Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

III. Reibung von Schraubenpaaren

aber, wie bei Dampfmaschinen, wo S den Dampfdruck auf den Kolben (nach Abzug der Kolbenreibung) bedeutet, diese Kraft nur gegen das eine der beiden Wegenden des Schiebers hin abnimmt, auch die Arbeiten $B + C$ und D (die den Factoren μ' und μ entsprechenden zwei Glieder obiger Ausdrücke von m) nicht allzu verschieden sind, wird der Werth von m durch solche Veränderlichkeit von S nicht wesentlich beeinflusst werden können.

III. Reibung von Schraubenpaaren.

§. 74. **Schraubenpaare mit scharfem oder flachem Gewinde.**

Die Elementenfläche (Berührungsfläche von Schraube und Mutter) sei eine Schraubenfläche von solcher Art, dass sie durch Bewegung einer Geraden entstanden gedacht werden kann, welche, indem sie die Axe des Schraubenpaares unter constantem Winkel schneidet, zugleich längs derselben verschoben und um sie gedreht wird mit constantem Verhältnisse der gleichzeitigen elementaren Schiebungen und Drehungen. Gesucht wird das Moment M eines Kräftepaares, welches mit Rücksicht auf die Reibung in der Elementenfläche auf das eine der beiden Elemente S, S', etwa auf das Element S in einer zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebene wirken muss, um dieses Element S am anderen S' entlang zu schrauben entgegen einer axialen Kraft Q, wodurch S gegen S' gedrückt wird.

Der gegenseitige Normaldruck zwischen S und S', sowie die entsprechende Reibung findet in einem solchen Theile F der Elementenfläche statt, welche S im Sinne von Q, S' im umgekehrten Sinne begrenzt, und es hängt die gesuchte Beziehung zwischen Q und M von dem Gesetze ab, nach dem die Pressung in jener Fläche F vertheilt ist. In letzterer Hinsicht werde indessen angenommen, der Druck sei so vertheilt, dass er in der mittleren Schraubenlinie L concentrirt zu denken ist, in welcher die Fläche F von der mit dem Schraubenpaare coaxialen Cylinderfläche C geschnitten wird, deren Radius r das arithmetische Mittel des äusseren und inneren Gewindehalbmessers ist. Wird dann

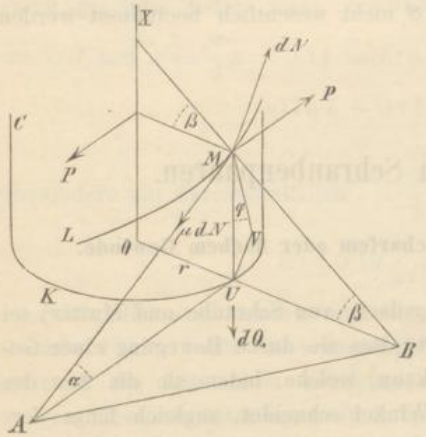
$$M = Pr$$

gesetzt, so handelt es sich um das Verhältniss der Kräfte P und Q als Function des Reibungscoefficienten $\mu = arctg\,\varrho$ und der Winkel α, β, unter denen beziehungsweise die Tangente der Schraubenlinie L und die erzeugende

Gerade der Schraubenfläche F gegen die zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebenen geneigt sind.

Für den beliebigen Punkt M (Fig. 91) der Schraubenlinie L sei MA ihre Tangente, MB die Erzeugende der Schraubenfläche F, MU die Erzeugende der Cylinderfläche C, und es seien A, B, U die Durchschnittspunkte dieser drei Geraden mit einer Ebene E, die im Punkte O normal zur Axe OX des Schraubenpaares ist und somit die Cylinderfläche C in einem Kreise K mit dem Radius r schneidet; UA berührt den Kreis K im Punkte U, während UB die Verlängerung des Radius OU ist, und es ist der Winkel $MAU = \alpha$, der Winkel $MBU = \beta$. Die Ebene AMB berührt die Schraubenfläche F im Punkte M, und wenn V die Projection des Punktes U auf diese Ebene ist, so sei der Winkel $UMV = \varphi$.

Fig. 91.



