Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

II. Reibung von Drehkörperpaaren; Zapfenreibung gewissen Werth nicht überschreitet. Denn mit $tg\,\sigma = x$ und $tg\,\varrho = \mu$ folgt aus Gl. (5):

$$\eta = x\left(\frac{1-\mu x}{\mu + x} - \mu\right) = \frac{(1-\mu^2)x - 2\mu x^2}{\mu + x}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{(\mu + x)(1-\mu^2 - 4\mu x) - (1-\mu^2)x + 2\mu x^2}{(\mu+x)^2}$$

$$= \mu\frac{1-\mu^2-4\mu x - 2x^2}{(\mu+x)^2},$$

mit $x < \mu$ folglich $\qquad \dfrac{d\eta}{dx} > \mu\,\dfrac{1-7\mu^2}{(\mu+x)^2}$

und somit $\dfrac{d\eta}{dx}$ positiv, sofern nur $\mu < \sqrt{\dfrac{1}{7}}$, d. i. $\mu < 0{,}38$ ist.

Der grösstmögliche Werth, den η haben kann, wenn $\mu < 0{,}38$ (ungefähr $\varrho < 21^0$) und $\sigma < \varrho$ ist, ergiebt sich aus Gl. (5) mit $\sigma = \varrho = arctg\,\mu$:

$$max\,\eta = \mu\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu} - \mu\right) = \frac{1-3\mu^2}{2}.$$

II. Reibung von Drehkörperpaaren; Zapfenreibung.*

§. 69. Allgemeine Principien ihrer Berechnung.

Die Zapfen (Wellzapfen), nämlich die Theile rotirender Wellen, mit denen sie in den Lagern gestützt und damit zu einem Drehkörperpaare gepaart sind, können unterschieden werden in Spurzapfen und Tragzapfen, jenachdem der Zapfendruck P, d. i. der resultirende Druck zwischen Zapfen und Lager in die Zapfenaxe (Wellenaxe) fällt oder sie rechtwinklig schneidet; bei anders gerichtetem Zapfendrucke würde derselbe in zwei Componenten zerlegt werden können, beziehungsweise längs der Axe und senkrecht dazu gerichtet, und der Zapfen dann diesen Componenten entsprechend zugleich den Charakter als Spur- und als Tragzapfen haben. In allen Fällen handelt es sich um die Berechnung des Reibungsmomentes M in Bezug auf die Axe, das der relativen Drehung des Zapfens gegen das Lager um diese Axe entspricht. Dieses Moment, das auch als Grösse einer am Hebelarme = 1 wirkenden Kraft zu betrachten ist, giebt bei Multiplication mit $2\,\pi$ die Reibungsarbeit pro Umdrehung, bei Multiplication mit

* Siehe: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 200.

der Winkelgeschwindigkeit der Welle dagegen die Reibungsarbeit pro Zeiteinheit, d. i. die Arbeitstärke der Zapfenreibung.

Die Reibungsfläche $= F$ (Berührungsfläche zwischen Zapfen und Lagerpfanne) ist irgend eine Umdrehungsfläche. Ihre Meridianlinie sei auf rechtwinkelige Coordinatenaxen der x und y bezogen so, dass die x-Axe in der Zapfenaxe liegt; a und b seien die zwei äussersten Werthe von y, d. h. die Radien der die Reibungsfläche begrenzenden Parallelkreise. Ist ferner p der specifische Normaldruck in einem Punkte der Reibungsfläche und μ der Reibungscoefficient, so ist die Reibung in einem Flächenelemente $dF = \mu p\, dF$ und ihr Moment in Bezug auf die Axe $= \mu p\, y\, dF$, also

$$M = \mu \int p y\, dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1).$$

Darin ist p an die Bedingung gebunden, dass die Summe der im Sinne des Zapfendruckes P genommenen Componenten der elementaren Normaldrucke $= P$, also

$$\int p \cos\varphi\, dF = P \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

sein muss, das Integral wie das vorige über die ganze Reibungsfläche ausgedehnt gedacht, und unter φ den Winkel zwischen den Richtungen von p und P verstanden.

Damit indessen p durch Gl. (2) bestimmt sei und dann auch die Integration von Gl. (1) bei gegebener Gestalt der Reibungsfläche ausgeführt werden könne, muss in Betreff des Vertheilungsgesetzes des Normaldruckes in der Fläche F eine Annahme gemacht werden. Die einfachste solche Annahme besteht darin, p als Constante vorauszusetzen, womit sich ergiebt:

$$M = \mu p \int y\, dF \text{ mit } p = \frac{P}{\int \cos\varphi\, dF} = \frac{P}{F'} \quad \ldots\ldots \quad (3),$$

unter F' die Projection der Reibungsfläche F auf eine zur Richtung von P senkrechte Ebene verstanden. Diese Annahme, die zugleich einen constanten Werth des nach P gerichteten Druckes in der Projection F', und zwar $= p$ pro Flächeneinheit von F' zur Folge hat, ist in Ermangelung genügender Anhaltspunkte für eine andere in der That am natürlichsten für einen neuen Zapfen oder einen solchen, der nur zeitweilig in relativer Drehung gegen das Lager befindlich und deshalb keiner merklichen Abnutzung unterworfen ist, indem dann thatsächlich die Druckvertheilung in der Berührungsfläche von elastischen Deformationen und von zufälligen Abweichungen der Zapfen- und Lageroberfläche von ihrer (bei $P = 0$) vorausgesetzten Congruenz, überhaupt von Umständen abhängt, die sich einer zutreffenden Beurtheilung und Berücksichtigung bei der in Rede stehenden Rechnung entziehen. Handelt es sich aber um einen

Zapfen, der sich in anhaltender Rotation im Lager befindet, d. h. um einen solchen, der mit Rücksicht auf die dann stattfindende merkliche Abnutzung beider Theile als eingelaufener Zapfen bezeichnet werde, so ist das Vertheilungsgesetz von p in der Reibungsfläche wesentlich abhängig von dem Gesetze, nach dem diese Abnutzung stattfindet, wie folgende Ueberlegung erkennen lässt.

