Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

III. Elementare Mechanismen

urn:nbn:de:bsz:31-282938

III. Elementare Mechanismen.

Die Kinematik ist insofern eine wesentliche Grundlage des Maschinenbaues, als sie Anleitung zur Bildung solcher elementarer Mechanismen geben soll, die zur Vermittelung gegebener, dem Zwecke gewisser Maschinen entsprechender Bewegungen geeignet sind, unter einem elementaren Mechanismus nach §. 1 einen solchen verstanden, dessen kinematische Kette einer Zerlegung in nur zwangläufig geschlossene weniger zusammengesetzte Ketten nicht fähig ist. Indessen ist es doch eben nur eine die unerlässliche Combinationsgabe des Constructeurs unterstützende Anleitung, die zu dem fraglichen Zweck von der Kinematik verlangt werden kann, da die umfassende Bezeichnung der zu irgend einem bestimmten Bewegungszwecke dienlichen Mechanismen theils unthunlich ist, weil derselbe Bewegungszweck im Allgemeinen auf viele verschiedene oder gar auf unzählig viele Arten durch Mechanismen erreicht werden kann, theils auch nur von geringem Werthe wäre, weil die Auswahl der praktisch brauchbaren und vortheilhaften unter den principiell möglichen Lösungen von Umständen abhängig bliebe, die, ausserhalb des Bereichs der Kinematik liegend, einer unendlichen Mannigfaltigkeit fähig, einer erschöpfenden Berücksichtigung im Voraus also unfähig sind. Ebenso ist es auch bei der unendlichen Mannigfaltigkeit höherer Elementenpaare und zusammengesetzter Ketten unmöglich, die kinematische Grundlegung des Maschinenbaues in erschöpfender Weise umgekehrt dadurch zu erzielen, dass systematisch alle möglichen Mechanismen ermittelt und ihre kinematischen Eigenschaften untersucht werden, um etwa so als Vorrath zur Auswahl für irgend einen zu realisirenden machinalen Bewegungszweck zu dienen; nur in beschränkter Weise ist diese Aufgabe lösbar, besonders bei Beschränkung auf einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren, die somit als Umschlusspaare ausgeführt werden können, wie sie namentlich mit Rücksicht auf die Leichtigkeit ihrer Herstellung und die Dauerhaftigkeit ihrer Form vorzugsweise verwendet werden. Diese und einige andere unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen mögliche Verbindungen von Elementenpaaren zu kinematischen Ketten und die Eigenschaften der daraus herstellbaren Mechanismen aufzusuchen, ist Zweck der folgenden Erörterungen.

a. Einfache Mechanismen.

Darunter werden solche Mechanismen verstanden, deren zwangläufig geschlossene kinematische Ketten einfach sind (§. 1). Die Glieder einer solchen Kette enthalten je zwei Elemente, und seien in der Reihenfolge, in der sie durch die Elementenpaare

$A \quad B \quad C \ldots N$ verbunden sind,

allgemein mit $a \quad b \quad c \ldots n$ bezeichnet,

so dass das Elementenpaar A die Glieder n und a,

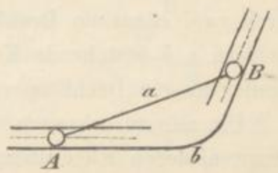
„ „ B „ „ a „ b,

„ „ C „ „ b „ c etc.

verbindet. Die Zahl der Glieder ist so gross wie die der Elementenpaare und wenigstens = 2.

Eine zwangläufig geschlossene einfache kinematische Kette mit nur 2 Gliedern wird z. B. gebildet (Fig. 36) vom einem Stabe a, der mit zwei Zapfen (Drehkörpern mit parallelen Axen) in entsprechenden geradlinigen Schlitzen einer Platte b so beweglich ist, dass eine relative Schiebung im Sinne der Zapfenaxen (infolge der Zapfenform) nicht stattfinden kann. Die Elementenpaare A, B sind hier höhere mit je zweifacher Beweglichkeit und je zwei Freiheitsgraden. Die relative Beweglichkeit der Glieder a und b ist dieselbe wie die des Figurenpaares „Strecke und Winkel" (§. 12).

Fig. 36.



1. Einfache Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren.

§. 33. Vorbemerkungen.

Einfache Mechanismen mit niederen Elementenpaaren kommen hier nur als wenigstens dreigliedrige Ketten in Betracht, weil sie, wenn zweigliedrig und zwangläufig beweglich, stets als einzelne zwangläufige niedere Elementenpaare betrachtet werden können. Wenn z. B. ein stabförmiger Körper, der am einen Ende cylinderförmig, am anderen plattenförmig und zwar so gestaltet ist, dass die parallelen Begrenzungsebenen dieses letzteren Stabendes mit der Cylinderaxe am anderen parallel sind, als das eine Glied a mit einem anderen Körper als zweitem Glied b, der mit entsprechender cylindrischer Bohrung und mit entsprechendem Schlitz versehen ist, einerseits durch ein Cylinderpaar A, andererseits durch ein Plattenpaar B verbunden wird, so entsteht zwar zunächst eine zweigliedrige Kette mit den zwei Elementenpaaren A und B, deren Glieder a, b aber dieselbe gegenseitige Beweglichkeit haben wie die Elemente eines Prismenpaares, und in der That sind die Berührungsflächen beider Elementenpaare A, B zusammen als getrennte Theile einer prismatischen (durch Translationsbewegung einer Geraden zu erzeugenden) Fläche zu betrachten. Oder wenn ein Körper a mit einem Körper b zugleich durch ein Schraubenpaar A und durch ein damit conaxiales Cylinderpaar B verbunden wird, so ist die relative Beweglichkeit der Körper a, b dieselbe, als ob sie nur durch das Schraubenpaar A als Elemente desselben verbunden wären; in der That ist hier die Berührungsfläche des Cylinderpaares B als geometrischer Ort unendlich vieler congruenter Schraubenlinien von gleicher Steigung mit denen des Schraubenpaares A, und sind somit die Berührungsflächen beider Elementenpaare A, B als nur getrennte Theile derselben Schraubenfläche zu betrachten. Ebenso verhält es sich mit einer Welle a, die an beiden Enden mit Zapfen in entsprechenden Lagern eines Gestelles b drehbar, mit diesem nämlich durch zwei conaxiale Drehkörperpaare A, B verbunden ist; die aus den Gliedern a, b bestehende Kette ist dann als ein einzelnes Elementenpaar, nämlich als ein Drehkörperpaar zu betrachten.

Um nun zu erkennen, wie viele und welche Mechanismen sich mit gewissen niederen Elementenpaaren bei einer gewissen Art der Verbindung ihrer Glieder durch dieselben bilden lassen, sind zunächst die möglichen betreffenden kinematischen Ketten zu ermitteln, und ist zu dem Ende zu untersuchen, ob die Minimalzahl von 3 Elementenpaaren resp. Gliedern zur Beweglichkeit der Kette ausreicht, wie gross dazu anderenfalls diese Zahl wenigstens sein muss, ferner wie gross sie höchstens sein darf, um noch die relative Zwangläufigkeit von je zwei Kettengliedern zur Folge zu haben. Bei dieser Untersuchung werden im Folgenden alle Elementenpaare zunächst nicht nur als niedere, unbeschadet der Allgemeinheit als Umschlusspaare ausgeführt zu denkende vorausgesetzt, sondern auch als zwangläufige, somit als Prismenpaare, Drehkörperpaare oder Schraubenpaare, und zwar sollen der Reihe nach betrachtet werden:

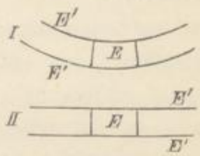
1) Prismenketten, nämlich Ketten mit nur Prismenpaaren,

2) Drehkörperketten, nämlich Ketten mit Drehkörperpaaren allein oder zugleich mit Prismenpaaren,

3) Schraubenketten, nämlich Ketten mit Schraubenpaaren allein oder zugleich mit Prismen- resp. Drehkörperpaaren.

Diese Bezeichnungen und diese Aufeinanderfolge als dem Fortgange vom Speciellen zum Allgemeineren entsprechend sind dadurch begründet, dass das Prismen- und das Drehkörperpaar als Grenzformen des Schraubenpaares betrachtet werden können, das Prismenpaar aber auch als Grenzform des Drehkörperpaares. Ersteres ist schon in §. 5 bei der Herleitung dieser 3 Paare als einzig möglicher zwangläufiger Umschlusspaare hervorgehoben worden. Was aber die Auffassung des Prismenpaares als Grenzfall des Drehkörperpaares betrifft, so werde letzteres in der Weise ausgeführt gedacht, dass ein ringförmiger Körper als das eine Element E in einer entsprechenden ringförmigen Höhlung des anderen Elementes E' mit diesem in Berührung ist, indem beide von je zwei conaxialen Umdrehungsflächen von solchen Lagen und mit so gestalteten (nicht concentrischen Kreisen als Bögen angehörigen) Meridianlinien begrenzt seien, dass irgend ein isolirtes Segmentstück des einen Elementes gegen das andere nicht anders beweglich, als um die gemeinsame Axe der beiden Umdrehungsflächen drehbar ist. Unter diesen Umständen kann unbeschadet des kinematischen Charakters dieses Elementenpaares als eines selbständig geschlossenen Drehkörperpaares das eine der beiden Elemente auf ein solches Segmentstück reducirt werden, in Fig. 37, I z. B. das ursprünglich als voller Ring ausgeführte Element E. Lässt man dann die Axe weiter und weiter fortrücken (ohne Aenderung der Meridianlinien beider Umdrehungsflächen), so geht das Drehkörperpaar in der Grenze in ein Prismenpaar (Fig. 37, II) über, dessen Schubrichtung senkrecht zur Axe und zu der Richtung ist, nach welcher dieselbe ins Unendliche fortrückte. Diese vorgestellte Entstehungsweise des Prismenpaares wird im Folgenden mehrfach Dienste leisten, um die Verwandtschaft gewisser Gruppen von Mechanismen in ein helleres Licht zu setzen.

Fig. 37.



α. Mechanismen aus Prismenketten.

§. 34. **Ebene Prismenkette.**

Eine Prismenkette heisse eben, wenn die Schubrichtungen ihrer Prismenpaare alle derselben Ebene H parallel sind. Eine solche, und zwar zwangläufig geschlossene einfache ebene Prismenkette bestehe (vorbehaltlich der zu erweisenden Möglichkeit) aus 3 Gliedern a, b, c, die durch die Prismenpaare A, B, C nach dem Schema

$$\underbrace{A \overset{a}{\text{———}} B \overset{b}{\text{———}} C}_{c}$$

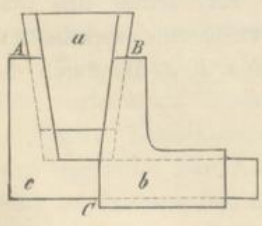
so verbunden sind, dass die Schubrichtung keines dieser Paare mit der eines anderen derselben parallel ist. Letzteres muss vorausgesetzt werden, weil, wenn z. B. die Schubrichtungen der Paare A und B parallel wären, die ganze Kette nur ein Prismenpaar wäre, bestehend aus dem Gliede a als dem einen und den vereinigten Gliedern b, c als dem anderen Elemente. Zur zwangläufigen Beweglichkeit der Kette ist nun erforderlich und genügend, dass irgend ein Glied, z. B. a, gegen irgend ein anderes, z. B. c, überhaupt beweglich sei, weil dann die Zwangläufigkeit die nothwendige Folge derjenigen des diese Glieder a, c unmittelbar verbindenden Paares A ist; dass aber Beweglichkeit hier vorhanden ist, folgt daraus, dass die Verbindung von a mit c durch die Paare B und C mit sich schneidenden, der Ebene H parallelen Schubrichtungen jede Schiebung nach irgend einer Richtung in H, insbesondere also auch diejenige zulässt, die dem Paare A zukommt.

Besteht die ebene Prismenkette aus 4 Gliedern a, b, c, d nach dem Schema

so sind die Schubrichtungen von je zwei aufeinander folgenden Prismenpaaren verschieden vorauszusetzen, widrigenfalls sich die Kette auf ein einzelnes Paar reducirte. Sind aber die Schubrichtungen von A und B, desgleichen die von C und D verschieden, so ist b gegen d sowohl in Folge der Verbindung durch die Paare A und B, als in Folge der Verbindung durch die Paare C und D, somit überhaupt nach jeder Richtung in der Ebene H beweglich, die Zwangläufigkeit der Kette folglich nicht vorhanden.

Die ebene zwangläufig geschlossene einfache Prismenkette kann also nur dreigliedrig sein mit verschiedenen Schubrichtungen ihrer 3 Prismenpaare. Eine solche ist z. B. die bekannte *Keilkette* (Fig. 38). Gewöhnlich ist sie kraftschlüssig; um selbständig geschlossen zu sein, wären indessen nur die Federn, mit denen der Keil a in entsprechenden Nuthen der Glieder b und c eingreift, schwalbenschwanzförmig (mit trapezförmigem, auswärts sich verbreiterndem Querschnitte) zu gestalten. — Indem die 3 Glieder einer solchen ebenen Prismenkette sich kinematisch weder an und für sich, noch bezüglich ihres Zusammenhanges mit den übrigen unterscheiden, sind auch die 3 Mechanismen, die daraus durch Feststellung eines Gliedes gebildet werden können,

Fig. 38.



kinematisch nicht verschieden. Sie entsprechen der Zerlegung einer Geschwindigkeit, die der Schubrichtung eines der 3 Prismenpaare parallel ist, in 2 Componenten parallel den Schubrichtungen der anderen Paare; die gleichzeitigen relativen Schiebungen der Elemente der 3 Prismenpaare sind den betreffenden Geschwindigkeiten proportional. Obige Bedingung der Möglichkeit einer zwangläufigen ebenen Prismenkette entspricht dem Umstande, dass die Zerlegung einer Geschwindigkeit in (von Null verschiedene) Componenten, die mit ihr in derselben Ebene liegen, nur dann in eindeutig bestimmter Weise möglich ist, wenn die Zahl der Componenten = 2 ist und die Richtungen aller 3 Geschwindigkeiten verschieden sind.

§. 35. Allgemeine Prismenkette.

Eine nicht ebene einfache geschlossene Prismenkette muss, um beweglich zu sein, wenigstens 4 Paare enthalten; denn bei der dreigliedrigen Kette wären in diesem Falle irgend zwei Glieder, z. B. a und c unbeweglich gegen einander, indem die ihrer Verbindung durch das Paar A als einzig mögliche entsprechende Schiebung thatsächlich unmöglich, weil nicht parallel der Ebene wäre, längs welcher allein sich beide in Folge ihrer Verbindung durch die Paare B, C verschieben könnten.

Im Falle von 4 Gliedern a, b, c, d können von den Schubrichtungen der dieselben verbindenden Prismenpaare A, B, C, D schon je 3 nicht zugleich derselben Ebene parallel sein. Denn wenn z. B. die Schubrichtungen von B, C, D derselben Ebene parallel wären, mit der die Schubrichtung von A dann nicht parallel ist, so wäre damit a gegen d unbeweglich. Ist aber jene Bedingung erfüllt, dass schon die Schubrichtungen von je 3 Paaren nicht derselben Ebene parallel sind (in welchem Falle insbesondere auch nicht zwei Schubrichtungen parallel sein können), so ist zunächst ersichtlich, dass dann je zwei aufeinander folgende Glieder gegenseitig zwangläufig beweglich sind; denn das Glied a z. B. ist dann gegen d in Folge der Verbindung durch die Paare B, C, D nach jeder Richtung im Raume, insbesondere also auch nach derjenigen verschieblich, die seiner Verbindung mit d durch das Paar A als einzig mögliche entspricht. Was aber gegenüber liegende Glieder wie z. B. b und d betrifft, so ist das eine gegen das andere in Folge ihrer Verbindung durch die Paare A, B irgendwie längs einer gewissen Ebene, in Folge ihrer Verbindung durch die Paare C, D längs einer anderen Ebene, überhaupt also längs der Durchschnittslinie dieser Ebenen und nicht anders, somit zwangläufig verschiebbar. Die ganze Kette ist also zwangläufig, da jedes ihrer Gliederpaare entweder durch a, d oder durch b, d repräsentirt werden kann.

Eine Prismenkette mit 5 Gliedern nach dem Schema

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[r, dash, "b"] & C \arrow[r, dash, "c"] & D \arrow[d, dash, "d"] \\
A \arrow[u, dash, "a"] \arrow[rr, dash, "e"'] & & E
\end{tikzcd}$$

ist jedenfalls nicht zwangläufig. Denn die Schubrichtungen benachbarter Paare, wie A und B, müssten verschieden sein, widrigenfalls diese Paare sich auf eines reducirten; indem also das Glied b gegen das Glied e in Folge der Verbindung durch die Paare A, B beliebig längs einer gewissen Ebene verschieblich wäre, dürfte ihrer Verbindung durch die Paare C, D, E nur auch die Verschiebbarkeit längs einer gewissen anderen Ebene entsprechen, damit sie gegenseitig zwangläufig, nämlich nur längs der Durchschnittslinie beider Ebenen verschieblich seien. Die Schubrichtungen der Paare C, D, E müssten folglich derselben Ebene parallel sein, was dann aber, da dasselbe von je 3 aufeinander folgenden Paaren gilt, den Parallelismus der Schubrichtungen aller Paare mit derselben Ebene, somit nach vorigem §. die mehrfache Beweglichkeit der Kette zur Folge hätte.

Die nicht ebene zwangläufig geschlossene einfache Prismenkette kann also nur viergliedrig sein der Art, dass die Schubrichtungen schon von je 3 ihrer 4 Prismenpaare nicht derselben Ebene parallel sind. Die 4 Mechanismen, die durch Feststellung eines Gliedes der Kette erhalten werden können, sind auch hier kinematisch nicht verschieden. Sie entsprechen der Zerlegung einer Geschwindigkeit, die der Schubrichtung eines der 4 Prismenpaare parallel ist, in 3 Componenten parallel den Schubrichtungen der übrigen Paare; die gleichzeitigen relativen Schiebungen der Elemente der 4 Prismenpaare sind den betreffenden jener Geschwindigkeiten proportional. Obige Bedingung der Möglichkeit einer allgemeineren zwangläufigen Prismenkette entspricht dem Umstande, dass die Zerlegung einer Geschwindigkeit in (von Null verschiedene) Componenten, die nicht in derselben Ebene mit ihr liegen, nur dann in eindeutig bestimmter Weise möglich ist, wenn die Zahl der Componenten = 3 ist und die Richtungen von je 3 Geschwindigkeiten nicht in derselben Ebene liegen. — Im Maschinenbau ist die viergliedrige Prismenkette nicht gebräuchlich. Sie könnte aber Anwendung finden sowohl dort wie auch z. B. bei Instrumenten zur mechanischen Ausführung von Rechnungsoperationen, denen die Beziehung zwischen den Kanten und den Diagonalen eines

Parallelepipedum zu Grunde liegt, wenn die Glieder mit Skalen versehen würden, an denen die relativen Schiebungen benachbarter Glieder, also der Paarelemente abzulesen sind.

β. Mechanismen aus Drehkörperketten.

Drehkörperpaare sind die im Maschinenbau am häufigsten angewendeten Elementenpaare. Neben den Vorzügen, die sie mit den übrigen Umschlusspaaren gemein haben, empfehlen sie sich auch selbst diesen gegenüber durch die Leichtigkeit ihrer Herstellung und dadurch, dass sie zu grösstmöglicher Verminderung von Reibungswiderständen, von Abnutzung und Arbeitsverlusten, sowie auch zu einfachster Vermittelung eines gleichförmigen Ganges der betreffenden Maschinen (durch rotirende Massen, Schwungräder) besonders geeignet sind. Die mit ihnen zu bildenden einfachen Mechanismen verdienen deshalb eine besonders eingehende Untersuchung, und zwar namentlich die ebenen, demnächst auch die sphärischen Drehkörpermechanismen, d. h. die beiden Fälle, in denen die Axen der Drehkörperpaare parallel sind oder sich in einem Punkte schneiden, die relativen Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder gegen das festgestellte Glied folglich in parallelen Ebenen oder in concentrischen Kugelflächen liegen.

§. 36. Ebene Drehkörperkette.

In der Aufeinanderfolge, wie sie in der Kette vorkommen, seien $a, b, c \ldots$ die Glieder, $A, B, C \ldots$ die Drehkörperpaare derselben; unter Umständen seien mit $A, B, C \ldots$ auch die geometrischen Axen der gleichnamigen Paare oder auch die Punkte bezeichnet, in denen diese Axen von der dazu senkrechten Zeichnungsebene H (mit welcher die Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder parallel sind) geschnitten werden; bei dieser letzteren Bedeutung der Buchstaben $A, B, C \ldots$ seien dann $a = AB$, $b = BC$, $c = CD \ldots$ zugleich die Längen der gleichnamigen Kettenglieder. Es kann keinem Zweifel unterliegen, dass z. B. A und B als Axen (gerade Linien) verstanden sind, wenn von der Ebene AB, als Punkte, wenn von der Geraden oder der Strecke AB die Rede sein wird, dass ferner die Buchstaben $a, b \ldots$ als Längen verstanden sind, wenn sie in Gleichungen vorkommen oder wenn anderweitig von ihnen als von Grössen etwas ausgesagt wird u. s. f.

Im Falle der dreigliedrigen Kette *a*, *b*, *c* kann die Polaxe der relativen Bewegung irgend zweier Glieder, z. B. *a* und *c*, in Folge ihrer Verbindung durch die Paare *B*, *C* nur jede mit den Axen parallele Gerade in der Ebene *BC* sein; weil aber andererseits diese Polaxe nur die Axe *A* des die Glieder *a*, *c* unmittelbar verbindenden Paares sein kann, ist relative Bewegung nur möglich, wenn alle 3 Axen in derselben Ebene liegen. Liegen sie dabei im Endlichen, so tritt freilich schon in Folge einer unendlich kleinen Bewegung die bewegliche Axe aus der Ebene der mit dem festgestellten Gliede unbeweglichen zwei anderen Axen heraus, und wird damit die weitere Bewegung unmöglich. — Lässt man eine Axe, z. B. *C*, in der Ebene *AB* ins Unendliche rücken, entsprechend dem Uebergange des Drehkörperpaares *C* in ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung senkrecht zur Ebene *AB* ist, so ist die Beweglichkeit nach wie vor nur unendlich klein. — Rücken zwei Axen, z. B. *B* und *C*, ins Unendliche, so müssen sie im Unendlichen zusammenfallen, um mit der Axe *A* in einer Ebene zu liegen (die Punkte *B*, *C* müssen in demselben Punkt der unendlich fernen Geraden der Ebene *H* liegen, um mit dem Punkt *A* in einer Geraden liegen zu können). Die Drehkörperpaare *B*, *C* sind dann in Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen übergegangen; das Glied *b* ist zwar gegen *a* und *c* beliebig verschiebbar, aber *a* und *c* sind gegen einander unbeweglich resp. nur unendlich wenig beweglich geblieben: die ganze Kette ist ein Prismenpaar geworden, bestehend aus den Gliedern *b* und *ac*. — Liegen endlich alle 3 Axen im Unendlichen, so brauchen nicht mehr zwei zusammenzufallen, um mit der dritten in einer Ebene zu liegen (die Punkte *A*, *B*, *C* können verschiedene Punkte der unendlich fernen Geraden der Ebene *H* sein); die Kette geht damit in die schon besprochene ebene Prismenkette (§. 34) über. Hier kann es sich also nur noch um wenigstens viergliedrige Drehkörperketten mit ihren Derivaten handeln.

Bei einem Mechanismus aus der viergliedrigen Kette (Fig. 39) sei *d* das festgestellte Glied, also *a* eines der beiden ihm benachbarten, *b* das gegenüber liegende Glied. Das Glied *a* ist zwangläufig, wenn die Polaxe *A*, die seiner Verbindung mit *d* durch das Paar *A* entspricht, mit einer der Polaxen zusammenfällt, die es in Folge seiner Verbindung mit *d* durch die Paare *B*, *C*, *D* haben kann, was aber immer der Fall ist, ausser wenn die Axen *B*, *C*, *D* in einer Ebene liegen, die nicht zugleich die Axe *A* enthält. Das Glied *b* ist zwangläufig, wenn die seine möglichen Polaxen enthaltende Ebene *AB* von der dieselben gleichfalls enthaltenden Ebene *CD* geschnitten wird in einer Geraden, die dann als effective Polaxe stets eindeutig vorhanden sein wird, ausser wenn die Ebenen *AB* und *CD* zusammenfallen.

Die viergliedrige ebene Drehkörperkette ist also zwangläufig, ausser wenn 3 Paaraxen in einer Ebene liegen, sei es dass die vierte zugleich in dieser Ebene liegt oder nicht; diese Ausnahmefälle entsprechen übrigens, wenn nicht etwa ein Glied so lang wie die übrigen zusammen ist, nur Uebergangslagen des betreffenden Mechanismus. Ob letztere zugleich Todlagen (§. 31) sind oder ob in ihnen die den Mechanismus als Getriebe zu seiner Bewegung antreibende Kraft die Zwangläufigkeit vermittelt, hängt von der Art und Weise ab, wie der Mechanismus als Getriebe verwendet wird; jedenfalls sind es nur jene Uebergangslagen, in denen Todlagen stattfinden können.

Die fünfgliedrige Kette ist schon nicht mehr zwangläufig. Denn wenn das Glied b (Schema siehe §. 35) gegen das Glied e zwangläufig sein soll, so müssen die Axen C, D, E in einer Ebene liegen, die von der Ebene AB in der betreffenden Polaxe geschnitten wird. Es müssten also, wenn die Kette zwangläufig sein sollte, je 3 aufeinander folgende Paaraxen in einer Ebene liegen, die nicht die beiden anderen Axen enthielte, was unmöglich ist. —

Was die nun näher zu betrachtenden Mechanismen aus der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette betrifft, so sind dieselben durch die verhältnissmässigen Längen der Kettenglieder bedingt, wodurch allein sich letztere wesentlich unterscheiden können; von diesen Längenverhältnissen ist es dann auch abhängig, ob und inwiefern der Mechanismus von anderer Art ist, jenachdem er durch Feststellung des 1^{ten}, 2^{ten}, 3^{ten} oder 4^{ten} Gliedes einer gegebenen viergliedrigen Drehkörperkette erhalten wird. Im Folgenden soll immer das festgestellte Glied, hier mit d bezeichnet, der Steg genannt werden; das ihm gegenüber liegende ist dann b (bei beständiger Festhaltung der alphabetischen Reihenfolge a, b, c . . für die Bezeichnung der in der Kette aufeinander folgenden Glieder) und heisse die Koppel. Von den beiden anderen Gliedern a, c sei a das kürzere, sofern sie nicht gleich lang sind; sie sollen verschiedene Namen erhalten, jenachdem sie, wenn der Mechanismus alle möglichen Configurationen in stetiger Aufeinanderfolge durchläuft, dabei um ihre mit dem Stege festen Axen (A resp. D) zwischen zwei Grenzlagen schwingen (sich hin und her drehen), oder in einem unveränderlichen Sinne rotiren (sich rings herum drehen), und zwar sollen sie im ersten Falle als Schwinge, im zweiten als Kurbel bezeichnet werden. Indem sich nun entweder jedes dieser Glieder als Schwinge, oder das eine als Schwinge, das andere als Kurbel, oder endlich jedes als Kurbel verhält, sind die folgenden 3 Arten von Mechanismen zu unterscheiden:

1. Doppelschwingmechanismus (Doppelschwinge),
2. Schwingkurbelmechanismus (Schwingkurbel oder Kurbelschwinge),

3. Doppelkurbelmechanismus (Doppelkurbel).
Sofern die Bewegung von einem der Glieder a, c ausgeht (durch eine das Glied a oder c angreifende Kraft bewirkt wird), seien die betreffenden Getriebe bezeichnet als:

1. Doppelschwinggetriebe,
2. Schwingkurbelgetriebe oder Kurbelschwinggetriebe, jenachdem die Bewegung von der Schwinge oder von der Kurbel ausgeht,
3. Doppelkurbelgetriebe.

Bei der folgenden Uebersicht der Beziehungen zwischen den Längen a, b, c, d, die für die 1te, 2te oder 3te Mechanismenart charakteristisch sind, werden diese Längen einstweilen alle als endlich vorausgesetzt, auch die Specialfälle $c = a$ und $d = a$ vorläufig ausgeschlossen, so dass also

$$c > a; \quad d \gtrless a; \quad b < a + c + d$$

ist. Der um den Punkt A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $AB = a$ beschriebene Kreis (Fig. 39—44) heisse der Kreis (B), der um den Punkt D als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $DC = c$ beschriebene der Kreis (C); von der Geraden AD werde ersterer in den Punkten B_0, B_r, letzterer in den Punkten C_0, C_r geschnitten, welche Punkte so bezeichnet sind, dass die Richtungen $B_0 B_r$ und $C_0 C_r$ mit der Richtung AD übereinstimmen.

Sind die Längen a, c, d gegeben, und lässt man die Koppellänge $= b$ von der unteren Grenze $=$ Null an zunehmen oder von der oberen Grenze $= a + c + d$ an abnehmen, so nimmt die Beweglichkeit des Mechanismus in beiden Fällen allmählig zu, indem die Glieder a und c in von Null an zunehmenden Schwingungswinkeln beweglich werden, der Mechanismus also anfangs eine Doppelschwinge ist. Somit wird überhaupt der Mechanismus eine Doppelschwinge sein für alle Werthe von $b < a + c + d$, die kleiner sind, als die kleinste, oder grösser, als die grösste Koppellänge, welche bei gegebenen Werthe von a, c, d einer Schwingkurbel oder Doppelkurbel zukommt, so dass nur noch für diese letzteren Mechanismenarten die Existenzbedingungen festgestellt zu werden brauchen. Dieselben, abhängig von der relativen Lage der Punkte A, B_0, B_r, C_0, C_r, D, sollen in zwei Gruppen betrachtet werden, jenachdem $d > a$ oder $d < a$ ist.