Auf ein Bogenelement MM' von L laste das Element dQ von Q, und es sei dN der Normaldruck, der in demselben vom Elemente S' des Schraubenpaares auf S nach der Richtung UV ausgeübt wird, folglich μdN die Reibung, die in MM' der relativen Bewegung von S gegen S' entgegen, also im Sinne MA gerichtet ist. Diese dreierlei Kräfte dQ, dN und μdN sind für alle Bogenelemente der Schraubenlinie L zusammen im Gleichgewichte mit dem Kräftepaare $= M = Pr$, von dessen entgegengesetzt gerichteten Kräften P, P die eine in M nach der Richtung AU angreifend gedacht werde, so dass die andere die Axe OX schneidet. Dieses Gleichgewicht erfordert, dass die Summe der Arbeiten aller Kräfte = Null ist für irgend eine relative Bewegung von S gegen S', die etwa so gross angenommen werde, dass der Weg der in M angreifenden Kraft P (Weg des Angriffspunktes im Sinne der Kraft) $= AU = 1$ ist; indem er dann für die andere, die Axe OX schneidende Kraft P = Null,

für jede Kraft $dQ = -UM = -tg\,\alpha$,

für jede Kraft $dN = 0$,

für jede Kraft $\mu dN = -AM = -sec\,\alpha$

ist, ergiebt sich die Gleichung:

$$P - \int dQ\, tg\,\alpha - \int \mu\, dN \sec\alpha = 0$$
$$P = Q\, tg\,\alpha + \mu N \sec\alpha.$$

N ist dadurch bestimmt, dass die Summe der Componenten aller Kräfte nach irgend einer Richtung, z. B. nach der Richtung der Axe = Null sein muss; daraus folgt:

$$\int dQ - \int dN \cos(VUM) + \int \mu\, dN \cos(AMU) = 0$$
$$Q - N \sin\varphi + \mu N \sin\alpha = 0,$$

und die Substitution des daraus folgenden Ausdruckes von

$$N = \frac{Q}{\sin\varphi - \mu \sin\alpha}$$

in obiger Gleichung für P giebt:

$$P = Q\left(tg\,\alpha + \frac{\mu}{\cos\alpha\,(\sin\varphi - \mu\sin\alpha)}\right) = Q\,\frac{\sin\alpha\sin\varphi + \mu\cos^2\alpha}{\cos\alpha\,(\sin\varphi - \mu\sin\alpha)}$$

$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha\sin\varphi + \mu\cos\alpha}{\sin\varphi - \mu\sin\alpha}.$$

Um darin schliesslich φ durch α und β auszudrücken, kann man bemerken, dass in Bezug auf UA, UB, UM als Axen der x, y, z die Gleichung der Ebene AMB ist:

$$\frac{x}{UA} + \frac{y}{UB} + \frac{z}{UM} = 1$$

oder mit $UA = 1$, $UB = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\beta}$, $UM = tg\,\alpha$:

$$x\, tg\,\alpha + y\, tg\,\beta + z = tg\,\alpha.$$

Daraus folgt der *Cosinus* des Winkels VUM, den die Normale der Ebene AMB mit UM, also mit der z-Axe bildet:

$$\cos(VUM) = \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}$$

und somit
$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + \mu\cos\alpha\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}}{1 - \mu\sin\alpha\sqrt{1 + tg^2\alpha + tg^2\beta}} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

insbesondere für Schrauben mit flachem Gewinde mit $\beta = 0$ und $\mu = tg\,\varrho$:

$$\frac{P}{Q} = \frac{tg\,\alpha + \mu}{1 - \mu\, tg\,\alpha} = tg(\alpha + \varrho) \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Aus Gl. (1) ist ohne Weiteres ersichtlich, dass zur relativen Bewegung des einen gegen das andere Element des Schraubenpaares entgegen der auf ersteres wirkenden axialen Kraft Q eine um so kleinere Kraft P oder ein um so kleineres Kraftmoment $M = Pr$ nöthig ist, je kleiner der Winkel β ist, so dass in solchem Falle bezweckter Arbeitsleistung ein Schraubenpaar mit flachem Gewinde den Vorzug verdient. Wenn aber durch die Kraft P resp. durch das Moment M das betreffende Element des Schraubenpaares nicht sowohl relativ gegen das andere entgegen der Kraft Q bewegt, als vielmehr an der Bewegung im Sinne von Q verhindert werden soll, wobei dann die Reibung entgegengesetzt gerichtet ist wie zuvor und deshalb μ und ϱ in den Gleichungen (1) und (2) entgegengesetzt zu nehmen sind, so ist P um so kleiner und um so eher negativ (entsprechend dem Erforderniss eines Zwanges zur Bewegung selbst im Sinne von Q), je grösser β ist. Um diesen Fall handelt es sich bei Befestigungsschrauben, die deshalb mit scharfem Gewinde auszuführen sind bei ausserdem kleiner Grösse des mittleren Steigungswinkels α. Nach der für solche Schrauben üblichen Whitworth'schen Scala ist in der That α meistens $< 3^0$, so dass ohne in Betracht kommenden Fehler

