \mu' u} Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

In Bezug auf die Vorgelegewelle V ist B Nutzwiderstand, C die treibende Kraft. Letztere wird vermindert durch die Zahnreibung zwischen den Rädern C und C' im Verhältnisse

---

* Zur angenäherten Berechnung eines Ausdruckes von der Form $\sqrt{x^2 + y^2}$ kann man setzen:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = ax + by,$$

wenn nur den Coefficienten a und b angemessene Werthe beigelegt werden, die um so zutreffender bestimmt werden können, zwischen je engeren Grenzen das Verhältniss $\frac{y}{x}$ liegend vorauszusetzen ist. Ist nur $\frac{y}{x} < 1$ gegeben, so ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}96\, x + 0{,}4\, y$$

mit einem Fehler von höchstens 4 Procent des wahren Werthes der Wurzelgrösse; für $\frac{y}{x} < \frac{1}{2}$ ist

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}986\, x + 0{,}23\, y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{4}{3}$ Procent, für $\frac{1}{2} < \frac{y}{x} < 1$ dagegen

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 0{,}816\, x + 0{,}59\, y$$

mit einem Fehler von höchstens $\frac{2}{3}$ Procent des wahren Werthes.

$$\gamma = \left(\frac{1}{\zeta} + \frac{1}{\zeta'}\right) \pi \mu$$

und da, was die Zapfenreibung betrifft, die Kraft B fast nur den einen, C fast nur den anderen Wellzapfen als Zapfendruck belastet, indem das Rad B' dicht neben dem einen, das Rad C dicht neben dem anderen Lager auf der Welle V sitzt, so entspricht dem Gleichgewicht der Kräfte an letzterer die Gleichung:

$$(1-\gamma)\, C\varrho = Br' + \mu'(B+C)\, v$$

$$C = \frac{r' + \mu' v}{(1-\gamma)\varrho - \mu' v} B \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Was endlich das Gleichgewicht der Kräfte an der Kurbelwelle W betrifft, so kann von jeder der beiden an je einer Kurbel angreifenden treibenden Kräfte $= 0{,}5\, P$ angenommen werden, dass sie nur das der betreffenden Kurbel zunächst liegende Lager als Zapfendruck belastet; an einem dieser Lager setzt sich aber fragliche Kraft mit dem vom Nutzwiderstande herrührenden lothrechten Drucke C zu einer Resultanten zusammen, welche, da sie bei den Umdrehungen der Kurbel zwischen den Grenzen $C + 0{,}5\, P$ und $C - 0{,}5\, P$ schwankt, im Mittel $= C$ gesetzt werden kann. Somit gilt für die Kurbelwelle durchschnittlich die Momentengleichung:

$$Pp = C\varrho' + \mu'(C + 0{,}5\, P)\, w$$

$$P = \frac{\varrho' + \mu' w}{p - 0{,}5\, \mu' w} C \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch Multiplication der Gleichungen (1), (2), (3) ergiebt sich P im Verhältnisse zu Q. Ohne Bewegungswiderstände, d. h. mit $\mu' = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ wäre, unter P_0 den dieser Voraussetzung entsprechenden Werth von P verstanden,

$$P_0 = \frac{q}{r} \frac{r'}{\varrho} \frac{\varrho'}{p} Q = \frac{q}{p} \frac{z'}{z} \frac{\zeta'}{\zeta} Q \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Das Verhältniss $\frac{P_0}{P}$ ist der sogenannte Wirkungsgrad.