1) Wenn man im Falle $d > a$ bei gegebenen Längen a, c den Steg stetig kürzer werden lässt von einer solchen Länge $d > a + c$ an gerechnet, bei der die Kreise (B) und (C) sich gegenseitig ausschliessen (Fig. 39), so werden sich endlich diese Kreise schneiden, zuerst so, dass C_0 zwischen A und B_r liegt (Fig. 40), dann so, dass C_0 zwischen A und B_0 liegt (Fig. 41), und wenn c nicht nur $> a$, sondern auch $> 2a$ ist, so kann schliesslich der Kreis (C) den Kreis (B) ganz einschliessen (Fig. 42). In allen diesen

Specialfällen, also überhaupt im Falle $d > a$ kann das Glied c nie Kurbel sein, wie lang auch die Koppel gewählt werden mag; denn zu dem Ende müsste der Punkt C in die Lagen C_0 und $C_,$ kommen können, wozu bei Fig. 39 erforderlich wäre, dass

$$C_0B_0 > b > C_0B_, \text{ und } C_,B_0 > b > C_,B_,,$$

also
$$C_0B_0 > b > C_,B_,$$

ist, was wegen $C_0C_, > B_0B_,$ nicht sein kann. Dieselbe unerfüllbare Bedingung für b ergiebt sich bei Fig. 40, bei Fig. 41 und Fig. 42 aber die gleichfalls unerfüllbare Bedingung:

$$C_0B_, > b > C_,B_,.$$

Ist $d > a$, so kann also der Mechanismus nicht Doppelkurbel, auch Schwingkurbel nur mit a als Kurbel, also mit c als Schwinge sein; die noch festzustellenden Bedingungen dieses letzteren Falles reduciren sich auf die Bedingungen für das Verhalten von a als Kurbel. Als diese ergeben sich bei Fig. 39 ($d > a + c$) und Fig. 40 ($a + c > d > c$):

$$B_,C_, > b > B_0C_0,$$

Fig. 39.

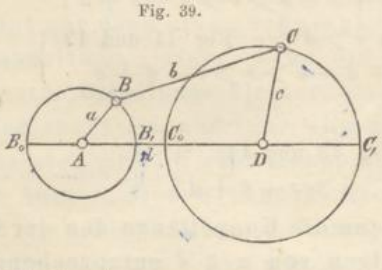
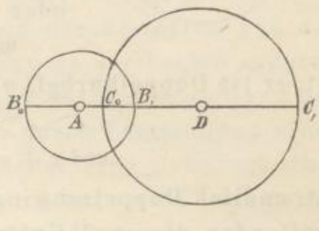


Fig. 40.



also überhaupt:

$$d + c - a > b > d - c + a$$

für $d > c > a$;

Fig. 41.

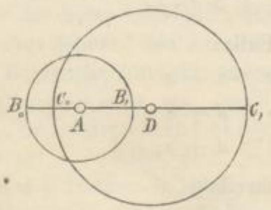
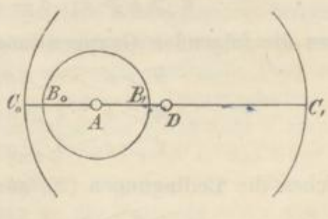


Fig. 42.



dagegen bei Fig. 41 ($c > d > c - a$) und Fig. 42 ($c - a > d > a$):

$$B_,C_, > b > B_,C_0,$$

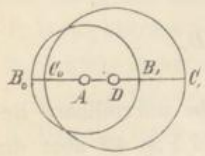
also überhaupt:

$$c + d - a > b > c - d + a$$

für $c > d > a$.

2) Im Falle $d < a$ wird der Kreis (B) entweder vom Kreise (C) so geschnitten, dass C_0 zwischen A und B_0 liegt (Fig. 43), oder er wird von ihm eingeschlossen (Fig. 44). In beiden Fällen ist die Bedingung dafür, dass a Kurbel sei, dieselbe wie die für das Verfallen von c als Kurbel, nämlich

Fig. 43.

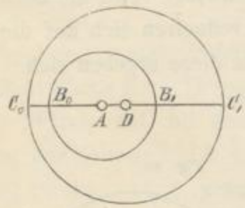


$$B_{,}C_0 > b > B_{,}C_{,}$$

oder
$$c + a - d > b > c - a + d.$$

In diesem Falle sind also die Glieder a und c nur gleichzeitig Kurbeln, und kann der Mechanismus nicht Schwingkurbel sein.

Fig. 44.



Das Resultat der Untersuchung ist somit folgendes: der viergliedrige ebene Drehkörpermechanismus a, b, c, d mit dem Gliede d als Steg ist Schwingkurbel (a Kurbel, c Schwinge), wenn

$$\left.\begin{array}{l} d > c > a \text{ (Fig. 39 und 40)} \\ \text{und } d + c - a > b > d - c + a \end{array}\right\} \ldots (1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{oder wenn } c > d > a \text{ (Fig. 41 und 42)} \\ \text{und } c + d - a > b > c - d + a \end{array}\right\} \ldots (2)$$

ist; er ist Doppelkurbel, wenn

$$\left.\begin{array}{l} c > a > d \text{ (Fig. 43 und 44)} \\ \text{und } c + a - d > b > c - a + d \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ist; endlich Doppelschwinge, wenn die Koppellänge den der betreffenden dieser 3 Grössenfolgen von a, c, d entsprechenden Bedingungen (1), (2), (3) nicht Genüge leistet, unbeschadet dessen, dass $0 < b < a + c + d$ ist.

Die Bedingungen (1), die auch geschrieben werden können:

$$d > c > a; \quad c - a > b - d > a - c,$$

umfassen die folgenden Gruppen möglicher Fälle:

$$b > d > c > a; \quad d + c > b + a$$
$$d > b > c > a; \quad b + c > d + a$$
$$d > c > b > a; \quad c + b > d + a;$$

desgleichen die Bedingungen (2), auch zu schreiben:

$$c > d > a; \quad d - a > b - c > a - d,$$

die folgenden Gruppen:

$$b > c > d > a; \quad c + d > b + a$$
$$c > b > d > a; \quad b + d > c + a$$
$$c > d > b > a; \quad d + b > c + a.$$

Daraus folgt, dass der in Rede stehende Mechanismus allemal dann, aber nur dann eine Schwingkurbel ist, wenn das kürzeste aller 4 Glieder (als Kurbel) dem festgestellten Gliede benachbart, und wenn die Summe seiner und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

Die Bedingungen (3), die auch geschrieben werden können:

$$c > a > d;\quad a - d > b - c > d - a,$$

umfassen die folgenden Gruppen möglicher Fälle:

$$b > c > a > d;\quad c + a > b + d$$
$$c > b > a > d;\quad b + a > c + d$$
$$c > a > b > d;\quad a + b > c + d,$$

woraus ersichtlich, dass der in Rede stehende Mechanismus dann und nur dann eine Doppelkurbel ist, wenn das festgestellte Glied das kürzeste von allen, und wenn die Summe seiner und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

Die viergliedrige ebene Drehkörperkette kann also überhaupt nur dann einen Schwingkurbel- oder einen Doppelkurbelmechanismus liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, und zwar wird sie dann durch Feststellung des kürzesten Gliedes eine Doppelkurbel, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder eine Schwingkurbel (mit dem kürzesten Gliede als Kurbel); in allen anderen Fällen gehen Doppelschwingmechanismen aus der Kette hervor.*

Von besonderen Fällen sind zunächst diejenigen hervorzuheben, in

---

* Wenn Reuleaux, indem er mit a, b, c, d die aufeinander folgenden Glieder der Kette individuell, unabhängig von ihrer Beziehung zum festgestellten Gliede bezeichnet, den aus der Kette hervorgehenden Mechanismus als „rotirende Bogenschubkurbel“ (Schwingkurbel) oder als „rotirende Doppelkurbel“ (Doppelkurbel) oder als „oscillirende Doppelkurbel“ (Doppelschwinge) beansprucht und entsprechend bezeichnet, jenachdem die Kette „auf d resp. b, auf a oder auf c gestellt“, d. h. jenachdem das Glied d resp. b, das Glied a oder das Glied c festgestellt wird, so ist das obiger Untersuchung zufolge nur bedingungsweise zulässig. Insbesondere kann es der Fall sein, dass der Mechanismus eine „oscillirende Doppelkurbel“ ist, auf welches Glied die Kette auch „gestellt“ werden mag; zulässig ist jene Bezeichnung nur unter der Voraussetzung, dass a das kleinste Glied und dass die Summe aus seiner und aus der grössten Gliedlänge (die b, c oder d sein kann) kleiner als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist.

denen die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge der Summe der beiden anderen Gliedlängen gleich ist (als Grenzfall der Herstellbarkeit eines Schwingkurbel- oder eines Doppelkurbelmechanismus aus dieser Kette), sowie diejenigen, in denen zwei Glieder gleich lang sind; noch bemerkenswerther aber diejenigen, in denen das eine und das andere zugleich stattfindet, in denen es nämlich zwei gleiche kleinste und zwei gleiche grösste Glieder giebt, überhaupt also zwei mal zwei Glieder gleich lang sind. Diese letzteren Fälle werden in den folgenden Paragraphen näher besprochen, und zwar in §. 37 der Fall, dass die gleich langen Gliederpaare gegenüber liegende, in §. 38 der Fall, dass sie benachbarte Glieder sind.

§. 37. Zwillingskurbeln.

Wenn die gegenüber liegenden Glieder der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette gleich lang sind ($a = c$, $b = d$), so können bei Feststellung des Gliedes d, einerlei ob d und b die kürzeren oder die längeren Glieder sind, die beiden anderen a und c stets als Kurbeln um die Axen A und D in unveränderlichem Sinne rotiren, indem (mit den Bezeichnungen von Fig. 39 bis 44) BC in die Lagen B_0C_0 und $B_{,}C_{,}$ kommen kann; weil sich aber nun die beiden Kurbeln durch nichts unterscheiden, werde der entsprechende Doppelkurbelmechanismus insbesondere als Zwillingskurbelmechanismus bezeichnet, das Doppelkurbelgetriebe als Zwillingskurbelgetriebe. Letzteres hat zwei Todlagen AB_0C_0D und $AB_{,}C_{,}D$, in denen die 4 Paaraxen A, B, C, D in einer Ebene liegen. Von diesen Lagen aus können sich die Kurbeln AB und CD entweder so drehen, dass sie parallel bleiben, oder so, dass sie symmetrisch bleiben in Beziehung auf die Verbindungslinie ihres Schnittpunktes mit dem Schnittpunkte der beiden anderen gleichen Gegenseiten des Vierecks $ABCD$ (Fig. 35, §. 32, wo OP die Symmetrieaxe ist); das Getriebe heisse im ersten Falle ein Parallelkurbelgetriebe, im zweiten ein symmetrisches Zwillingskurbelgetriebe (Antiparallelkurbelgetriebe nach Reuleaux's Bezeichnung). Die verschiedenen kinematischen Eigenschaften dieser zweierlei Getriebe charakterisiren die fraglichen Todlagen als sogenannte Wechsellagen (§. 31).

Bei dem Parallelkurbelgetriebe drehen sich die beiden Kurbeln in gleichem Sinn und gleichzeitig um gleiche Winkel; die Ueberschreitung der Todlagen kann durch Massenkraftschluss oder durch Kettenschluss vermittelt werden (§. 32).

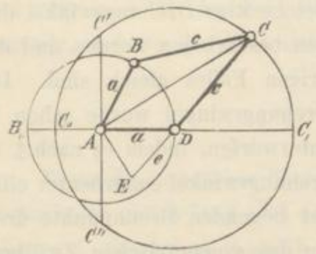
Bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe drehen sich die Kurbeln in entgegengesetztem oder in gleichem Sinn, jenachdem sie kürzer oder länger sind, als der Steg und die Koppel; das Drehungsgesetz, nämlich die Beziehung zwischen gleichzeitigen Drehungswinkeln der Kurbeln, ist aber in beiden Fällen $\left(\text{bei demselben Verhältnisse } \frac{a=c}{b=d}\right)$ dasselbe. Bei Fig. 35 (§. 32) liegt der erste dieser beiden Fälle vor; $B_{,}AB$ und $C_{,}DC$ sind gleichzeitige Drehungswinkel der Kurbeln AB und DC, die durch entgegengesetzte Drehungen beschrieben werden. Würde aber das Glied AB festgestellt (zum Stege gemacht), so dass nun AD und BC die gleichen Kurbeln wären, so wären $BAB_{,}$ und OBC gleichzeitige Drehungswinkel derselben, die durch gleich gerichtete Drehungen beschrieben werden und den Winkeln $B_{,}AB$ und $ODA = C_{,}DC$ des vorigen Falles gleich sind. Das Aenderungsgesetz solcher entsprechender Drehungswinkel wurde schon im §. 22 unter 2) einer näheren Betrachtung unterworfen, indem es nach §. 32 identisch ist mit dem der entsprechenden Drehungswinkel congruenter elliptischer Polbahnen, die um je einen ihrer fest liegenden Brennpunkte drehbar sind. Die Ueberschreitung der Todlagen des symmetrischen Zwillingskurbelgetriebes kann nach §. 32 durch Massenkraftschluss oder durch Paarschluss vermittelt werden, nämlich mit Bezug auf Fig. 35 daselbst für die Todlage $AB_{,}C_{,}D$ durch das Elementenpaar E, E' oder G, G', für die andere durch das Elementenpaar F, F' oder H, H', und zwar sowohl im Falle des gegenläufigen wie in dem des gleichläufigen symmetrischen Zwillingskurbelgetriebes, von denen übrigens das erstere in der Folge auch kürzer als gegenläufiges Zwillingskurbelgetriebe bezeichnet wird, da nur das gleichläufige ausdrücklich als symmetrisches von dem gleichfalls gleichläufigen Parallelkurbelgetriebe unterschieden zu werden braucht.

§. 38. Gleichschenklige Drehkörperkette.

Wenn zwei Paare benachbarter Glieder der viergliedrigen ebenen Drehkörperkette gleich lang sind ($DA = AB = a$, $BC = CD = c$ in Fig. 45 oder $AB = BC = a$, $CD = DA = c$ in Fig. 46), so besteht das Viereck $ABCD$ stets aus zwei gleichschenkligen Dreiecken (DAB und BCD in Fig. 45 resp. ABC und CDA in Fig. 46), und heisse deshalb (nach Reuleaux) die Kette selbst gleichschenklig. Aus ihr können zweierlei Mechanismen hervorgehen, jenachdem das festgestellte Glied AD eines der kürzeren Glieder $= a$ (Fig. 45) oder eines der längeren Glieder $= c$ (Fig. 46) ist; nach §. 36 ist der Mechanismus im ersten Falle eine Doppelkurbel, im zweiten eine Schwingkurbel (Kurbelschwinge), vorausgesetzt dass in den Uebergangslagen, in denen 3 von den 4 Paaraxen A, B, C, D in einer Ebene liegen, und somit die Kette nicht selbständig geschlossen ist, die Schliessung durch besondere Hülfsmittel bewirkt wird, falls jene Uebergangslagen Todlagen sind, nämlich die Schliessung der Kette in ihnen nicht schon durch die Kraft vermittelt wird, die den Mechanismus bei seiner besonderen Verwendungsart als Getriebe in Bewegung setzt.

Der gleichschenklige Doppelkurbelmechanismus ist in Fig. 45 so gezeichnet, dass $c < 2a$ ist; es könnte aber auch $c = 2a$ oder $c > 2a$ sein. (Für den Fall $c = 2a$, wobei die um A und D mit den Halbmessern a und c beschriebenen Kreise sich in den zusammenfallenden Punkten B_0, C_0 berühren, ist der Mechanismus ursprünglich von Galloway angegeben worden.) Wenn von der Lage ADC_1D aus (der in §. 36 mit B_1 bezeichnete Punkt fällt hier mit D zusammen) die kleine Kurbel sich um den Winkel $DAB = \alpha$, die grosse um den Winkel $C_1DC = \gamma$ dreht, so besteht zwischen diesen gleichzeitigen Drehungswinkeln die Beziehung:

Fig. 45.



$$a \sin\frac{\alpha}{2} = c \sin\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right); \quad tg\frac{\alpha}{2} = \frac{c \sin\gamma}{a + c\cos\gamma} \quad \ldots\ldots (1).$$

Daraus folgt durch Differentiation:

$$\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\, d\alpha = c\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)\left(d\gamma - \frac{d\alpha}{2}\right)$$

und somit das Verhältniss der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_c der Kurbeln a, c:

$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{d\alpha}{d\gamma} = \frac{c\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)}{\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2} + \frac{c}{2}\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{2c}{c + a\,\dfrac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)}}$$

oder auch, wenn AE normal zu AC bis zum Durchschnitt E mit CD gezogen und $DE = e$ gesetzt wird, indem dann

$$\frac{\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\left(\gamma - \frac{\alpha}{2}\right)} = \frac{\sin(DAE)}{\sin(DEA)} = \frac{e}{a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

ist,

$$\frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c + e} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Hierin ist e positiv oder negativ, jenachdem der Punkt E ausserhalb der Strecke CD oder in derselben liegt; ist die Gerade $C'AC''$ normal zu AD, so ist

$$\text{in den Lagen } C, \quad C' \quad C_0 \quad C'' \quad C, \text{ des Punktes } C$$
$$e = a \quad 0 - a \quad 0 \quad a.$$

Somit ergiebt sich, dass

$$\text{der Lage } C, \quad C' \quad C_0 \quad C'' \quad C, \text{ des Punktes } C$$
$$\text{die Lage } D \quad B_0 \quad D \quad B_0 \quad D \text{ des Punktes } B$$
$$\text{mit } \frac{\omega_a}{\omega_c} = \frac{2c}{c+a} \quad 2 \quad \frac{2c}{c-a} \quad 2 \quad \frac{2c}{c+a} \text{ entspricht.}$$

Die kleine Kurbel macht 2 Umdrehungen, während die grosse nur eine macht; das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss, welches somit im Durchschnitt $= 2$ ist, schwankt zwischen den Grenzen:

$$\left.\begin{aligned} max \frac{\omega_a}{\omega_c} &= \frac{2c}{c-a} \\ min \frac{\omega_a}{\omega_c} &= \frac{2c}{c+a} \end{aligned}\right\} \text{ und ist } \frac{max \frac{\omega_a}{\omega_c}}{min \frac{\omega_a}{\omega_c}} = m = \frac{c+a}{c-a} \quad \ldots \ldots (4).$$

Werden die Rotationen der kleinen Kurbel von der Lage AB_0 aus gerechnet, so dreht sich während derselben die grosse Kurbel abwechselungsweise durch den erhabenen und durch den hohlen Winkel $C'DC''$; oder wenn letztere gleichförmig rotirt, so ist das Verhältniss der Zeiten der aufeinander folgenden von der Lage AB_0 aus gerechneten Rotationen der kleinen Kurbel = dem Verhältnisse der hohlen Winkel $C_,DC'$ und $C'DC_0$, und es ist dies das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier (d. h. zweier von irgend einer Anfangslage aus gerechneter) Rotationen der kleinen Kurbel, indem bei ihnen das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Kurbeln abwechselungsweise beständig grösser oder beständig kleiner, als der Mittelwerth 2 ist. Ist also dieses Zeitverhältniss $= n$ gegeben, so ist

$$n = \frac{\pi - arc\cos\frac{a}{c}}{arc\cos\frac{a}{c}}; \quad \frac{a}{c} = \cos\frac{\pi}{n+1} \quad \ldots \ldots \ldots (5),$$

somit auch*
$$m = \frac{1 + \cos\frac{\pi}{n+1}}{1 - \cos\frac{\pi}{n+1}} = cotg^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \quad \ldots \ldots \ldots (6),$$

* Diese Beziehung zwischen m und n ist dieselbe wie bei zwei congruenten elliptischen Polbahnen, die um je einen ihrer fest liegenden Brennpunkte drehbar

und findet man hiernach z. B. für

$n = 2$	3	4	5
$\frac{a}{c} = 0{,}5$	0,707	0,809	0,866
$m = 3$	5,83	9,47	13,93

Wenn bei dem in Rede stehenden Mechanismus die Bewegung von einer der Kurbeln ausgeht und somit der Fall eines gleichschenkligen Doppelkurbelgetriebes vorliegt, so sind die Uebergangslagen $AB_0C'D$ und $AB_0C''D$, in denen nur die Axen D, A, B in einer Ebene liegen, nicht Todlagen; die beiden anderen ADC_0D und ADC_1D, in denen alle Axen in eine Ebene und zugleich die Axen B, D zusammenfallen, sind dagegen Todlagen, wenn die Bewegung von der grossen Kurbel ausgeht, und zwar sind sie Wechsellagen, weil ohne zwangläufige Ueberschreitung derselben von ihnen aus der Mechanismus von anderer Art werden, nämlich in ein Drehkörperpaar übergehen kann, entsprechend einer Drehung der zu einem Element vereinigten Glieder c gegen die zum anderen Element vereinigten Glieder a um die zusammengefallenen Axen B, D. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser Wechsellagen (§. 32) kann durch Massenkraftschluss (durch ein mit der kleinen Kurbel verbundenes Schwungrad) oder durch Elementenpaare vermittelt werden, nämlich durch Paarung eines der Glieder a mit dem gegenüber liegenden Gliede c; von den Polbahnen der zu paarenden

---

sind (§. 22, Gl. 11), also auch dieselbe wie bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus (§. 37), indem dessen Kurbeln nach §. 32 sich ebenso drehen wie jene elliptischen Polbahnen, wenn die Excentricität ε der letzteren (Verhältniss des Abstandes der Brennpunkte von einander zur grossen Axe) dem Verhältnisse der Kurbellänge $AB = DC = a$ (Fig. 35, §. 32) zur Länge $AD = BC = b$ von Steg und Koppel gleich ist. Die Längenverhältnisse $\frac{a}{b}$ und $\frac{a}{c}$ der Kettenglieder, welche beziehungsweise bei jenem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus und bei dem gleichschenkligen Doppelkurbelmechanismus denselben Werthen von m und n entsprechen, stehen nach Gl. (11) in §. 22 und nach obiger Gl. (4) in der Beziehung:

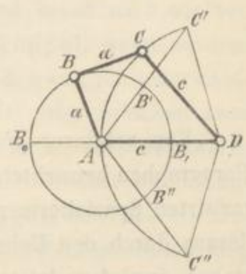
$$\left(\frac{b+a}{b-a}\right)^2 = \frac{c+a}{c-a}.$$

Bei dem gegenläufigen Zwillingskurbelmechanismus bedeutet zwar n das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier aufeinander folgender halber Umdrehungen der einen Kurbel bei gleichförmiger Rotation der anderen, doch liesse sich dieselbe Bedeutung auch bei dem gleichschenkligen Doppelkurbelmechanismus realisiren durch Uebertragung der Drehung der kleinen Kurbel im Verhältnisse 2 : 1.

Glieder sind dazu kleine Stücke beiderseits von ihren den Wechsellagen entsprechenden Berührungspunkten zu verzeichnen. Sollen z. B. die Glieder AB und CD (Fig. 45) gepaart werden, so findet man (gemäss der in §. 11 angeführten allgemeinen Regel) die Polbahn von CD als Ort aller Schnittpunkte der Geraden BC und DA bei Feststellung von CD und Bewegung von AB, die Polbahn von AB als Ort aller Schnittpunkte derselben Geraden bei Feststellung von AB und Bewegung von CD.*

Bei dem gleichschenkligen Schwingkurbelmechanismus (Fig. 46) seien C', C'' die Punkte des mit dem Halbmesser c um D beschriebenen Kreises, deren Entfernungen vom Punkte $A = 2a$ sind, und B', B'' die Punkte, in denen der um A mit dem Halbmesser a beschriebene Kreis von den Geraden AC', AC'' geschnitten wird. Dann sind DC', DC'' die Grenzlagen der Schwinge DC, deren Schwingungswinkel also

Fig. 46.



$$C'DC'' = 4\, arc\, sin\, \frac{a}{c}$$

ist; und wenn die Kurbel im Sinne $B'BB_0$ rotirt, so entsprechen

den Wegen $B'B_0B''$, $B''B_,B'$ des Punktes B
die Wege $C'AC''$, $C''AC'$ des Punktes C.

Den Bewegungen der Schwinge zwischen ihren Grenzlagen im einen und im anderen Sinne entsprechen also verschieden grosse Drehungen der Kurbel, oder bei gleichförmiger Rotation der letzteren verschiedene, nämlich solche Zeiten, die sich wie die hohlen Winkel B_0AB' und $B'AB_,$ verhalten. Ist dieses Zeitverhältniss $= n$, so ist

$$n = \frac{\pi - arc\, cos\, \frac{a}{c}}{arc\, cos\, \frac{a}{c}}; \quad \frac{a}{c} = cos\, \frac{\pi}{n+1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

in Uebereinstimmung mit Gl. (5). Geht die Bewegung von der Kurbel aus (gleichschenkliges Kurbelschwinggetriebe), so sind die Uebergangslagen AB_0AD und $AB_,AD$ Wechsellagen, indem von ihnen aus der Mechanismus in ein Drehkörperpaar übergehen kann, entsprechend einer Drehung der zu einem Element vereinigten Glieder a gegen die zum anderen

* Für den Fall $c = 3a$ sind die Polbahnen in Reuleaux's „theor. Kinematik“, S. 192, gezeichnet.

Element vereinigten Glieder c um die zusammenfallenden Axen A, C. Geht die Bewegung von der Schwinge aus (gleichschenkliges Schwingkurbelgetriebe), so sind die Uebergangslagen $AB'C'D$ und $AB''C''D$ Todlagen, von denen aus die Bewegung der Kurbel in beiderlei Sinn erfolgen kann. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser Wechsel- resp. Todlagen kann wieder durch Massenkraftschluss oder durch Paarung gegenüber liegender Kettenglieder geschehen; letzteres würde insbesondere bei dem Kurbelschwinggetriebe vorzuziehen sein, sofern ein Schwungrad im Allgemeinen nur mit einem in unveränderlichem Sinne fast gleichförmig rotirenden Körper zweckmässig zu verbinden ist.

§. 39. Ebene Schubkurbelkette.

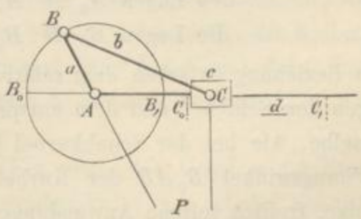
Von grösserer praktischer Wichtigkeit, als die in den beiden vorigen Paragraphen betrachteten, durch die Gleichheit gewisser Gliedlängen charakterisirten Specialformen der ebenen Drehkörperkette, sind diejenigen, die daraus durch den Uebergang von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen; inwiefern letztere als Grenzfälle der ersteren betrachtet und daraus hervorgehend vorgestellt werden können, wurde in §. 33 mit Beziehung auf Fig. 37 erläutert. Hier wird zunächst nur eines der 4 Drehkörperpaare in ein Prismenpaar übergegangen vorausgesetzt und die entsprechende Kette als Schubkurbelkette bezeichnet im Anschlusse an die Bezeichnung des am allgemeinsten angewendeten der daraus hervorgehenden Mechanismen.

Indem jetzt die Kettenglieder sich insofern unterscheiden, als zwei von ihnen unter sich durch ein Prismenpaar verbunden sind, die beiden anderen aber, mit jenen durch Drehkörperpaare verbunden, auch unter sich durch ein Drehkörperpaar verbunden sind, können nun (was in §. 36 bei der ebenen Drehkörperkette im Allgemeinen nicht anging) die einzelnen Glieder der Kette an und für sich, d. h. unabhängig von ihrer Lage gegen das in einem Mechanismus jeweils festgestellte Glied, mit bestimmten Buchstaben bezeichnet werden, ohne die Allgemeinheit weiter zu beschränken. Diejenigen Kettenglieder, die sowohl unter sich wie mit den beiden anderen durch Drehkörperpaare verbunden sind, seien mit a und b, und zwar mit a das kleinere von ihnen bezeichnet (vorbehaltlich einer besonderen Untersuchung des Specialfalles $a = b$); durch die stets beibehaltene Buchstabenfolge a, b, c, d für die in der Kette aufeinander folgenden Glieder sind dann auch die Bezeichnungen c, d der beiden anderen vollkommen bestimmt, und es ist das Elementenpaar D, welches in ein Prismenpaar übergegangen ist, indem die betreffende Paaraxe jetzt im Unendlichen liegt. Die Schubrichtung des Prismenpaares D ist normal zu der Richtung, nach der diese Axe ins Unendliche fortrückte, in welcher Hinsicht der Fall von besonderer Wichtigkeit ist, dass diese letztere Richtung normal zur Ebene AC, und somit die Schubrichtung des Prismenpaares der Ebene AC parallel ist. Dieser Fall wird im Folgenden stets vorausgesetzt, wenn von der ebenen Schubkurbelkette schlechtweg die Rede ist; anderen Falls soll sie ausdrücklich als allgemeine Schubkurbelkette bezeichnet werden.

Die Benennung der Glieder bezieht sich auf die aus der Kette hervorgehenden Mechanismen. Das festgestellte Glied heisst nach wie vor der Steg; ein bewegliches Glied a oder b heisst Koppel, wenn es dem Stege gegenüber liegt, anderen Falls Kurbel oder Schwinge, jenachdem es um eine feste Axe in stets gleichem Sinne rotirt oder zwischen zwei Grenzlagen schwingt; ein bewegliches Glied c oder d heisse eine Schleife, wenn es um eine feste Axe (rotirend oder schwingend) drehbar ist, bei anderer Bewegungsart ein Schieber. Die Benennungen der Mechanismen sollen, wie bei den aus der Drehkörperkette (§. 36) abgeleiteten, den Namen der beiden dem Stege benachbarten Glieder angepasst, beziehungsweise daraus zusammengesetzt werden. Ist eines dieser Glieder dasjenige, von dem die Bewegung ausgeht, so kann durch Voranstellung des Namens dieses treibenden Gliedes das entsprechende Getriebe von demjenigen unterschieden werden, bei dem die Bewegung vom anderen dieser beiden dem Mechanismus den Namen gebenden Glieder ausgeht; nur wenn das dem Stege gegenüber liegende Glied das treibende ist, bedarf es eines besonderen Zusatzes zur bestimmten Bezeichnung des Getriebes.

Hiernach sind es nun folgende 4 Mechanismen, die aus der ebenen Schubkurbelkette hervorgehen können, je nach der Wahl des festgestellten (in den folgenden Figuren durch Unterstreichung seiner Buchstabenbezeichnung angedeuteten) Gliedes.

Fig. 47.