$$\cos\alpha\sqrt{1+tg^2\alpha+tg^2\beta}=\sqrt{1+tg^2\beta}=\sec\beta$$

gesetzt werden kann und somit nach Gl. (1):

$$\frac{P}{Q}=\frac{tg\,\alpha+\mu\sec\beta}{1-\mu\,tg\,\alpha\sec\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

oder auch mit $\mu\sec\beta=tg\,\varrho'$:

$$\frac{P}{Q}=\frac{tg\,\alpha+tg\,\varrho'}{1-tg\,\alpha\,tg\,\varrho'}=tg(\alpha+\varrho') \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Mit dem üblichen Werthe von $\beta=27^0\,30'$ und mit $\mu=0{,}15$ ergiebt sich:

$$tg\,\varrho'=0{,}169;\quad \varrho'=9^0\,36'.$$

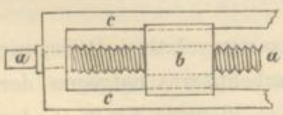
Bei Schraubenpaaren mit flachem Gewinde, die als Elementenpaare von Getrieben zu mechanischer Arbeitsleistung dienen, kann in der Regel auf grössere Glätte und Fettigkeit der Reibungsfläche gerechnet werden, entsprechend etwa:

$$\mu=tg\,\varrho=0{,}1;\quad \varrho=5^0\,43'.$$

§. 75. **Beispiele.**

1) Als Beispiel diene zunächst jene am häufigsten angewendete Form der coaxialen Schraubenkette, bei welcher, wie Fig. 62 (§. 49) andeutet, eines der drei coaxialen Schraubenpaare durch ein Drehkörperpaar, ein zweites durch ein Prismenpaar (beide als Specialfälle von Schraubenpaaren zu betrachten) ersetzt ist, und zwar bei Voraussetzung einer solchen Verwendung als Getriebe, dass in Bezug auf c als festgestelltes Glied das Glied b ent-

Fig. 62.



gegen einem axialen Widerstande Q bewegt werden soll durch Drehung der Schraube a vermittels eines Kraftmomentes M. Gesucht wird die Beziehung zwischen M und Q mit Rücksicht auf die Reibungen der Elementenpaare, entsprechend den Reibungscoefficienten:

$\mu = arctg\, \varrho$ für das Schraubenpaar b, a,

μ' für das Drehkörperpaar a, c,

μ'' für das Prismenpaar c, b.

Ist r der mittlere Radius, α der mittlere Steigungswinkel des flachen Gewindes des Schraubenpaares a, b, und ist A der axiale Druck zwischen a und b, sowie zwischen a und c, ferner M' das diesem Drucke entsprechende Reibungsmoment des Drehkörperpaares a, c, so ist nach Gl. (2) im vorigen Paragraph:

$$M = Pr + M' = Ar\, tg(\alpha + \varrho) + M'$$

oder mit $M' = \mu' A r'$, wo r' bei gegebener Spurzapfenfläche des Paares a, c nach §. 70 zu bestimmen ist:

$$M = A[r\, tg(\alpha + \varrho) + \mu' r'].$$

Ist ferner r'' die mittlere Entfernung der Gleitfläche zwischen b und c von der Schraubenaxe, somit der gegenseitige Normaldruck dieser Glieder

$$= \frac{M - M'}{r''} = \frac{Ar\, tg(\alpha + \varrho)}{r''}$$

und die entsprechende Reibung $R = \mu'' \cdot \frac{Ar\, tg(\alpha + \varrho)}{r''}$,