Die Grösse der Reibung in einem Punkte der Reibungsfläche ist proportional p, also die Reibungsarbeit in der Zeiteinheit proportional dem Producte aus p und der relativen Geschwindigkeit, mit welcher im fraglichen Punkte die beiden sich berührenden Flächen an einander gleiten. Diese Geschwindigkeit ist aber proportional dem Abstande y des Punktes von der Rotationsaxe, mithin die Reibungsarbeit in der Zeiteinheit proportional py. Sie hat die Verwandlung eines ihr an Grösse gleichen äusseren in inneres theils freies, theils gebundenes Arbeitsvermögen zur Folge, nämlich theils Erwärmung des Zapfens und seines Lagers, theils Abnutzung (Ueberwindung der Cohäsion in oberflächlichen Schichten) dieser beiden Elemente. In welchem Verhältnisse diese Theilung der Reibungsarbeit in freies und gebundenes inneres Arbeitsvermögen stattfindet, ist hier gleichgültig, wesentlich dagegen die Frage, ob das Verhältniss in allen Elementen der Reibungsfläche dasselbe sei oder nicht. Sofern es aber ohne Zweifel hauptsächlich vom beiderseitigen Material und von der Oberflächenbeschaffenheit der Körper abhängt und diese beiden Umstände in allen Elementen der Reibungsfläche gleich, auch andere etwa influirende Umstände wenigstens nicht sehr verschieden sind, so ist die zunächst liegende Annahme die wahrscheinlich zutreffendste, dass in allen Elementen der Reibungsfläche ein gleicher verhältnissmässiger Theil der ganzen Reibungsarbeit zur Abnutzung verwendet werde, der demnach pro Zeiteinheit auch proportional py ist.

Ist a die während einer gewissen Zeit in einem Punkte der Reibungsfläche erfolgende resultirende Abnutzung, normal zur Fläche gemessen, so besteht dieselbe aus zwei Theilen: der Abnutzung a_1 des Zapfens und derjenigen a_2 des Lagers, und die zur Abnutzung a verwendete Arbeit ist proportional $m_1 a_1 + m_2 a_2$, unter m_1 und m_2 Constante verstanden, die vom Material des Zapfens resp. der Lagerpfanne abhängen. Die Grösse des Verhältnisses $\frac{a_1}{a_2}$, welches wegen der im Allgemeinen grösseren Härte des Zapfens < 1 sein wird, ist hier gleichgültig; wesentlich dagegen ist wieder die Frage, ob es in allen Punkten der Reibungsfläche gleich gross sei, und diese Frage scheint auch hier bejaht werden zu müssen, weil das fragliche

Verhältniss im Wesentlichen kaum von anderen Umständen als von der specifischen Abnutzungsfähigkeit beider Materialien abhängig sein kann. Setzt man demnach $a_1 = \alpha_1 a$ und $a_2 = \alpha_2 a$, unter α_1 und α_2 wieder zwei vom Zapfen- resp. Lagermaterial abhängige Constante verstanden, so wird die zur resultirenden Abnutzung a erforderliche Arbeit

proportional $(m_1 \alpha_1 + m_2 \alpha_2) a$, also proportional a,

und da die dazu nach Obigem in der Zeiteinheit verwendbare Arbeit auch proportional py ist, so ergiebt sich die resultirende normale Abnutzung pro Zeiteinheit in jedem Punkte der Reibungsfläche proportional py.

Wäre nun p nach der gewöhnlichen Annahme in allen Punkten der Reibungsfläche gleich gross, auch bei einem eingelaufenen, in der Abnutzung begriffenen Zapfen, so wäre letztere in den verschiedenen Punkten der Reibungsfläche normal dazu gemessen lediglich proportional y, was offenbar unmöglich ist. Der Spurzapfen einer stehenden Welle und seine Lagerpfanne (Spurplatte) z. B., die sich ursprünglich in einer ebenen Fläche berührten, müssten sich dann unter der Einwirkung des nach der Axe gerichteten Druckes P und der entsprechenden Reibung so abnutzen, dass sie durch Kegelflächen begrenzt werden, die sich nur in ihren Mittelpunkten (Spitzen) berühren; der cylindrische Tragzapfen einer liegenden Welle und seine Pfanne würden unter der Einwirkung des zur Axe rechtwinkligen Druckes P bei der Abnutzung zwar cylindrisch bleiben, aber während der Zapfen einen kleineren Radius erhielte, würde die Pfanne nach einem grösseren abgerundet werden, so dass beide sich nachher nur in einer geraden Linie berührten. In jenem Punkte des stehenden resp. dieser Linie des liegenden Zapfens müsste nun der ganze Druck concentrirt sein im Widerspruche mit der Annahme selbst, die dieses Resultat herbeigeführt hat, abgesehen davon, dass schon die Vorstellung des Ueberganges zu dem fraglichen Zustande stellenweiser Entfernung der Oberflächen von einander, nachdem sie ursprünglich in allseitiger Berührung waren, absurd ist; wenn auch der anfängliche Normaldruck an einer gewissen Stelle in Folge verhältnissmässig grösserer Abnutzung daselbst abnehmen mag, so kann er doch nicht bis Null abnehmen, weil damit die Abnutzung an dieser Stelle aufhörte, was bei der fortschreitenden Abnutzung an anderen Stellen unmöglich ist.

Hieraus ist ersichtlich, dass mit der Abnutzbarkeit des Zapfens und seines Lagers nicht nur die Annahme eines constanten Werthes von p in Widerspruch wäre, sondern dass zur Berechnung des Reibungsmomentes eingelaufener Zapfen überhaupt keine Annahme hinsichtlich der Vertheilung dieses Normaldruckes gemacht werden darf. Die Abnutzung selbst bedingt eben solche Vertheilung, die sich aus der Erwägung ergiebt, dass, indem sich der Zapfen im Sinne des Druckes P in die Lagerpfanne einfrisst, die Berührung in allen Punkten stets erhalten bleibt, woraus folgt, dass die resultirende Abnutzung, im Sinne von P gemessen, für alle Punkte der Reibungsfläche gleich gross sein muss. Dann ist aber die normale Abnutzung proportional $\cos\varphi$, und da sie nach Obigem auch proportional py ist, so folgt:

