Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

I. Reibung von Prismenpaaren

urn:nbn:de:bsz:31-282938

stärker convex gekrümmte Körper abgeplattet und in den anderen um einen gewissen Betrag hinein gedrückt wird. Je mehr das der Fall ist, unter desto grösserem Winkel ist die effective Berührungsfläche gegen die scheinbare, längs welcher die gleitende Bewegung stattfindet, am Rande geneigt, desto grösser deshalb auch μ, sofern ein gewisses beständiges Hinaufgleiten des abgeplatteten Körpers längs dem Eindrucke des anderen vorhergehen muss, um diesen Eindruck im Sinne der Bewegung von Stelle zu Stelle fortschreiten zu lassen. Indem aber solche Deformation natürlich um so beträchtlicher ist, je grösser der specifische Druck p, erklärt sich dadurch das Wachsen von μ mit p.

Dass μ auch mit abnehmender Geschwindigkeit v zunimmt, mag u. A. dadurch bedingt sein, dass sowohl das periodische Eingreifen der Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen Körperoberfläche, als auch die so eben erwähnte Deformation einer gewissen Zeit zur Ausbildung bedarf, dass somit beides um so vollständiger zu Stande kommt, je langsamer die relative Bewegung ist.

Die Molekularanziehung kommt um so mehr zur Geltung, je inniger die Berührung ist, je glatter nämlich die Oberflächen sind oder je mehr ihre Vertiefungen durch eine flüssige oder weiche Zwischensubstanz ausgefüllt werden. Geschieht letzteres in solchem Grade, dass die festen Körper sich überhaupt kaum mehr unmittelbar, sondern vorzugsweise mittelbar, nämlich eben durch Vermittelung jener Zwischensubstanz berühren, so beruht der Widerstand gegen die relativ gleitende Bewegung vorwiegend auf der inneren Reibung, mit der die relativen Molekularverschiebungen dieser Zwischensubstanz verbunden sind. Je grösser übrigens der specifische Druck p ist, desto weniger wird das Eindringen der Erhabenheiten der einen in die Vertiefungen der anderen Körperoberfläche durch die fragliche Zwischensubstanz verhindert.

I. Reibung von Prismenpaaren.

§. 67. Kolbenreibung.

Die Reibung von Prismenpaaren ergiebt sich meistens so unmittelbar als Folge des Druckes in der prismatischen Elementenfläche und eines erfahrungsmässigen Reibungscoefficienten, dass sie weiterer Besprechung an dieser Stelle nicht bedarf. Besondere Erwähnung wegen ihres erheblichen

Einflusses auf den Arbeitsverlust durch Bewegungswiderstände bei ausgedehnten Gruppen von Maschinen verdient indessen die Reibung einer besonderen Art von Prismenpaaren, bestehend aus einem Cylinder, der als sogenannter Kolben K mit einem Hohlcylinder C durch Vermittelung eines bildsamen Körpers L dicht anschliessend so gepaart ist, dass dadurch zwei in demselben Hohlcylinder beiderseits vom Kolben befindliche Flüssigkeiten F_1 und F_2 möglichst vollkommen von einander geschieden werden trotz ihres verschiedenen specifischen Druckes p_1 resp. p_2. Einer angenähert angebbaren einfachen Gesetzmässigkeit unterliegt diese Kolbenreibung freilich nur in dem Falle, dass die Liederung, nämlich jene Paarung von K und C mit Hülfe des bildsamen Körpers L, eine sogenannte hydrostatische Liederung ist, charakterisirt dadurch, dass der Druck in der Liederungsfläche F (Berührungsfläche zwischen L und C oder L und K, jenachdem L mit K oder mit C zu einem Element verbunden ist) vom Flüssigkeitsdrucke herrührend proportional demselben veränderlich ist. Ist der specifische Druck p_1 der Flüssigkeit F_1 der grössere, so wäre der specifische Druck p in der Fläche F, in welcher der bildsame Körper L, jenachdem er mit K oder C verbunden ist, von der Flüssigkeit F_1 gegen die cylindrische Oberfläche von C resp. K angedrückt wird, $= p_1$ selbst zu setzen, wenn der verschwindend enge Raum zwischen L und C resp. K längs der Fläche F als vollkommen leer gelten dürfte. Doch kann bei der beträchtlichen Steifigkeit, die der Körper L zu besitzen pflegt, wenn er auch aus Leder (als Stulp oder Manschette) gebildet sein mag, eine so innige Berührung kaum angenommen werden, und erscheint es richtiger, jenen specifischen Druck p in der Liederungsfläche nur $= p_1 - p_2$ zu setzen, eine Annahme, die besonders dann zutreffend sein wird, wenn L mit K zu einem Element verbunden ist und somit bei der relativen Bewegung von K gegen C im Sinne von F_1 gegen F_2 auch die Berührungsfläche F längs C in demselben Sinne von F_1 gegen F_2 fortrückt, wogegen, wenn L mit C verbunden ist, die Berührungsfläche längs K im umgekehrten Sinne, nämlich von F_2 gegen F_1 fortrückt und dann im Zwischenraume zwischen L und K ein noch grösserer specifischer Druck, als p_2, wohl stattfinden könnte in Folge anhaftender Flüssigkeit, die kurz zuvor noch die Pressung p_1 hatte.