so ergiebt sich $Q = A - R = A\left(1 - \mu'' \frac{r}{r''}\, tg(\alpha + \varrho)\right)$

und durch Einsetzung des hieraus folgenden Ausdruckes von A in obiger Gleichung für M:

$$M = Qr \frac{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}}{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\, tg(\alpha + \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Ohne Reibungen, d. h. mit $\varrho = \mu' = \mu'' = 0$ wäre:

$$M_0 = Qr\, tg\, \alpha,$$

und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\, \alpha \frac{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\, tg(\alpha + \varrho)}{tg(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Es sei z. B. der Querschnitt des Gewindes ein Quadrat, dessen Seite

$= \frac{1}{8}$ des äusseren $= \frac{1}{6}$ des inneren, also $= \frac{1}{7}$ des mittleren Gewindedurchmessers d ist; die Steigung s ist dann doppelt so gross, also

$$s = \frac{2}{7} d$$

$$\text{und } tg\,\alpha = \frac{s}{\pi d} = \frac{2}{7\pi} = 0{,}091, \text{ entsprechend } \alpha = 5^0\,12'.$$

Die Schraube a stütze sich gegen das Lager (das festgestellte Glied c) auf der in Fig. 62 abgebrochen gezeichneten rechten Seite in einer kreisförmigen ebenen Fläche, während sie auf der linken Seite nur cylindrisch (ohne Anläufe resp. vortretende Ringe) mit dem Gliede c gepaart sei; dieses Cylinderpaar, jene ebene Stützfläche und die axiale Kraft A als Schliessungskraft bedingen dann zusammen eine Paarung der Glieder a und c, deren kinematischer Charakter der eines Drehkörperpaares ist. Der Radius jener kreisförmigen ebenen Spurzapfenfläche sei = dem inneren Gewindehalbmesser $= \frac{6}{7} r$, so dass bei Abstraction von dem Einflusse fortschreitender Abnutzung nach §. 70, Gl. (5) gesetzt werden kann:

$$r' = \frac{2}{3}\frac{6}{7} r = \frac{4}{7} r = 0{,}57\,r;$$

endlich sei $r'' = 4\,r$. Wird dann nach vorigem Paragraph

$$\varrho = 5^0\,43', \text{ entsprechend } \mu = 0{,}1$$

angenommen, also $tg\,(\alpha + \varrho) = tg\,(10^0\,55') = 0{,}193$
und wird auch $\mu' = \mu'' = 0{,}1$ gesetzt, so findet man nach Gl. (2):

$$\eta = 0{,}091\ \frac{1 - 0{,}25\,.\,0{,}0193}{0{,}193 + 0{,}057} = 0{,}36.$$

Dieser geringe Wirkungsgrad rührt nur zu sehr kleinem Theile von der Reibung des Prismenpaares b, c her; denn mit $\mu'' = 0$ wird η nicht wesentlich $> 0{,}36$. Zum grössten Theile fällt die Kleinheit von η der Reibung des Schraubenpaares zur Last, doch hat auch die Spurzapfenreibung erheblichen Einfluss darauf, indem sich mit $\mu' = \mu'' = 0$ ergiebt:

$$\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)} = \frac{0{,}091}{0{,}193} = 0{,}47.$$

Durch diese Spurzapfenreibung des Paares a, c würde η in noch höherem Grade vermindert werden, wenn die betreffende Reibungsfläche nicht, wie hier angenommen, eine volle Kreisfläche, sondern eine Ringfläche wäre, deren innerer Radius dann wenigstens = dem Radius jener Kreisfläche sein würde. Uebrigens ist α hier ungewöhnlich gross angenommen worden; mit einem kleineren Steigungswinkel α ist auch η noch kleiner.