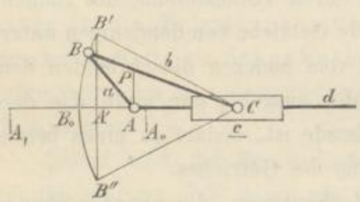


1. Schubkurbel, aus der Kette hervorgehend durch Feststellung des Gliedes d (Fig. 47); a ist Kurbel, b Koppel, c Schieber. Einer Umdrehung der Kurbel entspricht eine Hin- und Herbewegung des Schiebers in einer Strecke $C_0C_1 = B_0B_1 = 2a$; der veränderliche Pol P, um den sich dabei die Koppel jeweilig dreht, ist der Schnittpunkt von AB und der Normalen zu AC im Punkte C. Dieser

Mechanismus ist der am meisten gebräuchliche zur Umsetzung einer rotirenden in eine geradlinig hin- und hergehende Bewegung oder umgekehrt, jenachdem die Kurbel das treibende Glied ist (Kurbelschubgetriebe) oder der Schieber (Schubkurbelgetriebe). Im letzteren Falle sind die Uebergangslagen AB_0C_0 und AB_1C_1 Todlagen, von denen aus bei einerlei Bewegungssinn des Schiebers die Kurbel in beiderlei Sinn rotiren kann; die zwangläufige Ueberschreitung dieser Lagen mit stets demselben Drehungssinne der Kurbel pflegt (nach §. 32) durch Massenkraftschluss (durch ein Schwungrad auf der Kurbelwelle) oder durch Kraftkettenschluss (durch Verbindung von zwei gleichen Schubkurbelgetrieben mit gemeinschaftlicher Kurbelwelle) oder durch beide Mittel zugleich bewirkt zu werden. Unter sich mögen die beiden Todlagen AB_0C_0 und AB_1C_1, in denen der Winkel ABC beziehungsweise $= 0$ und 180^0 ist, als obere und untere Todlage, die Punkte B_0 und B_1 als oberer und unterer Todpunkt unterschieden werden (analog der sogenannten oberen und unteren Conjunction eines innerhalb der Erdbahn umlaufenden Planeten B bezüglich auf A als Sonne und C als Erde).

2. Schubschwinge (Fig. 48), durch Feststellung des Gliedes c aus der Kette hervorgehend; d ist Schieber, a Koppel (mit dem jeweiligen Schnittpunkte P von BC und der Normalen zu AC im Punkte A als Pol), b Schwinge. Der Schieber bewegt sich in einer Strecke $A_0A_1 = 2a$ hin und her, während die Schwinge zwischen den Grenzlagen CB' und CB'' schwingt, die dann erreicht werden, wenn A in A' liegt so, dass $CA'B'$ und $CA'B''$ rechte Winkel sind; der Schwingungswinkel $B'CB''$ ist also $= 2\,arc\,sin\,\frac{a}{b}$, und es entsprechen

Fig. 48.



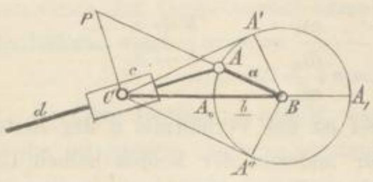
den Lagen A_0 A' A_1 A' A_0 des Punktes A

die Lagen B_0 B' B_0 B'' B_0 des Punktes B.

Die Beziehung zwischen dem relativen Drehungswinkel B_0AB der Koppel gegen den Schieber und dem entsprechenden Wege A_0A des letzteren ist dieselbe, wie bei der Schubkurbel (Fig. 47) die Beziehung zwischen dem Drehungswinkel B_0AB der Kurbel und dem Wege C_0C des Schiebers. Einige, freilich seltene Anwendungen hat dieser Mechanismus als Getriebe besonders in der Weise gefunden, dass dabei die Bewegung von der Koppel ausgeht; Todlagen sind dann nicht vorhanden.

3. Schwingende Kurbelschleife (Fig. 49), entsprechend der Feststellung des Gliedes b; c ist Schleife, d Schieber, a Kurbel. Der Pol P, um den sich der Schieber d jeweilig dreht, wird in dem Schnittpunkte von AB mit der Normalen zu AC im Punkte C gefunden (ebenso wie in Fig. 47 der Pol für die Bewegung von b gegen d gefunden wurde). Während die Kurbel rotirt, schwingt die Schleife zwischen den Grenzlagen CA' und CA'' (Winkel $CA'B = CA''B = 90^0$), und wenn jene gleichförmig rotirt, erfolgen die Schwingungen der Schleife im einen und im anderen Sinne in verschiedenen Zeiten, deren Verhältniss

Fig. 49.



$$n = \frac{\text{Winkel } A_1BA'}{\text{Winkel } A'BA_0} = \frac{\pi - arc\cos\frac{a}{b}}{arc\cos\frac{a}{b}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ist, in Uebereinstimmung mit Gl. (7), §. 38 für die gleichschenklige Kurbelschwinge (Fig. 46), wenn $\frac{a}{c}$ dort $= \frac{a}{b}$ hier ist; der Schwingungswinkel $A'CA'' = 2\, arc\sin\frac{a}{b}$ der Schleife ist dann aber nur halb so gross wie dort derjenige der Schwinge. Diese Ungleichheit der Schwingungszeiten der Schleife im einen und im anderen Sinne bei gleichförmiger Rotation der Kurbel hat Veranlassung gegeben, den vorliegenden Mechanismus in der Weise als Getriebe zu verwenden, dass dabei die Bewegung von der Kurbel ausgeht, d. h. als schwingendes Kurbelschleifgetriebe, um von der Schleife aus ein Werkzeug (Schneid- oder Stosswerkzeug) zu bewegen, dessen Rückgang schneller als der Vorgang erfolgen soll; Todlagen sind dabei nicht vorhanden. Noch häufiger ist übrigens die Benutzung dieses Mechanismus als Getriebe in der Weise, dass die Bewegung vom Schieber ausgeht, wie bei oscillirenden Dampfmaschinen, wo der Cylinder die Schleife, die Kolbenstange mit Kolben der Schieber ist; dabei sind dann BA_0C und BA_1C Todlagen, die auf ähnliche Weise wie bei dem Schubkurbelgetriebe (Fig. 47) zwangläufig überschritten werden können.

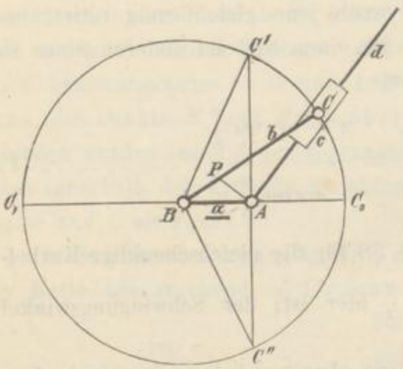
4. Rotirende Kurbelschleife (Fig. 50); das Glied a ist Steg, b Kurbel, c Schieber, d Schleife; der jeweilige Pol von c ist der Schnittpunkt P von BC und der Normalen zu AC im Punkte A (ebenso wie in Fig. 48 der Pol von a bezüglich der relativen Bewegung gegen c). Schleife

und Kurbel rotiren um ihre Axen A und B mit Winkelgeschwindigkeiten ω_a resp. ω_b, deren Verhältniss veränderlich, im Mittel $= 1$, am grössten in der Lage C_0, am kleinsten in der Lage $C_{,}$ des Punktes C ist, und zwar

$$\left.\begin{array}{l} max\,\dfrac{\omega_a}{\omega_b}=\dfrac{b}{b-a} \\ min\,\dfrac{\omega_a}{\omega_b}=\dfrac{b}{b+a} \end{array}\right\}\ \text{somit}\ \frac{max\,\dfrac{\omega_a}{\omega_b}}{min\,\dfrac{\omega_a}{\omega_b}}=m=\frac{b+a}{b-a}\ \ldots\ldots (2).$$

Bei gleichförmiger Rotation der Kurbel ist das Verhältniss n der Zeiten, welche die Schleife zur einen und zur anderen der beiden halben Umdrehungen gebraucht, deren Grenzlagen AC', AC'' zu AB senkrecht sind, $=$ dem Verhältnisse der hohlen Winkel $C_{,}BC'$, $C'BC_0$, also

Fig. 50.



$$n=\frac{\pi - arc\cos\dfrac{a}{b}}{arc\cos\dfrac{a}{b}};$$

$$\frac{a}{b}=\cos\frac{\pi}{n+1}\ \ldots (3).$$

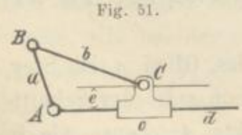
Diese Gleichungen (2) und (3) sind dieselben, wie die in §. 38 für die gleichschenklige Doppelkurbel aufgestellten Gleichungen (4) und (5) bei Vertauschung von c mit b; sie ergeben also auch wie dort:

$$m=cotg^2\frac{\pi}{2(n+1)}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4),$$

und es ist ersichtlich, inwiefern diese rotirende Kurbelschleife jener gleichschenkligen Doppelkurbel ebenso entspricht wie die schwingende Kurbelschleife (Fig. 49) der gleichschenkligen Kurbelschwinge entsprechend gefunden wurde. Alle diese Mechanismen können (ebenso wie gegenläufige Zwillingskurbeln oder elliptische Räder) als Getriebe zur Hin- und Herbewegung von Werkzeugen mit schnellerem Rückwärts-, als Vorwärtsgang benutzt werden. —

Mechanismen aus der allgemeinen Schubkurbelkette werden viel seltener im Maschinenbau angewendet. Ist bei einer solchen (Fig. 51) e die Entfernung der parallelen geradlinigen relativen Bahnen, welche die Punkte C, A als Punkte der Elemente c und d des Prismenpaares c, d durchlaufen, so kann die Kette aus einer viergliedrigen Drehkörperkette $ABCD$ dadurch hervor-

Fig. 51.



gegangen gedacht werden, dass die Axe D ins Unendliche gerückt ist, während die Gliedlängen CD und AD sich um $CD - AD = e$ unterscheiden. Indem somit $AB = a$ die kleinste, CD die grösste Gliedlänge dieser Kette ist, kann sie nach der allgemeinen Entwickelung in §. 36 nur dann einen der Doppelkurbel oder der Schwingkurbel analogen Mechanismus liefern, wenn

$$a + CD < b + AD, \text{ also } a + e < b \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

ist. Ist diese Bedingung erfüllt, was gemäss der Voraussetzung $a < b$ nur bei der im engeren Sinne so genannten Schubkurbel ($e = 0$) ohne Weiteres der Fall ist, so ergiebt sich nach jener allgemeinen Entwickelung in §. 36 durch Feststellung des kürzesten Gliedes a die der Doppelkurbel analoge allgemeine rotirende Kurbelschleife (entsprechend Fig. 50), durch Feststellung eines der beiden dem kürzesten benachbarten Glieder d oder b die der Schwingkurbel analoge allgemeine Schubkurbel (entsprechend Fig. 47) mit der Schublänge

$$s = \sqrt{(b+a)^2 - e^2} - \sqrt{(b-a)^2 - e^2} \quad \ldots\ldots\ldots (6)$$

des Schiebers c oder die allgemeine schwingende Kurbelschleife (entsprechend Fig. 49), endlich durch Feststellung des dem kürzesten gegenüberliegenden Gliedes c die der Doppelschwinge analoge allgemeine Schubschwinge (entsprechend Fig. 48).

Mechanismen der letzten Art mit nur schwingender resp. geradlinig hin- und hergehender Bewegung beider dem festgestellten benachbarter Glieder ergeben sich aus der allgemeinen Schubkurbelkette immer, wenn die Bedingung (5) nicht erfüllt ist, einerlei welches das festgestellte Glied sein möge. Bei Feststellung von d erhält man dann statt der Schubkurbel eine Schubschwinge ebenso wie immer bei Feststellung von c, bei Feststellung von b oder a aber statt der schwingenden resp. rotirenden Kurbelschleife einen Mechanismus, der nur aus dieser allgemeinen Schubkurbelkette ($e > 0$) hervorgeht, und welcher, indem dem festgestellten Gliede einerseits eine Schwinge, andererseits eine schwingende Schleife benachbart ist, als schleifende Doppelschwinge oder auch kürzer als Schleifschwinge bezeichnet werden kann.

Ein Anwendungsbeispiel der allgemeinen Schubschwinge und zwar derjenigen, in welche bei Feststellung des Gliedes d die allgemeine Schubkurbel wegen Nichterfüllung der Bedingung (5) übergeht, bietet der Schwartzkopff'sche Universalschraubenschlüssel dar. Bei demselben wird das Glied d (Fig. 51) dadurch festgestellt, dass eine damit verbundene zur Schubrichtung des Prismenpaares c, d senkrechte ebene Ansatzfläche gegen eine

Seitenfläche der festzudrehenden oder zu lösenden Schraubenmutter angelegt wird; eine damit parallele Ansatzfläche des Gliedes c wird dann gegen die entgegengesetzte Seitenfläche der Schraubenmutter dadurch angedrückt, dass die Schwinge a durch einen mit ihr verbundenen Handgriff in entsprechendem Sinne gedreht wird. Ist so die Mutter zwischen den beiden Ansatzflächen eingeklemmt, so bildet sie mit dem ganzen Mechanismus einen starren Körper, der nun vermittels des Handgriffes weiter gedreht werden kann. Als Getriebe kommt also der Mechanismus hier so zur Verwendung, dass er als allgemeines Schwingschubgetriebe zu bezeichnen ist.

§. 40. Bewegungsgesetze des Schubkurbelmechanismus.

Bei der ausgedehnten Anwendung, welche die Schubkurbel (Fig. 47 im vor. §.) im Maschinenbau findet, ist es von Interesse, das Bewegungsgesetz dieses Mechanismus näher festzustellen und in Formeln zu bringen, auf die im weiteren Verlauf dieses Werkes vielfach Bezug zu nehmen sein wird. Insbesondere handelt es sich dabei um die Beziehung zwischen gleichzeitigen Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte B und C, also des Kurbelzapfens und des Schiebers, indem die Bewegung jedes anderen Punktes der Koppel BC durch die ihrer Endpunkte B, C bestimmt ist.

Ist γ der Winkel ACB, der dem von der oberen Todlage aus gerechneten Drehungswinkel $B_0AB = \alpha$ der Kurbel entspricht, so ergiebt sich der entsprechende Weg des Schiebers:

$$s = C_0C = B_0C - b = a(1 - \cos\alpha) - b(1 - \cos\gamma)$$

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos\alpha - \frac{1 - \cos\gamma}{\lambda} \text{ mit } \lambda = \frac{a}{b} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

oder wegen $a \sin\alpha = b \sin\gamma$, also $\sin\gamma = \lambda \sin\alpha$ und mit Rücksicht darauf, dass γ ein (positiver oder negativer) spitzer Winkel, $\cos\gamma$ folglich positiv ist,

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos\alpha - \frac{1 - \sqrt{1 - \lambda^2 \sin^2\alpha}}{\lambda} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

Wäre α ein von der unteren Todlage aus gerechneter Drehungswinkel der Kurbel und s der entsprechende Weg des Schiebers, so brauchte in dieser Gleichung nur λ entgegengesetzt genommen zu werden, und gilt dieselbe Bemerkung dann auch für alle aus der Gl. (2) abgeleiteten Gleichungen. Ist nämlich der Winkel $B_1AB = \alpha'$, $C_1C = s'$, so ist nach Gl. (2)

$$\frac{2a-s'}{a}=1-\cos(\pi-\alpha')-\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2(\pi-\alpha')}}{\lambda}$$

$$\frac{s'}{a}=1-\cos\alpha'+\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha'}}{\lambda},$$

wie auch aus Gl. (2) durch Vertauschung von s mit s', α mit α', λ mit $-\lambda$ hervorgeht.

In der Regel ist λ ein hinlänglich kleiner Bruch, um, wenn die in Gl. (2) vorkommende Wurzelgrösse in die Reihe

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}=1-\frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha-\frac{1}{8}\lambda^4\sin^4\alpha-\ldots$$

entwickelt wird, auf die Berücksichtigung des Gliedes mit der niedrigsten Potenz von λ sich beschränken zu dürfen, entsprechend dann auch in der Gleichung für den Schieberweg:

$$\frac{s}{a}=1-\cos\alpha-\frac{1}{2}\lambda\sin^2\alpha-\frac{1}{8}\lambda^3\sin^4\alpha-\ldots \quad \ldots\ldots (3).$$

Insbesondere für die Mitte des Kurbelweges von der oberen zur unteren Todlage ($\alpha=90^0$) ergiebt sich:

$$\frac{s}{a}=1-\frac{1-\sqrt{1-\lambda^2}}{\lambda}=1-\frac{1}{2}\lambda-\frac{1}{8}\lambda^3-\ldots\ldots\ldots (4)$$

und für die Mitte des Schieberweges ($s=a$):

$$(\lambda\cos\alpha+1)^2=1-\lambda^2\sin^2\alpha;\quad \cos\alpha=-\frac{1}{2}\lambda\ \ldots\ldots (5).$$

Aus dem Ausdrucke von $\frac{s}{a}$ ergiebt sich das Verhältniss entsprechender Wege des Schiebers und des Kurbelzapfens (der Punkte C und B, Fig. 47) $=\frac{s}{a\alpha}$ und das Verhältniss ihrer gleichzeitigen Geschwindigkeiten $\frac{w}{v}=\frac{1}{a}\frac{ds}{d\alpha}$. Unmittelbarer erhält man dieses Geschwindigkeitsverhältniss von Schieber und Kurbelzapfen mit Rücksicht auf die Bedeutung des Pols P der Koppel BC aus dem Dreiecke PBC:

$$\frac{w}{v}=\frac{PC}{PB}=\frac{\sin(\alpha-\gamma)}{\cos\gamma}=\sin\alpha-\cos\alpha\, tg\,\gamma\ \ldots\ldots\ldots (6)$$

oder wegen $$tg\,\gamma=\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma}=\frac{\lambda\sin\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}$$

$$\frac{w}{v} = \sin\alpha\left(1 - \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

$$= \sin\alpha\left[1 - \lambda\cos\alpha\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha + \ldots\right)\right] \ldots\ldots\ldots (8).$$

Insbesondere für die Mitte des Kurbelweges ($\alpha = 90^0$) ist

$$w = v \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

und für die Mitte des Schieberweges ($s = a$) wegen $\cos\alpha = -\frac{1}{2}\lambda$ nach Gl. (5), also

$$\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\lambda^2\left(1-\frac{1}{4}\lambda^2\right)} = \sqrt{1-\lambda^2+\frac{1}{4}\lambda^4} = 1 - \frac{1}{2}\lambda^2$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{w}{v} &= \sqrt{1-\frac{1}{4}\lambda^2}\left(1 + \frac{\frac{1}{2}\lambda^2}{1-\frac{1}{2}\lambda^2}\right) = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{4}\lambda^2}}{1-\frac{1}{2}\lambda^2} \\ &= 1 + \frac{3}{8}\lambda^2 + \frac{23}{128}\lambda^4 + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (10).$$

Für $\alpha = 0$ und 180^0 ist das Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{w}{v} = 0$; beim Uebergange von einer zur anderen Todlage nimmt es also zuerst zu und dann ab, nachdem es ein Maximum erreicht hatte für den durch die Gleichung

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = 0$$

bestimmten Werth von α. Dieser Differentialquotient von $\frac{w}{v}$ nach α ergiebt sich aus Gl. (6):

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = \cos\alpha + \sin\alpha\, tg\,\gamma - \frac{\cos\alpha}{\cos^2\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}$$

oder wegen $\sin\gamma = \lambda\sin\alpha,\quad \cos\gamma\, d\gamma = \lambda\cos\alpha\, d\alpha \ldots\ldots\ldots (11)$

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = \cos\alpha + \sin\alpha\, tg\,\gamma - \lambda\frac{\cos^2\alpha}{\cos^3\gamma} \ldots\ldots\ldots (12)$$

$$= \cos\alpha + \lambda\frac{\sin^2\alpha - \frac{\cos^2\alpha}{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}} \ldots\ldots\ldots (13)$$

$$= \cos\alpha + \lambda\left[\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\left(1 + \lambda^2\sin^2\alpha + ..\right)\right]\left(1 + \frac{1}{2}\lambda^2\sin^2\alpha + ..\right)$$

$$= \cos\alpha + \lambda\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right) + \frac{1}{2}\lambda^3\sin^2\alpha\left(\sin^2\alpha - 3\cos^2\alpha\right) + \ldots (14).$$

Unter der Voraussetzung, dass λ ein kleiner Bruch und dass der dem Maximum von $\frac{w}{v}$ entsprechende Werth von $\cos\alpha$ eine mit λ vergleichbare Grösse ist, muss dieser Werth nach Gl. (14) bei Vernachlässigung der Glieder von der Grössenordnung λ^5 der folgenden Gleichung entsprechen:

$$\cos\alpha + \lambda(1 - 2\cos^2\alpha) + \frac{1}{2}\lambda^3 = 0.$$

Als erster Näherungswerth folgt $\cos\alpha = -\lambda$, und wenn dieser in dem Gliede mit λ substituirt wird, als zweiter Näherungswerth:

$$\cos\alpha = -\lambda(1 - 2\lambda^2) - \frac{1}{2}\lambda^3 = -\lambda + \frac{3}{2}\lambda^3 \quad \ldots\ldots (15),$$

der bis auf Glieder von der Grössenordnung λ^5 richtig und in der That, wie vorausgesetzt wurde, eine mit λ vergleichbare Grösse ist. Mit derselben Annäherung findet man hiermit nach Gl. (3) den entsprechenden Schieberweg:

$$\frac{s}{a} = 1 + \frac{1}{2}\lambda - \frac{9}{8}\lambda^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

und nach Gl. (8) das grösste Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{w}{v}$ selbst:

$$max\frac{w}{v} = 1 + \frac{1}{2}\lambda^2 - \frac{1}{8}\lambda^4 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17).$$

Mit Hülfe des durch Gl. (6)—(8) bestimmten Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{w}{v}$ und seines durch Gl. (12)—(14) bestimmten Differentialquotienten $\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)$ ist schliesslich die Beziehung zwischen den Beschleunigungen des Kurbelzapfens und des Schiebers auszudrücken. Indem nämlich, unter t die Zeit verstanden, $\frac{d\alpha}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Kurbel $= \frac{v}{a}$ und somit

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{w}{v}\right) \cdot \frac{dt}{d\alpha} = \frac{1}{v^2}\left(v\frac{dw}{dt} - w\frac{dv}{dt}\right)\frac{a}{v}$$

ist, ergiebt sich zwischen der Beschleunigung des Schiebers $= \frac{dw}{dt}$ und den beiden Componenten der Beschleunigung des Kurbelzapfens (Tangentialbeschleunigung $= \frac{dv}{dt}$ und Normalbeschleunigung $= \frac{v^2}{a}$) die Beziehung:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{dv}{dt} \cdot \frac{w}{v} + \frac{v^2}{a} \cdot \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (18).$$

Bei gleichförmiger Rotation der Kurbel beschränkt sich die Beschleunigung des Kurbelzapfens B auf seine alsdann constante Normalbeschleunigung, und ist das Beschleunigungsverhältniss der Punkte C, B:

$$\frac{dw}{dt}:\frac{v^2}{a}=\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right) \qquad (19),$$

insbesondere für die obere Todlage ($\alpha=0$) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt}:\frac{v^2}{a}=1-\lambda \qquad (20),$$

für die Mitte des Kurbelweges ($\alpha=90^0$) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt}:\frac{v^2}{a}=\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}=\lambda+\frac{1}{2}\lambda^3+\ldots \qquad (21),$$

für die Mitte des Schieberweges ($s=a, \cos\alpha=-\frac{1}{2}\lambda$) näherungsweise nach Gl. (14):

$$\frac{dw}{dt}:\frac{v^2}{a}=-\frac{1}{2}\lambda+\lambda\left(1-\frac{1}{2}\lambda^2\right)+\frac{1}{2}\lambda^3=\frac{1}{2}\lambda \qquad (22),$$

endlich, nachdem es bei der durch Gl. (15) oder (16) näherungsweise bestimmten Lage der Kurbel resp. des Schiebers durch Null gegangen und negativ, d. h. dem Bewegungssinne entgegengesetzt geworden ist, für die untere Todlage ($\alpha=180^0$) nach Gl. (13):

$$\frac{dw}{dt}:\frac{v^2}{a}=-(1+\lambda) \qquad (23).$$

Die durch Gl. (20) und (23) bestimmten Absolutwerthe der Schieberbeschleunigung

$$=(1-\lambda)\frac{v^2}{a} \text{ im Sinne } C_0C_, \text{ für die Lage } C_0$$

und $$=(1+\lambda)\frac{v^2}{a} \text{ im Sinne } C_,C_0 \text{ für die Lage } C_,$$

des Schiebers sind Maximalwerthe, wie unmittelbar aus der Symmetrie der Lagen und Bewegungszustände des Mechanismus in Beziehung auf die Schieberbahn $C_0C_,$ hervorgeht.

Vermittels der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte B, C kann schliesslich die Geschwindigkeit und die Beschleunigung eines beliebigen Punktes X der Koppel BC gefunden werden, und zwar am übersichtlichsten mit Hülfe des Pols P und des Beschleunigungscentrums Q (Fig. 52), nachdem zuvor die Winkelgeschwindigkeit $=\omega$ um P

und die Beschleunigung $=\varphi$ im Abstande $=1$ von Q bestimmt worden sind. Jene Winkelgeschwindigkeit ist:

$$\omega=\frac{v}{PB}=\frac{w}{PC}=\frac{w:\sin\alpha}{PA}=\frac{w:\sin\alpha}{PB-a}=\frac{w:\sin\alpha}{\frac{v}{\omega}-a},$$

woraus mit Rücksicht auf Gl. (7) folgt:

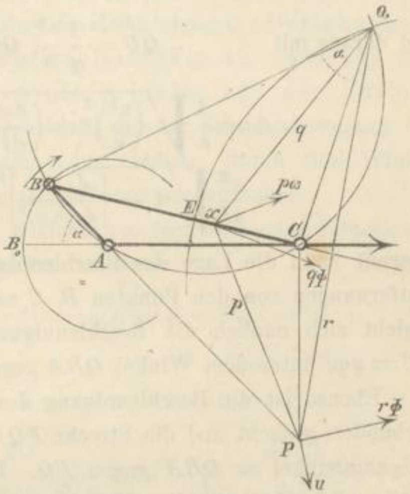
$$v-a\omega=\frac{w}{\sin\alpha};\quad \omega=\frac{1}{a}\left(v-\frac{w}{\sin\alpha}\right)=\frac{v}{a}\frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2\sin^2\alpha}}\ .\ (24).$$

Hiermit kann die Lage des Pols P auch durch seine Entfernungen

$$PB=\frac{v}{\omega},\ PC=\frac{w}{\omega}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (25)$$

von den Punkten B, C bestimmt werden, und ergiebt sich die Geschwindigkeit des beliebigen Punktes X von $BC=p\omega$, normal zu $PX=p$ gerichtet.

Fig. 52.



Das Beschleunigungscentrum Q ist nach bekannten Gesetzen der allgemeinen Kinematik dadurch charakterisirt, dass die Beschleunigungen der verschiedenen Systempunkte den Entfernungen der letzteren von Q proportional und gegen ihre Verbindungslinien mit Q in gleichem Sinne gleich geneigt sind. Indem nun — bei Voraussetzung gleichförmiger Rotation der Kurbel — die Beschleunigung des Punktes B die Richtung BA, die von C die Richtung AC oder CA hat und somit unter dem Winkel α oder $180^0-\alpha$ gegen jene geneigt ist, müssen auch die Geraden BQ, CQ unter demselben Winkel gegen einander geneigt sein, muss also Q in dem Kreise liegen, der über BC als Sehne die Winkel α und $180^0-\alpha$ als Peripheriewinkel fasst, d. h. in dem Kreise, der durch die Punkte A, B, C geht. Da ferner der Ort aller Punkte Q, deren Entfernungen von zwei Punkten B, C ein constantes Verhältniss (hier = dem Verhältnisse der Beschleunigungen $\frac{v^2}{a}$ und $\frac{dw}{dt}$ dieser Punkte) haben, der Kreis ist, dessen Durchmesser EF in der Geraden BC so liegt, dass seine Endpunkte E, F (von denen in Fig. 52 nur der erste sichtbar ist) die Strecke BC in jenem Verhältnisse theilen, hier also so, dass

$$BE:CE = BF:CF = \frac{v^2}{a} : \frac{dw}{dt} = 1 : \frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)$$

ist, so ist das Beschleunigungscentrum Q einer der beiden Schnittpunkte jenes Kreises durch A, B, C mit diesem Kreise über dem Durchmesser EF und zwar derjenige von beiden, für welchen die Beschleunigungen von B und C in gleichem Sinne beziehungsweise gegen BQ und CQ gleich geneigt sind. (Der in Fig. 52 mit Q bezeichnete Schnittpunkt ist das Beschleunigungscentrum insofern, als bei der betreffenden Lage des Mechanismus die Beschleunigung des Punktes C im Sinne AC gerichtet ist.) Mit Rücksicht auf das Dreieck QBC, dessen Winkel bei $Q = \alpha$ ist, hat man nun:

$$b^2 = \overline{QB}^2 + \overline{QC}^2 - 2 \,.\, QB \,.\, QC \,.\, \cos\alpha$$

und daraus mit

$$QB = \frac{1}{\varphi}\frac{v^2}{a},\quad QC = \frac{1}{\varphi}\frac{dw}{dt} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (26)$$

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{b}\sqrt{\left(\frac{v^2}{a}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dt}\right)^2 - 2\frac{v^2}{a}\frac{dw}{dt}\cos\alpha} \\ &= \frac{v^2}{ab}\sqrt{1 + \left[\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right)\right]^2 - 2\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{w}{v}\right).\cos\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (27).$$

Hiermit kann die Lage des Beschleunigungscentrums Q auch durch seine Entfernungen von den Punkten B, C nach Gl. (26) bestimmt werden, und ergiebt sich endlich die Beschleunigung des beliebigen Punktes X von $BC = q\varphi$, unter dem Winkel QBA gegen $XQ = q$ geneigt.

Ebenso ist die Beschleunigung des Punktes P, wenn er mit BC fest verbunden gedacht und die Strecke $PQ = r$ gesetzt wird, $= r\varphi$ mit einem Neigungswinkel $= QBA$ gegen PQ. Den Sätzen der allgemeinen Kinematik zufolge ist aber diese Beschleunigung des Pols auch $= u\omega$ und normal gegen die in P sich berührenden Polbahnen (des Steges und der Koppel) gerichtet, wenn u die Wechselgeschwindigkeit des Pols, d. h. die Geschwindigkeit bedeutet, mit welcher derselbe in der festen (mit dem Stege verbundenen) Polbahn sich bewegt. Diese Wechselgeschwindigkeit ist also:

$$u = \frac{r\varphi}{\omega}$$

und normal zur Beschleunigung $r\varphi$ des Pols P gerichtet. Ihr in Fig. 52 angedeuteter Sinn entspricht dem Umstande, dass, wie bekannt, der Sinn der Polbeschleunigung durch rechtwinklige Drehung des Sinnes von u entgegen dem Drehungssinne von ω erhalten wird. —

Indem die hier entwickelten Formeln namentlich insofern Anwendung finden, als es sich bei Dampfmaschinen um die Beziehung zwischen der Bewegung des Kolbens (als Schieber e) im Cylinder (als Steg d) und der Bewegung des Kurbelzapfens B resp. der Winkelbewegung der Kurbel a handelt, mag schliesslich darauf hingewiesen werden, dass sie nicht ohne Weiteres auch für oscillirende Dampfmaschinen gelten, bei denen nach Art der schwingenden Kurbelschleife (Fig. 49 im vor. §.) der Cylinder (als Schleife c) um die Axe C schwingt und die Kurbel nicht um A, sondern um B rotirt. Die Bewegung des Kolbens im Cylinder ist dann zwar als relative Bewegung des Gliedes d gegen das Glied c die gerade umgekehrte wie im vorigen Falle als Relativbewegung von c gegen d, aber der vom unteren Todpunkte A_0 aus gerechnete Drehungswinkel A_0BA der Kurbel entspricht jetzt in Fig. 47 nicht dem Drehungswinkel $B_0AB = \alpha$, sondern dem Winkel $ABC = \beta = \alpha - \gamma$, so dass die Ermittelung der Beziehungen, die bei der schwingenden Kurbelschleife (Fig. 49) zwischen der Bewegung des Schiebers gegen die Schleife und der Kurbeldrehung stattfinden, darauf hinausläuft, die der Schieberbewegung bei der Schubkurbel (Fig. 47) entsprechenden Grössen durch den Winkel $ABC = \beta$ anstatt durch den Winkel $B_0AB = \alpha$ auszudrücken.