Da auf sorgfältige Wartung der Reibungsflächen bei einer solchen im Freien benutzten Winde kaum zu rechnen ist, mag

$$\pi\mu = 0{,}4 \text{ und } \mu' = 0{,}11$$

gesetzt werden. Ist nun z. B. bei Voraussetzung von zu hebenden Lasten bis $Q = 2500$ Kgr.

$$\underbrace{q = 240,\quad r = 462{,}5, \quad z = 74}_{u = 45} \qquad \underbrace{r' = 75,\quad \varrho = 323, \quad z' = 12 \quad \zeta = 76}_{v = 32} \qquad \underbrace{\varrho' = 68,\quad p = 400, \quad \zeta' = 16}_{w = 20}$$

wo den angegebenen Längen das Millimeter als Einheit zu Grunde liegt und

$$\frac{r}{z} = \frac{r'}{z'}, \text{ sowie } \frac{\varrho}{\zeta} = \frac{\varrho'}{\zeta'}$$

ist, so findet man $\beta = 0{,}0387$ und $\gamma = 0{,}0303$, damit nach Gl. (1)—(3):

$$B = 0{,}555\ Q, \quad C = 0{,}2535\ B, \quad P = 0{,}176\ C,$$

also $$P = 0{,}176 \,.\, 0{,}2535 \,.\, 0{,}555\ Q = 0{,}0248\ Q,$$

während nach Gl. (4): $$P_0 = 0{,}0205\ P$$

gefunden wird, entsprechend einem Wirkungsgrade

$$\frac{P_0}{P} = \frac{205}{248} = 0{,}83.$$

Zur Hebung der Maximallast $Q = 2500$ Kgr. wäre an den zwei Kurbeln ein gesammter Druck:

$$P = 0{,}0248 \,.\, 2500 = 62 \text{ Kgr.}$$

erforderlich, wozu 4 Arbeiter, zwei an jeder Kurbel, ausreichen würden, da es sich hier nicht um eine längere Zeit hindurch stetig andauernde Leistung handelt.

Wenn zur Hebung geringerer Lasten die Kurbelwelle verschieblich in ihren Lagern eingerichtet ist, so dass durch solche Verschiebung die Räder C' und C ausser Eingriff kommen, dagegen ein auf der Kurbelwelle sitzendes zweites und zwar dem Rade B' gleiches Rad mit B zum Eingriffe gebracht wird (wonach bei der nun im umgekehrten Sinne zu bewirkenden Drehung der Kurbeln die Vorgelegewelle leer mitläuft), so bleibt, wenn B jetzt die Theilrisskraft zwischen dem Rade B und dem auf der Kurbelwelle sitzenden Rade B' bedeutet, die obige Gleichung (1) unverändert bestehen, während Gl. (2) wegfällt und Gl. (3) zu ersetzen ist durch:

$$P = \frac{r' + \mu' w}{p - 0{,}5\,\mu' w}\, B \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5),$$

Gl. (4) durch: $$P_0 = \frac{q}{r}\frac{r'}{p}\, Q = \frac{q}{p}\frac{z'}{z}\, Q \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Mit den oben angenommenen Zahlenwerthen findet man hiernach:

$$P = 0{,}1935\ B = 0{,}1935 \,.\, 0{,}555\ Q = 0{,}1074\ Q$$
$$P_0 = 0{,}0973\ Q$$

entsprechend einem Wirkungsgrade $\frac{P_0}{P} = \frac{973}{1074} = 0{,}91$. In diesem Zustande, nämlich ohne Hülfe der Vorgelegewelle, würden 4 Arbeiter bei gleicher durchschnittlicher Anstrengung von je $\frac{62}{4} = 15{,}5$ Kgr. Lasten heben können bis zu

$$Q = \frac{62}{0{,}1074} = 577 \text{ Kgr.}$$

natürlich mit entsprechend grösserer Geschwindigkeit, als bei Benutzung der Vorgelegewelle.

Mit Rücksicht darauf, dass bei dieser Rechnung die Belastung der Zapfen durch das Eigengewicht der Wellen, sowie auch die Kettenreibung unberücksichtigt blieb, wird schliesslich der Wirkungsgrad der Winde noch etwas kleiner zu veranschlagen sein, als 0,83 resp. 0,91, jenachdem sie mit oder ohne Vorgelegewelle benutzt wird.