2) Eine coaxiale Schraubenkette der vorbesprochenen Art (entsprechend Fig. 62 bei Umkehrung des Schraubenpaares a, b, d. h. mit a als Mutter und b als Schraube) wird auch bei **Schraubenbefestigungen** von den zu verbindenden Körpern als dem Gliede c, von der sie durchdringenden Befestigungsschraube b und von der Mutter a gebildet, durch deren Anziehung mittels eines sie drehenden Kraftmoments M jene Körper mit einem gewissen gegenseitigen Drucke $= Q$ zusammengepresst werden sollen. Indem aber hier (abgesehen von untergeordneten Deformationswirkungen) die Glieder b und c nicht gegen einander verschoben werden, fällt die Reibung des Prismenpaares b, c ausser Betracht und ergiebt sich nach Gl. (1) mit $\mu''=0$ und ϱ' statt ϱ (entsprechend dem hier vorliegenden Falle eines scharfen Gewindes):

$$M=\left[tg\,(\alpha+\varrho')+\mu'\frac{r'}{r}\right]Qr \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3).$$

Werden hier ϱ' und μ' entgegengesetzt genommen, so bedeutet M das Kraftmoment, das die Mutter am Rückgange (wobei auch die Reibungen im entgegengesetzten Sinne wirken) zu hindern im Stande ist; es muss negativ sein, damit die Mutter nicht von selbst, d. h. bei $M=0$ blos durch die Wirkung der Kraft Q zurückgehen könne. Das Kraftmoment M_1, womit dann die angezogene Mutter im umgekehrten Sinne gedreht werden muss, um sie zu lösen und damit die Befestigung wieder aufzuheben, ergiebt sich aus Gl. (3), indem ϱ' und μ' entgegengesetzt genommen werden und darauf der ganze Ausdruck entgegengesetzt genommen wird; es ist also:

$$M_1=\left[tg\,(\varrho'-\alpha)+\mu'\frac{r'}{r}\right]Qr \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4).$$

Die nöthige Eigenschaft der Selbstsperrung kommt dieser Schraubenbefestigung in um so höherem Grade zu, je weniger $M_1 < M$, je kleiner also α ist.

Nach der Whitworth'schen Scala ist $\alpha=2^0$ bis $3^0\,30'$ und mag, da die Verschiedenheiten dieses Winkels im Vergleich mit dem viel grösseren Reibungswinkel ϱ' und dessen Unsicherheit wenig ins Gewicht fallen, im Durchschnitt $\alpha=2^0\,45'$ gesetzt werden. Damit und mit $\varrho'=9^0\,36'$ (§. 74), ferner mit $\mu'=0{,}15$ und $r'=1{,}5\,r$, nahe entsprechend nach Gl. (3) in §. 70 einer ringförmigen Auflagerfläche der Schraubenmutter, deren Radien $=r$ und $1{,}9\,r$ sind, ergiebt sich:

$$M=0{,}444\;Qr;\quad M_1=0{,}345\;Qr=0{,}78\;M.$$

3) Der Wirkungsgrad eines singulären Schraubengetriebes (§. 51) ist mit alleiniger Rücksicht auf die Reibung seines Schraubenpaares, wodurch er vorwiegend bedingt zu werden pflegt,

$$\eta = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha+\varrho)}$$

bei Voraussetzung eines flachen Gewindes, und er wurde z. B. oben unter 1) $= 0{,}47$ gefunden für $\alpha = 5^0\,12'$ und $\varrho = 5^0\,43'$. Er ist $= 0$ für $\alpha = 0$ und für $\alpha = 90^0 - \varrho$, dazwischen am grössten für einen solchen Steigungswinkel α, welcher der Gleichung entspricht:

$$\frac{tg\,(\alpha+\varrho)}{cos^2\,\alpha} - \frac{tg\,\alpha}{cos^2\,(\alpha+\varrho)} = 0, \text{ woraus } sin\,(2\,\alpha + 2\,\varrho) = sin\,2\,\alpha$$

$$4\,\alpha + 2\,\varrho = 180^0, \text{ also } \alpha = 45^0 - \frac{\varrho}{2}$$

$$\text{und } max\,\eta = \frac{tg\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)}{tg\left(45^0 + \frac{\varrho}{2}\right)} = tg^2\left(45^0 - \frac{\varrho}{2}\right)$$

folgt, z. B. mit $\varrho = 5^0\,43'$, entsprechend $\mu = 0{,}1$:

$$\alpha = 42^0\,8' \text{ und } max\,\eta = 0{,}82.$$

Diesen vortheilhaftesten Verhältnissen kann dadurch wenigstens näher zu kommen gesucht werden, ohne die der Gleichung