Um zu dem Ende die in obigen Gleichungen vorkommenden Functionen von α durch solche von β auszudrücken, hat man

$$\lambda \sin \alpha = \sin \gamma = \sin (\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta;$$

daraus $$tg\, \alpha = \frac{\sin \beta}{\cos \beta - \lambda}; \quad \sin^2 \alpha = \frac{tg^2 \alpha}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{\sin^2 \beta}{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + tg^2 \alpha} = \frac{(\cos \beta - \lambda)^2}{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}; \quad \cos \alpha = \frac{\cos \beta - \lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}}.$$

Die Wurzelgrösse ist in diesem Ausdrucke von $\cos \alpha$ absolut zu nehmen, weil α und β gleichzeitig von 0 bis 180° wachsen, also $\sin \alpha$ und $\sin \beta$ gleichzeitig positiv und deshalb, wie der Ausdruck von $tg\, \alpha$ erkennen lässt, $\cos \alpha$ und $\cos \beta - \lambda$ stets einerlei Zeichens sind. Die Substitution dieser Ausdrücke von $\sin^2 \alpha$ und $\cos \alpha$ in Gl. (2) liefert:

$$\frac{s}{a} = 1 - \frac{\cos \beta - \lambda}{\sqrt{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}} - \frac{1}{\lambda}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{\lambda^2 \sin^2 \beta}{1 - 2\lambda \cos \beta + \lambda^2}}\right) \; . \; . \; (28).$$

Durch Entwicklung in eine nach wachsenden Potenzen von λ fortschreitende Reihe findet man:

$$\frac{s}{a} = 1 - \cos\beta + \frac{1}{2}\lambda \sin^2\beta + \frac{1}{2}\lambda^2 \sin^2\beta \cos\beta$$
$$+ \frac{1}{8}\lambda^3 \sin^2\beta\,(4\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (29).$$

Rechnet man β von der oberen Todlage BA_1 (Fig. 49) der Kurbel und s vom entsprechenden anderen Ende des relativen Schieberweges, so hat man in Gl. (28) und (29) nur $2a - s$ für s, $180^0 - \beta$ für β zu setzen, wodurch sich Gleichungen ergeben, die aus Gl. (28) und (29) auch durch Vertauschung von λ mit $-\lambda$ hervorgehen. Dieselbe Bemerkung, analog der oben in Beziehung auf Gl. (2) gemachten, gilt dann auch für alle abgeleiteten Gleichungen.

Beschränkt man sich unter der Voraussetzung, dass λ ein kleiner Bruch ist, auf die Berücksichtigung der Glieder mit der ersten Potenz von λ, so geht Gl. (29) aus Gl. (3) durch Vertauschung von α mit β, λ mit $-\lambda$ hervor, woraus dann, unter v wieder die Geschwindigkeit des Kurbelzapfens, also hier des Punktes A (Fig. 49) verstanden, mit Rücksicht auf die so eben gemachte Bemerkung und darauf, dass ebenso

wie oben $\quad \dfrac{w}{v} = \dfrac{1}{a}\dfrac{ds}{d\alpha}, \quad \dfrac{dw}{dt} : \dfrac{v^2}{a} = \dfrac{d}{d\alpha}\left(\dfrac{w}{v}\right)$ war,

so hier $\quad \dfrac{w}{v} = \dfrac{1}{a}\dfrac{ds}{d\beta}, \quad \dfrac{dw}{dt} : \dfrac{v^2}{a} = \dfrac{d}{d\beta}\left(\dfrac{w}{v}\right)$ ist,

folgt, dass in erster Annäherung die Beziehungen zwischen der Relativbewegung des Schiebers gegen die Schleife und der Bewegung des Kurbelzapfens A bei der schwingenden Kurbelschleife dieselben sind wie die zwischen den Bewegungen des Schiebers und des Kurbelzapfens B bei der Schubkurbel, wenn nur die Bewegung des Kurbelzapfens in beiden Fällen vom oberen oder in beiden Fällen vom unteren Todpunkte aus gerechnet wird, d. h. von B_0 in Fig. 47 und von A_1 in Fig. 49, oder von B_1 in Fig. 47 und von A_0 in Fig. 49. Die genauere Entwickelung dieser Beziehungen ist für die schwingende Kurbelschleife weniger wichtig und zudem weniger einfach, als für die Schubkurbel.

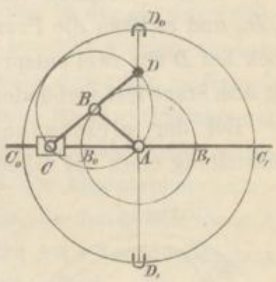
§. 41. Gleichschenklige Schubkurbelkette.

Bei Besprechung der Mechanismen, die aus der (im engeren Sinne so genannten) ebenen Schubkurbelkette erhalten werden können, waren die Glieder $AB = a$, $BC = b$ verschieden lang ($a < b$) vorausgesetzt worden, vorbehaltlich einer besonderen Untersuchung des Specialfalles $a = b$. In diesem letzteren, d. i. im Falle der gleichschenkligen Schubkurbelkette, sind die Glieder a, b und ebenso dann auch die Glieder c, d kinematisch nicht verschieden, womit zugleich der Unterschied der dort als Schubkurbel und als Schubschwinge (Fig. 47 und Fig. 48), desgleichen der Unterschied der als schwingende und als rotirende Kurbelschleife (Fig. 49 und Fig. 50) bezeichneten Mechanismen fortfällt. In der That kann die gleichschenklige Schubkurbelkette auch aus der gleichschenkligen Drehkörperkette (§. 38) und zwar dadurch hervorgegangen gedacht werden, dass die längeren gleichen Glieder c unendlich lang, d. h. durch ein Prismenpaar verbunden werden, dessen Schubrichtung parallel der Axenebene der sie mit den anderen gleichen Gliedern $= a$ verbindenden Drehkörperpaare ist; von den beiden Mechanismen aus der gleichschenkligen Drehkörperkette geht dann derjenige, welcher, entsprechend der Feststellung eines der Glieder c, dort als gleichschenklige Schwingkurbel (Fig. 46) bezeichnet wurde, in einen als gleichschenklige Schubkurbel zu bezeichnenden, und der dort bei Feststellung eines der Glieder a als gleichschenklige Doppelkurbel (Fig. 45) bezeichnete in einen als gleichschenklige Kurbelschleife zu bezeichnenden Mechanismus über.

Bei der gleichschenkligen Schubkurbel (Fig. 53) ist, während die Kurbel $AB = a$ um A rotirt, der Schieber längs dem Stege in einer geradlinigen Bahn $C_0AC_1 = 4a$ beweglich, deren Mitte A und die als Grenzfall der kreisbogenförmigen Bahn $C'AC''$ (Fig. 46) des Punktes C bei der gleichschenkligen Schwingkurbel zu betrachten ist. Einer Umdrehung der Kurbel entspricht eine Hin- und Herbewegung des Schiebers, dem Drehungswinkel $B_0AB = \alpha$ der ersteren der Weg

$$C_0C = s = 2a(1 - \cos\alpha)$$

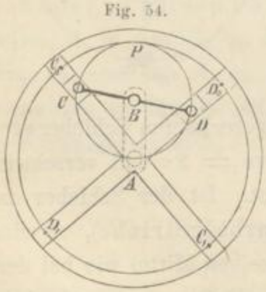
Fig. 53.



des letzteren = dem von einem Todpunkte aus gerechneten Schieberwege eines Schubkurbelmechanismus, dessen Kurbellänge $= 2a$ und verschwindend klein im Vergleich mit der Koppellänge ist. Ist der Schieber das treibende Glied (gleichschenkliges Schubkurbelgetriebe), so sind die Grenzlagen C_0 und C_1 Todlagen und durch dieselben Mittel wie bei dem nicht gleichschenkligen Schubkurbelgetriebe zwangläufig zu überschreiten, insbesondere durch Verbindung der Kurbel mit einem Schwungrade. Geht aber die Bewegung von der Kurbel aus (gleichschenkliges Kurbelschubgetriebe), und ist letztere durch Drehung um 90^0 aus der Lage AB_0 in die Richtung AD_0 (Fig. 53) gekommen, der Schieber also von C_0 nach A, so ist diese Lage des Getriebes eine Wechsellage, indem von ihr aus bei fortgesetzter Kurbeldrehung der Schieber nicht nothwendig auch weiter zu gehen braucht, vielmehr der Mechanismus in ein Drehkörperpaar sich verwandeln kann, entsprechend einer Drehung der mit der Kurbel vereinigten Koppel um die zusammenfallenden Axen A, C. Ist aber ersteres der Fall, d. h. geht der Schieber weiter über A hinaus, so gelangt das Getriebe in eine zweite Wechsellage, wenn die Kurbel bei fortgesetzter Drehung in die Richtung $AD_{,}$ und der Schieber bei seiner rückläufigen Bewegung von $C_{,}$ her wieder nach A gelangt ist. Die zwangläufige Ueberschreitung dieser beiden Wechsellagen in der Weise, dass der Schieber zu beständiger Hin- und Herbewegung in der Strecke $C_0C_{,}$ genöthigt wird, kann durch Paarung gegenüber liegender Glieder, z. B. der Koppel BC mit dem Stege, entsprechend den Polbahnen dieser Glieder in der Nähe jener Lagen, vermittelt werden. Diese Polbahnen aber sind Cardanische Kreise um A und B mit den Halbmessern $2a$ und a; denn wenn CB über B hinaus um $BD = BC = a$ verlängert wird, so liegen die Punkte A, C, D beständig in dem Kreise um den Mittelpunkt B mit dem Halbmesser a, ist also CAD ein rechter Winkel, und die Bewegung der Koppel gegen den Steg identisch mit der Bewegung der Strecke CD im rechten Winkel C_0AD_0. In den Wechsellagen berühren sich die Polbahnen mit den Punkten D, D_0 oder $D, D_{,}$, und es kann die Paarung geschehen durch einen cylindrischen Triebstock bei D mit zwei entsprechenden Schlitzen bei D_0 und $D_{,}$, die in einem mit dem Stege fest verbundenen Körper ihre Oeffnungen gegen A hin kehren.

Bei der gleichschenkligen Kurbelschleife, entsprechend der Feststellung eines der Glieder a vorliegender Kette, etwa des Gliedes AB, Fig. 54, können die Kurbel BC um die Axe B und die Schleife AC um die Axe A in gleichem Sinne rotiren mit einem constanten Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse $= 2$ als Grenzfall der gleichschenkligen Doppelkurbel (§. 38, Fig. 45), indem das dieser entsprechende veränderliche Winkelgeschwindigkeitsverhältniss nach Gl. (3) daselbst, dessen Mittelwerth nur $= 2$ war, mit $c = \infty$ in den constanten Werth 2 übergeht. Die Kreise um A und B mit den Halbmessern $2a$ und a sind hier die Polbahnen beziehungsweise der Schleife und der Kurbel, und sie berühren sich in einem in der Verlängerung von AB

Fig. 54.



fest liegenden Punkte P als Pol. Ist die Kurbel treibendes Glied (gleichschenkliges Kurbelschleifgetriebe), so sind Todlagen nicht vorhanden. Geht aber die Bewegung von der Schleife aus (gleichschenkliges Schleifkurbelgetriebe), so würde, wenn C mit A zusammenfällt, der Schieber mit der Schleife vereinigt um die zusammenfallenden Axen A, C gegen die mit dem Stege vereinigte Kurbel sich drehen können, wenn nicht eine zwangläufige Ueberschreitung dieser Lagen durch besondere Hülfsmittel herbeigeführt wird, z. B. wieder durch einen cylindrischen Triebstock D an der Verlängerung $BD = BC$ der Kurbel nebst entsprechenden, mit der Schleife verbundenen Schlitzen bei D_0 und $D_,$. Statt dessen kann auch, wie Fig. 54 andeutet, durch Verdoppelung der Kurbel und der Schleife die einfache in eine zusammengesetzte Kette verwandelt werden, bestehend aus den ternären Gliedern CBD und $C_0 D_0 C_, D_,$, die einerseits durch Drehkörperpaare mit dem binären Stege AB, andererseits mit den binären Schiebern C und D, und zwar die verdoppelte Kurbel durch Drehkörperpaare, die verdoppelte Schleife durch Prismenpaare verbunden sind. Dieselbe Bewegungsübertragung zwischen zwei in gleichem Sinne rotirenden Wellen mit den Axen A, B könnte auch durch Zahnräder mit innerem Eingriff bewirkt werden, denen aber der in Rede stehende Mechanismus besonders dann vorzuziehen sein kann, wenn die Entfernung AB der Axen klein ist. —

Indem der kinematische Charakter der hier besprochenen gleichschenkligen Schubkurbelkette wesentlich darauf beruht, dass in der ebenen Schubkurbelkette nicht nur die Glieder a, b gleich lang gemacht wurden, sondern auch die beiden anderen, unendlich langen Glieder c, d der ihr zu Grunde liegenden Drehkörperkette schon gleich lang waren, ist ihre Abstammung wesentlich auf die im engeren Sinne so genannte Schubkurbelkette beschränkt, und können analoge Mechanismen aus der allgemeinen Schubkurbelkette (Fig. 51, §. 39) nicht erhalten werden, da deren Glieder c, d, obschon unendlich lang, doch nicht gleich, sondern um e verschieden lang sind, die Kette somit durch Specialisirung nur dadurch der allgemeineren gleichschenkligen Drehkörperkette subsumirt werden kann, dass gleichzeitig $a = b$ und $e = 0$ gemacht, d. h. der hier schon besprochene Fall vollständig hergestellt wird. Ist bei der allgemeinen Schubkurbelkette nur $a = b$, so ist damit die Bedingung (5) in §. 39 nicht erfüllt, so dass die Kette nur die dort schon erwähnten zweierlei Mechanismen, die allgemeine Schubschwinge bei Feststellung eines der Glieder c, d und die schleifende Doppelschwinge bei Feststellung eines der Glieder a, b liefert, ohne dass dieselben im Falle $a = b$ bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten darböten.

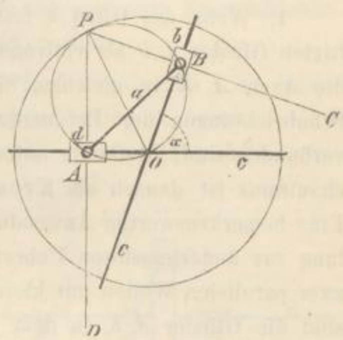
§. 42. Kreuzschieberkette.

In §. 39 ist die ebene Schubkurbelkette aus der ebenen Drehkörperkette dadurch abgeleitet worden, dass eines der 4 Drehkörperpaare A, B, C, D dieser letzteren als in ein Prismenpaar übergegangen vorausgesetzt wurde, entsprechend dem Fortrücken der Axe dieses Paares ins Unendliche, womit die beiden dadurch verbundenen Kettenglieder selbst unendlich lang wurden. Indem aber jetzt zwei der 4 Drehkörperpaare als in Prismenpaare übergegangen vorausgesetzt werden sollen, sind zwei Fälle zu unterscheiden, indem diese zwei Paare entweder benachbarte, wie C und D, oder gegenüber liegende, wie B und D, sein können; da ein Glied der ursprünglichen Drehkörperkette unendlich lang wird, indem die Axe eines der beiden Drehkörperpaare, die es mit den benachbarten Gliedern verbinden, ins Unendliche rückt, so sind im ersten Falle drei Glieder ($BC = b$, $CD = c$, $DA = d$) unendlich lang geworden, im zweiten Falle dagegen alle vier.

Hier wird zunächst der erste Fall vorausgesetzt, dass zwei benachbarte C, D der 4 Drehkörperpaare in Prismenpaare übergegangen sind. Das Glied $AB = a$ ist dann von endlicher Länge geblieben und durch Drehkörperpaare mit den Gliedern b, d verbunden, die ihrerseits mit dem Gliede c durch Prismenpaare verbunden sind. Die Schubrichtungen der letzteren sind jedenfalls nicht parallel, sondern gekreuzt, weil sonst die ganze Kette in ein Prismenpaar überginge, bestehend aus c als dem einen und aus den (gegeneinander unbeweglich gewordenen) Gliedern d, a, b als dem anderen Elemente. Das Glied c kann deshalb, sofern es nicht Steg, d. h. festgestellt ist, ein Kreuzschieber genannt, und die ganze Kette danach als Kreuzschieberkette bezeichnet werden. Die Benennungen der übrigen Glieder sollen je nach ihrer Lage und nach der Art ihrer Beweglichkeit in den aus der Kette hervorgehenden Mechanismen, desgleichen auch die Benennungen dieser Mechanismen selbst je nach dem Verhalten ihrer dem Stege benachbarten Glieder gemäss denselben Principien gewählt werden wie bisher, und wie sie insbesondere mit Bezug auf die Schubkurbelkette in §. 39 näher angegeben sind. — Ist α der Winkel, den die Schubrichtungen der beiden Prismenpaare mit einander bilden, so ist der Specialfall bemerkenswerth, dass $\alpha = 90^0$, in welchem die Kette als rechtwinklige im Gegensatze zu einer schiefwinkligen Kreuzschieberkette bezeichnet werde.

Ist O, Fig. 55, der Schnittpunkt der unter dem Winkel α gegen einander geneigten (auf eine mit ihnen parallele Ebene projicirten) Bahnen der Punkte A, B gegen den Kreuzschieber c, so ist die relative Bewegung der Glieder a, c identisch mit der des Figurenpaars „Strecke a in Winkel α" (§. 12); die Polbahnen dieser Glieder sind also Cardanische Kreise, und zwar ist der Durchmesser des zum Gliede a gehörigen (durch die Punkte A, B, O gehenden) kleineren Kreises $=$ dem Halbmesser des (um O als Mittelpunkt) zum Gliede c gehörigen grösseren Kreises $= \frac{a}{\sin \alpha}$; als Berührungspunkt beider Kreise (der Pol P) ist der Durchschnitt der Normalen zu AO und BO in den Punkten A und B. Die relative Bewegung der Glieder b, d ist eine nur gleitende; die Punkte des einen bewegen sich gegen das andere in congruenten Kreisen vom Halbmesser a in gleicher Weise (entsprechend dem unter III, b, α) in §. 3 aufgeführten Falle umkehrbarer Beweglichkeit), so dass entsprechende Normalen aller Punktbahnen beständig parallel sind, der Pol folglich stets im Unendlichen liegt.

Fig. 55.



Betrachtet man die Kette als Drehkörperkette $ABCD$, so dass C und D die unendlich fernen Punkte der Geraden PB und PA sind, so ist in dem unendlich grossen Dreiecke PCD jede Seite kleiner, als die Summe der beiden anderen, und zwar um eine unendlich grosse Strecke kleiner, so dass dieselbe Beziehung auch dann noch stattfindet, wenn die unendlich langen Dreiecksseiten um endliche Strecken verändert werden: PC um PB zur Darstellung der Gliedlänge $BC = b$, PD um PA zur Darstellung der Gliedlänge $AD = d$. Indem dann endlich diese Beziehung auch dadurch nicht geändert wird, dass zu irgend einer der unendlich grossen Strecken b, c, d die endliche Strecke a hinzugefügt wird, so ist ersichtlich, dass die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen, und dass somit hier stets die Bedingung erfüllt ist, die nach §. 36 zur Folge hat, dass die Kette dreierlei Mechanismen liefert, welche, jenachdem das kürzeste Glied a oder eines der beiden ihm benachbarten Glieder b, d oder das ihm gegenüberliegende Glied c festgestellt wird, den bei der Drehkörperkette mit endlichen Gliedlängen beziehungsweise als Doppelkurbel, als Schwingkurbel und als Doppelschwinge bezeichneten Mechanismen analog sind, und von denen hier nicht, wie es bei der Schubkurbelkette (gemäss Fig. 47 und Fig. 49) der Fall war, die beiden der Feststellung von b oder d entsprechenden, obschon beide der Schwingkurbel analogen Mechanismen doch verschiedenartig ausfallen, weil hier die dem kürzesten benachbarten Glieder b, d kinematisch ganz gleich sind.

1. Wenn das Glied a festgestellt ist, so verhalten sich die benachbarten Glieder d, b als rotirende Schleifen, und zwar drehen sie sich um die Axen A, B in gleichem Sinne um stets gleiche Winkel, indem die Schubrichtungen der Prismenpaare, wodurch sie mit dem Kreuzschieber verbunden sind, beständig unter dem Winkel α gekreuzt bleiben; der Mechanismus ist danach als Kreuzschleifenmechanismus zu bezeichnen. Eine bemerkenswerthe Anwendung findet er in der Oldham'schen Kuppelung zur änderungslosen Uebertragung der rotirenden Bewegung zwischen zwei parallelen Wellen mit kleiner Axenentfernung $AB = a$. Diese Wellen sind die Glieder d, b, in dem Lagergestelle a drehbar und mit Scheiben (Kuppelungsscheiben) endigend, in welche an ihren äusseren, in kleiner Entfernung $= e$ einander zugekehrten und zu den Axen A, B senkrechten ebenen Flächen je eine gerade Nuth eingearbeitet ist; der Kreuzschieber ist eine Scheibe von der Dicke e, die mit zwei geraden Federn, welche an ihren entgegengesetzten Flächen sich rechtwinklig kreuzend hervorragen, in die entsprechenden Nuthen der Kuppelungsscheiben eingreift. Sofern die Bewegung von einer der Wellen ausgeht, kommt somit der Mechanismus hier als rechtwinkliges Kreuzschleifengetriebe zur Verwendung.

Nach §. 12 beschreiben die Punkte von c gegen a Cardioiden, die Punkte von a gegen c Ellipsen. Letzteres wird benutzt in dem Ovalwerke von Leonardo da Vinci. Dabei ist $\alpha = 90^0$, also der Halbmesser des kleineren Cardanischen Kreises (in §. 12 mit r bezeichnet) $= \frac{1}{2}a$ und AB (Fig. 55) ein Durchmesser dieses Kreises. Liegt der beschreibende Punkt S des festen Lagergestelles a in der Entfernung s vom Mittelpunkte der Strecke AB, so sind nach §. 12, Gl. (3),

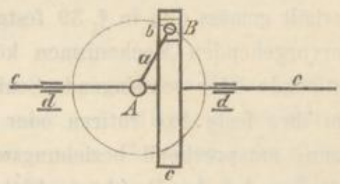
wenn $s < \frac{1}{2}a$ ist, $\frac{1}{2}a + s$ und $\frac{1}{2}a - s$,

wenn $s > \frac{1}{2}a$ ist, $s + \frac{1}{2}a$ und $s - \frac{1}{2}a$

die Halbaxen der Ellipse, die der Punkt S gegen den als Planscheibe (mit auf einer Seite sich rechtwinklig kreuzenden schwalbenschwanzförmigen Nuthen) ausgeführten Kreuzschieber beschreibt, und wenn die Einrichtung getroffen ist, dass nicht nur s, sondern auch die Axenentfernung a allmählig geändert werden kann, so sind die zu beschreibenden Ellipsen bezüglich auf Gestalt und Grösse innerhalb gewisser Grenzen stetig veränderlich. Wird der beschreibende Punkt durch die Spitze oder (mit den Axen A, B parallele) Schneide eines Werkzeugs ersetzt, das parallel mit den Axen verschiebbar ist, so kann auf solche Weise ein mit dem Kreuzschieber c fest verbundener Körper elliptisch abgedreht werden.

2. Bei Feststellung eines der Glieder b, d verhält sich a als Kurbel, und ist der Mechanismus als Kreuzschieberkurbel zu bezeichnen. Er findet besonders als rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56) Anwendung anstatt einer Schubkurbel (Fig. 47, §. 39), aus welcher er dadurch entstanden gedacht werden kann, dass die Axe C im Sinne der Schieberbahn AC ins Unendliche rückte und somit die Koppel b in einen Schieber überging, der mit dem zum rechtwinkligen Kreuzschieber gewordenen Schieber c durch ein Prismenpaar mit zu AC senkrechter Schubrichtung verbunden ist. Die Beziehungen zwischen gleichzeitigen Wegen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen des Kurbelzapfens B und des Kreuzschiebers ergeben sich aus den Formeln in §. 40 mit $\lambda = 0$.

Fig. 56.



3. Bei Feststellung des Kreuzschiebers c verhalten sich die benachbarten Glieder b, d als Schieber mit gekreuzten Schubrichtungen, durch das Glied a als Koppel verbunden; der Mechanismus kann als Kreuzschiebermechanismus bezeichnet werden. Mit $\alpha = 90^0$ findet er Anwendung bei einem bekannten Ellipsenzirkel, wobei sich der die Ellipsen verzeichnende Stift S an einer Verlängerung der als Lineal ausgeführten Koppel befindet; die Halbaxen dieser Ellipsen sind $= s + \frac{1}{2} a$ und $= s - \frac{1}{2} a$, unter s die Entfernung des Stiftes S vom Mittelpunkte der Strecke AB verstanden. Sie sind durch Aenderung von a und s veränderlich, indem die der Koppel angehörigen Elemente der Drehkörperpaare A, B sich an Hülsen befinden, die an verschiedenen Stellen des betreffenden Lineals festgeklemmt werden können. Das Instrument ist die Umkehrung des Leonardo'schen Ovalwerkes; während bei diesem die Ellipsen von einem Punkte des festen Gliedes a auf dem beweglichen Gliede c beschrieben werden, werden sie hier von einem Punkte des beweglichen Gliedes a auf dem festen Gliede c beschrieben.

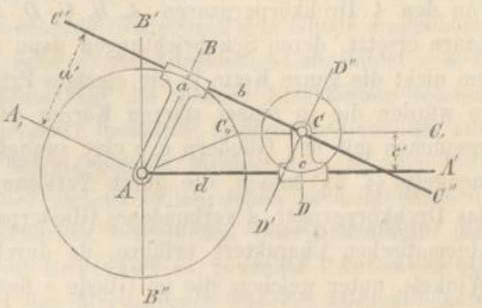
§. 43. Schieberschleifenkette.

Wenn von den 4 Drehkörperpaaren A, B, C, D einer ebenen Drehkörperkette zwei gegenüber liegende, etwa B und D in Prismenpaare übergehen, und somit alle 4 Gliedlängen a, b, c, d unendlich gross werden, so mag die entstehende Kette als Schieberschleifenkette bezeichnet werden, weil, welches Glied auch festgestellt werden mag, von den beiden ihm benachbarten Gliedern immer das eine in gerader Bahn verschiebbar, das andere um eine feste Axe drehbar, mit dem folgenden aber durch ein Prismenpaar verbunden ist, jenes somit als Schieber, dieses als Schleife sich verhält gemäss den in §. 39 festgesetzten Benennungen. Die aus der Kette hervorgehenden Mechanismen könnten somit höchstens von zweierlei Art, rotirende oder schwingende Schieberschleifen sein, jenachdem die Schleife um ihre feste Axe rotiren oder nur zwischen zwei Grenzlagen schwingen kann, entsprechend beziehungsweise der Schwingkurbel und der Doppelschwinge bei der Drehkörperkette mit endlichen Gliedlängen. Ob der erste dieser beiden Fälle (rotirende Schieberschleife) überhaupt möglich sei, kann vermittels des allgemeinen Kriteriums in §. 36 deshalb hier nicht unmittelbar festgestellt werden, weil sich nicht sagen lässt, welches die kleinste und welches die grösste der unendlich grossen Gliedlängen ist. Man kann nur sagen, dass der Unterschied der Gliedlängen $AB = a$ und $BC = b$ der Entfernung a' (Fig. 57) der relativen Bahnen AA_1 und CC' gleich sei, welche die Punkte A und C als Punkte der beiden Elemente des Prismenpaares a, b durchlaufen, und ebenso dass der Unterschied der Gliedlängen $CD = c$ und $DA = d$ gleich sei der Entfernung c' der relativen Bahnen AA' und CC_1 derselben Punkte A und C, insofern sie den Elementen des Prismenpaares c, d angehören. Weil übrigens nach §. 36 die Bedingung für die Möglichkeit einer Schwingkurbel dieselbe wie die für die Möglichkeit einer Doppelkurbel ist (kleinste + grösste Gliedlänge $<$ Summe der beiden anderen), hier aber ein der Doppelkurbel analoger Mechanismus nicht vorkommt, so ist zu schliessen, dass auch ein der Schwingkurbel analoger Mechanismus hier unmöglich ist, dass also die in Rede stehende Kette nur einen Schieberschleifenmechanismus mit schwingender Schleife liefern kann.

Dasselbe ergiebt sich durch Betrachtung von Fig. 57, in welcher $a' > c'$ angenommen ist. Befindet sich das Glied c im Sinne AA' unendlich weit von A entfernt, so hat AB (die von A auf CC' gefällte Senkrechte von fester Lage gegen das Glied a) die zu AA' senkrechte Lage AB'. Bewegt sich dann c gegen A hin, so dreht sich a gegen d im Sinne $B'AA'$

bis der Punkt C in den Schnittpunkt C_0 seiner gegen das Glied d beschriebenen relativen Bahn mit dem um A als Mittelpunkt mit dem Halbmesser a' beschriebenen Kreise und AB in die Lage AC_0 gekommen ist. Das Glied c kann jetzt nur wieder rückwärts längs d gleiten, während a sich weiter drehen kann bis AB in die Lage AB'' gekommen ist, wenn c sich wieder in unendlicher Entfernung befindet. Bewegt sich aber jetzt c wieder gegen A hin, so muss sich a rückläufig gegen d drehen, da der um A mit dem Halbmesser a' beschriebene Kreis in seinem Durchschnittspunkte mit AB stets eine durch C gehende Tangente hat. Befindet sich andererseits das Glied a im Sinne CC' unendlich weit von C entfernt, so hat CD (die von C auf AA' gefällte Senkrechte von fester Lage gegen das Glied c) die zu CC' senkrechte Lage CD'. Bewegt sich dann a gegen C hin und darüber hinaus, so dreht sich c gegen b im Sinne $D'CC''$ so, dass CD die Lage CC'' erreicht, wenn AB mit dem Gliede a um die Strecke c' über C hinaus gekommen; und endlich die Lage CD'', wenn a im Sinne CC'' unendlich weit von C entfernt ist. Einer rückläufigen Gleitung von a längs b entspricht dann aber nothwendig auch eine rückläufige Drehung von c um die Axe C. Sofern in Wirklichkeit die relativen Gleitbahnen von a gegen b und von c gegen d auf Strecken von endlicher Grösse beschränkt sind, ist ersichtlich, dass die relativen Schwingungswinkel von a gegen d und von c gegen b jedenfalls $< 180^0$ sein müssen.