Indem nun die Fläche F eine Cylinderfläche von gewisser Breite b, also $F = \pi d b$ ist, unter d den inneren Radius von C resp. äusseren Radius von K verstanden, jenachdem L mit K oder C zu einem Element verbunden ist, ergiebt sich die Grösse der Reibung:

$$R = \mu \, . \, \pi d b \, . \, p.$$

Auf Grund der Annahme $p = p_1 - p_2$ ist aber der Ueberdruck auf den Kolben im Sinne seiner relativen Bewegung gegen den Hohlcylinder:

$$P = \frac{\pi d^2}{4} p$$

und somit das Verhältniss beider Kräfte, das wegen übereinstimmender Wege auch dem verhältnissmässigen Arbeitsverluste durch die Kolbenreibung gleich ist:

$$\frac{R}{P} = 4 \mu \frac{b}{d} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Setzt man im Durchschnitt $b = 0{,}1\, d$ und μ für eine hydrostatische Liederung im engeren Sinne des Wortes, nämlich für eine Ledermanschette als bildsamen Körper $L = \frac{1}{4}$, dagegen für eine hydrostatische Metall-Liederung nur 0,3 so gross $= \frac{3}{40} = 0{,}075$, so ergiebt sich die Reibung R im ersten Falle = 10 Procent, im zweiten = 3 Procent des Ueberdruckes auf den Kolben. (Eine hydrostatische Metall-Liederung kann nach Art eines von G. Krauss angegebenen Locomotivkolbens aus zwei aufgeschnittenen Metallringen gebildet werden, welche, mit nur sehr schwachem Zwange in den Cylinder passend, mit versetzten Fugen so in die Nuth des Kolbens neben einander eingelegt sind, dass die Summe ihrer Breiten, d. i. die Dimension b in Gl. (1) etwas kleiner ist, als die Breite der Nuth, ihre inneren Durchmesser aber etwas grösser sind, als der Kolbendurchmesser in der Nuth. Indem dann der Dampf diese Liederungsringe im Sinne der Kolbenbewegung gegen den vorderen Rand der Nuth drückt, kann er zwischen sie und die cylindrische Nuthfläche eindringen, um sie zugleich radial auswärts gegen die Cylinderwand zu drücken.)

Bei elastischen Liederungen wird der Druck des Liederungskörpers L gegen das nicht mit ihm zu einem Gliede verbundene Element des Prismenpaares K, C durch seine Elasticität vermittelt, entsprechend der Deformation dieses Körpers L bei seiner Einzwängung zwischen K und C. Indem aber diese Deformation durch die unvermeidliche Abnutzung sich ändert, ändert sich damit auch der specifische Druck p in der Liederungsfläche F und somit die entsprechende Reibung auf solche Weise, dass sie sich einer rationellen Berechnung gänzlich entzieht. Für die verschiedenen Arten von Maschinen, bei denen sie von wesentlichem Einflusse ist, muss sie erfahrungsmässig geschätzt werden.