$$M_0 = Qr\,tg\,\alpha$$

entsprechende Beziehung zwischen bewegender Kraft und Nutzwiderstand bei Abstraction von Reibungswiderständen zu beeinträchtigen, dass jenes Getriebe, Fig. 62, durch ein sogenanntes Differentialschraubengetriebe ersetzt, nämlich dahin abgeändert wird, dass das eingängige Schraubenpaar a, b durch ein $n$gängiges, das Drehkörperpaar a, c aber durch ein $(n-1)$gängiges, in gleichem Sinne mit jenem gewundenes Schraubenpaar ersetzt wird. Zu der Steigung $= s$ und dem mittleren Steigungswinkel $= \alpha$ eines eingängigen Schraubenpaares von gleichem Gewindequerschnitte und gleichem Gewindehalbmesser r stehen die Steigung und der mittlere Steigungswinkel jener Schraubenpaare a, b und a, c in der Beziehung:

$$s_n = ns \text{ und } tg\,\alpha_n = n\,tg\,\alpha$$

$$s_{n-1} = (n-1)\,s \text{ und } tg\,\alpha_{n-1} = (n-1)\,tg\,\alpha.$$

Sind es dann auch die Reibungen von zwei Schraubenpaaren, die jetzt den Wirkungsgrad η bedingen, so sind sie doch zusammen nur ungefähr ebenso gross wie die eines einzelnen eingängigen Schraubenpaares, wogegen die Spurzapfenreibung des früheren Drehkörperpaares a, c in Wegfall gekommen ist. Der Wirkungsgrad η dieses Differentialschraubengetriebes ergiebt sich durch folgende Ueberlegung.

Ist wieder A der axiale Druck zwischen a und b sowie zwischen a und c, so ist mit Rücksicht darauf, dass die relative Bewegung von a gegen

b entgegen der von a auf b ausgeübten Kraft A, dagegen die ebenso gerichtete relative Bewegung von a gegen c im Sinne der von a auf c ausgeübten (der vorigen entgegengesetzten) Kraft A stattfindet,

$$M = Ar\,[tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)],$$

während mit Rücksicht auf die Reibung des Prismenpaares b, c gemäss der Entwickelung unter 1)

$$Q = A\left[1 - \mu'' \frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)\right]$$

ist. Daraus folgt:

$$M = Qr \frac{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$M_0 = Qr\,(tg\,\alpha_n - tg\,\alpha_{n-1}) = Qr\,tg\,\alpha$$

$$\eta = \frac{M_0}{M} = tg\,\alpha \frac{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_n + \varrho)}{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (6).$$

Z. B. mit $\alpha = 5^0\,12'$, $\varrho = 5^0\,43'$, $r'' = 4\,r$, $\mu'' = 0{,}1$ findet man

für $n =$	2	3	4
$\eta =$	0,49	0,48	0,46

wesentlich $> 0{,}3\dot{6}$ und wenig verschieden von $\frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho)} = 0{,}47$. Uebrigens zeigt sich die Anwendung einer mehr als zweigängigen Schraube hier ohne Nutzen; auch wird η noch etwas grösser (um so mehr, je weniger $r'' > r$ ist), wenn das Schraubenpaar a, c mit n, dagegen a, b mit $n - 1$ Gängen ausgeführt wird. Es ist dann

$$M = Qr \frac{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

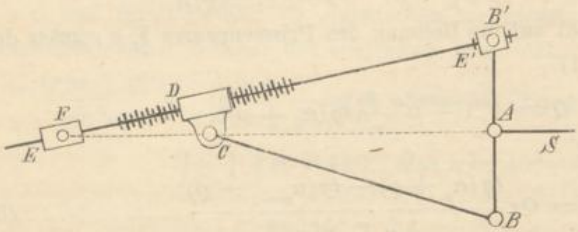
$$\eta = tg\,\alpha \frac{1 - \mu'' \frac{r}{r''}\,tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)}{tg\,(\alpha_n + \varrho) - tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)} \quad \ldots\ldots\ldots (8),$$

wobei zu bemerken ist, dass, wenn auch $tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)$ negativ werden sollte (wie bei obigen Beispielen für $n = 2$), doch das Glied mit μ'' negativ bleiben muss, indem hier die Zeichenumkehrung von $tg\,(\alpha_{n-1} - \varrho)$ nur die Bedeutung hat, dass der Normaldruck des Gliedes b auf das Glied c in den Gleitflächen des Prismenpaares b, c im umgekehrten Sinne gerichtet ist.