Fig. 57.



Von Specialfällen sind nur die beiden zu erwähnen, dass $c' = a'$ oder $c' = 0$ ist. Im ersten Falle reducirt sich indessen die Kette auf ein Prismenpaar, bestehend aus den vereinigten Gliedern d, a als einem und den vereinigten Gliedern b, c als dem anderen Elemente. Im Falle $c' = 0$ erhält man eine Kette, die sich zu der allgemeinen Schieberschleifenkette ähnlich verhält wie die im engeren Sinne so genannte zur allgemeinen Schubkurbelkette, ohne dass übrigens bemerkenswerthe Eigenthümlichkeiten mit diesem Specialfalle verbunden wären, in welchem insbesondere auch nur eine Mechanismenart aus der Kette hervorgehen kann: eine schwingende Schieberschleife. —

Die besonderen Ketten, die aus der ebenen Drehkörperkette dadurch erhalten werden können, dass die Axen gewisser ihrer Drehkörperpaare ins Unendliche rücken, diese Paare also in Prismenpaare übergehen, sind mit den im Vorhergehenden besprochenen erschöpft. Würden nämlich 3 von den 4 Drehkörperpaaren *A*, *B*, *C*, *D*, etwa *B*, *C*, *D* durch Prismenpaare ersetzt, deren Schubrichtungen dann alle verschieden sein müssten, um nicht die ganze Kette in ein einziges Prismenpaar übergehen zu lassen, so würden die zu einem starren Körper *ad* vereinigten Glieder *a* und *d* zusammen mit den Gliedern *b*, *c* eine zwangläufig geschlossene ebene Prismenkette (§. 34) bilden, die durch Auflösung des Gliedes *ad* in ein durch das Drehkörperpaar *A* verbundenes Gliederpaar *a*, *d* keine Aenderung ihres kinematischen Charakters erführe, da durch die Unveränderlichkeit des Winkels, unter welchem die im Gliede *a* feste Schubrichtung des Prismenpaares *a*, *b* gegen die im Gliede *d* feste Schubrichtung des Prismenpaares *c*, *d* geneigt ist, jede relative Drehung der Glieder *a*, *d* unmöglich gemacht würde, diese Glieder sich also in der Kette doch wie ein einziger starrer Körper verhielten.

§. 44. **Zapfenerweiterung.**

Die im Vorhergehenden betrachteten und ebenso die im Folgenden noch zu besprechenden Mechanismen kommen häufig in so eigenthümlichen und von den durch die schematischen Figuren angedeuteten so abweichenden Formen vor, bedingt theils durch die allgemeinen Anforderungen des Maschinenbaues, theils durch die besonderen Eigenthümlichkeiten der jeweils vorliegenden constructiven Aufgabe, dass dadurch ihr kinematischer Charakter verdeckt, die Erkenntniss desselben durch die erforderliche Abstraction von constructiv vielleicht sehr wesentlichen, kinematisch aber gleichgültigen Gestaltungen erschwert wird. Bei den Mechanismen mit nur niederen Elementenpaaren werden diese Unterschiede der Form bei demselben kinematischen Charakter besonders durch zwei Umstände bedingt: durch die Umkehrbarkeit der niederen Paare und durch die vom Gesichtspunkte der Kinematik aus gleichgültige Grösse des Durchmessers, mit welchem die zur Verbindung der Kettenglieder besonders häufig dienenden Drehkörperpaare (Zapfen mit entsprechenden Hohlkörpern) an den Oberflächentheilen, mit denen die Elemente sich berühren, ausgeführt werden.

Was den ersten Umstand, die Umkehrbarkeit der niederen Elementenpaare betrifft, so ist es z. B. kinematisch gleichgültig, ob bei der Schieberschleifenkette (Fig. 57 im vorigen §.) von dem Drehkörperpaare *A* der

Vollkörper (Zapfen) dem Gliede a und der entsprechende Hohlkörper (Zapfenlager, Zapfenhülse) dem Gliede d angehört oder umgekehrt, desgleichen ob von dem die Glieder a, b verbindenden Prismenpaare das Vollprisma dem Gliede b, das entsprechende Hohlprisma dem Gliede a angehört, wie in Fig. 57 angedeutet ist, oder ob das Umgekehrte stattfindet u. s. f.

Von noch grösserem Einflusse auf die äussere Erscheinung solcher Mechanismen, welche Drehkörperpaare enthalten, insbesondere also der aus der ebenen Drehkörperkette hervorgehenden Mechanismen ist die Vergrösserung des Durchmessers der zumeist cylindrischen Elementenflächen, d. h. der mit einander in Berührung befindlichen Oberflächentheile der Elemente dieser Paare: die von Reuleaux so genannte Zapfenerweiterung, namentlich häufig bei den Mechanismen aus der ebenen Schubkurbelkette vorkommend. Sind bei einem solchen (Fig. 47—50, §. 39) a', b', c' die Halbmesser der Elementenflächen beziehungsweise der Drehkörperpaare A, B, C, die dabei (bis auf Vorsprünge zur Verhinderung der axialen Verschiebbarkeit der betreffenden Elemente) als cylindrisch vorausgesetzt werden, so können dieselben insbesondere solche Erweiterungen erfahren, dass

$$a' > a + b', \quad b' > a + a' \text{ oder } > b + c', \quad c' > b + b'$$

ist, dass sie also die Elementenfläche eines benachbarten Drehkörperpaares der Kette mit umfassen, ja es kann zugleich

$$a' > a + b' \text{ und } b' > b + c'$$

sein, so dass die Elementenfläche des Paares C innerhalb der des Paares B und mit dieser innerhalb der des Paares A liegt, oder zugleich

$$c' > b + b' \text{ und } b' > a + a',$$

so dass die Elementenfläche des Paares A innerhalb der des Paares B und mit dieser innerhalb der des Paares C liegt.

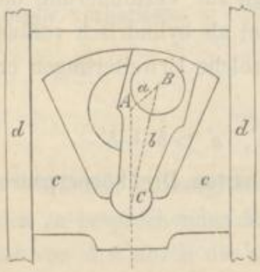
Von diesen Ausführungsformen der Schubkurbelkette ist namentlich die dem Falle $b' > a + a'$ entsprechende sehr gebräuchlich, indem dabei der Zapfen des Drehkörperpaares B in eine excentrische Scheibe übergegangen ist, die im Falle des Schubkurbelmechanismus, d. h. bei Feststellung des Gliedes d (Fig. 47) zugleich als die Kurbel dient, von welcher bei Verwendung dieses Mechanismus als Kurbelschubgetriebe der Antrieb ausgeht, um den Schieber, z. B. bei Schiebersteuerungen, in eine geradlinige hin und her gehende Bewegung zu versetzen.

Auch findet sich nicht selten der Fall $c' > b + b'$ und zwar in der schon in §. 33 mit Bezug auf Fig. 37 erklärten Weise verwirklicht, indem das Glied b (die Koppel im Falle eines Schubkurbelmechanismus) als ein

Bogenschieber ausgeführt ist, der von zwei zur Axe C conaxialen Umdrehungsflächen, die dann zusammen die dem Gliede b angehörige Elementenfläche des Drehkörperpaares b, c bilden, begrenzt wird und in einem entsprechenden kreisbogenförmigen Schlitz des Gliedes c (des Schiebers im Falle des Schubkurbelmechanismus) gleitet. Rückt die Axe C ins Unendliche, so wird dieser Schlitz geradlinig und geht die Kette in die rechtwinklige Kreuzschieberkette (§. 42), der Schubkurbelmechanismus in die rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56) über u. s. f.

Weitere Modificationen können durch die verschiedene Art und Weise herbeigeführt werden, wie die Elementenfläche eines Drehkörperpaares aus getrennten Theilen verschiedener conaxialer Umdrehungsflächen gebildet wird. So entspricht schon in jenem Falle des Schubkurbelmechanismus, bei dem die Koppel b zu einem Bogenschieber degenerirt ist, von den beiden conaxialen Umdrehungsflächen, die zusammen die Elementenfläche des Drehkörperpaares b, c ausmachen, nur die eine (äussere) der durch die Beziehung $c' > b + b'$ charakterisirten Zapfenerweiterung; was die andere betrifft, die bei dem als Bogenschieber ausgeführten Gliede b einen concaven Oberflächentheil desselben bildet, so kann sie auch als ein Theil der convexen Oberfläche eines gewöhnlichen Zapfens ausgeführt werden, wobei sie dann behufs Erhaltung der selbstständigen Geschlossenheit des Paares b, c auf die andere Seite der Axe C gelegt werden muss, wie es bei Durchstossmaschinen gemäss Fig. 58 vorkommt u. s. f.

Fig. 58.



§. 45. Sphärische Drehkörperkette.

Unter diesem Namen wird hier eine einfache geschlossene kinematische Kette verstanden, deren Glieder nur durch Drehkörperpaare verbunden sind, so aber, dass die Axen dieser Paare jetzt nicht parallel sind, sondern sich in einem Punkte O schneiden, dass somit die relativen Bahnen aller Punkte der beweglichen Glieder gegen das festgestellte Glied irgend eines aus der Kette gebildeten Mechanismus in concentrischen Kugelflächen mit dem gemeinsamen Mittelpunkte O liegen. Die Umstände, unter denen eine solche Kette zwangläufig beweglich, also zur Bildung von Mechanismen geeignet ist, ergeben sich durch eine der allgemeinen Discussion ebener

Drehkörperketten (§. 36) ganz analoge Betrachtung, wobei wieder in der Aufeinanderfolge, wie sie in der Kette vorkommen, mit $a, b, c \ldots$ die Glieder derselben bezeichnet werden sollen, mit $A, B, C \ldots$ die sie verbindenden Drehkörperpaare, event. auch ihre Axen oder die Schnittpunkte dieser Axen mit einer (an die Stelle der Ebene H in §. 36 tretenden) Kugelfläche K um O als Mittelpunkt. Bei dieser letzteren Bedeutung der Buchstaben $A, B, C \ldots$ seien $a = AB$, $b = BC$, $c = CD \ldots$ zugleich die Längen der gleichnamigen Kettenglieder, verstanden als Bogenlängen grösster Kugelkreise für den Halbmesser der Kugel als Längeneinheit oder, was dasselbe ist, als die Winkel AOB, BOC, $COD \ldots$, unter denen die Axen der die betreffenden Glieder mit den benachbarten Gliedern verbindenden Drehkörperpaare gegen einander geneigt sind. Da diese Axen $A, B, C \ldots$ stets über O hinaus verlängert zu denken sind, so dass sie die Kugelfläche K in je 2 Punkten schneiden, so können diese Schnittpunkte immer so als die Punkte $A, B, C \ldots$ gewählt werden, dass $(n - 1)$ Seiten des sphärischen n-Ecks $ABC \ldots MN$, z. B. $AB, BC, \ldots MN$, höchstens Quadranten, dass also alle Winkel $a, b, c \ldots$ ausser einem, dem Winkel NOA, der dadurch bestimmt ist und auch stumpf ausfallen kann, höchstens rechte Winkel sind. Ist aber einer dieser Winkel ein rechter, so können unbeschadet der Allgemeinheit alle übrigen als höchstens rechte Winkel angenommen werden, indem die Axen A und N als die Schenkel jenes gegebenen rechten Winkels vorausgesetzt werden können und dann die das sphärische Polygon schliessende Bogenseite immer ein Quadrant wird, einerlei ob N der eine oder der andere Schnittpunkt der Axe N mit der Kugel K sein mag.

Wenn zunächst wieder die Kette als nur dreigliedrig angenommen wird, so kann die Polaxe irgend zweier ihrer Glieder a, b, c, z. B. der Glieder a und c in Folge ihrer Verbindung durch die Paare B, C nur jede durch O gehende Gerade in der Axenebene BC sein; weil aber andererseits diese Polaxe in der Axe A des die Glieder a und c unmittelbar verbindenden Paares gegeben ist, so müssen alle 3 Axen in derselben Ebene liegen, um relative Bewegung möglich zu machen, die freilich nur unendlich klein zu sein braucht, um die Erfüllung jener ihrer Möglichkeitsbedingung wieder aufzuheben. *Zu relativer Beweglichkeit von endlicher Grösse ist eine wenigstens viergliedrige Kette nöthig.*

Bei einem Mechanismus aus der viergliedrigen Kette sei d das festgestellte Glied. Irgend eines der beiden benachbarten Glieder, z. B. a ist dann zwangläufig, wenn die Polaxe A, die seiner Verbindung mit d durch das Paar A entspricht, mit einer der Polaxen zusammenfällt, die es in Folge seiner Verbindung mit d durch die Paare B, C, D haben kann, was aber immer der Fall ist, ausser wenn die Axen B, C, D in einer Ebene liegen, die nicht zugleich die Axe A enthält. Das dem festgestellten gegenüber liegende Glied b ist zwangläufig, wenn die seine möglichen Polaxen enthaltende Ebene AB von der dieselben gleichfalls enthaltenden Ebene CD geschnitten wird in einer Geraden, die dann als effective Polaxe stets eindeutig vorhanden sein wird, ausser wenn die Ebenen AB und CD zusammenfallen. Ebenso wie die ebene ist also auch die sphärische viergliedrige Drehkörperkette zwangläufig, ausser wenn 3 Paaraxen in einer Ebene liegen.

Endlich ist ebenso wie bezüglich der ebenen (§. 36), so auch hier bezüglich der sphärischen Drehkörperkette zu erkennen, dass sie, um zwangläufig zu sein, höchstens viergliedrig sein darf. Nicht übertragbar sind indessen die Specialfälle, die dort aus dem Uebergange von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen konnten; denn ins Unendliche können die Axen A, B, C ... nur zugleich mit dem Punkte O rücken, wodurch dann eben die sphärische in die ebene Drehkörperkette übergeht. —

Die Mechanismen aus der viergliedrigen sphärischen Drehkörperkette können ebenso wie die aus der ebenen Kette zu erhaltenden (§. 36) von dreierlei Art sein und analoger Weise als 1) sphärische Doppelschwinge, 2) sphärische Schwingkurbel oder Kurbelschwinge, 3) sphärische Doppelkurbel bezeichnet werden unter Beibehaltung der Benennungen der einzelnen Glieder, wie sie je nach ihrer Lage und Beweglichkeit im Mechanismus in §. 36 für die ebene viergliedrige Drehkörperkette erklärt wurden. In Betreff der Umstände, unter welchen ein solcher sphärischer Drehkörpermechanismus von der 1ten, 2ten oder 3ten Art ist, kann eine ähnliche Untersuchung angestellt werden, wie es in §. 36 für die ebene Kette geschah, indem die Gliedlängen a, c, d als spitze Winkel vorausgesetzt werden, $a < c$ und die Koppellänge $b < a + c + d$ resp. $< 2\pi - (a + c + d)$, jenachdem $a + c + d \lesseqgtr \pi$ ist. Die geraden Linien der Figuren 39—44 werden dann nur Bögen grösster Kreise, die um A und D als Mittelpunkten mit den Halbmessern a und c beschriebenen Kreise jener Figuren werden kleinere Kreise der Kugel K mit den Axen OA, OD und den Halbmessern $r \sin a$, $r \sin c$, unter r den Halbmesser der Kugel verstanden. Das Resultat der bis auf diese Aenderungen fast wörtlich zu wiederholenden Discussion aller möglichen Fälle ist dasselbe wie dort: auch die viergliedrige sphärische Drehkörperkette kann nur dann eine Doppelkurbel oder eine Schwingkurbel liefern, wenn die Summe der kleinsten und der grössten Gliedlänge kleiner, als die Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, und zwar wird sie dann durch Feststellung des kleinsten Gliedes eine Doppelkurbel, durch Feststellung eines der beiden diesem benachbarten Glieder eine Schwingkurbel (mit dem kleinsten Gliede als Kurbel); in allen anderen Fällen gehen Doppelschwingen aus der Kette hervor. Als die kürzeste Gliedlänge ist hierbei der kleinste spitze Winkel (er sei $= a$) zu nehmen, den irgend zwei auf einander folgende Axen (A und B) mit einander bilden, die beiden darauf folgenden Gliedlängen (b und c, oder d und e) sind gleichfalls als spitze Winkel zu nehmen, während der vierte Winkel (d resp. b) dadurch bestimmt ist und spitz oder stumpf sein kann.

§. 46. Besondere Fälle der sphärischen Drehkörperkette.

Specialfälle analog denjenigen, wie sie bei der ebenen Drehkörperkette in §. 37 und §. 38 als Zwillingskurbelkette und als gleichschenklige Drehkörperkette betrachtet wurden, charakterisirt durch die Gleichheit von 2 mal 2 gegenüber liegenden oder 2 mal 2 benachbarten Gliedern, können zwar auch hier vorkommen, bieten aber zu näherer Untersuchung kaum Veranlassung dar, indem ihre Bewegungsgesetze weniger einfach und schon deshalb weniger bemerkenswerth sind. So kann insbesondere aus der Kette, deren gegenüber liegende Glieder gleich lang sind ($a = c$, $b = d$), hier nicht ein Mechanismus hervorgehen, in welchem z. B. gegen das Glied d als Steg die beiden benachbarten Glieder a und c als Kurbeln sich in gleichem Sinne um stets gleiche Winkel drehen, wie es bei dem Parallelkurbelmechanismus (§. 37) der Fall ist. Denn zu dem Ende müsste, wenn die Winkel DAB, ABC, BCD, CDA des sphärischen Vierecks $ABCD$ beziehungsweise mit A, B, C, D bezeichnet werden, beständig $A = \pi - D$ sein können; weil aber mit den Gegenseiten dieses Vierecks auch die gegenüberliegenden Winkel gleich wären ($A = C$, $B = D$ als homologe Winkel von sphärischen Dreiecken DAB und BCD, resp. ABC und CDA, deren Seiten gleich sind), so würde aus

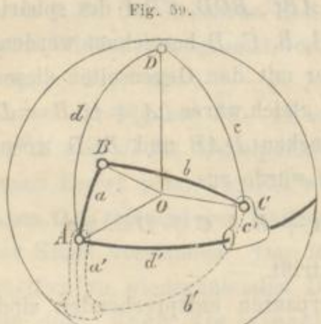
$$A = \pi - D \text{ auch } C = \pi - B, \text{ somit } A + B + C + D = 2\pi$$

folgen, was nur bei einem ebenen Viereck zutrifft. —

Ausser den der Gleichheit von Gliederpaaren entsprechenden sind solche Specialfälle der sphärischen Drehkörperkette zu erwähnen, die durch den besonderen Werth $\frac{\pi}{2}$ eines oder mehrerer Glieder charakterisirt werden; wie im vorigen §. bemerkt wurde, können dann die übrigen Gliedlängen immer als spitzwinklig vorausgesetzt werden, ohne die Allgemeinheit dadurch weiter zu beschränken. Von solchen Fällen sind 4 zu unterscheiden, indem entweder nur ein Glied $=\frac{\pi}{2}$ ist, oder zwei benachbarte oder zwei gegenüber liegende, oder endlich drei Glieder $=\frac{\pi}{2}$ sind; wären alle vier $=\frac{\pi}{2}$, so fielen zwei der vier Axen A, B, C, D zusammen und ginge die Kette in ein einzelnes Drehkörperpaar über. Wesentliche Eigenthümlichkeiten kommen übrigens auch diesen Specialfällen im Allgemeinen nicht zu; wenn sie gewisse Analogien mit denjenigen darbieten, die aus der ebenen Drehkörperkette durch den Uebergang von Drehkörperpaaren in Prismenpaare entstehen, so beruhen dieselben doch mehr auf äusserlichen Ausführungsformen, entsprechend den bei der ebenen Kette gewohnten Formen, als auf analogen kinematischen Charakteren. Die ebene Kette kann betrachtet werden als eine sphärische, deren als Winkel verstandene Gliedlängen wegen des unendlich grossen Halbmessers der Kugel unendlich klein sind, wenn die absoluten Gliedlängen von endlicher Grösse sind; letztere werden unendlich, wenn die entsprechenden Winkel beliebige endliche Grössen erhalten, die insbesondere nicht $=\frac{\pi}{2}$ zu sein brauchen.

So lässt sich schon die allgemeine sphärische Schubkurbelkette in einer an die ebene allgemeine Schubkurbelkette erinnernden Weise ausführen. Denkt man sich etwa zunächst die Kettenglieder a, b, c, d als stangenförmige Körper, die nach grössten Kreisen AB, BC, CD, DA (Fig. 59) einer Kugel mit dem Mittelpunkte O gekrümmt und durch Charniere (Drehkörperpaare) verbunden sind, deren Axen A, B, C, D gegen O convergiren, so kann z. B. das Glied d auch als ein stangenförmiger Umdrehungskörper d' zur Axe D, das Glied c als entsprechender Hohlkörper c' (als Kreisschieber, auf d' verschiebbar) ausgeführt werden, wenn nur jetzt d' und a durch das Drehkörperpaar mit der Axe A, c' und b durch das Drehkörperpaar mit der Axe C verbunden werden. Die äusserliche Analogie dieser Kette, bei der die dem Elementenpaare c', d' entsprechenden relativen Bewegungsgebiete der Axen A und C zwei conaxiale Kegelflächen

Fig. 59.



mit der Axe D sind, mit der ebenen allgemeinen Schubkurbelkette, Fig. 51, bei welcher die dem Prismenpaare c, d entsprechenden relativen Bewegungsgebiete jener Axen zwei parallele Ebenen sind, wird durch die (der Fig. 59 zu Grunde liegende) Voraussetzung $d = \frac{\pi}{2}$ nur insofern erhöht, als dadurch jene die Axe A enthaltende Kegelfläche in eine Ebene übergeht, die freilich zur Axe D senkrecht ist, während die entsprechende Ebene bei Fig. 51 mit der unendlich fernen Axe D parallel ist. Ist a die kleinste Gliedlänge, so geht mit $d = \frac{\pi}{2}$ die Bedingung dafür, dass die dreierlei im vorigen §. erwähnten Mechanismen aus der Kette erhalten werden können, über in:

$$a + \frac{\pi}{2} < b + c$$

$$\text{oder mit } c' = \frac{\pi}{2} - c \text{ in: } a + c' < b$$

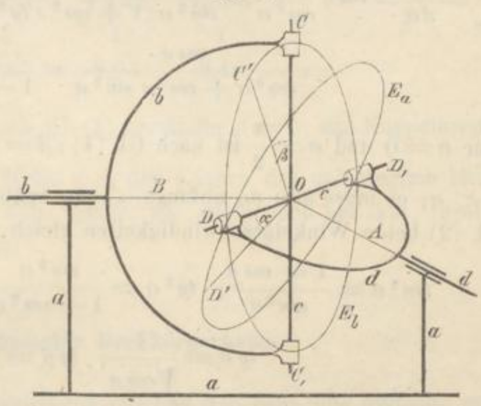
analog Gl. (5) in §. 39 für die ebene allgemeine Schubkurbelkette, Fig. 51. Diese geht in die der Voraussetzung $d = \frac{\pi}{2}$ entsprechende sphärische Drehkörperkette über, wenn ihre geradlinigen Glieder so nach grössten Kugelkreisen gekrümmt werden, dass die vorher parallelen Axen A, B, C sich im Kugelmittelpunkte schneiden; das Prismenpaar c, d verwandelt sich dabei in ein Drehkörperpaar, das nur äusserlich als Kreisschieber mit entsprechender Führung (nach dem Princip der Zapfenerweiterung, §. 44) ausgeführt erscheint. Die so erhaltene Kette als allgemeine (oder nach Reuleaux als geschränkte) sphärische Schubkurbelkette zu bezeichnen, erscheint aber hier nicht passend, da vom Gesichtspunkte der Kinematik die Bezeichnungen nicht den äusserlichen Ausführungsformen, sondern den hiervon unabhängigen, allein durch die Arten relativer Beweglichkeit bedingten kinematischen Eigenschaften anzupassen sind.

Lässt man in Fig. 59 ausser $d = \frac{\pi}{2}$ auch $c = \frac{\pi}{2}$ werden, so werden die relativen Bewegungsgebiete der Axen A, C, welche dem Drehkörperpaare D oder dem in Fig. 59 dafür substituirten, kinematisch ihm gleichwerthigen Elementenpaare c', d' entsprechen, zwei zusammenfallende zur Axe D senkrechte Ebenen. Durch die in Fig. 59 vorausgesetzte Ausführung erscheint dann die Kette äusserlich der im engeren Sinne so genannten ebenen Schubkurbelkette analog, bei welcher indessen die Ebene, in der die dem Prismenpaare entsprechenden relativen Bewegungsgebiete der Axen A, C zusammenfallen, mit der im Unendlichen liegenden Axe D parallel ist. Je nach der Wahl des festgestellten Gliedes kann diese sphärische Drehkörperkette mit zwei benachbarten rechtwinkligen Gliedern stets dreierlei Mechanismen liefern, denen dieselben Namen gebühren wie den aus der allgemeinen sphärischen Drehkörperkette hervorgehenden, und zwar wird die Kette eine sphärische Doppelkurbel bei Feststellung des kleinsten Gliedes a, eine sphärische Schwingkurbel bei Feststellung von b oder d', eine sphärische Doppelschwinge bei Feststellung von c'.

Sind zwei gegenüber liegende Glieder rechtwinklig, z. B. $b = d = \frac{\pi}{2}$, so kann die Kette der ebenen Schieberschleifenkette (Fig. 57, §. 43) dadurch ähnlich gemacht werden, dass nicht nur wieder die Glieder c und d der ursprünglich vorausgesetzten Kette durch die Glieder c' und d' in der oben erklärten Weise ersetzt werden, sondern auch, wie in Fig. 59 durch punktirte Linien angedeutet ist, das Glied b als ein mit dem Kreisschieber c' durch das Drehkörperpaar C verbundener stangenförmiger Umdrehungskörper b' zur Axe B, das Glied a als ein mit dem Gliede d' durch das Drehkörperpaar A verbundener entsprechender Kreisschieber a' ausgeführt wird. Dass aber diese Aehnlichkeit eine nur äusserliche ist, ergiebt sich schon daraus, dass die ebene Schieberschleifenkette nur einerlei Mechanismus (eine Schieberschleife mit schwingender Schleife), die $b = d = \frac{\pi}{2}$ entsprechende sphärische Drehkörperkette dagegen stets dreierlei Mechanismen liefern kann. Sie wird nämlich dem allgemein gültigen Kriterium zufolge, wenn $a < c$, also $a' \left(= \frac{\pi}{2} - a\right) > c' \left(= \frac{\pi}{2} - c\right)$ ist, durch Feststellung von a' eine sphärische Doppelkurbel, durch Feststellung von b' oder d' eine sphärische Schwingkurbel mit a' als Kurbel, durch Feststellung von c' endlich eine sphärische Doppelschwinge. —

Am häufigsten wird die sphärische Drehkörperkette in dem Specialfalle von 3 rechtwinkligen Gliedern, etwa $b = c = d = \frac{\pi}{2}$, und zwar als sphärische Doppelkurbel mit rechtwinklig gekoppelten rechtwinkligen Kurbeln angewendet, als der Mechanismus nämlich, der aus dieser Kette durch Feststellung des allein noch spitzwinkligen Gliedes a hervorgeht. (Durch Feststellung eines der ihm benachbarten rechtwinkligen Glieder b, d oder des ihm gegenüber liegenden rechtwinkligen Gliedes c wird die Kette ein sphärischer Schwingkurbel- resp. Doppelschwingmechanismus.) Als eine solche sphärische Doppelkurbel oder noch specieller, da von einer der Kurbeln die Bewegung ausgeht, als sphärisches Doppelkurbelgetriebe mit rechtwinklig gekoppelten rechtwinkligen Kurbeln ist nämlich das sogenannte Universalgelenk zu bezeichnen, angewendet zur Kuppelung von zwei Wellen, deren Axen A, B sich unter einem spitzen Winkel a schneiden, der für dieselbe Kuppelung eine beliebige oder wenigstens nur insofern beschränkte Grösse haben kann, als, je grösser a, desto mehr dann auch das Verhältniss der gleichzeitigen Winkelgeschwindigkeiten beider Wellen periodisch veränderlich ist. Fig. 60 stellt das Universalgelenk schematisch dar.

Fig. 60.



$CDC_{,}D_{,}$ ist die kreuzförmig gestaltete Koppel c mit zwei Zapfenpaaren C, $C_{,}$ und D, $D_{,}$, deren Axen $CC_{,}$ und $DD_{,}$ sich im Schnittpunkte O der Axen A, B rechtwinklig schneiden und welche drehbar sind in Lagern der Bügel d, b, die sich an den Enden der beziehungsweise um die Axen A, B drehbaren Wellen d, b so angebracht befinden, dass AOD und BOC rechte Winkel sind. Wenn die Welle d um ihre Axe A mit der Winkelgeschwindigkeit ω_a rotirt, so rotirt die Welle b um ihre Axe B mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω_b, deren Verhältniss zu ω_a variabel, im Mittel aber $= 1$ ist, da einer ganzen Umdrehung von d auch eine solche von b entspricht. Die Axe $DD_{,}$ dreht sich dabei in einer zu A senkrechten Ebene E_a, die Axe $CC_{,}$ in einer zu B senkrechten Ebene E_b, und diese Ebenen schneiden sich in einer zur Ebene AB senkrechten Geraden unter dem Winkel a. In Fig. 60 ist eine solche Lage des Getriebes vorausgesetzt, bei welcher $DD_{,}$ in der Durchschnittslinie der Ebenen E_a und E_b, $CC_{,}$ folglich in der Ebene AB liegt; wenn von dieser Lage aus die Welle d und somit die Axe $DD_{,}$ sich um den Winkel $DOD' = \alpha$ dreht, so drehe sich b und somit $CC_{,}$ um den Winkel $COC' = \beta$. Die Beziehungen zwischen diesen gleichzeitigen Drehungswinkeln α, β und den der beliebigen Lage $D'OC'$ des Koppelkreuzes entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_b der beiden Wellen sind für die Anwendungen von Interesse und ergeben sich folgendermassen.