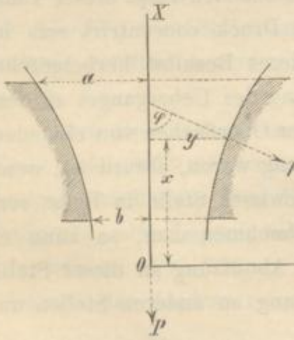
$$\frac{py}{\cos\varphi} = Const. = C \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Die Substitution des hieraus sich ergebenden Ausdruckes von $p = \frac{C\cos\varphi}{y}$ in Gl. (1) liefert für M zunächst einen Ausdruck, der die Constante C enthält, deren Werth dann aus Gl. (2) durch Substitution von $p = \frac{C\cos\varphi}{y}$ zu ermitteln ist:

$$M = \mu\, C \int \cos\varphi\, dF = \mu\, CF' \text{ mit } C = \frac{P}{\int \frac{\cos^2\varphi}{y}\, dF} \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

§. 70. Reibungsmoment von Spurzapfen.

Fig. 89.



Die Reibungsfläche wird hier am einfachsten in ringförmige Flächenelemente dF zerlegt durch Ebenen, die in den Abständen dx normal zur x-Axe sind; indem sie die Meridianlinien in ihre Bogenelemente ds zerlegen, ist

$$dF = 2\pi y\, ds.$$

A. Neuer Spurzapfen.

Durch Substitution des vorstehenden Ausdruckes von dF sowie mit

$$F' = \pi(a^2 - b^2)$$

ergiebt sich nach Gl. (3) des vorigen Paragraphen das Reibungsmoment:

$$M = \frac{2\mu P}{a^2 - b^2} \int y^2\, ds \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

woraus dann leicht die Werthe von M für besondere Fälle zu erhalten sind.

1) Für einen abgestumpft-kegelförmigen Zapfen ohne Reibung an der Endfläche πb^2 erhält man mit $ds = \frac{dy}{\sin\alpha}$, unter α den Winkel zwischen Seitenlinie und Axe der Kegelfläche verstanden, und indem das Integral in Gl. (1) zwischen den Grenzen $y = b$ und $y = a$ genommen wird:

$$M = \frac{2}{3}\mu P\, \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2}\, \frac{1}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

insbesondere für einen ebenflächig-ringförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P\, \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

für einen conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P\, \frac{a}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

und für einen ebenflächig-kreisförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$ und $b = 0$:

$$M = \frac{2}{3}\mu P a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

2) Ist der abgestumpft-kegelförmige Zapfen mit Reibung an der Endfläche πb^2 behaftet, so mag zwar die Annahme eines constanten, also namentlich auch für die conische Umfläche und die ebene Endfläche gleich grossen Werthes von p in erhöhtem Grade unsicher, weil eine kaum erreichbare Genauigkeit der Bearbeitung voraussetzend sein; wird sie aber gleichwohl beibehalten, so ergiebt sich M als Summe von zwei Bestandtheilen, von denen der erste aus Gl. (5) mit $\frac{b^2}{a^2}P$ statt P und b statt a, der zweite aus Gl. (2) mit $\frac{a^2 - b^2}{a^2}P$ statt P hervorgeht:

$$M = \frac{2}{3}\frac{\mu P}{a^2}\left(b^3 + \frac{a^3 - b^3}{\sin\alpha}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

3) Ist bei einem kugelförmigen Zapfen r der Radius der Kugelfläche, α das Maximum von φ, nämlich der spitze Winkel zwischen der x-Axe (Fig. 89) und den nach den äussersten Punkten der Reibungsfläche gezogenen Radien, so folgt aus Gl. (1) mit

$$a = r\sin\alpha,\quad b = 0,\quad y = r\sin\varphi,\quad ds = r\,d\varphi:$$

$$M = \frac{2\,\mu P}{r^2 \sin^2\alpha}\, r^3 \int_0^\alpha \sin^2\varphi\, d\varphi = \mu P r\, \frac{\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha} \quad \ldots\ldots (7),$$

insbesondere z. B. für $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $M = \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)\mu P r = \frac{4}{7}\mu P r$ . . . . . (8),

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M = \frac{\pi}{2}\mu P r = \frac{11}{7}\mu P r$ . . . . (9).

4) Für den Schiele'schen Zapfen, dessen Meridianlinie dadurch charakterisirt ist, dass ihre Tangenten (zwischen den Durchschnittspunkten mit der x-Axe und den Berührungspunkten gemessen) gleiche Länge t haben, ist $ds = \frac{t}{y}dy$, also

$$M = \frac{2\mu P}{a^2 - b^2} t \int_b^a y\,dy = \mu P t \quad \ldots\ldots\ldots (10),$$

somit unabhängig von der Länge des vom Lager umschlossenen Zapfenstücks.

B. Eingelaufener Spurzapfen.

Das Reibungsmoment sei zum Unterschiede hier mit M' bezeichnet; für den kegelförmigen und den kugelförmigen Zapfen behalte α die oben angegebenen Bedeutungen. Aus Gl. (5) im vorigen §. folgt dann mit

$$F' = \pi(a^2 - b^2),\quad dF = 2\pi y\,ds,\quad \cos\varphi = \frac{dy}{ds}:$$

$$M' = \mu C \pi (a^2 - b^2) \text{ mit } C = \frac{P}{2\pi \int \cos\varphi\,dy},$$

also

$$M' = \frac{1}{2}\mu P \frac{a^2 - b^2}{\int \cos\varphi\,dy} \quad \ldots\ldots\ldots (11).$$

1) Für den abgestumpft-kegelförmigen Zapfen ohne Reibung an der Endfläche ergiebt sich hieraus mit

$\cos\varphi = \sin\alpha$, also $\int \cos\varphi\,dy = (a - b)\sin\alpha$:

$$M' = \frac{1}{2}\mu P \frac{a + b}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (12),$$

insbesondere für den ebenflächig-ringförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$:

$$M' = \frac{1}{2}\mu P (a + b) \quad \ldots\ldots\ldots (13),$$

für den conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2}\mu P \frac{a}{\sin\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots (14),$$

für den ebenflächig-kreisförmigen Zapfen mit $\alpha = 90^0$ und $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15).$$