§. 79. **Zahnreibung von Kegelrädern.**

Es werde zunächst wieder angenommen, dass der Eingriff nur auf einer Seite der Axenebene stattfindet und dass beständig nur ein Paar Zähne in Berührung ist. Letztere findet statt in einer Geraden, die verlängert durch den Durchschnittspunkt O der Axen OA, OA' geht, und wenn in ihr der Normaldruck N gleichförmig vertheilt vorausgesetzt wird, so kann er behufs der folgenden Betrachtung auch im Mittelpunkte p der fraglichen Berührungslinie concentrirt gedacht werden. Die Kugelfläche K, deren Mittelpunkt O und deren Radius $k = Op$ ist, schneidet dann die kegelförmigen Axoide der Räder in ihren mittleren Theilkreisen, deren Radien wieder mit r und r' bezeichnet seien; sie sind, unter P den Durchschnittspunkt der Kugelfläche K mit der Polaxe (der in der Axenebene liegenden Berührungslinie der Axoide) verstanden, beziehungsweise = den von P auf die Axen gefällten Perpendikeln PA, PA'. Die Eingriffslinie Pp, d. i. die Bahn des Punktes p in Bezug auf die Axenebene, sowie die Bahnen ap und $a'p$ dieses Punktes (analog Fig. 93) in den beiden Zahnflächen sind jetzt Curven in der Kugelfläche K, und wenn wieder σ, σ' die von den mittleren Theilkreisen aus gerechneten Bogenlängen ap, $a'p$ bedeuten, so ist der Mittelwerth der auf die mittleren Theilkreise reducirten Zahnreibung wie in §. 77:

$$R = \frac{\mu}{b}\int_0^{s-s'} N(d\sigma - d\sigma'),$$

unter b die Bogenlänge verstanden, mit der sich jene Theilkreise auf einander abwälzen, während die Berührung der Zähne dauert und der mittlere Berührungspunkt p längs den Zahnflächen die Wege $\sigma = s$, $\sigma' = s'$ durchläuft.

Dem elementaren Abwälzungsbogen dx der mittleren Theilkreise entsprechen wieder die elementaren Drehungswinkel $\frac{dx}{r}$ und $\frac{dx}{r'}$ der Räder; aber die relative Drehung des einen gegen das andere um die Polaxe $OP =$ der Resultanten aus dem einen und dem entgegengesetzten anderen dieser elementaren Drehungswinkel ist jetzt:

$$d\varphi = dx\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}},$$

wenn ε den Axenwinkel AOA' bedeutet. Zerlegt man diese Drehung $d\varphi$ um OP in zwei Componenten um die Axe Op und um eine in der Ebene POp dazu senkrechte Axe, also, unter η den Winkel POp verstanden, in die Componenten $\cos\eta\, d\varphi$ und $\sin\eta\, d\varphi$, so ist es nur die letztere, welche die relativ gleitende Bewegung $= d\sigma - d\sigma'$ des Punktes p der einen Zahnfläche gegen die andere zur Folge hat:

$$d\sigma - d\sigma' = k\sin\eta\, d\varphi = y\, d\varphi,$$

wenn mit $y = k\sin\eta$ das vom Pol P auf die Berührungslinie Op gefällte Perpendikel bezeichnet wird. Die obige Gleichung für R geht somit über in:

$$R = \frac{\mu}{b}\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}}\int_0^b Ny\,dx \;\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

Indem sie sich von Gl. (1) in §. 77 nur dadurch unterscheidet, dass

$$\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}} \text{ an die Stelle von } \left(\frac{1}{r}+\frac{1}{r'}\right)$$

getreten ist, gelten mit der gleichen Modification auch die früher aus jener Gleichung gezogenen Folgerungen. Insbesondere kann, wenn P die auf die mittleren Theilkreise bezogene Theilrisskraft bedeutet, analog der allgemeinen Näherungsformel (1) in §. 76 gesetzt werden:

$$P = \frac{\mu b}{2}P\sqrt{\frac{1}{r^2}+\frac{1}{r'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{rr'}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2),$$

entsprechend der obigen Gleichung (1) mit $Ny = Px$.