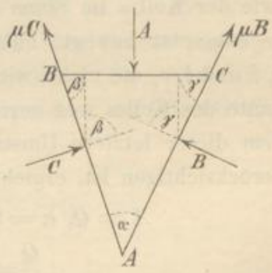
Dasselbe gilt von der unter ähnlichen Umständen stattfindenden Stopfbüchsenreibung, nämlich von der Reibung zwischen einer cylindrischen Stange und der Packung einer Stopfbüchse, wodurch sie geführt und zugleich eine Flüssigkeit am Entweichen längs der Berührungsfläche möglichst gehindert werden soll.

§. 68. **Beispiel.**

Bei Getrieben mit prismatisch gepaarten Gliedern kann der Arbeitsverlust durch Reibung verhältnissmässig sehr gross, folglich der Wirkungsgrad $\eta =$ dem Verhältnisse der Arbeit N des Nutzwiderstandes zur Arbeit L der treibenden Kraft (§. 65) sehr klein werden, besonders wenn die Reibung der betreffenden Prismenpaare nicht nur von indifferenten Kräften (wie z. B. die Kolbenreibung bei elastischer Liederung von der Elasticität des Liederungskörpers), sondern vom Nutzwiderstande herrührt, indem sie proportional demselben zunimmt. Als Beispiel diene die Keilkette a, b, c (Fig. 38, §. 34) unter der Voraussetzung, dass bei Feststellung des Gliedes c das Glied b entgegen einem Nutzwiderstande Q verschoben werden soll durch eine auf die obere (freie) Fläche des Keils a wirkende Kraft P, die rechtwinklig gegen die Schubrichtung des Prismenpaares b, c und somit gegen Q gerichtet sei. Es handelt sich um das Verhältniss dieser Kräfte P, Q und um den Wirkungsgrad η des Getriebes ($=$ dem Verhältnisse der Arbeit von Q zur gleichzeitigen Arbeit von P) mit Rücksicht auf die Reibungen der drei Prismenpaare, deren betreffende Reibungscoefficienten einander gleich $= \mu$ vorausgesetzt werden.

Zu dem Ende werde zunächst das Gleichgewicht der Kräfte an einem einzelnen Keil a betrachtet, indem dessen Querschnitt im Allgemeinen als ein beliebiges Dreieck ABC, Fig. 38, mit den Winkeln α, β, γ beziehungsweise an den Ecken A, B, C vorausgesetzt wird. Dieselben Buchstaben A, B, C mögen zugleich Kräfte bezeichnen, die von aussen her normal gegen die Seitenflächen BC, CA und AB auf den Keil ausgeübt werden, B und C als Widerstände zweier anderer Körper b und c, mit denen der Keil a prismatisch gepaart ist und längs welchen er beziehungsweise im Sinne CA und BA in relativer Bewegung begriffen sei, so dass die betreffenden Reibungen, bei Voraussetzung gleicher Reibungscoefficienten $= \mu B$ und μC, als nach AC und AB, Fig. 88, gerichtete Kräfte auf den

Fig. 88.



Keil wirken. Dem Gleichgewichte aller Kräfte entsprechen dann die Gleichungen:

$$B\,(sin\,\gamma - \mu\,cos\,\gamma) = C\,(sin\,\beta - \mu\,cos\,\beta)$$

und

$$A = B\,(cos\,\gamma + \mu\,sin\,\gamma) + C\,(cos\,\beta + \mu\,sin\,\beta).$$

Aus letzterer folgt mit Rücksicht auf die andere Gleichung:

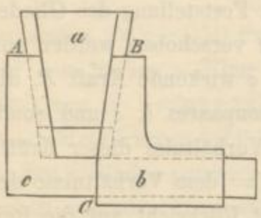
$$\begin{aligned} A\,(sin\,\beta - \mu\,cos\,\beta) &= B\,[(sin\,\beta - \mu\,cos\,\beta)\,(cos\,\gamma + \mu\,sin\,\gamma) \\ &\qquad + (sin\,\gamma - \mu\,cos\,\gamma)\,(cos\,\beta + \mu\,sin\,\beta)] \\ &= B\,[(1 - \mu^2)\,sin\,(\beta + \gamma) - 2\,\mu\,cos\,(\beta + \gamma)] \end{aligned}$$

und stehen somit wegen $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ die Kräfte A, B, C in der Beziehung:

$$\frac{A}{(1 - \mu^2)\,sin\,\alpha + 2\,\mu\,cos\,\alpha} = \frac{B}{sin\,\beta - \mu\,cos\,\beta} = \frac{C}{sin\,\gamma - \mu\,cos\,\gamma} \quad . \; . \; (1).$$