In den zwei letzten Fällen vermindert sich das Reibungsmoment durch die Abnutzung, wie die Vergleichung mit den Ausdrücken (4) und (5) erkennen lässt, im Verhältnisse:

$$M : M' = \frac{2}{3} : \frac{1}{2} = 1 : \frac{3}{4}.$$

2) Sind bei dem abgestumpft-kegelförmigen Zapfen mit Reibung an der Endfläche P_1 und P_2 die Bestandtheile von P, die beziehungsweise die Reibungen an der Endfläche und der kegelförmigen Umfläche verursachen, M_1 und M_2 die bezüglichen Reibungsmomente, so ist

$$M_1 = \frac{1}{2} \mu P_1 b \text{ nach Gl. (15)}, \quad M_2 = \frac{1}{2} \mu P_2 \frac{a+b}{\sin\alpha} \text{ nach Gl. (12)},$$

und da diese Momente sich wie die Inhalte der gleichzeitig von beiden Flächen aus abgeschliffenen Körperschalen verhalten müssen:

$$M_1 : M_2 = P_1 b : P_2 \frac{a+b}{\sin\alpha} = b^2 : a^2 - b^2,$$

so folgt daraus $P_1 : P_2 = b : (a-b) \sin\alpha$,

$$P_1 = \frac{b}{b + (a-b)\sin\alpha} P, \quad P_2 = \frac{(a-b)\sin\alpha}{b + (a-b)\sin\alpha} P,$$

also
$$M' = \frac{1}{2} \mu \left(P_1 b + P_2 \frac{a+b}{\sin\alpha} \right) = \frac{1}{2} \mu P \frac{a^2}{b + (a-b)\sin\alpha} \quad \ldots \quad (16).$$

3) Für den kugelförmigen Zapfen ist wegen $y = r \sin\varphi$:

$$dy = r \cos\varphi \, d\varphi, \quad \int \cos\varphi \, dy = r \int_0^\alpha \cos^2\varphi \, d\varphi = r \frac{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{2},$$

also nach Gl. (11) mit $a = r \sin\alpha$, $b = 0$:

$$M' = \frac{1}{2} \mu P \frac{r^2 \sin^2\alpha}{r \dfrac{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha}{2}} = \mu P r \frac{\sin^2\alpha}{\alpha + \sin\alpha\cos\alpha} \quad \ldots \quad (17),$$

insbesondere für $\alpha = \frac{\pi}{4}$: $M' = \frac{2}{\pi + 2} \mu P r = \frac{7}{18} \mu P r$ .. (18),

für $\alpha = \frac{\pi}{2}$: $M' = \frac{2}{\pi} \mu P r = \frac{7}{11} \mu P r$ .... (19).

Die Vergleichung mit obigen Ausdrücken (8) und (9) lässt erkennen, dass

$$\text{für } \alpha = \frac{\pi}{4} \text{ sich } M : M' = 1 : \frac{4}{\pi^2 - 4} = 1 : 0{,}68$$

$$\text{für } \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ sich } M : M' = 1 : \frac{4}{\pi^2} = 1 : 0{,}41$$

verhält, dass also namentlich bei diesem letzteren kugelförmigen Spurzapfen, dessen Reibungsfläche eine halbe Kugelfläche ist, durch das Einlaufen eine Verminderung des Reibungsmoments auf weniger als die Hälfte des ursprünglichen Werthes zu erwarten ist.

4) Bei dem Schiele'schen Zapfen ist

$$\int \cos\varphi\, dy = \int \frac{y}{t}\, dy = \frac{a^2 - b^2}{2\,t},$$

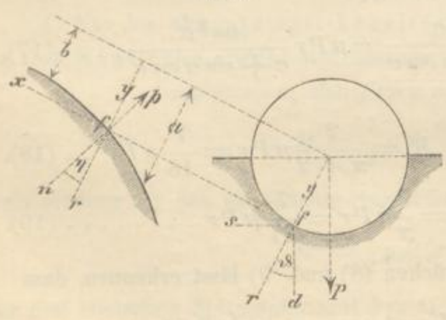
nach Gl. (11) somit $M' = \mu P t$ . . . . (20).

Dieser Zapfen hat also die bemerkenswerthe Eigenthümlichkeit, dass sein Reibungsmoment sich durch die Abnutzung nicht verändert, indem der Normaldruck immer gleichförmig in der Berührungsfläche vertheilt bleibt.

§. 71. Reibungsmoment von Tragzapfen.

Der Zapfen sei ringsum vom Lager umschlossen, so dass als Reibungsfläche F der Theil seiner Oberfläche zu rechnen ist, der (ausser von den Parallelkreisen mit den Radien a und b) von der zum Zapfendrucke P senkrechten Meridianebene begrenzt wird, indem sie von letzterer aus im Sinne von P gelegen ist. Der Inhalt jenes Meridianschnittes zwischen den Durchmessern $2\,a$ und $2\,b$ ist dann $= F' =$ der Projection von F auf eine zur Richtung von P senkrechte Ebene. Die Reibungsfläche F ist hier in Elemente dF mit zwei unendlich kleinen Dimensionen zu zerlegen, und zwar am natürlichsten durch eine Schaar von Meridianebenen nebst einer Schaar von Ebenen, die in den Abständen dx, den Bogenelementen ds der Meridianlinie entsprechend, zur Zapfenaxe normal sind.

Fig. 90.