Aus dem sphärischen Dreieck $DD'C'$ mit den Seiten $DD' = \alpha$,

$D'C' = \frac{\pi}{2}$, $C'D = \frac{\pi}{2} - \beta$ und dem Winkel $C'DD' = \pi - \alpha$ ergiebt sich:

$$\cos\frac{\pi}{2} = \cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) + \sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)\cos(\pi - \alpha)$$

$$0 = \cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta\cos\alpha;\quad tg\,\beta = \cos\alpha\, tg\,\alpha \;\ldots\ldots\; (1).$$

Daraus folgt weiter:

$$\frac{d\beta}{\cos^2\beta} = \cos\alpha\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{d\beta}{d\alpha} = \cos\alpha\frac{\cos^2\beta}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha(1 + \cos^2\alpha\, tg^2\alpha)}$$

$$= \frac{\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha} = \frac{\cos\alpha}{1 - \sin^2\alpha\sin^2\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\; (2).$$

Für $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ist nach Gl. (1): $\beta = \alpha$, dazwischen aber beständig $\beta < \alpha$; es muss also ω_b anfangs $< \omega_a$, später $> \omega_a$ sein, während nach Gl. (2) beide Winkelgeschwindigkeiten gleich sind für

$$\sin^2\alpha = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha};\quad tg^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1 - \sin^2\alpha} = \frac{1 - \cos\alpha}{\sin^2\alpha - 1 + \cos\alpha}$$

$$tg\,\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos\alpha}};\quad tg\,\beta = \sqrt{\cos\alpha} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (3).$$

Bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ sind die Lagen der Axen CC_1 und DD_1 die umgekehrten wie bei $\alpha = 0$, d. h. DD_1 liegt in der Ebene AB, CC_1 in der dazu senkrechten Durchschnittslinie der Ebenen E_a und E_b; von $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bis $\alpha = \pi$ ändert sich deshalb das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss gerade umgekehrt wie zwischen $\alpha = 0$ und $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Mit $\alpha = \pi$ findet eine abermalige Umkehrung, also Rückkehr zum ursprünglichen Aenderungsgesetze jenes Verhältnisses für $\alpha < \frac{\pi}{2}$ statt u. s. f.

Nach Gl. (2) ist
$$\frac{\omega_b}{\omega_a}\begin{cases} = max = \dfrac{1}{\cos\alpha} \text{ für } \sin\alpha = \pm 1, \\ = min = \cos\alpha \text{ für } \sin\alpha = 0, \end{cases}$$

also
$$m = \frac{max\,\dfrac{\omega_b}{\omega_a}}{min\,\dfrac{\omega_b}{\omega_a}} = \frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + tg^2\alpha \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4).$$

Rotirt die eine Welle, etwa d gleichförmig, so ist ihre constante Winkelgeschwindigkeit ω_a zugleich der Mittelwerth der veränderlichen Winkelgeschwindigkeit ω_b der anderen Welle b, und der **Ungleichförmigkeitsgrad** δ der Rotationsbewegung dieser letzteren, d. i. das Verhältniss des Unterschiedes zwischen ihrer grössten und kleinsten zu ihrer mittleren Winkelgeschwindigkeit:

$$\delta = \frac{max\,\omega_b - min\,\omega_b}{\omega_a} = max\,\frac{\omega_b}{\omega_a} - min\,\frac{\omega_b}{\omega_a} = \frac{sin^2 a}{cos\,a} \quad \ldots . (5).$$

Z. B. für	$a = 10^0$	20^0	30^0
findet man	$m = 1,031$	$1,132$	$1,333$
	$\delta = \frac{1}{32,67}$	$\frac{1}{8,03}$	$\frac{1}{3,46}$.

Wäre $a = \frac{\pi}{2}$, so wäre nach Gl. (1) beständig $\beta = 0$; das Koppelkreuz würde sich vereinigt mit der Welle d in den Lagern des unbeweglich bleibenden Bügels b drehen: die Kette ginge, wie schon oben erwähnt, in ein einzelnes Drehkörperpaar über.

§. 47. Allgemeine Drehkörperkette.

Nachdem sich im Vorhergehenden ergeben hat, dass eine einfache geschlossene Drehkörperkette, deren Paaraxen sich in einem Punkte im Endlichen (sphärische Drehkörperkette) oder im Unendlichen (ebene Drehkörperkette) schneiden, aus 4 Gliedern bestehen muss, um zwangläufig beweglich zu sein (mit endlich grossen relativen Bahnen von Punkten irgend eines Gliedes gegen ein anderes), bleibt nun noch die zu zwangläufiger Beweglichkeit erforderliche und ausreichende Gliederzahl einer einfachen geschlossenen Drehkörperkette für solche Fälle zu ermitteln, in denen die relativen Lagen der auf einander folgenden Paaraxen A und B, B und C... auf irgend eine andere Weise gegeben sind; im Allgemeinen können diese Axen windschief (geschränkt) sein mit gegebenen kürzesten Abständen und gegebenen Neigungswinkeln. Zur Vermeidung von Wiederholungen bei später noch zu besprechenden anderen Ketten werde übrigens die in Rede stehende Frage zunächst noch allgemeiner gestellt, nämlich mit Bezug auf **eine einfache geschlossene kinematische Kette, deren Glieder durch zwangläufige Elementenpaare von übrigens beliebiger Art mit einander verbunden sind.**

Bei dem Uebergange der als n-gliedrig vorausgesetzten Kette aus irgend einer in eine unendlich wenig davon verschiedene Configuration seien die Relativbewegungen der Elemente ihrer n Paare

$$\begin{array}{llllll} & A & B & C \ldots & M & N \\ \text{beziehungsweise:} & \alpha & \beta & \gamma \ldots & \mu & \nu. \end{array}$$

Dieselben sind im Allgemeinen unendlich kleine Schraubenbewegungen, deren Axen und Steigungsverhältnisse durch die kinematischen Charaktere der betreffenden zwangläufigen Elementenpaare und durch die augenblickliche Configuration der Kette bestimmt sind; was ihren Sinn betrifft, so seien sie verstanden als Relativbewegungen beziehungsweise des Gliedes AB gegen NA, BC gegen AB, CD gegen $BC \ldots$ MN gegen LM und endlich NA gegen MN. Wird nun das beliebige Glied NA der Kette als festgestellt betrachtet, so dass die relative Bewegung irgend eines anderen Gliedes gegen NA kurzweg als Bewegung jenes Gliedes zu bezeichnen ist, so ist die Bewegung von BC bestimmt durch die relativen Elementarbewegungen α, β, die Bewegung von CD durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, die von MN durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu$ und endlich die Bewegung von NA durch $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$. Weil aber thatsächlich dieses Glied NA in Ruhe ist, so sind die n Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$ durch so viel Gleichungen verbunden, als erforderlich und genügend sind, um das Gesammtresultat der n Elementarbewegungen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$ desselben starren Körpers (hier des Gliedes NA) als Bewegungslosigkeit zu kennzeichnen, d. h. durch m Gleichungen, wenn m die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen ist, auf die sich beliebige, vermöge der Beschaffenheit und augenblicklichen Configuration der Kette an und für sich mögliche unendlich kleine Relativbewegungen ihrer sämmtlichen Elementenpaare zusammen reduciren lassen, wenn sie als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers (des beliebigen Kettengliedes NA) betrachtet werden. Unter diesen (höchstens 6) einfachen Elementarbewegungen sind Drehungen und Schiebungen um resp. längs 3 Axen verstanden, die in bestimmter Lage gegen das festgestellte Glied so angenommen werden, dass sie sich in einem Punkte schneiden und nicht in einer Ebene liegen. Sofern nun aber die Zwangläufigkeit der Kette dadurch charakterisirt ist, dass irgend eine der n Grössen $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu$ alle übrigen bestimmt, dass also diese n Grössen durch $n - 1$ Gleichungen verbunden sind, so ist die Kette augenblicklich zwangläufig, wenn $n - 1 = m$, d. h. wenn $n = m + 1$ ist, und sie ist schliesslich nicht nur augenblicklich, sondern bei einer stetigen Folge von unendlich vielen verschiedenen Configurationen beständig, d. h. schlechtweg zwangläufig, wenn dabei beständig $n = m + 1$ ist. Somit ergiebt sich, dass die Gliederzahl einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren um 1 grösser ist, als die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen (Drehungen und Schiebungen um resp. längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen), denen beliebige in Folge der Beschaffenheit der Kette an und für sich mögliche unendlich kleine Relativbewegungen ihrer sämmtlichen Elementenpaare zusammen, als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers betrachtet, beständig äquivalent sind. Höchstens ist $m = 6$, also $n = 7$, d. h. die Gliederzahl einer zwangläufig geschlossenen einfachen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren höchstens $= 7$. Mit einer kleineren, als der die zwangläufige Beweglichkeit bedingenden Gliederzahl ist eine solche Kette nicht beweglich, mit einer grösseren nicht zwangläufig, abgesehen von besonderen Lagen, in denen auch eine übrigens zwangläufig bewegliche Kette vorübergehend ihre Zwangläufigkeit verlieren oder eine Kette von kleinerer Gliederzahl eine unendlich kleine Beweglichkeit haben kann, sowie abgesehen von solchen Elementenpaaren, welche Glieder verbinden, die durch ihre Verkettung mit den übrigen Kettengliedern relativ unbeweglich und deshalb thatsächlich als einzelne Glieder zu betrachten sind.

Dasselbe gilt nun auch von der Drehkörperkette, und man kann bemerken, dass es nur ganz besondere Fälle sind, in denen dieselbe mit weniger als 7 Gliedern zwangläufig beweglich ist. Sollte sie es schon mit 3 Gliedern sein, so müssten beliebige Drehungen um die Axen der betreffenden 3 Drehkörperpaare beständig entweder 1) zwei Drehungen, oder 2) einer Drehung und einer Schiebung, oder 3) zwei Schiebungen um resp. längs gewissen zwei sich schneidenden Axen äquivalent sein. Das Erste resp. Zweite wäre der Fall, wenn die Paaraxen sich in einer Ebene liegend in einem Punkte schnitten, der ad 1) im Endlichen, ad 2) im Unendlichen (dem Parallelismus der Paaraxen entsprechend) liegt; allein solche Lagen der Axen in einer Ebene würden nur als Uebergangslagen vorkommen können und schon durch unendlich kleine relative Drehungen von Paarelementen gestört werden. Der Fall sub 3) dagegen, entsprechend 3 im Unendlichen liegenden parallelen Paaraxen, d. h. dem Ersatze aller Drehkörperpaare durch Prismenpaare, deren Schubrichtungen einer Ebene parallel sind, findet sich in der ebenen Prismenkette verwirklicht.

Soll die Kette mit $n = 4$ Gliedern zwangläufig beweglich sein, so müssen, entsprechend $m = 3$, beliebige Drehungen um die 4 Paaraxen sich beständig entweder 1) durch drei Drehungen, oder 2) durch zwei Drehungen und eine Schiebung, oder 3) durch eine Drehung und zwei Schiebungen, oder 4) durch drei Schiebungen um resp. längs gewissen drei sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen lassen. Der erste Fall ist in der sphärischen, der dritte in der ebenen Drehkörperkette, der vierte in der allgemeinen Prismenkette verwirklicht. Der zweite Fall kann nur vorübergehend stattfinden, wenn nämlich zeitweise die Paaraxen in einer Ebene liegen ohne sich in einem Punkte zu schneiden; Beweglichkeit der Kette von endlicher Grösse kann nicht dadurch bedingt werden.

Mit 5 Gliedern würde eine Drehkörperkette nur dann zwangläufig beweglich sein können, wenn die Axen der 5 Drehkörperpaare beständig solche relative Lagen hätten, dass beliebige Drehungen um dieselben sich entweder 1) durch drei Drehungen und eine Schiebung, oder 2) durch zwei Drehungen und zwei Schiebungen, oder 3) durch eine Drehung und drei Schiebungen um resp. längs gewissen drei sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen liessen. Dazu müssten ad 1) die Paaraxen sich zum Theil beständig in einem Punkte O schneiden, während die übrigen stets in einer durch O gehenden Ebene liegen, zu der dann die Richtung der Schiebung senkrecht wäre. Eine solche Lage dieser letzteren Axen könnte indessen nur vorübergehend stattfinden, ausser wenn ihrer nur eine wäre, die übrigen 4 Paaraxen folglich beständig durch den Punkt O gingen. Indem aber dann die betreffenden 4 Drehkörperpaare schon für sich eine zwangläufig geschlossene Kette bestimmen würden, blieben die durch das fünfte Paar verbundenen Glieder gegenseitig unbeweglich, und wäre die Kette thatsächlich eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette. Ebenso kann auch der Fall unter 2) nur in Uebergangslagen stattfinden, wenn nämlich die Paaraxen mit einer Ebene H parallel sind und von einer Geraden G alle zugleich geschnitten werden; beliebige Drehungen um jene Axen sind dann zwei Drehungen um sich schneidende mit der Ebene H parallele Axen und zwei Schiebungen längs sich schneidenden und zur Geraden G senkrechten Axen äquivalent. Der Fall unter 3) dagegen kann dauernd stattfinden, wenn nämlich die Axen der Drehkörperpaare zum Theil parallel sind, zum Theil im Unendlichen liegen, entsprechend dem Ersatze dieser Paare durch Prismenpaare. Indem aber sowohl die eine wie die andere Gruppe höchstens 3 Elementenpaare umfassen kann, um nicht die Kette in eine viergliedrige Drehkörperkette oder in eine allgemeine viergliedrige Prismenkette übergehen zu lassen, auch von den Schubrichtungen der Prismenpaare weder drei derselben Ebene noch zwei unter sich parallel sein dürfen, um nicht die Kette auf eine ebene Prismenkette oder auf ein einzelnes Prismenpaar zu reduciren, so ist der fragliche Fall unter

3) nur so zu verwirklichen, dass die 5 Kettenglieder entweder durch 3 Drehkörperpaare mit parallelen Axen und durch 2 Prismenpaare verbunden werden, deren Schubrichtungen nicht parallel sind und von denen auch keine rechtwinklig gegen die Axen der Drehkörperpaare gerichtet ist, oder durch 2 Drehkörperpaare mit parallelen Axen und durch 3 Prismenpaare, deren Schubrichtungen nicht derselben Ebene parallel und von denen auch nicht zwei rechtwinklig gegen die Axen der Drehkörperpaare gerichtet sind.

Mit 6 Gliedern kann eine Drehkörperkette nur dann zwangläufig beweglich sein, wenn die Axen ihrer Elementenpaare beständig solche relative Lagen haben, dass beliebige Drehungen um dieselben sich durch 3 Drehungen und 2 Schiebungen oder durch 2 Drehungen und 3 Schiebungen um resp. längs 3 in einem Punkte sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen ersetzen lassen. Ersteres erfordert, dass die Paaraxen in zwei Gruppen zerfallen so, dass beständig die der einen Gruppe durch einen Punkt O, die der anderen durch einen anderen Punkt O' gehen; beliebige Drehungen um letztere lassen sich dann durch solche um durch O gehende Axen und durch Schiebungen normal zur Geraden OO', also durch je zwei Schiebungen nach gewissen zu OO' senkrechten Richtungen ersetzen. Zudem kann man bemerken, dass es drei und zwar auf einander folgende Paaraxen sein müssen, die im einen oder anderen der Punkte O, O' sich beständig schneiden, weil bei 4 oder mehr durch denselben Punkt gehenden Paaraxen die Kette eine zwangläufige oder nicht mehr zwangläufige sphärische Drehkörperkette würde, und weil es natürlich nur benachbarte Paaraxen sein können, denen dadurch, dass sie demselben Gliede angehören, ein bestimmter Schnittpunkt O resp. O' dauernd anzuweisen ist. Der Fall, dass die Elementarbewegungen aller Paare zusammen 2 Drehungen und 3 Schiebungen äquivalent sind, tritt im Allgemeinen vorübergehend dann ein, wenn alle Paaraxen mit einer Ebene parallel werden, findet aber dauernd statt, wenn die so eben mit O und O' bezeichneten Schnittpunkte von 2 mal 3 auf einander folgenden Paaraxen im Unendlichen liegen, d. h. wenn 2 mal 3 benachbarte Paaraxen parallel sind.

Somit ergiebt sich, dass eine einfache geschlossene Drehkörperkette, wenn ihre Paaraxen alle im Endlichen liegen, ihre Drehkörperpaare also nicht theilweise in Prismenpaare übergegangen sind, nur mit 4, 6 oder 7 Gliedern zwangläufige Beweglichkeit von endlicher Grösse haben kann: mit 4 Gliedern, wenn alle Paaraxen sich in einem Punkte schneiden (wovon der Parallelismus nur ein specieller Fall ist), mit 6 Gliedern, wenn drei auf einander folgende Paaraxen sich in einem, die übrigen in einem anderen Punkte schneiden, mit 7 Gliedern in jedem anderen Falle; dass aber bei theilweisem Ersatze von Drehkörperpaaren durch Prismenpaare auch fünfgliedrige Ketten zwangläufig sein können, wenn sie nämlich 2 oder 3 Prismenpaare mit gewissen Bedingungen entsprechenden Schubrichtungen enthalten, während die Axen der 3 resp. 2 Drehkörperpaare parallel sind. Da die viergliedrige Kette schon im Vorhergehenden eingehend besprochen wurde, jene fünfgliedrigen aber ebenso wie die allgemeinen siebengliedrigen in Ermangelung von vorliegenden oder in Aussicht zu nehmenden Anwendungen einstweilen zu weiterer Untersuchung bezüglich ihrer Eigenschaften und unterscheidbaren Arten keine Veranlassung bieten, so bleibt nur noch die sechsgliedrige Kette in nähere Betrachtung zu ziehen.

§. 48. Sechsgliedrige Drehkörperkette.

Eine sechsgliedrige Drehkörperkette kann aus zwei sphärischen, also viergliedrigen Drehkörperketten dadurch entstanden gedacht werden, dass jede der letzteren durch Aufhebung der unmittelbaren Verbindung von zwei benachbarten Gliedern, nämlich durch Beseitigung eines Drehkörperpaares in eine offene viergliedrige Kette mit nur 3 Drehkörperpaaren verwandelt, und dann von den beiden Endgliedern der ersten dieser Ketten das eine mit dem einen, das andere mit dem anderen der beiden Endglieder der zweiten Kette zu je einem einzigen Gliede verbunden wird. So entsteht z. B. aus der sphärischen Drehkörperkette mit den im Punkte O sich schneidenden Paaraxen A, B, C, D und der sphärischen Drehkörperkette mit den im Punkte O' sich schneidenden Paaraxen A', B', C', D' durch Beseitigung der Drehkörperpaare D, D' und durch Verbindung der Glieder AD und $A'D'$ zu einem Gliede AA', der Glieder CD und $C'D'$ zu einem Gliede CC' die sechsgliedrige Drehkörperkette mit den Gliedern AB, BC, CC', $C'B'$, $B'A'$, $A'A$, verbunden durch Drehkörperpaare A, B, C, C', B', A', von deren Axen sich die 3 ersten in O, die 3 letzten in O' schneiden.

Indem der Zweck eines Mechanismus meistens darin besteht, dass von einem der beiden dem Stege benachbarten Glieder die Bewegung in gewisser Weise auf das andere vermittels der übrigen beweglichen Kettenglieder übertragen werden soll, haben von den verschiedenen Mechanismen, die aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette hervorgehen können, besonders diejenigen praktisches Interesse, die der Feststellung eines der beiden

Glieder AA', CC' entsprechen, also der Glieder, deren Axen A und A', resp. C und C' sich im Allgemeinen nicht schneiden; denn zwischen Gliedern, die um sich schneidende Axen drehbar sind, kann die Bewegungsübertragung meistens durch einfachere Mittel in beabsichtigter Weise erzielt werden. Wenn dann ein solcher Mechanismus wieder je nach der Beweglichkeitsart der beiden dem Stege (d. i. dem festgestellten Gliede) benachbarten Glieder als Doppelschwinge, Schwingkurbel oder Doppelkurbel bezeichnet, jedes dieser Glieder nämlich eine Kurbel oder eine Schwinge genannt wird, jenachdem es um seine dem Stege angehörige Axe ringsum rotiren oder nur zwischen zwei Grenzlagen schwingen kann, so ist die Beurtheilung der Art eines solchen sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus in fraglicher Hinsicht zum Theil auf die von sphärischen Drehkörpermechanismen zurückführbar. Indem nämlich jedes der Glieder AA' und CC' nur um solche Axen drehbar ist, die mit A resp. C durch den Punkt O und mit A' resp. C' durch den Punkt O' gehen, d. h. nur drehbar ist um die durch beide Punkte O, O' gehende Gerade G, bildet letztere mit den Axen A, A', C, C' unveränderliche Winkel, und können also A, B, C, G ebenso wie A', B', C', G stets als die 4 Paaraxen von sphärischen Drehkörperketten betrachtet werden, denen die Glieder AB, BC, $C'B'$, $B'A'$ der sechsgliedrigen Drehkörperkette auch als Glieder angehören. Wenn also etwa das Glied AA' der sechsgliedrigen Kette festgestellt wird, in welchem Falle auch die Punkte O und O', also die Gerade G und somit die Glieder AG und $A'G$ der sphärischen Drehkörperketten $ABCG$ und $A'B'C'G$ unbeweglich sind, so können sich die dem Stege AA' des sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus benachbarten Glieder AB und $A'B'$ nur dann als Kurbeln verhalten, wenn sie sich ebenso in den sphärischen Drehkörpermechanismen verhalten, die aus jenen sphärischen Ketten $ABCG$ und $A'B'C'G$ bei Feststellung des Gliedes AG resp. $A'G$ hervorgehen, ein Verhalten, das nach der in §. 45 angeführten Regel zu beurtheilen ist; aber man kann nicht umgekehrt behaupten, dass in diesem Falle sich die Glieder AB und $A'B'$ auch in dem sechsgliedrigen Mechanismus als Kurbeln verhalten müssen, weil die viergliedrigen Mechanismen durch ihre Verbindung in dem sechsgliedrigen zwischen verengerten Grenzen beweglich werden können, wenn die verbundenen Glieder CG und $C'G$ nicht beide Kurbeln, also beliebig um G beziehungsweise gegen AG und $A'G$ drehbar waren. Sind also in den viergliedrigen Mechanismen $ABCG$ und $A'B'C'G$ mit den Stegen AG und $A'G$ die Glieder CG und $C'G$ beide Kurbeln, so haben in dem sechsgliedrigen Mechanismus $ABCC'B'A'$ mit dem Stege AA' die Glieder AB und $A'B'$ dasselbe Verhalten bezüglich ihrer Beweglichkeit als Kurbel oder als Schwinge wie in den viergliedrigen Mechanismen; in anderen Fällen sind sie Schwingen, wenn sie es in den viergliedrigen Mechanismen sind, können es aber auch sein, obgleich sie in den viergliedrigen Mechanismen sich als Kurbeln verhalten.

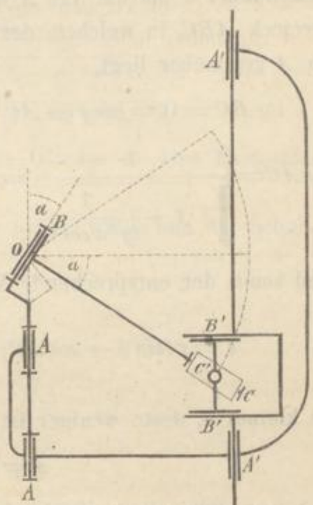
Anwendung findet der so eben besprochene Mechanismus namentlich als doppeltes Universalgelenk, das dazu dienen kann, zwei in festen Lagern drehbare Wellen so zu verketten, dass sie bei irgend einer gegenseitigen Lage ihrer Axen A, A' mit stets gleichen Winkelgeschwindigkeiten um dieselben rotiren; eine (übrigens frei schwebende) Zwischenwelle mit der Axe G ist zu dem Ende durch ein einfaches Universalgelenk (Fig. 60, §. 46) mit der um A, durch ein zweites mit der um A' drehbaren Welle verbunden. Der so entstehende Mechanismus kann zugleich mit Rücksicht auf seine vorliegende Verwendung als Getriebe bezeichnet werden als Doppelkurbelgetriebe mit dreifach gegliederter Koppel. Diese Koppel besteht nämlich aus der Zwischenwelle und den beiden Koppelkreuzen, die einerseits in Bügeln an den Enden der Zwischenwelle, andererseits in Bügeln an den Enden der um A und A' in festen Lagern rotirenden Wellen drehbar sind, und zwar sind hier die Winkel AB, BC, CG, GC', $C'B'$, $B'A'$ alle rechte, während A und A' mit G gleich grosse spitze Winkel bilden, der Winkel CC' aber $=$ dem Neigungswinkel der Ebenen AG, $A'G$ ist. Mit Rücksicht auf die Forderung nämlich, dass die Winkelgeschwindigkeiten der um A, A' drehbaren Wellen stets gleich sein sollen, wodurch allein die Substitution des doppelten für ein einfaches Universalgelenk motivirt wird, müssen gemäss der Untersuchung in §. 46 die Bügel an den Enden der Zwischenwelle offenbar so angeordnet, den Axen C, C' also solche Lagen gegeben werden, dass gleichzeitig C normal zur Ebene AG, C' normal zur Ebene $A'G$ wird, während zugleich die Winkel AG und $A'G$ beständig einander gleich sind. Wenn, was aber nicht nöthig ist, die Axen A, A' in einer Ebene liegen, so werden C, C' parallel, die spitzen Winkel AG, $A'G$ $=$ der Hälfte des Winkels AA', und wird der ganze Mechanismus beständig symmetrisch in Beziehung auf die Normalebene der Axe G im Mittelpunkte ihrer Strecke OO'.

Ausser durch gewisse Grössen der Winkel zwischen den auf einander folgenden Paaraxen können Specialfälle der sechsgliedrigen Drehkörperkette dadurch herbeigeführt werden, dass einer der Punkte O, O' oder dass jeder von ihnen im Unendlichen liegt, dass also die Axen A, B, C oder die Axen A', B', C' oder die einen und die anderen zugleich unter sich parallel sind; ferner dadurch, dass gewisse von solchen auf einander folgenden

3 Axen ins Unendliche rücken, d. h. die betreffenden Drehkörperpaare in Prismenpaare übergehen.

Ein Mechanismus, der dem Falle entspricht, dass 3 Paaraxen parallel sind und zugleich zwei derselben im Unendlichen liegen, ist z. B. bei Dampfmaschinen angewendet worden, um die hin und her gehende Bewegung des Kolbens in die rotirende Bewegung einer Welle um ihre mit der Schubrichtung des Kolbens parallele Axe zu verwandeln, nach dem Schema der Fig. 61. Hier sind A, B, C die 3 Paaraxen, die sich im Punkte O im Endlichen schneiden unter den Winkeln $AB = \alpha$ und $BC = 90^0$. Die Axen A', B', C' sind parallel und senkrecht zur Axe A; der Winkel AA' ist also $= 90^0$, $A'B' = B'C' = 0$. Von diesen letzteren Axen liegen A' und B' im Unendlichen, d. h. die Paare A' und B' sind Prismenpaare, deren Schubrichtungen hier beziehungsweise parallel der Axe A und senkrecht dazu angenommen sind. Endlich sind die Drehkörperpaare C, C' so durch das Kettenglied CC' verbunden, dass ihre Axen sich rechtwinklig schneiden; die Axe C' ist in Folge dessen, weil sie auch senkrecht zur Axe A ist, senkrecht zur Ebene AC, die als Ebene der Fig. 61 angenommen wurde. AA' ist das festgestellte Glied, die Lager der um A rotirenden Kurbelwelle mit dem Dampfcylinder und den Führungen der Kolbenstange fest verbindend; das Getriebe, als welches der Mechanismus hier verwendet wird, kann als Schubkurbelgetriebe mit dreifach gegliederter Koppel bezeichnet werden. Was nämlich den Charakter des Mechanismus als Schubkurbelmechanismus betrifft, so ist zu bemerken, dass die oben mit G bezeichnete Gerade hier im Punkte O zur Zeichnungsebene AC senkrecht, und dass die Kette $A'B'C'G$ bei Feststellung des Gliedes $A'G$ eine rechtwinklige Kreuzschieberkurbel (Fig. 56, §. 42) mit GC' als Kurbel, die Kette $ABCG$ dagegen dieselbe ist, welche im Universalgelenk (Fig. 60, §. 46) als sphärische Doppelkurbel, hier aber bei Feststellung des Gliedes AG als Schwingkurbel mit AB als Kurbel auftritt; da die Ebene der Schwinge GC dieselbe ist wie die Ebene GC' der Kurbel jenes Kreuzschieberkurbelmechanismus, und somit die Bewegung von GC als Schwinge im einen Falle nur einen Theil der Bewegung von GC' als Kurbel im an-

Fig. 61.



deren Falle ausmacht, so bleibt das Glied AB auch in der sechsgliedrigen Kette eine Kurbel, und wird nur die Schublänge des Schiebers $A'B'$ im Vergleich mit ihrer Grösse bei jener Kreuzschieberkurbel verkleinert. Ist r die Entfernung der parallelen Axen G, C' (= der Entfernung des Punktes O vom Schnittpunkte der Axen C, C') und a der Winkel AB, so ist die Schublänge des Schiebers $A'B'$ (des Kolbens gegen den Cylinder) $= 2r \sin a$, die Schublänge des Prismenpaares $B' = r(1 - \cos a)$. Wenn ferner von der in Fig. 61 angedeuteten Lage aus die Winkelebene AB (als Kurbel) sich um den Winkel α um die Axe A dreht, so ist mit Rücksicht auf das sphärische Dreieck ABC, in welchem der rechtwinkligen Seite BC der Winkel $\pi - \alpha$ an A gegenüber liegt,

$$\cos BC = 0 = \cos a \cos AC - \sin a \sin AC \cos \alpha; \quad \operatorname{cotg} AC = tg\, a \cos \alpha$$

$$\cos AC = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{tg^2 a \cos^2 \alpha}}} = \frac{\sin a \cos \alpha}{\sqrt{\cos^2 a + \sin^2 a \cos^2 \alpha}} = \frac{\sin a \cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha}}$$

und somit der entsprechende Weg des Kolbens:

$$s = r(\sin a - \cos AC) = r \sin a \left(1 - \frac{\cos \alpha}{\sqrt{1 - \sin^2 a \sin^2 \alpha}}\right).$$

Je kleiner a, desto weniger ist dieser Ausdruck von

$$s = r \sin a (1 - \cos \alpha),$$

d. h. von demjenigen verschieden, der nach §. 40, Gl. (3) dem Schieberwege eines ebenen Schubkurbelmechanismus zukommt, wenn α der Drehungswinkel der Kurbel, $r \sin a$ ihre Länge, die Koppel aber unendlich lang ($\lambda = 0$) ist.