4) Als Beispiel eines zwar elementaren, aber zusammengesetzten Schraubengetriebes diene das von Rogers angegebene Steuerruder-

getriebe: Fig. 92. Die verticale Welle A des Steuers S trägt den Hebel BB', dessen Arm AB durch die Koppel BC mit der Schraubenmutter CD zusammenhängt (B und C sind Drehkörperpaare mit verticalen Axen), während die zugehörige Schraube DE' den anderen Arm AB' vermittels eines Zwischengliedes $B'E'$ angreift, das mit beiden Theilen durch die Drehkörperpaare B' und E' gepaart ist (die Axe von B' ist vertical, die von E' fällt mit der horizontalen Schraubenaxe zusammen). Die Schraubenspindel, cylindrisch (coaxial zum Schraubenpaare D) gepaart mit der um eine verticale Axe F drehbaren Hülse EF, wird an ihrem über E hinaus liegenden Ende durch das Steuerrad gedreht und bewirkt dadurch eine entsprechend kleinere Drehung des Steuerruders. Die Kette dieses Getriebes besteht aus der sechsgliedrigen singulären Schraubenkette $ABCDEF$ und der fünfgliedrigen Drehkörperkette $AB'E'EF$, die so zusammengesetzt sind, dass sie das festgestellte Glied FA gemein haben und dass AB mit AB', DE mit $E'E$ zu je einem Gliede verbunden sind. Indem das Cylinderpaar E als Ersatz eines zwischen DE und EF befindlichen Gliedes betrachtet werden kann, das mit einem jener zwei Glieder durch ein zum Schraubenpaare D coaxiales Drehkörperpaar R, mit dem anderen durch ein Prismenpaar P (Schubrichtung parallel den Axen von R und D) gepaart ist, so erscheint die erstere jener zwei das vorliegende Getriebe constituirenden einfachen Ketten als eine siebengliedrige singuläre Schraubenkette $ABCDRPF$ mit nur zwangläufigen niederen Elementenpaaren, die nicht zwangläufig ist, weil sie das Prismenpaar P und das Drehkörperpaar F mehr enthält, als die Kette $ABCDR$, die nach Fig. 65, §. 51, als fünfgliedrige singuläre Schraubenkette zwangläufig wäre. Die fehlende Zwangläufigkeit der fraglichen Kette ist aber dadurch hergestellt, dass ihr Glied FA mit dem gleichnamigen Gliede FA, das Glied AB mit dem Gliede AB' der zwangläufigen Schubkurbelkette $AB'PF$ fest verbunden wurde, welcher Schubkurbelkette dann freilich, um die Schraube als das Glied $B'P$ derselben verwenden zu können, unbeschadet ihrer Zwangläufigkeit das weitere (fünfte) Glied $B'E'$ mit dem Drehkörperpaare E' einschaltungsweise hinzugefügt werden musste

Fig. 92.



unter gleichzeitigem Ersatze des Prismenpaares P durch das Cylinderpaar E.

Es sei nun das Kraftmoment M' zu bestimmen, mit welchem die Schraubenspindel EE' gedreht werden muss behufs Ueberwindung des Widerstandsmomentes M, das sich der Drehung des Steuerruders S um seine Axe A entgegensetzt. Insofern das Verhältniss $\frac{M'}{M}$ von der augenblicklichen Abweichung des Steuers aus seiner in Fig. 92 angenommenen mittleren Lage abhängt, werde letztere bei der Rechnung zu Grunde gelegt, und es sei φ' der Drehungswinkel der Schraube, der einem sehr kleinen Drehungswinkel $= \varphi$ des Steuers aus jener mittleren Lage entspricht. Es ist dann M' dadurch bestimmt, dass die aufgewendete Arbeit $M'\varphi'$ gleich sein muss der Nutzwiderstandsarbeit $M\varphi +$ den entsprechenden Arbeiten der verschiedenen Reibungswiderstände. Was letztere betrifft, so mag es genügen, ausser der Reibung des Schraubenpaares D nur die Spurzapfenreibung des Drehkörperpaares E' und die Tragzapfenreibungen der Drehkörperpaare B, B' zu berücksichtigen, da die Reibungsarbeiten der Paare C und F wegen Geringfügigkeit der betreffenden relativen Wege, die des Drehkörperpaares A und des Cylinderpaares E wegen Geringfügigkeit des Druckes von untergeordneter Grösse sind. Ist aber, wie ferner angenommen werde, die Länge $AB = AB' = a$ nur klein gegen die Längen AC und AF, so dass ACB und AFB' wenig veränderliche kleine Winkel sind und der axiale Druck zwischen den Elementen des Schraubenpaares $D =$ dem axialen Drucke in der Spurzapfenfläche des Paares $E' =$ den zu den Zapfenaxen B und B' senkrechten Drucken dieser Tragzapfen $= \frac{1}{2}\frac{M}{a}$ gesetzt werden kann, so ist die Reibungsarbeit des Schraubenpaares D