Vom Punkte f (Fig. 90) eines so erhaltenen Flächenelementes dF aus werde die Gerade

fn normal zur Reibungsfläche,
fr im Sinne des Radius des betreffenden Parallelkreises,
fd im Sinne des Zapfendruckes P,
fx parallel der Zapfenaxe

gezogen und der Winkel nfr mit η, rfd mit ϑ bezeichnet, während der Winkel $nfd = \varphi$ ist. Es ist dann

$$\cos\varphi = \cos\eta\,\cos\vartheta \text{ und } dF = y\,d\vartheta\,ds \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Wenn ein solcher Tragzapfen nicht cylindrisch ist, so kommt ausser dem Reibungsmoment M noch ein anderer Umstand in Betracht. Denkt man nämlich die elementaren Normalpressungen der Reibungsfläche in je zwei Componenten zerlegt nach den Richtungen rf und xf, erstere weiter in je zwei Componenten nach df und senkrecht dazu nach sf, so sind (unter entsprechender Compression des Zapfens) die nach df gerichteten Druckcomponenten mit P, die nach sf gerichteten unter sich im Gleichgewichte. Die nach xf gerichteten Componenten aber setzen sich zu einer Resultanten $A =$ ihrer Summe:

$$A = \int p \sin\eta \, dF \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

zusammen, womit der Zapfen aus dem Lager herauszugleiten strebt, oder womit die ganze Welle im Sinne ihrer Axe in das Lager am anderen Ende gedrückt wird, wenn nicht dieser andere Zapfen in gleicher Weise einen entgegengesetzt gerichteten axialen Druck A_1 verursacht, so dass die Welle thatsächlich nur mit der Differenz beider Kräfte A, A_1 gegen das eine oder andere Lager gedrückt wird; der Zapfen des letzteren ist dann mit einem zusätzlichen Reibungsmoment als Spurzapfen behaftet, das nach der bezüglichen Formel im vorigen §. zu berechnen ist, indem darin für P jene Differenz der Kräfte A, A_1 substituirt wird.

A. Neuer Tragzapfen.

Mit $dF = y\, d\vartheta\, ds$ ergiebt sich für denselben aus Gl. (3) in §. 69:

$$M = \mu \frac{P}{F'} \iint y^2 \, d\vartheta \, ds = \mu \frac{P}{F'} \int y^2 \, ds \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\vartheta = \pi \mu \frac{P}{F'} \int y^2 \, ds \quad . . (3)$$

sowie nach Gl. (2):

$$A = \frac{P}{F'} \iint y \sin\eta \, d\vartheta \, ds$$

oder wegen $\sin\eta \, ds = dy$:

$$A = \frac{P}{F'} \int y\, dy \int d\vartheta = \pi \frac{P}{F'} \int y \, dy = \frac{\pi}{2} P \frac{a^2 - b^2}{F'} \quad \ldots . (4).$$

1) Für einen cylindrischen Zapfen vom Radius r und von der Länge l (insoweit er vom Lager umschlossen wird) ist

$$a = b = y = r, \quad F' = 2rl, \quad \int y^2 \, ds = r^2 l,$$

also nach Gl. (3) und (4):

$$M = \frac{\pi}{2} \mu P r \text{ und } A = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

2) Wenn bei dem **kegelförmigen Zapfen** wieder α den Winkel zwischen Seitenlinie und Axe bedeutet, so ist

$$F' = (a+b)\,l = (a+b)\,\frac{a-b}{tg\,\alpha} = \frac{a^2-b^2}{tg\,\alpha}$$

und
$$\int y^2\,ds = \frac{1}{sin\,\alpha}\int y^2\,dy = \frac{a^3-b^3}{3\,sin\,\alpha},$$

also
$$M = \frac{\pi}{3}\mu P\,\frac{a^3-b^3}{a^2-b^2}\,\frac{1}{cos\,\alpha} \text{ und } A = \frac{\pi}{2}P\,tg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ (6).$$

Insbesondere für einen conischen Spitzzapfen ist $b=0$, also

$$M = \frac{\pi}{3}\mu P\,\frac{a}{cos\,\alpha} \quad \ldots\ldots\ (7).$$

3) Bei dem **Schiele'schen Zapfen** (siehe vorigen Paragraph) ist

$$ds = \frac{t}{y}\,dy, \text{ also } \int y^2\,ds = t\int y\,dy = t\,\frac{a^2-b^2}{2},$$

damit nach Gl. (3) und (4):

$$M = \frac{\pi}{2}\mu P t\,\frac{a^2-b^2}{F'};\quad A = \frac{M}{\mu t} \quad \ldots\ldots\ (8).$$

Für den Meridianschnitt F' erhält man:

$$F' = 2\int y\,dx = 2\int y\,cos\,\eta\,ds = 2\,t\int cos\,\eta\,dy$$

oder wegen $y = t\,sin\,\eta$, also $dy = t\,cos\,\eta\,d\eta$:

$$F' = 2\,t^2\int cos^2\eta\,d\eta = t^2(\eta + sin\,\eta\,cos\,\eta),$$

zu nehmen zwischen den Grenzen $\eta = arc\,sin\,\frac{b}{t}$ und $\eta = arc\,sin\,\frac{a}{t}$, also

$$F' = t^2\left(arc\,sin\,\frac{a}{t} - arc\,sin\,\frac{b}{t} + \frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}} - \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}}\right) \quad (9).$$

B. Eingelaufener Tragzapfen.

Die Grössen M und A seien zum Unterschiede hier mit M' und A' bezeichnet. Nach Gl. (5), §. 69, sowie mit Rücksicht auf die obigen Gleichungen (1) und wegen $cos\,\eta\,ds = dx$ ist dann

$$\frac{P}{C} = \int\frac{cos^2\varphi}{y}\,dF = \iint cos^2\eta\,cos^2\vartheta\,d\vartheta\,ds = \int cos\,\eta\,dx\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} cos^2\vartheta\,d\vartheta$$

$$C = \frac{2}{\pi}\,\frac{P}{\int cos\,\eta\,dx}$$

$$M' = \mu C F' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{F'}{\int \cos\eta\, dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (10),$$

ferner, da nach Gl. (4) in §. 69:

$$p = C \frac{\cos\varphi}{y} = C \frac{\cos\eta \cos\vartheta}{y}$$

ist, nach Gl. (2) mit $dF = y\, d\vartheta\, ds$ und $\cos\eta\, ds = dx$:

$$A' = C \iint \sin\eta \cos\eta \cos\vartheta\, d\vartheta\, ds = C \int \sin\eta\, dx \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta = 2\, C \int \sin\eta\, dx$$

oder mit Rücksicht auf obigen Ausdruck von C:

$$A' = \frac{4}{\pi} P \frac{\int \sin\eta\, dx}{\int \cos\eta\, dx} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (11).$$

Hiernach und mit den vorigen Bedeutungen der Buchstaben r, l, α findet man

1) für den cylindrischen Zapfen wegen $\eta = 0$ und $F' = 2\, rl$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{2\, rl}{l} = \frac{4}{\pi} \mu P r;\quad A' = 0 \quad \ldots \ldots \ldots (12).$$