Ist nun bei dem Keilgetriebe a, b, c (Fig. 38) der Zuschärfungswinkel des gleichschenkligen Keils a, d. i. der spitze Winkel, unter dem die Schubrichtungen der Prismenpaare c, a und a, b gegen einander geneigt sind, $= 2\,\sigma$, und wird mit B der Normaldruck zwischen den Gliedern a und b (gleich demselben zwischen a und c) bezeichnet, so folgt aus Gl. (1) mit

Fig. 38.



$$A = P, \quad \alpha = 2\,\sigma, \quad \beta = \gamma = 90^0 - \sigma:$$

$$\frac{B}{P} = \frac{cos\,\sigma - \mu\,sin\,\sigma}{(1 - \mu^2)\,sin\,2\,\sigma + 2\,\mu\,cos\,2\,\sigma} \quad . \; . \; (2).$$

In Betreff der Beziehung zwischen den Kräften B und Q am Gliede b ist letzteres als ein Keil zu betrachten, dessen Zuschärfungswinkel (der Angriffsfläche von Q gegenüber liegend) $= 90^0 - \sigma$ und dessen der Angriffsfläche von B gegenüber liegender Winkel $= 90^0$ ist, der sich aber nicht (wie der Keil a im Sinne der Kraft P) im Sinne der Kraft Q, sondern entgegengesetzt bewegt, entsprechend solchen Reibungen der Prismenpaare a, b und b, c, die nicht (wie die Reibungen in Fig. 88) von der Zuschärfungskante des Keiles weg gerichtet, sondern gegen sie hin gerichtet sind. Indem dieser letztere Umstand durch Umkehrung des Vorzeichens von μ zu berücksichtigen ist, ergiebt sich aus Gl. (1) mit

$$A = Q, \; \alpha = 90^0 - \sigma, \; \beta = 90^0 \text{ und } -\mu \text{ statt } \mu:$$

$$\frac{Q}{B} = (1 - \mu^2)\,cos\,\sigma - 2\,\mu\,sin\,\sigma \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (3).$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt:

$$\frac{Q}{P} = \frac{[(1 - \mu^2)\,cos\,\sigma - 2\,\mu\,sin\,\sigma]\,(cos\,\sigma - \mu\,sin\,\sigma)}{(1 - \mu^2)\,sin\,2\,\sigma + 2\,\mu\,cos\,2\,\sigma}$$

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,\frac{[(1-\mu^2)\,cotg\,\sigma-2\,\mu](1-\mu\,tg\,\sigma)}{1-\mu^2+\mu\,(cotg\,\sigma-tg\,\sigma)}$$

wegen $$2\,cotg\,2\,\sigma=\frac{2}{tg\,2\,\sigma}=\frac{1-tg^2\,\sigma}{tg\,\sigma}=cotg\,\sigma-tg\,\sigma,$$

also auch $$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}\,\frac{(1-\mu^2)\,cotg\,\sigma-2\,\mu}{1+\mu\,cotg\,\sigma}=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu^2-2\,\mu\,tg\,\sigma}{\mu+tg\,\sigma}$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{1-\mu\,tg\,\sigma-\mu\,(\mu+tg\,\sigma)}{\mu+tg\,\sigma}$$

oder mit $\mu=tg\,\varrho$ (§. 66):

$$\frac{Q}{P}=\frac{1}{2}[cotg\,(\varrho+\sigma)-tg\,\varrho]\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(4).$$

Hiernach ist, wenn P_0 den Werth von P bedeutet, der $\varrho=0$, also $\mu=0$ entsprechen würde:

$$\frac{Q}{P_0}=\frac{1}{2}\,cotg\,\sigma.$$

Die gleichzeitigen Arbeiten von P_0 und Q sind einander gleich, da ohne Reibung weder Verlust noch Gewinn an Arbeit stattfindet, und es ist also der Wirkungsgrad η des Keilgetriebes = dem Verhältnisse der gleichen Wegen des Keils a entsprechenden Arbeiten von P_0 und P = dem Verhältnisse dieser Kräfte selbst:

$$\eta=\frac{P_0}{P}=tg\,\sigma\,[cotg\,(\varrho+\sigma)-tg\,\varrho]\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(5).$$