Der Fall endlich, dass die Axen der Drehkörperpaare A, B, C sowohl wie die der Paare A', B', C' parallel sind (ohne zugleich den anderen parallel zu sein), ist benutzt worden in der Sarrut'schen Geradführung und in einem Ringschützen-Aufzug von Redtenbacher. Die Möglichkeit (abgesehen von vortheilhafter Brauchbarkeit) jener Verwendung als Geradführung ergiebt sich daraus, dass, wenn AA' das festgestellte Glied ist, die gemeinsame Normale der Axen C, C' beständig sowohl in der durch ihren Fusspunkt in C gehenden, zu den Axen A, B, C senkrechten Ebene, als auch in der durch ihren Fusspunkt in C' gehenden, zu den Axen A', B', C' senkrechten Ebene, folglich in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen bleiben muss. Sind e und e' die Entfernungen dieser gemeinsamen Normalen der Axen C, C' beziehungsweise von den Axen A und A', und sind die (als kürzeste Entfernungen der betreffenden Axen verstandenen) Gliedlängen

$$AB = a,\ BC = b,\ A'B' = a',\ B'C' = b',\ CC' = c,\ AA' = d,$$

so wird der durch Feststellung des Gliedes AA' entstehende Mechanismus, der im Allgemeinen eine Doppelschwinge (mit dreifach gegliederter Koppel) ist,

1) eine Doppelkurbel, wenn mit Rücksicht auf die Bedingung (5) in §. 39

$$a + c < b,\quad a' + c' < b'$$

und zugleich
$$p + q' = q + p' = d - c$$

ist mit
$$p = \sqrt{(b+a)^2 - c^2},\quad q = \sqrt{(b-a)^2 - c^2}$$
$$p' = \sqrt{(b'+a')^2 - c'^2},\quad q' = \sqrt{(b'-a')^2 - c'^2}.$$

Dabei ist $p - q = p' - q'$ die Schublänge des Gliedes c. Der Mechanismus wird

2) eine Kurbelschwinge mit a als Kurbel, a' als Schwinge und der Schublänge $= p - q$ des Gliedes c, wenn

$$a + c < b$$

ist und im Falle $a' + c' < b'$:

$$q + p' > d - c > p + q',$$

dagegen im Falle $a' + c' > b'$:

$$q + p' > d - c > p - p'.$$

γ. Mechanismen aus Schraubenketten.

Indem die relative Bewegung des einen gegen das andere Element eines Schraubenpaares aus Schiebung längs der Axe und aus Drehung um dieselbe zusammengesetzt ist, kann für einen längs der Schraubenaxe im Sinne der Schiebung hin Blickenden die Drehung rechts oder links herum stattfinden, d. h. entweder in demselben Sinne, in welchem sich für den Anblick von Norden nach Süden die Sonne um die Erde zu drehen scheint, oder im umgekehrten Sinne. Im ersten Falle heisst das Schraubenpaar sowie auch jedes seiner Elemente (die Schraube und die Schraubenmutter) rechts gewunden oder rechtsläufig, im zweiten Falle links gewunden oder linksläufig. Um diesen beiden Fällen in metrischen Relationen zwischen den gleichzeitigen Relativbewegungen verschiedener Schraubenpaare auf die einfachste Weise Rechnung zu tragen, soll die Steigung eines Schraubenpaares (resp. einer Schraube oder Schraubenmutter), d. h. die einer Umdrehung (Drehung von 360^0) entsprechende Schiebung algebraisch verstanden werden so, dass sie bei Rechtsläufigkeit positiv, bei Linksläufigkeit negativ ist.

§. 49. **Conaxiale Schraubenkette.**

Während mit Prismenpaaren, deren Schubrichtungen parallel sind, oder mit Drehkörperpaaren, deren Axen zusammenfallen, eine zwangläufig geschlossene einfache kinematische Kette nicht hergestellt werden konnte (abgesehen von zweigliedrigen Ketten, die aber von einzelnen Prismenpaaren resp. Drehkörperpaaren kinematisch nicht verschieden sind), können Schraubenpaare zu zwangläufiger kinematischer Verkettung schon in dem einfachsten Falle dienen, dass ihre Axen zusammenfallen. Sind nämlich a, b, c die Glieder einer solchen Kette, verbunden durch die Schraubenpaare A, B, C (c mit a durch das Paar A, a mit b durch B, b mit c durch C), deren Steigungen beziehungsweise $= x, y, z$ seien, so ist diese Kette zwangläufig beweglich, wenn irgend ein Glied, z. B. b gegen ein anderes, z. B. c zwangläufig beweglich ist, und das ist der Fall, wenn sich eine Drehung $= \alpha$ von a gegen c und eine Drehung $= \beta$ von b gegen a eindeutig so bestimmen lassen, dass die durch die entsprechenden Relativbewegungen der Schraubenpaare A und B zusammen verursachte Bewegung von b gegen c entgegengesetzt gleich ist derjenigen Bewegung von c gegen b, die einer gegebenen Verdrehung $= \gamma$ von c gegen b gemäss der unmittelbaren Verbindung dieser Glieder durch das Schraubenpaar C entspricht. Indem dazu erforderlich und genügend ist, dass die betreffenden Drehungen und Schiebungen einzeln entgegengesetzt gleich sind, ergeben sich, wenn die Drehungen α, β, γ (verstanden als ganze oder gebrochene Vielfache von 360^0) in demselben Sinne positiv, im umgekehrten dann negativ gesetzt werden, die Bedingungsgleichungen:

$$\alpha + \beta + \gamma = 0; \quad \alpha x + \beta y + \gamma z = 0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wodurch α und β bei gegebenen Werthen von x, y, z und γ eindeutig bestimmt sind. Bei mehr als 3 conaxialen Schraubenpaaren erhielte man auch nur zwei solche Bedingungsgleichungen, aber mit mehr als zwei Unbekannten, die dadurch nicht bestimmt wären. Die conaxiale Schraubenkette ist also mit 3 Gliedern und nicht anders zwangläufig beweglich. Dasselbe folgt unmittelbar aus dem allgemeinen Satze in §. 47, dass die Gliederzahl n einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren um 1 grösser ist, als die Zahl m der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen

(Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen), die beliebigen möglichen relativen Elementarbewegungen sämmtlicher Paare der Kette zusammen beständig äquivalent sind; da nämlich beliebige conaxiale Schraubenbewegungen einer Drehung um die gemeinsame Axe und einer Schiebung längs derselben äquivalent sind, ist hier $m = 2$, $n = 3$.

Die aus dieser Kette dadurch zu bildenden Mechanismen, dass sie „auf a, b oder c gestellt", d. h. dass das Glied a, b oder c festgestellt wird, können sich insofern unterscheiden, als die Drehungen und die Schiebungen der beiden beweglichen Glieder in gleichem oder in entgegengesetztem Sinne stattfinden können. Wird die Kette auf $a = AB$ gestellt, so ergiebt sich aus den Gleichungen (1) das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der beweglichen Glieder b, c:

$$\frac{\beta}{-\alpha} = \frac{x-z}{y-z}; \quad \frac{\beta y}{-\alpha x} = \frac{y\;x-z}{x\;y-z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

analog bei der Stellung auf $b = BC$ das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der Glieder c, a:

$$\frac{\gamma}{-\beta} = \frac{y-x}{z-x}; \quad \frac{\gamma z}{-\beta y} = \frac{z\;y-x}{y\;z-x} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

und bei der Stellung auf $c = CA$ das Verhältniss der Drehungen und das der Schiebungen der Glieder a, b:

$$\frac{\alpha}{-\gamma} = \frac{z-y}{x-y}; \quad \frac{\alpha x}{-\gamma z} = \frac{x\;z-y}{z\;x-y} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Sowohl das Product der 3 Drehungsverhältnisse wie das der 3 Schiebungsverhältnisse ist $= -1$, und ist also, da den Gleichungen (1) gemäss nicht jedes dieser je 3 Verhältnisse negativ sein kann, nur je eines derselben negativ, und zwar, wie leicht ersichtlich, das der Feststellung desjenigen Gliedes entsprechende, welches durch die Schraubenpaare von (algebraisch verstanden) grösster und kleinster Steigung mit den beiden anderen Gliedern verbunden ist. Sind die Steigungen x, y, z gleichen Zeichens, insbesondere z. B. positiv, d. h. alle 3 Schraubenpaare rechtsläufig, so hat jedes Schiebungsverhältniss dasselbe Zeichen wie das zugehörige Drehungsverhältniss; es gehen dann nur zweierlei Mechanismen aus der Kette hervor: bei Feststellung des Gliedes, das durch die Schraubenpaare von grösster und kleinster Steigung mit den anderen Gliedern verbunden ist, finden sowohl die Drehungen wie die Schiebungen der beweglichen Glieder in entgegengesetztem Sinne statt, bei Feststellung eines der beiden anderen Glieder in gleichem Sinne. Sind aber die Steigungen x, y, z ungleichen

Zeichens, ist z. B. bei positiven Werthen von x und y die Steigung z negativ (das Schraubenpaar C linksläufig), so sind das Drehungs- und das Schiebungsverhältniss bei der Stellung auf a beide positiv, bei der Stellung auf b oder c aber entgegengesetzten Zeichens, und zwar bei der Stellung auf b in umgekehrter Weise wie bei der Stellung auf c; die Kette liefert dann dreierlei Mechanismen: bei Feststellung des Gliedes a, das durch rechtsläufige Schraubenpaare mit den beweglichen Gliedern verbunden ist, finden sowohl die Drehungen wie die Schiebungen dieser letzteren in gleichem Sinne statt, bei Feststellung des einen der Glieder b, c dagegen (und zwar desjenigen, welches mit den beweglichen Gliedern durch das linksläufige und durch das rechtsläufige Schraubenpaar grösster Steigung verbunden ist), sind die Drehungen der beweglichen Glieder entgegengesetzt, ihre Schiebungen gleich gerichtet, bei Feststellung des anderen die Drehungen gleich und die Schiebungen entgegengesetzt gerichtet. Anwendungen scheinen von diesen Mechanismen bisher nicht gemacht worden zu sein.

Nicht selten werden aber Mechanismen angewendet, deren Kette aus der hier betrachteten Schraubenkette dadurch hervorgeht, dass von den Steigungen ihrer 3 Schraubenpaare 1) eine $= \infty$, oder 2) eine $= 0$, oder 3) eine $= \infty$, eine andere $= 0$ ist, dass also von den Schraubenpaaren der Kette 1) eines durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung mit den Schraubenaxen parallel ist, oder 2) eines durch ein mit ihnen conaxiales Drehkörperpaar, oder 3) eines durch ein solches Prismenpaar, ein anderes durch ein solches Drehkörperpaar ersetzt wird. Andere als diese 3 Specialfälle können nicht vorkommen, weil, wenn zwei Paare in Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen oder in conaxiale Drehkörperpaare übergingen, damit die ganze Kette zu einem Prismenpaare resp. Drehkörperpaare würde.

1) **Die Kette, deren Glieder $a = AB$, $b = BC$, $c = CA$ durch zwei conaxiale Schraubenpaare A, B und durch ein Prismenpaar C verbunden sind, dessen Schubrichtung den Schraubenaxen parallel ist,** wird namentlich als sogenannter **Differentialschraubenmechanismus** angewendet, entsprechend der Feststellung eines der beiden durch das Prismenpaar C verbundenen Glieder b, c, z. B. in der Weise, dass eine längs zwei Strecken mit verschiedenen Schraubengewinden versehene Spindel a einerseits mit dem Gewinde von der Steigung x in einem entsprechenden Muttergewinde des festgestellten Gliedes c, andererseits mit dem Gewinde von der Steigung y gegen das mit entsprechendem Muttergewinde versehene Glied b beweglich ist, welches als Schieber längs dem festgestellten Gliede c gleiten kann, indem es damit durch das Prismenpaar C gepaart ist (Fig. 62, wenn man sich darin das Drehkörperpaar c, a

durch ein Schraubenpaar ersetzt denkt). Mit $z = \infty$ gehen für diesen Fall die Gleichungen (4) über in:

$$\frac{\alpha}{-\gamma} = \infty; \quad \frac{\alpha x}{-\gamma z} = \frac{x}{x-y},$$

d. h. einer Drehung $= \alpha$ der Spindel a entspricht eine blosse Schiebung ($\gamma = 0$) des Gliedes b, deren Grösse

$$-\gamma z = \alpha(x - y) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ist, und welche insbesondere beliebig klein gemacht werden kann durch Verkleinerung des Unterschiedes der Steigungen x und y.

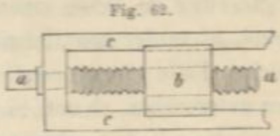
2) Die Kette, deren Glieder a, b, c durch ein Drehkörperpaar A und zwei Schraubenpaare B, C conaxial verbunden sind, hat in solchen Mechanismen Anwendung gefunden, die der Feststellung eines der beiden durch das Drehkörperpaar verbundenen Glieder entsprechen, indem z. B. eine mit dem festgestellten Gliede c durch das Drehkörperpaar A verbundene Spindel a zugleich durch ein Schraubengewinde (Steigung $= y$) mit einer entsprechenden Mutter b gepaart, und diese äusserlich selbst mit einem Schraubengewinde (Steigung $= z$) in einem Muttergewinde des festgestellten Gliedes c beweglich ist (Fig. 62, wenn man sich darin das Prismenpaar b, c durch ein Schraubenpaar ersetzt denkt). Nach Gl. (4) sind dann mit $x = 0$ die Drehung und die Schiebung des Gliedes b für eine gegebene Drehung $= \alpha$ der Spindel:

$$-\gamma = \frac{y}{y-z}\alpha; \quad -\gamma z = \frac{yz}{y-z}\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Beide können beliebig gross gemacht werden durch Verkleinerung des Unterschiedes der Steigungen y, z; ebendadurch ist die Drehung der Spindel a beliebig zu verkleinern, wenn die Bewegung vom Gliede b ausgeht.

3) Am häufigsten angewendet findet sich die Kette, deren Glieder a, b, c durch ein Drehkörperpaar $c, a = A$, ein Schraubenpaar $a, b = B$ und ein Prismenpaar $b, c = C$ conaxial verbunden sind (Fig. 62), entsprechend dem allgemeinen Falle mit $x = 0$, $z = \infty$; besonders gebräuchlich sind die daraus durch Feststellung eines der Glieder b, c hervorgehenden Mechanismen.

Fig. 62.



Einige der hier besprochenen Mechanismen kommen insbesondere auch so zur Verwendung, dass eines der Kettenglieder durch eine Flüssigkeit vertreten wird. So sind die Schraubenpumpe und der Schraubenventilator als Getriebe zu betrachten, die aus der Kette, Fig. 62, bei

Feststellung des Gliedes *c* erhalten werden, wenn das Glied *b* durch Wasser oder Luft ersetzt und die Schraube *a* durch eine äussere Kraft in Drehung gesetzt wird, sofern wenigstens dem Zwecke dieser Getriebe gemäss von den Bewegungen der Flüssigkeitstheilchen nur diejenigen Componenten mit ihren mittleren Grössen in Betracht gezogen werden, die der Schraubenaxe parallel sind. Wenn wieder *b* durch Wasser ersetzt, dieses aber jetzt als unbeweglich betrachtet wird, während die Bewegung der anderen Glieder von der Schraube *a* ausgeht, so geht aus der Kette, Fig. 62, das Getriebe eines Schraubenschiffes hervor mit *c* als Schiff, sofern dessen hier allein in Betracht kommende Beweglichkeit gegen das Wasser im Sinne des Kiels einer Paarung durch ein Prismenpaar vergleichbar ist u. s. f.

§. 50. Uebersicht verschiedener Arten von Schraubenketten.

Nach den in §. 47 gemachten allgemeinen Bemerkungen über einfache geschlossene kinematische Ketten mit nur zwangläufigen Elementenpaaren ist eine Schraubenkette mit 7 Gliedern stets beweglich und im Allgemeinen auch zwangläufig; nur in besonderen Fällen ist sie schon mit weniger Gliedern zwangläufig beweglich, nämlich mit $n = m + 1$ Gliedern, wenn beliebige mögliche Relativbewegungen ihrer sämmtlichen Paare zusammen stets m von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen (Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen) äquivalent sind. Bei Ausschluss solcher Specialfälle, in denen alle Schraubenpaare in Drehkörperpaare oder in Prismenpaare übergegangen sind, und in denen die Kette nicht mehr eine Schraubenkette, sondern eine Drehkörper- oder Prismenkette heisst, befinden sich unter jenen einfachen Elementarbewegungen wenigstens eine Drehung oder eine Schiebung im Sinne einer Drehungsaxe. Der Fall, dass sie die einzigen sind, ist in der conaxialen Schraubenkette verwirklicht als dem einzig möglichen Falle einer dreigliedrigen Schraubenkette. Es bleibt also nur noch zu untersuchen, ob und in welchen Fällen eine einfache geschlossene Schraubenkette mit 4, 5 oder 6 Gliedern zwangläufig beweglich sein kann.

Mit 4 Gliedern würde es der Fall sein, wenn sich beliebige Elementarbewegungen der Elementenpaare stets entweder durch zwei Drehungen und eine Schiebung, oder durch eine Drehung und zwei Schiebungen um resp. längs sich schneidenden Axen ersetzen liessen. Ersteres wäre nur möglich, wenn die Schraubenpaare theils conaxial, theils durch Drehkörperpaare ersetzt wären, deren Axen mit der Schraubenaxe in einer Ebene liegen und sie in demselben Punkte schneiden. Weil aber die Kette durch 3 conaxiale Schraubenpaare zu einer dreigliedrigen Kette, durch 2 conaxiale Drehkörperpaare zu einem blossen Elementenpaare würde, so müsste die Zahl der Drehkörperpaare wenigstens = 2 sein, und dürften ihre Axen weder unter sich noch mit der Schraubenaxe zusammenfallen; doch könnte es dann nur vorübergehend geschehen, dass alle Axen in einer Ebene liegend sich in einem Punkte schneiden, womit der in Rede stehende Fall überhaupt auf besondere Lagen der Kette beschränkt bleibt. Auf eine Drehung und zwei Schiebungen sind die Elementarbewegungen der Schraubenpaare vorübergehend reducirbar, wenn die Axen der letzteren parallel sind und bei gewissen Configurationen der Kette in einer Ebene liegen; indessen kann dieser Fall auch dauernd stattfinden, wenn nämlich die Kette zwei conaxiale Schraubenpaare enthält (natürlich als benachbarte Elementenpaare, so dass die Beständigkeit des Zusammenfallens ihrer Axen durch deren unveränderliche Lagen in demselben Kettengliede vermittelt wird) und ausserdem entweder zwei Prismenpaare, deren Schubrichtungen mit einer durch die Schraubenaxe gehenden Ebene parallel sind, oder noch zwei weitere conaxiale Schraubenpaare, deren Axe mit der anderen parallel ist.

Die zwangläufige Beweglichkeit einer fünfgliedrigen Schraubenkette erfordert beständige Reducirbarkeit unendlich kleiner Bewegungen ihrer Elementenpaare auf 4 einfache Elementarbewegungen, also entweder 1) auf 3 Drehungen und eine Schiebung, oder 2) auf 2 Drehungen und 2 Schiebungen, oder 3) auf eine Drehung und 3 Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen. Der erste Fall kann bei Ketten vorkommen, die zwei conaxiale Schraubenpaare oder ein Schraubenpaar und ausserdem nur Drehkörperpaare enthalten, in solchen Lagen nämlich, in denen alle Paaraxen sich in einem Punkte schneiden; dass aber solche Lagen nicht dauernd stattfinden können, sofern nicht alle Schraubenpaare zu Drehkörperpaaren werden, ist einleuchtend. Der Fall unter 2), vorübergehend dann eintretend, wenn alle Schraubenaxen von einer Geraden rechtwinklig geschnitten werden, findet dauernd statt, wenn die Kette zwei conaxiale Schraubenpaare (als benachbarte Paare) und ausserdem entweder 3 Drehkörperpaare enthält, deren Axen unter sich parallel und gegen die Schraubenaxe rechtwinklig gerichtet sind, oder noch zwei conaxiale Schraubenpaare (als benachbarte Paare), deren Axe mit der anderen nicht parallel ist, nebst einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die gemeinsame Normale der beiden Schraubenaxen gerichtet ist ohne mit einer von ihnen parallel zu sein (widrigenfalls das Prismenpaar mit den betreffenden conaxialen Schraubenpaaren eine dreigliedrige conaxiale Schraubenkette bilden würde). Der Fall unter 3) endlich wird verwirklicht durch eine fünfgliedrige Kette mit parallelen Axen ihrer Schraubenpaare, von denen auch zwei mal zwei conaxial sein können.

Mit 6 Gliedern kann die Schraubenkette nur dann zwangläufig beweglich sein, wenn die Axen ihrer Elementenpaare beständig solche relative Lagen haben, dass beliebige relative Bewegungen derselben entweder zu 3 Drehungen und 2 Schiebungen, oder zu 2 Drehungen und 3 Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen zusammengesetzt werden können. Das Erste kann vorübergehend vorkommen, wenn eine Kette mit Schraubenpaaren und Drehkörperpaaren (2 Schraubenpaaren, oder 3 Schraubenpaaren, von denen 2 conaxial sind, oder 4 Schraubenpaaren, von denen 2 mal 2 conaxial sind) sich in solcher Lage befindet, dass alle Paaraxen sich in einem Punkte O schneiden, oder dass sich die einen in einem Punkte O, die anderen in einem anderen Punkte O' schneiden, während zugleich die Gerade OO' rechtwinklig gegen die Schraubenaxen, nicht aber gegen alle übrigen Axen gerichtet ist. Der zweite Fall dagegen (Reducirbarkeit auf 2 Drehungen und 3 Schiebungen), immer dann stattfindend, wenn die Axen aller Schraubenpaare mit einer Ebene parallel sind, ist dauernd vorhanden, wenn 3 oder 4 auf einander folgende ebenso wie die 3 resp. 2 übrigen Schraubenaxen unter sich parallel sind, ohne dass zugleich die eine mit der anderen Gruppe parallel ist.

Somit hat sich ergeben, dass eine einfache geschlossene Schraubenkette in folgenden Fällen mit weniger, als 7 Gliedern zwangläufige Beweglichkeit von endlicher Grösse haben kann:

a) als reine Schraubenkette, d. h. wenn alle Elementenpaare wirkliche Schraubenpaare sind,

1) mit 3 Gliedern als conaxiale Schraubenkette,

2) mit 4 Gliedern, wenn 2 mal 2 benachbarte Schraubenpaare conaxial und beide Axen parallel sind,

3) mit 5 Gliedern, wenn alle Paaraxen parallel sind,

4) mit 6 Gliedern, wenn die Axen von 3 oder 4 benachbarten Schraubenpaaren ebenso wie die der 3 resp. 2 übrigen je unter sich, nicht aber die einen mit den anderen parallel sind;

b) bei theilweisem Ersatze von Schraubenpaaren durch Drehkörper- oder Prismenpaare (abgesehen von solchen Specialfällen, die aus den eben unter 1)—4) genannten auf solche Weise erhalten werden)

1) mit 4 Gliedern, verbunden durch 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch 2 Prismenpaare, deren Schubrichtungen mit einer durch die Schraubenaxe gehenden Ebene parallel sind,

2) mit 5 Gliedern, verbunden durch 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch 3 Drehkörperpaare, deren Axen unter sich parallel und gegen die Schraubenaxe rechtwinklig gerichtet sind, oder auch verbunden durch 2 mal 2 benachbarte conaxiale Schraubenpaare und durch ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die gemeinsame Normale der beiden Schraubenaxen gerichtet ist, ohne mit einer von ihnen parallel zu sein.

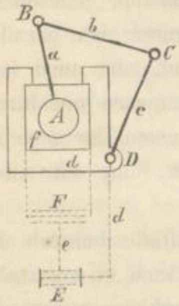
Aus allen diesen Fällen können noch weitere Specialfälle dadurch abgeleitet werden, dass man Schraubenpaare mit parallelen Axen in conaxiale, Schraubenpaare in Drehkörper- oder Prismenpaare, Drehkörperpaare in Prismenpaare übergehen lässt.

§. 51. **Singuläre Schraubenketten.**

Der nach vorigem §. sehr grosse Reichthum an zwangläufig geschlossenen einfachen Schraubenketten, einem noch viel grösseren Reichthum an Mechanismen entsprechend, wird im Maschinenbau nur zu kleinem Theil verwerthet. Die Anwendungen beschränken sich hauptsächlich auf solche Ketten, die ausser Drehkörper- und Prismenpaaren nur ein Schraubenpaar enthalten und als singuläre Schraubenketten bezeichnet werden mögen.

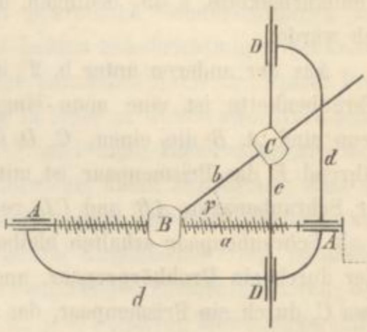
Aus der conaxialen Schraubenkette geht als singuläre die schon in §. 49 besprochene Kette, Fig. 62, hervor. — Aus der viergliedrigen Schraubenkette unter a, 2) im vorigen §. ist eine neue singuläre nicht zu erhalten, weil, wie auch 3 der 4 Schraubenpaare durch Drehkörper- oder Prismenpaare mit unveränderten Axen resp. Schubrichtungen ersetzt werden mögen, die Kette stets entweder zu einer drei- oder zu einer zweigliedrigen, nämlich zu einer conaxialen Kette oder zu einem blossen Drehkörper- resp. Prismenpaare wird. — Die unter a, 3) im vorigen §. aufgeführte fünfgliedrige liefert aber eine singuläre Schraubenkette, indem 4 Schraubenpaare durch 3 Drehkörperpaare und ein Prismenpaar ersetzt werden, übrigens nur diese einzige, da 4 Drehkörperpaare mit parallelen Axen oder 2 Prismenpaare mit parallelen Schubrichtungen die Kette in eine zwangläufige viergliedrige, beziehungsweise in ein Prismenpaar verwandeln würden. Die so zu erhaltende fünfgliedrige singuläre Schraubenkette (Fig. 63) kann aus einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette *a*, *b*, *c*, *d* dadurch hervorgegangen gedacht werden, dass von ihren 4 Drehkörperpaaren *A*, *B*, *C*, *D* das eine *A* durch ein Schraubenpaar ersetzt und gleichzeitig zwischen den Gliedern *a* und *d* ein fünftes Glied *f* eingeschaltet wird, das mit *a* durch jenes Schraubenpaar *A*, mit *d* durch ein Prismenpaar (Schubrichtung parallel mit den Axen *A*, *B*, *C*, *D*) verbunden ist. — Denkt man sich dieses Glied *f* mit dem Gliede *d* statt jenes Prismenpaares durch zwei Drehkörperpaare *E* und *F* verbunden, deren Axen parallel sind, indem zwischen *d* und *f* ein sechstes Glied *e* eingefügt wird, das mit *d* durch das Drehkörperpaar *E*, mit *f* durch das Drehkörperpaar *F* zusammenhängt, so erhält man eine sechsgliedrige singuläre Schraubenkette, die als Specialfall der unter a, 4) im vorigen §. angeführten Kette zu bezeichnen ist, sofern diese im allgemeinen Falle 6 Schraubenpaare enthielt, von denen beziehungsweise 4 und 2 benachbarte parallele Axen hatten. In Fig. 63 ist diese Abänderung der Kette durch Punktirung angedeutet, wobei zu bemerken ist, dass thatsächlich die Ebene *EF* im Allgemeinen nicht mit der Zeichnungsebene zusammenfällt, und wobei man sich ferner den Körper *d*, insoweit er zuvor die entsprechende Hohlform des prismatischen Körpers *f* bildete, jetzt beseitigt zu denken hat. Das Glied *f*, welches vorher nur nach Richtung der Axen *A*, *B*, *C*, *D* gegen das Glied *d* verschiebbar war, ist jetzt nach jeder Richtung gegen *d* verschiebbar geworden oder wenigstens nach jeder gegen die Axen *E*, *F* rechtwinkligen Richtung, wenn diese Axen selbst (wie in Fig. 63 angenommen) gegen die Axen *A*, *B*, *C*, *D* rechtwinklig gerichtet sind.

Fig. 63.



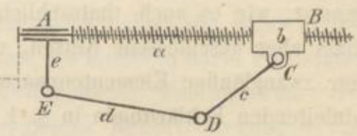
Von grösserem Interesse sind solche singuläre Schraubenketten, die aus den unter b) im vorigen §. genannten Ketten hervorgehen. Eine solche, übrigens auch nur eine, liefert zunächst die daselbst unter b, 1) erwähnte Kette, indem von ihren zwei conaxialen Schraubenpaaren das eine durch ein Drehkörperpaar ersetzt wird; durch ein Prismenpaar gleicher Schubrichtung würde es nicht ersetzbar sein, ohne die Kette in eine dreigliedrige ebene Prismenkette zu verwandeln. Die so erhaltene viergliedrige singuläre Schraubenkette *a*, *b*, *c*, *d* (Fig. 64) hat als Mechanismus insbesondere bei Feststellung des Gliedes *d*, das einerseits durch das Drehkörperpaar *A* mit der Schraubenspindel *a*, andererseits durch das Prismenpaar *D* mit dem Schieber *c* verbunden ist, Anwendung gefunden, dieser Mechanismus aber ferner so als Getriebe, dass die Bewegung vom Gliede *a* ausgeht, d. h. als Kurbelschubgetriebe. Wenn in dem durch Fig. 64 dargestellten Specialfalle, dass die Schubrichtung des Prismenpaares D einen rechten Winkel mit der gemeinsamen Axe AB des Drehkörper- und des Schraubenpaares bildet, die Schubrichtung des Prismenpaares C unter dem Winkel γ gegen AB geneigt und s die Steigung des Schraubenpaares B ist, so entspricht einer Umdrehung der Schraubenspindel a die Schiebung $s\,tg\gamma$ des Gliedes c, die beliebig verändert werden kann durch Aenderung des Winkels γ, vermittelbar durch stellbare feste Verbindungen der prismatischen Stange b mit der Hohlschraube B und der prismatischen Stange c mit dem Hohlprisma C. Diese Eigenschaften des in Rede stehenden Getriebes sind u. A. bei einer Theilmaschine von Nasmyth verwerthet worden, abgesehen immer von der (hier nur schematisch und beispielsweise angedeuteten) besonderen Form der constructiven Ausführung.

Fig. 64.