$$= \frac{1}{2}\frac{M}{a} r\,[tg\,(\alpha + \varrho) - tg\,\alpha]\,\varphi',$$

unter r den mittleren Gewindehalbmesser, α den mittleren Steigungswinkel und ϱ den betreffenden Reibungswinkel verstanden, ferner die Arbeit der Spurzapfenreibung des Paares E'

$$= \mu' . \frac{1}{2}\frac{M}{a} r'\varphi',$$

wenn r' den mittleren Radius der betreffenden Reibungsfläche bedeutet, und endlich die Summe der Reibungsarbeiten an den Zapfen B und B', wenn deren Radien $= b$ sind und der betreffende Reibungscoefficient $= \mu'$ ist,

$$= \mu' \frac{M}{a} b\varphi,$$

da die Aenderungen der Winkel ABC und $AB'D$ absolut genommen $= \varphi$ gesetzt werden können. Somit ist:

$$M'\varphi' = M\varphi + \frac{1}{2}\frac{M}{a} r \left[tg\,(\alpha + \varrho) - tg\,\alpha\right] \varphi' + \mu' \cdot \frac{1}{2}\frac{M}{a} r'\varphi' + \mu' \frac{M}{a} b\varphi$$

und folgt daraus durch Division mit $M\varphi'$, da die relative Axialbewegung der Elemente des Schraubenpaares unter obiger Voraussetzung, dass ACB und AFB' kleine Winkel sind,

$$r\varphi'\, tg\,\alpha = 2\,a\varphi, \text{ also } \frac{\varphi}{\varphi'} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\, tg\,\alpha$$

gesetzt werden kann:

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg\,(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r} + \mu' \frac{b}{a}\, tg\,\alpha\right].$$

Dieser Ausdruck, in welchem $\frac{r'}{r}$ ein unechter, $\frac{b}{a}$ ein kleiner echter Bruch ist, lässt erkennen, dass auch die Reibungen der Paare B, B' von nur untergeordneter Bedeutung im Vergleich mit den Reibungen der Paare D und E' sind, dass also ohne wesentlichen Fehler zu setzen ist:

$$\frac{M'}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg\,(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Der $\varrho = 0$ und $\mu' = 0$ entsprechende Werth M'_0 von M' ergiebt sich aus der Gleichung:

$$\frac{M'_0}{M} = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\, tg\,\alpha$$

und ist also der Wirkungsgrad des Getriebes:

$$\eta = \frac{M'_0}{M} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,(\alpha + \varrho) + \mu' \frac{r'}{r}}, \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

Z. B. mit den oben angenommenen Werthen: $\alpha = 5^0\,12'$, $\varrho = 5^0\,43'$, $\mu' = 0{,}1$ und mit $\frac{r'}{r} = 1{,}2$ findet man

$$M' = 0{,}16\,\frac{r}{a} M \text{ und } \eta = 0{,}29.$$

Dem Getriebe kommt die Eigenschaft der Selbstsperrung zu, insofern das Steuer nicht von selbst in die Mittellage zurückkehrt, wenn das Kraftmoment M' zu wirken aufhört, sondern ein umgekehrt drehendes Kraftmoment:

$$M'_1 = \frac{1}{2}\frac{r}{a}\left[tg\,(\varrho - \alpha) + \mu' \frac{r'}{r}\right]$$

dazu erforderlich ist, das im vorliegenden Falle $= 0{,}41\ M$ gefunden wird.