Wenn endlich im Durchschnitt wieder der Eingriffsbogen b auf jeder Seite der Axenebene $=$ der Theilung, also, unter z und z' die Zähnezahlen verstanden,

$$b = \frac{2\pi r}{z} = \frac{2\pi r'}{z'} \text{ oder } \frac{1}{r} = \frac{2\pi}{bz},\ \frac{1}{r'} = \frac{2\pi}{bz'}$$

gesetzt wird, so folgt aus Gl. (2):

$$R = \pi\mu P\sqrt{\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z'^2}+\frac{2\cos\varepsilon}{zz'}} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3),$$

insbesondere für $\varepsilon = 90^0$:

$$R = \pi \mu P \sqrt{\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z'^2}} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Auch die früheren Formeln für Cylinderräder mit äusserem und innerem Eingriffe sind, wie es sein muss, als Specialfälle in der allgemeineren Gl. (3) enthalten, indem sie daraus beziehungsweise mit $\varepsilon = 0$ und $\varepsilon = 180^0$ erhalten werden.

§. 80. Reibung von Schneckenrädern.

Zahnräderpaare mit windschiefen Radaxen werden selten zur Uebertragung so grosser Kräfte verwendet, dass ihre Reibung als wesentlicher Bestandtheil des gesammten Bewegungswiderstandes der betreffenden Maschine besondere Rücksicht erforderte, mit Ausnahme allenfalls des aus einer sogenannten Schnecke mit entsprechendem Schneckenrade (Schraube mit entsprechendem Schraubenrade) bestehenden Elementenpaares bei rechtwinkelig geschränkten Axen der Elemente. In dem gewöhnlichen Falle eines einfachen Gewindes der Schnecke entspricht einer vollen Umdrehung derselben eine Drehung des Rades um den Winkel $\frac{2\pi}{z}$, wenn z die Zähnezahl des Rades bedeutet, und wenn somit dieses Elementenpaar als einfaches Hülfsmittel für Bewegungsübersetzungen ins Langsame oft nützliche Dienste leisten kann, so ist damit doch der Nachtheil eines im Vergleich mit gewöhnlichen Räderpaaren sehr erheblichen Reibungswiderstandes verbunden, der nämlich (mit Rücksicht auf die Art der relativ gleitenden Bewegung in den Berührungspunkten beider Elemente) als zusammengesetzt betrachtet werden kann aus der Gewindereibung eines Schraubenpaares und aus der Zahnreibung, die dem Eingriffe eines Cylinderrades von z Zähnen mit einer Zahnstange entspricht. Ist also Q der Nutzwiderstand im Theilrisse des Schneckenrades, so muss auf dasselbe wegen der Zahnreibung die etwas grössere Theilrisskraft Q' ausgeübt werden, die nach §. 76, Gl. (5) zu Q in der Beziehung steht:

$$Q'\left(1 - \frac{\pi\mu}{z}\right) = Q,$$

und wenn dazu die Schnecke mit einem Kraftmomente $= Pr$ gedreht wird, so muss nach §. 74 mit Rücksicht auf die Gewindereibung:

$$P = Q' tg(\alpha + \varrho) = Q \frac{tg(\alpha+\varrho)}{1 - \frac{\pi\mu}{z}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

sein, wo P, r, α, ϱ die aus §. 74 bekannten Bedeutungen haben. —

Bei einem einfachen Schneckenradgetriebe, bestehend aus Schnecke, Schneckenrad und einem gemeinsamen Lagerkörper beider, können (abgesehen von noch mehr untergeordneten Widerständen) ausser der vorbesprochenen Reibung des Schneckenradpaares auch die Spurzapfenreibung der Schneckenwelle und die Tragzapfenreibung der Radwelle in Betracht kommen. Mit Rücksicht auf letztere und auf die Zahnreibung zusammen ist der Druck Q', der auf das Schneckenrad tangential an seinen Theilriss entgegen dem Nutzwiderstande Q ausgeübt werden muss, bestimmt durch die Gleichung:

$$Q'\left(1 - \frac{\pi\mu}{z}\right)\left(1 - \mu'\frac{b}{a}\right) = Q'\left(1 - \frac{\pi\mu}{z} - \mu'\frac{b}{a}\right) = Q,$$