Die Vergleichung mit obigem Ausdrucke (5) ergiebt eine Abnahme des Reibungsmoments in Folge der Abnutzung im Verhältnisse:

$$M : M' = 1 : \frac{8}{\pi^2} = 1 : 0{,}81.$$

2) Für den kegelförmigen Zapfen wird mit $\eta = \alpha$ und $F' = (a + b)\, l$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{a + b}{\cos\alpha};\quad A' = \frac{4}{\pi} P\, tg\, \alpha \quad \ldots \ldots \ldots (13),$$

insbesondere für den conischen Spitzzapfen mit $b = 0$:

$$M' = \frac{2}{\pi} \mu P \frac{a}{\cos\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (14)$$

und nach Gl. (7): $\quad M : M' = 1 : \frac{6}{\pi^2} = 1 : 0{,}61.$

3) Bei dem Schiele'schen Zapfen ist

$$dx = cotg\, \eta\, dy \text{ und } y = t \sin\eta, \text{ also } dy = t \cos\eta\, d\eta$$

und
$$\int \cos\eta\, dx = t \int \frac{\cos^3\eta}{\sin\eta} d\eta.$$

Darin ist

$$\int \frac{\cos^3\eta}{\sin\eta} d\eta = \int (1 - \sin^2\eta) \frac{d \sin\eta}{\sin\eta} = \ln \sin\eta - \frac{1}{2} \sin^2\eta$$

zwischen den Grenzen $\sin\eta = \frac{b}{t}$ und $\sin\eta = \frac{a}{t}$ zu nehmen, also

$$\int \cos\eta\, dx = t\left(\ln\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{t^2}\right).$$

Somit ergiebt sich nach Gl. (10) mit Rücksicht auf den Ausdruck (9) von F':

$$M' = \frac{2}{\pi}\mu P t \frac{\arcsin\frac{a}{t} - \arcsin\frac{b}{t} + \frac{a}{t}\sqrt{1-\frac{a^2}{t^2}} - \frac{b}{t}\sqrt{1-\frac{b^2}{t^2}}}{\ln\frac{a}{b} - \frac{1}{2}\frac{a^2-b^2}{t^2}} \quad (15).$$

Ferner ist:

$$\int \sin\eta\, dx = \frac{1}{t}\int y\, dx = \frac{1}{2}\frac{F'}{t}$$

und deshalb nach Gl. (10) und (11):

$$A' = \frac{2}{\pi}\frac{P}{t}\frac{F'}{\int \cos\eta\, dx} = \frac{M'}{\mu t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

analog obiger Beziehung (8) zwischen A und M.

§. 72. Versuche über Zapfenreibung.

Die betreffenden Versuche beziehen sich ausschliesslich auf cylindrische Tragzapfen. Wird, wie üblich, das Reibungsmoment eines solchen vom Radius r bei dem Zapfendruck P:

$$M = \mu' P r$$

gesetzt, so ergab sich nach älteren Versuchen, insbesondere von Morin, für eiserne Zapfen in Lagern von Gusseisen oder Bronze und bei Anwendung verschiedener Schmiermittel (Oel, Talg, Schweineschmalz) im Durchschnitt etwa:

$$\mu' = 0{,}06 \text{ bis } 0{,}08$$

je nach der mehr oder weniger sorgfältigen Abwartung bezüglich auf Schmierung.

Neuere Versuche haben diesen Coefficienten meistens erheblich kleiner und zugleich in höherem Grade von den Umständen abhängig ergeben. Bei Versuchen von Waltjen und von Rühlmann mit der Waltjen'schen Reibungswage (sowie auch bei späteren Versuchen von Dr. Lunge) wurde er für Stahlzapfen meistens zwischen 0,01 und 0,04 liegend gefunden. Zugleich ergab sich eine auffallende Abhängigkeit des Coefficienten von der Peripheriegeschwindigkeit v des Zapfens in der Weise, dass er bei einem gewissen Werthe von v (ungefähr 0,4 Mtr. pro Sec.) am kleinsten war und bei abnehmender Geschwindigkeit schneller, bei wachsender langsamer zunahm. Das Minimum von μ' wurde vom Material der Lagerpfanne, vom Schmieröl und vom specifischen Drucke abhängig gefunden, von letzterem übrigens in verschiedenem Sinne bei verschiedenartigen Lagerpfannen.

Durch Versuche über die Zapfenreibung von Eisenbahnwagenaxen, die in den Jahren 1861 und 1862 in der Eisenbahnwerkstätte zu Hannover von Kirchweger angestellt wurden, fand sich jene so eben erwähnte Abhängigkeit des Coefficienten μ' von der Geschwindigkeit nicht bestätigt. Bei Anwendung von Lagerpfannen aus Bronze, Hartblei oder Zinncomposition, geschmiert mit Rüböl oder Cohäsionsöl, zeigte sich μ' für 10 bis 360 Umdrehungen pro Minute fast gleich gross. Uebrigens wurde dieser Coefficient ganz auffallend klein gefunden, nur etwa $= 0{,}01$ für die Lagerpfannen aus Hartblei oder Zinncomposition resp. $= 0{,}014$ für Pfannen aus Bronze; doch gelten diese Werthe nur für grössere specifische Belastungen von etwa 20 bis 120 Kgr. pro Quadratcentim. Innerhalb dieser Grenzen hatte die Grösse der Belastung keinen erheblichen Einfluss; bei ihrer weiteren Abnahme bis etwa 2 Kgr. pro Quadratcentim. nahm aber μ' bis zum Dreifachen jener Werthe zu.

Wiederum wesentlich anders waren die Ergebnisse von Versuchen Hirn's. Bei der Unsicherheit, die hiernach mit Rücksicht auf die erhebliche Abweichung ihrer Resultate den seitherigen Versuchen über die Reibung cylindrischer Tragzapfen anhaftet, wird es rathsam sein, den Coefficienten μ' in der Regel nicht kleiner als 0,06 zu veranschlagen, oder den Reibungscoefficienten μ in den Formeln der vorigen Paragraphen wenigstens $= 0{,}04$, entsprechend:

$$\mu' = \frac{\pi}{2} . 0{,}04 = 0{,}063 \text{ nach §. 71, Gl. (5),}$$

$$\mu' = \frac{4}{\pi} . 0{,}04 = 0{,}051 \text{ nach §. 71, Gl. (12).}$$

§. 73. Beispiele.