Wenn an dieses Keilgetriebe die Forderung der **Selbstsperrung**, d. h. die Forderung gestellt wird, dass der Keil a nicht zurückgehe, wenn die Wirkung der Kraft P unterbrochen wird (wie es z. B. periodisch der Fall ist, wenn bei einer Keilpresse die Kraft P stossweise von einer niederfallenden Stampfe ausgeübt wird), so muss sich nach Gl. (2) die Kraft P negativ ergeben, die bei irgend einer augenblicklichen Grösse von B erforderlich wäre, um den Rückgang des Keils zu hindern. Da solchem Rückgange entgegengesetzt gerichtete Reibungen entsprächen, so gilt für fragliche Kraft die Gleichung (2) mit $-\mu$ statt μ:

$$\frac{B}{P}=\frac{cos\,\sigma+\mu\,sin\,\sigma}{(1-\mu^2)\,sin\,2\,\sigma-2\,\mu\,cos\,2\,\sigma}$$

und ist sie demnach negativ nur im Falle:

$$tg\,2\,\sigma<\frac{2\,\mu}{1-\mu^2}\ \text{oder}\ tg\,2\,\sigma<tg\,2\,\varrho,\ \text{d. i.}\ \sigma<\varrho.$$

Vorbehaltlich der Erfüllung dieser Bedingung ist η nach Gl. (5) um so grösser, je grösser σ, vorausgesetzt dass auch der Reibungscoefficient einen gewissen Werth nicht überschreitet. Denn mit $tg\,\sigma = x$ und $tg\,\varrho = \mu$ folgt aus Gl. (5):

$$\eta = x\left(\frac{1-\mu x}{\mu + x} - \mu\right) = \frac{(1-\mu^2)x - 2\mu x^2}{\mu + x}$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \frac{(\mu + x)(1-\mu^2 - 4\mu x) - (1-\mu^2)x + 2\mu x^2}{(\mu + x)^2}$$

$$= \mu \frac{1-\mu^2 - 4\mu x - 2x^2}{(\mu + x)^2},$$

mit $x < \mu$ folglich $$\frac{d\eta}{dx} > \mu\,\frac{1-7\mu^2}{(\mu+x)^2}$$

und somit $\frac{d\eta}{dx}$ positiv, sofern nur $\mu < \sqrt{\frac{1}{7}}$, d. i. $\mu < 0{,}38$ ist.

Der grösstmögliche Werth, den η haben kann, wenn $\mu < 0{,}38$ (ungefähr $\varrho < 21^0$) und $\sigma < \varrho$ ist, ergiebt sich aus Gl. (5) mit $\sigma = \varrho = arctg\,\mu$:

$$max\,\eta = \mu\left(\frac{1-\mu^2}{2\mu} - \mu\right) = \frac{1-3\mu^2}{2}.$$

II. Reibung von Drehkörperpaaren; Zapfenreibung.*

§. 69. Allgemeine Principien ihrer Berechnung.

Die Zapfen (Wellzapfen), nämlich die Theile rotirender Wellen, mit denen sie in den Lagern gestützt und damit zu einem Drehkörperpaare gepaart sind, können unterschieden werden in Spurzapfen und Tragzapfen, jenachdem der Zapfendruck P, d. i. der resultirende Druck zwischen Zapfen und Lager in die Zapfenaxe (Wellenaxe) fällt oder sie rechtwinklig schneidet; bei anders gerichtetem Zapfendrucke würde derselbe in zwei Componenten zerlegt werden können, beziehungsweise längs der Axe und senkrecht dazu gerichtet, und der Zapfen dann diesen Componenten entsprechend zugleich den Charakter als Spur- und als Tragzapfen haben. In allen Fällen handelt es sich um die Berechnung des Reibungsmomentes M in Bezug auf die Axe, das der relativen Drehung des Zapfens gegen das Lager um diese Axe entspricht. Dieses Moment, das auch als Grösse einer am Hebelarme $= 1$ wirkenden Kraft zu betrachten ist, giebt bei Multiplication mit 2π die Reibungsarbeit pro Umdrehung, bei Multiplication mit

* Siehe: Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1861, S. 200.