unter a den Theilrisshalbmesser, b den Zapfenhalbmesser des Schneckenrades und unter μ' einen Coefficienten verstanden, dessen Bedeutung aus §. 72 hervorgeht. Indem dann wieder

$$P = Q' tg(\alpha + \varrho)$$

ist, ergiebt sich mit Rücksicht auf die Spurzapfenreibung der Schnecke das zu ihrer Drehung erforderliche Kraftmoment:

$$M = Pr + \mu' Q' r' = Q' r\left[tg(\alpha+\varrho) + \mu'\frac{r'}{r}\right],$$

unter r' den nach §. 70 zu bestimmenden mittleren Radius der Spurzapfenfläche und unter μ' den betreffenden Reibungscoefficienten verstanden, der, obschon von anderer Bedeutung, doch dem vorigen Coefficienten μ' gleich gesetzt werden mag. Die Einsetzung des aus obiger Gleichung folgenden Ausdruckes von Q' ergiebt endlich:

$$M = Qr \frac{tg(\alpha+\varrho) + \mu'\frac{r'}{r}}{1 - \frac{\pi\mu}{z} - \mu'\frac{b}{a}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ohne Reibungen wäre $M = M_0 = Qr\,tg\,\alpha$, und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\,\alpha \frac{1 - \frac{\pi\mu}{z} - \mu'\frac{b}{a}}{tg(\alpha+\varrho) + \mu'\frac{r'}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Von der Spurzapfenreibung der Schnecke sind M und η in viel höherem Grade abhängig, als von der Tragzapfenreibung der Schneckenradwelle (da $\mu' \frac{b}{a}$ ein sehr kleiner Bruch ist), und ist es deshalb rathsam, das Getriebe möglichst so anzuordnen, dass jene Spurzapfenreibung nicht in einer Ringfläche ($r' > r$), sondern in einer vollen Kreisfläche ($r' < r$), somit nicht an einer mit entsprechendem Bundringe versehenen mittleren Stelle, sondern am Ende der Schneckenwelle stattfindet. Wenn z. B. wie in §. 75

$$\alpha = 5^0\,12',\ \varrho = 5^0\,43',\ r' = 0{,}57\,r,\ \mu' = 0{,}1$$

gesetzt wird und $\pi\mu = 0{,}4$ (§. 76), $z = 20$, $b = 0{,}1\,a$,

so findet man

$$\eta = 0{,}091\,\frac{1 - 0{,}02 - 0{,}01}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}35.$$

V. Walzenreibung.

§. 81. Wesen und Gesetze der Walzenreibung.

Während man sich bisher meistens damit begnügt hat, den Widerstand gegen die wälzende Bewegung dadurch zu erklären, dass in Folge theils der Rauhigkeit der Oberflächen, theils der Deformation von Walze und Unterlage durch die Wirkung des Normaldruckes P die wälzende Bewegung als eine Folge von Umkantungen, nämlich von Drehungen um Axen vorzustellen sei, die im Sinne ihrer Aufeinanderfolge etwas neben der jeweiligen Richtungslinie von P vorbei gehen, ist von Prof. Osborne Reynolds* 1875 eine mit Versuchen verbundene eingehendere Untersuchung über das Wesen dieses Bewegungswiderstandes angestellt und danach derselbe als hauptsächlich auf relativ gleitender Bewegung beruhend, somit auch dieser Widerstand als gleichartig mit der im engeren Sinne so genannten Reibung erkannt worden.

Auf das Vorhandensein von relativ gleitender Bewegung deutet schon der Umstand, dass bei der rollenden Bewegung einer Walze (eines Cylinders) auf einer horizontalen ebenen Unterlagsplatte die von jener längs dieser durchlaufene Strecke im Allgemeinen merklich von der geometrischen Wälzungsstrecke, d. h. von derjenigen (= Product aus Radius und

* Philosophical Transactions, Vol. 166, auszugsweise in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure für 1877, S. 417.