1) Das Gewicht einer Turbine sammt Welle und einem darauf sitzenden Zahnrade sei $P = 2500$ Kgr. Wie gross ist der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die Reibung ihres ebenflächig-kreisförmigen Spurzapfens zu veranschlagen, wenn dessen Durchmesser $(2\,a) = 8$ Centim. ist (entsprechend einem specifischen Drucke in der Reibungsfläche von ungefähr

50 Kgr. pro Quadratcentim.), wenn ferner die Turbine 32 Umdrehungen in der Minute macht bei einem Aufschlagwasserquantum von 0,9 Cubikmtr. pro Secunde und bei 1,5 Mtr. Gefälle?

Der sogenannte absolute Effect, nämlich das dem Gefälle entsprechende Arbeitsvermögen des Aufschlagwassers pro Secunde ist

$$= 1000 \,.\, 0{,}9 \,.\, 1{,}5 = 1350 \text{ Meterkilogramm.}$$

Setzt man das Reibungsmoment:

$$M = 0{,}04\, Pa = 0{,}04 \,.\, 2500 \,.\, 0{,}04 = 4 \text{ Meterkilogramm,}$$

entsprechend $\mu = 0{,}06$ nach §. 70, Gl. (5)

resp. $\mu = 0{,}08$ nach §. 70, Gl. (15),

jenachdem der Zapfen als neu oder eingelaufen betrachtet wird, so ist, da die Winkelgeschwindigkeit

$$\omega = \frac{2\pi \,.\, 32}{60} = 3{,}35$$

ist, die Reibungsarbeit pro Secunde:

$$M\omega = 4 \,.\, 3{,}35 = 13{,}4 \text{ Meterkilogramm,}$$

nahe $= 1\,\%$ des absoluten Effects.

2) Der verhältnissmässige Arbeitsverlust, der bei einem Schubkurbelmechanismus (§. 39, Fig. 47) durch die Reibung verursacht wird, sei unter der Voraussetzung auszudrücken, dass die auf den Schieber c abwechselungsweise im Sinne AC und CA (Fig. 47) wirkende Kraft S von constanter Grösse ist. Dieser Mechanismus enthält drei Drehkörperpaare A, B, C, deren Reibungen wie bei cylindrischen Tragzapfen zu beurtheilen sind, und ausserdem das Prismenpaar D mit den Elementen c, d. Indem aber der Druck zwischen den Elementen des Paares A, nämlich der Zapfendruck in den Lagern der Kurbelwelle, in viel höherem Grade durch das Gewicht dieser Welle, als durch die übertragene Kraft verursacht zu werden pflegt, während die Reibungen des Kurbelzapfens B (Radius $= k$), des Schieberzapfens C (Radius $= s$) und des Schiebers in seiner Prismenführung umgekehrt vorzugsweise von der Kraft S herrühren, sollen hier nur die letzteren drei Reibungen, insoweit sie von S abhängig sind, in Betracht gezogen werden, um das Verhältniss m der Summe ihrer Arbeiten, die für eine halbe Umdrehung der Kurbel (dem Uebergange aus einer in die andere der Lagen AB_0, AB_1, Fig. 47, entsprechend) beziehungsweise mit B, C, D bezeichnet seien, zur gleichzeitigen Arbeit von S:

$$m = \frac{B + C + D}{S \,.\, 2a}$$

auszudrücken. Insofern die Drucke zwischen den Elementen der Paare B, C, D und somit die betreffenden Reibungen während der halben Kurbelumdrehung variabel sind, genügt es mit Rücksicht auf die Unsicherheit der Reibungscoefficienten, jene Veränderlichkeit nur näherungsweise zu berücksichtigen, etwa mit einer solchen Annäherung, wie sie der Vernachlässigung von λ^2 gegen 1 entspricht, unter λ das Verhältniss der Kurbellänge a zur Koppellänge b verstanden, das höchstens $=\frac{1}{4}$ zu sein pflegt. Mit dieser Annäherung kann, wenn, wie in §. 40 mit Bezug auf Fig. 47, der Winkel B_0AB mit α, ACB mit γ bezeichnet wird,

$$\gamma = tg\,\gamma = sin\,\gamma = \lambda\, sin\,\alpha$$

gesetzt werden und, wenn P, K die Componenten der Schubkraft S beziehungsweise normal zur Schieberbahn und im Sinne der Koppel CB bedeuten,

$$P = S\,tg\,\gamma = S\,\lambda\, sin\,\alpha,\quad K = \frac{S}{cos\,\gamma} = \frac{S}{\sqrt{1-\lambda^2 sin^2\alpha}} = S.$$

Mit der aus §. 72 hervorgehenden Bedeutung des Coefficienten μ' ist nun ein Elementarbestandtheil der Arbeit B:

$$dB = \mu' K k\, d(\alpha-\gamma) = \mu' S k\, d(\alpha-\gamma),$$

somit, da bei der halben Kurbelumdrehung sich der Winkel $ABC = \alpha - \gamma$ von 0 bis π ändert,

$$B = \mu' S k \pi.$$

Ferner ist, $d\gamma$ absolut verstanden:

$$dC = \mu' K s\, d\gamma = \mu' S s\, d\gamma,$$

also, da bei der halben Kurbelumdrehung γ von Null bis $max\,\gamma = max\,(\lambda\, sin\,\alpha) = \lambda$ zunimmt und dann wieder bis Null abnimmt,

$$C = 2\,\mu' S s\,\lambda.$$

Was endlich die Arbeit D betrifft, so kann, da der Ausdruck des Normaldruckes $P = S\lambda\, sin\,\alpha$ zwischen dem Schieber und seiner Gleitbahn schon den Factor λ enthält, der dem Drehungswinkel α der Kurbel entsprechende Schieberweg (§. 40, Gl. 3) einfach $= a\,(1 - cos\,\alpha)$, sein Differential $= a\, sin\,\alpha\, d\alpha$ gesetzt werden und somit, wenn μ den betreffenden Reibungscoefficienten bedeutet,

$$dD = \mu P a\, sin\,\alpha\, d\alpha = \mu S a \lambda\, sin^2\alpha\, d\alpha,$$

woraus sich durch Integration von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \pi$ ergiebt:

$$D = \mu S a \lambda \frac{\pi}{2}.$$

Hiernach ist:

$$m = \frac{B+C+D}{S\,.\,2a} = \left(\frac{\pi}{2}\frac{k}{a} + \lambda\frac{s}{a}\right)\mu' + \frac{\pi}{4}\lambda\mu.$$

Auf eine ebenso sorgfältige und wirksame Abwartung der Reibungsflächen, wie bei Zapfen in unbeweglichen Lagern, ist in Fällen der hier in Rede stehenden Art nicht zu rechnen, auch nicht auf Verminderung des Arbeitsverlustes durch das Einlaufen von Zapfen, sofern damit, wie hier, der wechselnden Kraftrichtung wegen ein zu periodischen Stössen Veranlassung gebender todter Gang verbunden ist. Setzt man deshalb etwa $\mu = 0{,}07$ und $\mu' = \frac{\pi}{2}\mu = 0{,}11$ nach §. 71, Gl. (5), so wird

$$m = \frac{0{,}173\,k + 0{,}11\,\lambda s}{a} + 0{,}055\,\lambda,$$

insbesondere mit durchschnittlich $s = \frac{3}{4}k$ und $\lambda = \frac{1}{5}$:

$$m = 0{,}19\,\frac{k}{a} + 0{,}011.$$

Schliesslich mag bemerkt werden, dass dieselben Ausdrücke ohne erheblichen Fehler auch bei veränderlicher Grösse der Schubkraft S zur Schätzung des mit einem Kurbelmechanismus verbundenen verhältnissmässigen Arbeitsverlustes durch Reibung zu Grunde gelegt werden können. Näherungsweise ist nämlich die auf den Schieberweg reducirte Reibung, d. i. die durch den angenäherten elementaren Schieberweg $= a \sin\alpha\, d\alpha$ dividirte elementare Reibungsarbeit für den Kurbelzapfen:

$$\frac{dB}{a \sin\alpha\, d\alpha} \text{ proportional } \frac{d(\alpha - \gamma)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{d(\alpha - \lambda \sin\alpha)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{1}{\sin\alpha} - \lambda \operatorname{cotg}\alpha,$$

für den Schieberzapfen:

$$\frac{dC}{a \sin\alpha\, d\alpha} \text{ proportional } \frac{d\gamma}{\sin\alpha\, d\alpha} = \frac{d(\lambda \sin\alpha)}{\sin\alpha\, d\alpha} = \lambda \operatorname{cotg}\alpha$$

und für den Schieber selbst:

$$\frac{dD}{a \sin\alpha\, d\alpha} = \mu P \text{ proportional } \sin\alpha.$$

Während also der verhältnissmässige Arbeitsverlust durch die zwei Zapfenreibungen zusammen besonders an den Enden des Schieberweges (den grösseren Werthen von $\frac{1}{\sin\alpha}$ entsprechend) ins Gewicht fällt, ist er für die Gleitbahn des Schiebers gerade umgekehrt in der Mitte seines Weges am grössten, so dass eine wesentliche Aenderung der Grösse m durch die Veränderlichkeit von S nur dann zu erwarten sein würde, wenn $B + C$ entweder sehr gross oder sehr klein in Vergleich mit D, und S im ersten Falle von der Mitte gegen die Enden des Schieberweges, im zweiten umgekehrt von beiden Enden gegen die Mitte hin an Grösse zunähme. Wenn aber, wie bei Dampfmaschinen, wo S den Dampfdruck auf den Kolben (nach Abzug der Kolbenreibung) bedeutet, diese Kraft nur gegen das eine der beiden Wegenden des Schiebers hin abnimmt, auch die Arbeiten $B + C$ und D (die den Factoren μ' und μ entsprechenden zwei Glieder obiger Ausdrücke von m) nicht allzu verschieden sind, wird der Werth von m durch solche Veränderlichkeit von S nicht wesentlich beeinflusst werden können.

III. Reibung von Schraubenpaaren.

§. 74. Schraubenpaare mit scharfem oder flachem Gewinde.

Die Elementenfläche (Berührungsfläche von Schraube und Mutter) sei eine Schraubenfläche von solcher Art, dass sie durch Bewegung einer Geraden entstanden gedacht werden kann, welche, indem sie die Axe des Schraubenpaares unter constantem Winkel schneidet, zugleich längs derselben verschoben und um sie gedreht wird mit constantem Verhältnisse der gleichzeitigen elementaren Schiebungen und Drehungen. Gesucht wird das Moment M eines Kräftepaares, welches mit Rücksicht auf die Reibung in der Elementenfläche auf das eine der beiden Elemente S, S', etwa auf das Element S in einer zur Axe des Schraubenpaares senkrechten Ebene wirken muss, um dieses Element S am anderen S' entlang zu schrauben entgegen einer axialen Kraft Q, wodurch S gegen S' gedrückt wird.

Der gegenseitige Normaldruck zwischen S und S', sowie die entsprechende Reibung findet in einem solchen Theile F der Elementenfläche statt, welche S im Sinne von Q, S' im umgekehrten Sinne begrenzt, und es hängt die gesuchte Beziehung zwischen Q und M von dem Gesetze ab, nach dem die Pressung in jener Fläche F vertheilt ist. In letzterer Hinsicht werde indessen angenommen, der Druck sei so vertheilt, dass er in der mittleren Schraubenlinie L concentrirt zu denken ist, in welcher die Fläche F von der mit dem Schraubenpaare coaxialen Cylinderfläche C geschnitten wird, deren Radius r das arithmetische Mittel des äusseren und inneren Gewindehalbmessers ist. Wird dann

$$M = Pr$$

gesetzt, so handelt es sich um das Verhältniss der Kräfte P und Q als Function des Reibungscoefficienten $\mu = arctg\, \varrho$ und der Winkel α, β, unter denen beziehungsweise die Tangente der Schraubenlinie L und die erzeugende