Aus der fünfgliedrigen Kette — b, 2), §. 50 — mit 2 benachbarten conaxialen Schraubenpaaren und 3 Drehkörperpaaren, deren parallele Axen rechtwinklig gegen die Schraubenaxe gerichtet sind, ist eine fünfgliedrige singuläre Schraubenkette durch den Uebergang eines der beiden Schraubenpaare in ein damit conaxiales Drehkörperpaar zu erhalten. Diese Kette ($ABCDE$, Fig. 65) findet mehrfach Verwendung, z. B. bei Steuerrudergetrieben, Kniehebelpressen u. s. w. unter Feststellung des Gliedes e, das mit den benachbarten Gliedern durch die Drehkörperpaare A und E mit rechtwinklig gekreuzten Axen verbunden ist. Die Axen C und E können die dem Drehkörperpaare A und Schraubenpaare B gemeinsame Axe AB schneiden ohne den Charakter des Mechanismus zu ändern. Auch kann eine der Axen C, D, E ins Unendliche rücken, d. h. das betreffende Drehkörperpaar durch ein Prismenpaar ersetzt werden, dessen Schubrichtung rechtwinklig gegen die beiden anderen dieser Axen gerichtet ist; würden aber zwei dieser Drehkörperpaare C, D, E durch solche Prismenpaare ersetzt, so erhielte man die viergliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 64, wieder. Wenn man endlich in der ursprünglichen fünfgliedrigen Kette das eine der beiden conaxialen Schraubenpaare in ein längs der Schraubenaxe verschiebliches

Fig. 65.



Prismenpaar übergehen liesse, so erhielte man keine singuläre Schraubenkette, weil dieses Prismenpaar zusammen mit den 3 Drehkörperpaaren *C*, *D*, *E* schon für sich eine zwangläufig geschlossene Kette (die allgemeine Schubkurbelkette, §. 39) bedingen, das Schraubenpaar also relativ unbeweglich würde.

Aus der anderen unter b, 2) im vorigen §. angeführten fünfgliedrigen Schraubenkette ist eine neue singuläre solche Kette nicht zu erhalten. Denn sind *A*, *B* die einen, *C*, *D* die anderen conaxialen Schraubenpaare, während *E* das Prismenpaar ist mit einer gegen die gemeinsame Normale der Schraubenaxen *AB* und *CD* rechtwinkligen Schubrichtung, und sollte *A* als Schraubenpaar erhalten bleiben, so könnte *B* durch ein Prismenpaar oder durch ein Drehkörperpaar, und von den Schraubenpaaren *C*, *D* eines, etwa *C*, durch ein Prismenpaar, das andere durch ein Drehkörperpaar (nicht jedes zugleich durch ein Prismen- oder Drehkörperpaar) ersetzt werden. Mit *B* als Prismenpaar wäre dann aber die Kette eine dreigliedrige ebene Prismenkette *BCE*, mit *B* als Drehkörperpaar eine viergliedrige singuläre Schraubenkette *ABCE* nach Art von Fig. 64.

δ. Mechanismen aus Ketten mit theilweise nicht zwangläufigen niederen Elementenpaaren.

§. 52. Allgemeine Uebersicht.

Bei den bisherigen Untersuchungen einfacher kinematischer Ketten mit nur niederen Elementenpaaren wurden letztere als zwangläufig vorausgesetzt, wie es auch thatsächlich bei den meisten Anwendungen zutrifft. Dass aber geschlossene Ketten, um zwangläufig zu sein, nicht nothwendig nur zwangläufige Elementenpaare enthalten müssen, wurde schon bei den einleitenden Erklärungen in §. 1 hervorgehoben, und giebt es auch in der That manche praktisch benutzte Mechanismen, deren Ketten zum Theil Elementenpaare von mehrfacher Beweglichkeit enthalten. Nach §. 4 können solche Elementenpaare, wenn sie zugleich niedere, also umkehrbare, unbeschadet der Allgemeinheit folglich wieder als Umschlusspaare ausgeführt zu denkende sein sollen, nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein, nämlich (§. 6) Cylinderpaare, Kugelpaare oder Plattenpaare. Das Cylinderpaar, mit 2 Freiheitsgraden verbunden, vereinigt in sich die Beweglichkeiten eines Drehkörperpaares und eines Prismenpaares, dessen Schubrichtung der Axe des ersteren parallel ist. Das Kugelpaar, 3 Freiheitsgraden entsprechend, enthält die Beweglichkeiten von 3 Drehkörperpaaren, deren beliebig gerichtete Axen sich in einem Punkte schneiden. Das Plattenpaar, gleichfalls 3 Freiheitsgraden entsprechend, begreift in sich die Beweglichkeiten entweder von zwei Prismenpaaren mit gekreuzten Schubrichtungen und einem Drehkörperpaare, dessen Axe zu beiden Schubrichtungen senkrecht ist, oder von zwei Drehkörperpaaren mit parallelen Axen und einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung beliebig in einer zu diesen zwei Axen senkrechten Ebene liegt. Mit Rittershaus* sind diese Elementenpaare auch passend als flächenläufige zu bezeichnen, um damit anzudeuten, dass die Punkte jedes Elementes sich gegen das andere in gewissen Flächen (hier in conaxialen Cylinderflächen, concentrischen Kugelflächen resp. parallelen Ebenen) bewegen können, während bei zwangläufigen Elementenpaaren, deshalb auch als curvenläufig zu bezeichnen, jene relativen Bewegungsgebiete der Elementenpunkte Linien sind.

Wenn zwei benachbarte Glieder einer kinematischen Kette, falls sie, obschon durch ein Elementenpaar verbunden, doch thatsächlich in der Kette gegen einander unbeweglich sind, stets nur als ein Glied gerechnet werden, da jenes Paar dann unbeschadet des kinematischen Charakters der Kette entbehrlich, nämlich durch starre Verbindung der fraglichen Glieder zu einem einzigen ersetzbar ist, so kann aus einer zwangläufigen Kette, die einem gewissen Bewegungszwecke entsprechend zunächst mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildet wurde, eine ebenfalls zwangläufige Kette mit theilweise flächenläufigen Paaren entweder ohne oder mit gleichzeitiger Verminderung der Gliederzahl hervorgehen. Der erste Fall findet statt, so oft ein zwangläufiges Paar in der ursprünglichen Kette durch ein flächenläufiges ersetzt werden kann, das sich gar nicht anders wie jenes in der Kette verhält, weil die mit der Beweglichkeit des letzteren darin vereinigten Beweglichkeiten durch die im Uebrigen obwaltende Paarungsweise der Kettenglieder aufgehoben, d. h. die betreffenden Relativbewegungen verhindert werden. So könnte z. B. bei einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette unbeschadet ihrer Zwangläufigkeit eines ihrer Drehkörperpaare durch ein Cylinderpaar ersetzt werden, vorausgesetzt dass die übrigen vollkommen (ohne Spielräume) ausgeführt und die Kettenglieder ganz unbiegsam sind, weil dann Axialverschiebung unmöglich wäre; wegen des stets nur unvollkommenen Zutreffens jener Voraussetzungen würde aber hier ebenso wie in analogen Fällen die Anwendung des flächenläufigen Elementen-

* Die kinematische Kette; ihre Beweglichkeit und Zwangläufigkeit. „Civilingenieur“, Bd. XXII.

paares nicht nur nutzlos, weil eine Vereinfachung der Kette nicht herbeiführend, sondern insofern selbst nachtheilig sein, als dadurch die Zwangläufigkeit beeinträchtigt und die Anstrengung der Kettenglieder durch äussere Kräfte, die in gewissem Sinne (hier im Sinne der Paaraxen) zufällig einwirken, vergrössert würde.

Eine nähere Prüfung verdient also die Einführung flächenläufiger Elementenpaare nur unter der Voraussetzung, dass dadurch eine Verminderung der Gliederzahl einer Kette ermöglicht wird. Das ist der Fall, wenn die mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildete Kette solche 2 oder 3 auf einander folgende Paare enthält, deren Beweglichkeiten einem gewissen flächenläufigen Elementenpaare zusammen eigen sind. Enthält die Kette zwei solche benachbarte Paare A, B, deren Beweglichkeiten in einem Cylinderpaare vereinigt vorkommen, oder drei auf einander folgende Paare A, B, C, deren Beweglichkeiten in einem Kugel- oder Plattenpaare vereinigt sind, so kann das betreffende flächenläufige Paar unbeschadet der Zwangläufigkeit der Kette an die Stelle jener zwangläufigen Elementenpaare gesetzt werden mit Beseitigung des dazwischen liegenden Gliedes AB resp. der beiden Glieder AB und CD; wenn aber im Falle von nur zwei solchen auf einander folgenden zwangläufigen Paaren A, B die Beweglichkeiten derselben zwei Freiheitsgraden eines Kugelpaares K oder Plattenpaares P entsprechen, so bleibt bei der Substitution von K resp. P für die beiden mit dem Gliede AB wegfallenden Paare A und B die Kette nur dann zwangläufig, wenn es die ursprüngliche Kette bei Einschaltung eines weiteren, dem Paare A oder B benachbarten zwangläufigen Paares C bliebe, dessen Beweglichkeit dem dritten Freiheitsgrade von K resp. P entspricht, wenn also hierbei das Paar C thatsächlich gar nicht als solches zur Geltung kommen, d. h. wenn es die dadurch verbundenen Glieder unbeweglich gegen einander lassen würde.

So geht z. B. die fünfgliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 63, §. 51, in eine viergliedrige nach wie vor zwangläufige Kette über, wenn das Drehkörperpaar D und das Prismenpaar d, f unter Beseitigung des Gliedes d zusammen durch ein Cylinderpaar ersetzt werden, indem ein am Gliede e als Hohlcylinder mit der Axe D befindlicher Ring einen damit conaxialen Vollcylinder umschliesst, zu dem sich das excentrisch mit dem Muttergewinde des Schraubenpaares A versehene Glied f erweitert. Ebenso bleibt z. B. eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette zwangläufig, wenn 3 ihrer Drehkörperpaare zusammen durch ein Kugelpaar ersetzt werden; freilich ist die dann nur noch zweigliedrige Kette ein blosses Drehkörperpaar geworden, dem es als solchem ganz unwesentlich ist, dass seine Elementenfläche theilweise die Form einer Kugel hat. Würden aber von den 4 Drehkörperpaaren der sphärischen Kette nur zwei benachbarte durch ein Kugelpaar ersetzt, so verlöre die Kette ihre Zwangläufigkeit, weil die ursprüngliche Kette sie durch Einschaltung eines fünften Drehkörperpaares verlieren würde, dessen Axe durch den Schnittpunkt der übrigen geht. Indessen kann die viergliedrige singuläre Schraubenkette, Fig. 64, §. 51, als Beispiel des Falles dienen, dass der Ersatz von zwei zwangläufigen benachbarten Elementenpaaren durch ein flächenläufiges Paar mit 3 Freiheitsgraden trotz der damit verbundenen Einführung eines weiteren Freiheitsgrades doch die Zwangläufigkeit der Kette nicht aufhebt. Weil nämlich die Unveränderlichkeit der Winkel, unter denen hier die Schubrichtung des Prismenpaares C gegen die Schraubenaxe AA und die Schubrichtung DD des Prismenpaares D geneigt ist, schon durch einen dieser Winkel sicher gestellt wird, da AA und DD unter sich einen unveränderlichen Neigungswinkel haben, so verliert diese Kette ihre Zwangläufigkeit dadurch nicht, dass die prismatische Stange b mit der Hohlschraube B, oder dass die prismatische Stange c mit dem Hohlprisma C statt fester Verbindung durch ein Drehkörperpaar verbunden wird, dessen Axe normal zu den Schubrichtungen der Prismenpaare C und D ist; also können unbeschadet der Zwangläufigkeit diese zwei Prismenpaare zusammen durch ein Plattenpaar ersetzt werden, in welchem ihre Beweglichkeiten und die jenes eingeschalteten Drehkörperpaares vereinigt sind. Die Kette geht dadurch in eine dreigliedrige Kette a, b, d über, welche, da in ihr das die Glieder b und d verbindende Plattenpaar thatsächlich nur als Prismenpaar zur Geltung kommt, identisch ist mit der conaxialen singulären Schraubenkette a, b, c, Fig. 62, §. 49.

Uebrigens ist natürlich eine solche, wenn auch mit Rücksicht auf die Zwangläufigkeit zulässige Vereinfachung der Kette doch mit Rücksicht auf den jeweiligen Bewegungszweck derselben nur dann zulässig, wenn die Bewegungen der in Wegfall kommenden Glieder bei diesem Zwecke nicht in Betracht kommen. So würde z. B. die eben angeführte Reduction der viergliedrigen Kette, Fig. 64, auf nur 3 Glieder unzulässig sein, sofern diese Kette, z. B. bei der Anwendung als Mechanismus einer Theilmaschine, gerade die Verschiebung des Gliedes c gegen das Glied d vermitteln sollte, die mit dem Wegfalle des Gliedes c verloren geht.

Während aus solchen Gründen die Anwendung des in Rede stehenden Princips, die Gliederzahl einer zwangläufigen Kette durch Einführung flächenläufiger Elementenpaare zu vermindern, sehr oft unthunlich ist, giebt es jedoch auch Fälle, in denen die Anwendbarkeit des Verfahrens insofern eine Ausdehnung erfährt, als es selbst auf Kosten der Zwangläufigkeit in Anwendung gebracht werden darf, wenn nämlich die mehrfache Beweglichkeit nur solche Glieder betrifft und von solcher Art ist, dass dadurch der durch den betreffenden Mechanismus zu erfüllende Bewegungszweck nicht beeinträchtigt wird. So kann es z. B. der Fall sein, dass ein gerader stangenförmiger Körper, wenn er als Glied einer kinematischen Kette an beiden Enden durch Kugelpaare mit den benachbarten Gliedern verbunden und somit unabhängig von letzteren beliebig um die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte drehbar, also nicht zwangläufig ist, dadurch doch die Zwangläufigkeit der übrigen Kettenglieder nicht stört und somit auch nicht die Brauchbarkeit des betreffenden Mechanismus, insoweit es dabei nur auf die Zwangläufigkeit jener übrigen Kettenglieder ankommt; in §. 54 wird ein Beispiel dieses Falles näher besprochen.

Ueberhaupt enthalten die zwei folgenden Paragraphen eine Uebersicht der einfacheren, aus Drehkörperketten ableitbaren Mechanismen mit Cylinder- oder Kugelpaaren nebst Beispielen praktischer Anwendung; Plattenpaare sind seltener benutzt worden.

§. 53. Mechanismen mit Cylinderpaaren.

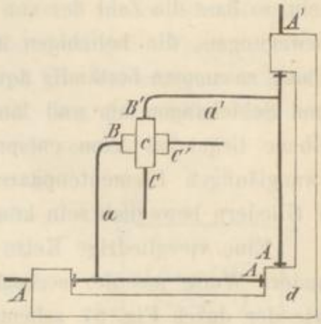
Ein hier zunächst als Beispiel anzuführender Mechanismus ist auch deshalb bemerkenswerth, weil bei ihm das im vorigen §. besprochene Princip auf eigenthümliche Weise in Anwendung gebracht ist. Sind nämlich in einer zwangläufig geschlossenen einfachen kinematischen Kette

die auf einander folgenden Glieder	a	b	c	b'	a'
durch die zwangläufigen Elementenpaare		B	C	C'	B'

in der durch die Uebereinanderstellung angedeuteten Weise verbunden, und sind E, E' zwei flächenläufige Elementenpaare von solcher Art, dass die Beweglichkeiten der Paare B und C in E, die von B' und C' in E' vereinigt sind, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass unter Beseitigung der Glieder b und b' das Glied c unmittelbar mit a durch das Paar E, mit a' durch das Paar E' verbunden werden kann ohne die Zwangläufigkeit der Kette aufzuheben, falls etwa weitere den Elementenpaaren E, E' eigenthümliche Freiheitsgrade in Folge der besonderen Art der Kette nicht zur Geltung kommen können. Indem aber durch den Wegfall der Glieder b, b' auch die Folge der Elementenpaare C, C', durch welche c mit diesen Gliedern zusammenhing, gleichgültig geworden ist, so kann schliesslich auch c mit a durch das Paar E, mit a' durch das Paar E' dann verbunden werden, wenn E die Beweglichkeiten von B und C', E' die von B' und C in sich vereinigt.

Dieses Princip ist in dem Mechanismus, Fig. 66, zur Anwendung gekommen. Die viergliedrige Kette desselben besteht aus zwei Gliedern a, a', die einerseits mit dem festgestellten Gliede d durch Drehkörperpaare A, A' mit rechtwinklig geschränkten (d. h. im Allgemeinen windschiefen) Axen und andererseits mit dem Gliede c durch Cylinderpaare BC' und $B'C$ mit rechtwinklig geschränkten Axen verbunden sind; die Glieder a und a' sind zu dem Ende mit Ansätzen versehen, welche in cylindrische Stangen BC' und $B'C$ auslaufen, deren Axen beziehungsweise parallel den Axen A und A' sind, während das als Doppelhülse gestaltete Glied c mit seinen rechtwinklig geschränkten entsprechenden cylindrischen Bohrungen BC' und $B'C$ auf jene Stangen aufgeschoben ist.

Fig. 66.

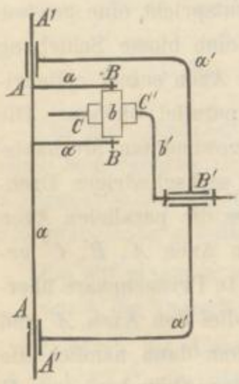


Einer Drehung des Gliedes a um seine Axe A entspricht eine gewisse Drehung von a' um A', wobei die Bewegung von c eine blosse Schiebung ist, indem zwei feste Gerade in diesem Gliede c (die Axen seiner cylindrischen Bohrungen) beständig den Axen A und A' parallel bleiben. Die Kette dieses zur Drehung von Weichensignalen angewendeten Mechanismus kann vorgestellt werden als abgeleitet aus einer sechsgliedrigen Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ (§. 48) von solcher Art, dass die parallelen Axen A, B, C rechtwinklig gegen die gleichfalls parallelen Axen A', B', C' gerichtet, zugleich aber die Drehkörperpaare C und C' in Prismenpaare übergegangen sind, so dass die Schubrichtung von C parallel den Axen A' und B', die von C' parallel den Axen A und B ist; indem dann nämlich die Beweglichkeiten der Paare B und C' zusammen die eines Cylinderpaares E, die der Paare B' und C zusammen die eines Cylinderpaares E' sind, konnte unter Beseitigung der Glieder $BC = b$ und $B'C' = b'$ das Glied CC' als das Glied c der Fig. 66 unmittelbar mit a durch das Paar $E = BC'$, mit a' durch $E' = B'C$ verbunden werden.

Wenn man bei der Kette, Fig. 66, die Axe A im Sinne der gemeinsamen Normale von A und A' ins Unendliche rücken, d. h. das Drehkörperpaar A in ein Prismenpaar mit der Schubrichtung $A'A'$ übergehen liesse, und dann dasselbe nebst dem Drehkörperpaare A' unter Beseitigung des Gliedes d durch ein Cylinderpaar mit der Axe A' ersetzte, so ginge die Kette in eine dreigliedrige Cylinderkette über, die aber thatsächlich nur ein Prismenpaar mit der Schubrichtung $A'A'$ wäre. Ebenso erhielte man durch Vertauschung von A mit A' ein Prismenpaar mit der Schubrichtung AA. Ueberhaupt kann eine dreigliedrige Kette mit 3 Cylinderpaaren nur dann beweglich sein, wenn sie mit einem Prismenpaare oder einer ebenen Prismenkette identisch ist; denn anderenfalls dürften die Axen der 3 Cylinderpaare nicht einer Ebene parallel sein, so dass die Zahl der von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen, die beliebigen möglichen relativen Bewegungen sämmtlicher Paare zusammen beständig äquivalent wären, = 6 sein würde (Drehungen und Schiebungen um und längs 3 sich schneidenden und nicht in einer Ebene liegenden Axen entsprechend), die Kette folglich, wenn mit nur zwangläufigen Elementenpaaren gebildet, nicht mit 6, sondern erst mit 7 Gliedern beweglich sein könnte.

Eine viergliedrige Kette mit 2 Cylinderpaaren kann aber noch auf andere Weise aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette abgeleitet werden, wie der durch Fig. 67 schematisch dargestellte Mechanismus zeigt. Auch ihm liegt eine solche sechsgliedrige Drehkörperkette zu Grunde, bei der nach dem Schema

Fig. 67.

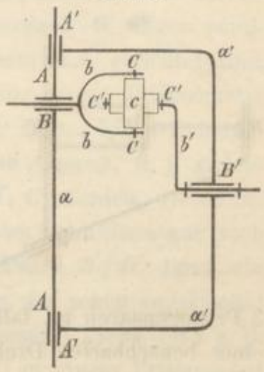


$$\begin{array}{ccccc} A & \overset{a}{\text{———}} & B & \overset{b}{\text{———}} & C \\ d \,| & & & & |\, c \\ A' & \underset{a'}{\text{———}} & B' & \underset{b'}{\text{———}} & C' \end{array}$$

die parallelen Axen A, B, C rechtwinklig gegen die parallelen Axen A', B' C' gerichtet, zugleich aber jetzt das Drehkörperpaar C in ein Prismenmenpaar übergegangen ist, dessen Schubrichtung parallel der Axe C', das Drehkörperpaar A' in ein Prismenpaar, dessen Schubrichtung parallel der Axe A ist, so dass unter Beseitigung der Glieder c und d die Glieder b und b' durch ein Cylinderpaar mit der Axe C', a und a' durch ein Cylinderpaar mit der Axe A ersetzt werden konnten. Bei dem Mechanismus, Fig. 67, ist a' das festgestellte Glied; das ihm einerseits benachbarte Glied b' kann als Kurbel um die Axe B' rotiren, während die Bewegung des ihm andererseits benachbarten Gliedes a aus hin und her gehender Schiebung längs der Axe A und schwingender Drehung um dieselbe zusammengesetzt ist, dieses Glied deshalb als schwingender Schieber bezeichnet werden kann. Der somit als Schwingschieberkurbel zu bezeichnende Mechanismus ist von Robertson, und zwar als Schwingschieberkurbelgetriebe, d. h. mit dem schwingenden Schieber als treibendem Gliede, für Dampfmaschinen erdacht worden, indem dabei das festgestellte Glied a' auf einer Seite als Dampfcylinder, der schwingende Schieber a als Kolbenstange mit entsprechendem Kolben ausgebildet, und die zusammengesetzte Bewegung des letzteren zugleich zur Vermittelung der Dampfvertheilung benutzt ist.

Bei einer anderen Form der Ausführung seines Dampfmaschinengetriebes (Fig. 68) hat Robertson nur das Glied d der zu Grunde liegenden sechsgliedrigen Kette wie im vorigen Falle beseitigt in Folge unmittelbarer Verbindung der Glieder a und a' durch das Cylinderpaar AA', die Drehkörperpaare C und C' aber als solche mit dem dazwischen liegenden Gliede c bestehen lassen, und nur noch die Abänderung getroffen, dass das Drehkörperpaar B durch ein Prismenpaar ersetzt wurde, dessen gegen die Axen A und C rechtwinklige Schubrichtung dann nur vorübergehend mit den Axen B' und C' parallel wird. —

Fig. 68.

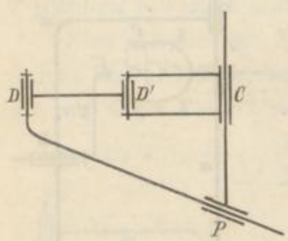


Indem die drei hier besprochenen Mechanismen, Fig. 66—68, zunächst nur als zufällige Ableitungen aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette erscheinen, mag noch die Frage geprüft werden, welche verschiedene Arten zwangläufiger Ketten mit Cylinderpaaren überhaupt aus zwangläufigen Drehkörperketten mit höchstens 6 Gliedern erhalten werden können? Dass eine solche Cylinderkette höchstens zwei Cylinderpaare enthalten kann, wurde schon oben hervorgehoben; dass andererseits siebengliedrige Drehkörperketten zu sehr mannigfachen Arten von Cylinderketten (u. A. auch mit 3 Cylinderpaaren) führen können, ist ausser Zweifel, hier aber nicht näher zu untersuchen, da es an übersichtlicher Classifizirung der reichhaltigen Gruppe von siebengliedrigen Drehkörperketten einstweilen fehlt, ein nahe liegendes Bedürfniss auch nicht dazu vorhanden ist, indem die Praxis stets mit den einfachsten Mitteln ihre Zwecke zu erreichen bestrebt sein muss.

Da ein Cylinderpaar als Verschmelzung eines Drehkörperpaares und eines Prismenpaares bei vorhandenem Parallelismus der Schubrichtung des letzteren mit der Axe des ersteren zu betrachten ist, so ist zunächst klar, dass bei einer viergliedrigen Drehkörperkette niemals zwei Paare zu einem Cylinderpaare vereinigt werden können. Denn während bei der sphärischen Kette die Axen der Paare wesentlich im Endlichen liegen, diese also überhaupt nicht in Prismenpaare übergehen können, sind sie bei der ebenen Kette zwar durch Prismenpaare ersetzbar, aber nur durch solche, deren Schubrichtungen rechtwinklig gegen die Paaraxen gerichtet sind.

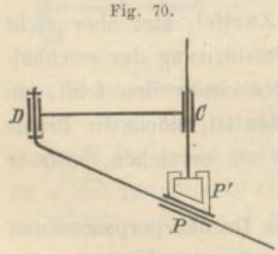
Aus jeder der zweierlei fünfgliedrigen Drehkörperketten (§. 47) kann eine viergliedrige Kette mit einem Cylinderpaare erhalten werden. Aus einer solchen, welche 3 Drehkörperpaare mit parallelen Axen nebst 2 Prismenpaaren enthält, ist es dann möglich, wenn einem dieser Drehkörperpaare ein parallel mit seiner Axe verschiebliches Prismenpaar benachbart ist. Es ergiebt sich so eine Kette mit einem Cylinderpaare, zwei ihm parallelaxigen Drehkörperpaaren und einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung mit jenen Axen von 0 und 90° verschiedene Winkel bildet; sie zerfällt in verschiedene Unterarten je nach der Folge ihrer dreierlei Elementenpaare. Fig. 69 zeigt eine solche Kette; mit C ist das Cylinderpaar, mit D das eine, mit D' das andere Drehkörperpaar, mit P das Prismenpaar bezeichnet, und ist die Axe D' ausserhalb der Ebene CD liegend zu denken.

Fig. 69.



Aus einer fünfgliedrigen Drehkörperkette mit 2 parallelaxigen Drehkörperpaaren und 3 Prismenpaaren ist, falls die Schubrichtung eines dieser letzteren der Axe eines benachbarten Drehkörperpaares parallel ist, eine viergliedrige Kette zu erhalten mit einem Cylinderpaare C, einem damit parallelaxigen Drehkörperpaare D und zwei Prismenpaaren P, P', deren Schubrichtungen nicht zusammen mit den Axen C, D einer Ebene parallel, und welche auch nicht beide zugleich rechtwinklig gegen diese Axen gerichtet sind. Je nach der Folge ihrer dreierlei Paare sind wieder verschiedene Unterarten der Kette zu unterscheiden. Durch Fig. 70, einer näheren Erklärung wohl nicht bedürftig, ist eine solche Kette angedeutet. — Ketten mit zwei Cylinderpaaren sind aus der einen oder anderen fünfgliedrigen Drehkörperkette offenbar nicht zu erhalten, weil sie, wie sie auch gebildet werden möchten, von einem blossen Prismenpaar nicht verschieden wären.

Fig. 70.



Wenn eine sechsgliedrige Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ mit zwei Gruppen von je 3 in einem Punkte sich schneidenden benachbarten Axen A, B, C und C', B', A' vermittels der Einführung eines Cylinderpaares auf eine fünfgliedrige Kette reducirbar sein soll, so muss von jenen zwei

Gruppen wenigstens eine, z. B. die zweite C', B', A' parallele Axen enthalten, die rechtwinklig gegen eine der äusseren Axen A oder C der ersten Gruppe gerichtet sind, um eines der beiden äusseren Drehkörperpaare A' oder C' der zweiten Gruppe durch ein Prismenpaar ersetzen zu können, dessen Schubrichtung mit der Axe A resp. C des benachbarten Paares der anderen Gruppe parallel ist. So könnten z. B. bei der Kette, Fig. 61, §. 48 (abgesehen von der dort angeführten speciellen Verwendung dieser Kette als Mechanismus einer Dampfmaschine) das Drehkörperpaar A und das Prismenpaar A' unter Beseitigung des Gliedes AA' (des festgestellten Gliedes bei jenem a. a. O. besprochenen Mechanismus) zu einem Cylinderpaare vereinigt werden. Zwei Specialfälle können bei der so zu erhaltenden fünfgliedrigen Kette mit einem Cylinderpaare dadurch herbeigeführt werden, dass von den beiden Drehkörperpaaren B', C', deren parallele Axen rechtwinklig gegen die des Cylinderpaares AA' gerichtet sind, noch eines (nicht beide, weil sonst das Resultat eine ebene Prismenkette wäre) in ein Prismenpaar übergeht, wie es bei der Kette, Fig. 61, bezüglich des Paares B' der Fall ist. Auch können die Axen A, B, C gleichfalls parallel, somit rechtwinklig gegen die Axen B', C' werden, wie es bei der fünfgliedrigen Kette, Fig. 68, der Fall ist; dabei kann dann nur noch eines der Drehkörperpaare B, C oder eines der Paare B', C' durch ein Prismenpaar ersetzt werden ohne die Kette in eine der schon anderweitig classifizirten viergliedrigen Ketten übergehen zu lassen. Liesse man z. B. bei der Kette, Fig. 68, ausser B auch B' oder C' zu einem Prismenpaar werden, so würde, wenn auch die Schubrichtung desselben mit den Axen A und C einen von 0 und 90^0 verschiedenen Winkel bildete (widrigenfalls das Resultat ein blosses Prismenpaar oder eine Schieberschleifenkette, §. 43, wäre), doch nur eine Kette von der durch Fig. 70 dargestellten Art erhalten, indem die durch das Paar C' resp. B' verbundenen Glieder gegenseitig unbeweglich würden.

Wenn endlich in der sechsgliedrigen Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ sowohl die Paare A und A', als auch die Paare C und C' durch je ein Cylinderpaar unter Ausfall der Glieder AA' und CC' ersetzbar sein sollen, so müssen die Paaraxen wenigstens einer der beiden mehrgenannten Gruppen, etwa A', B', C' parallel und rechtwinklig gegen die beiden benachbarten Axen A, C der anderen Gruppe A, B, C gerichtet sein. Schnitten sich dabei diese letzteren in dem im Endlichen liegenden Punkte O, so dürfte der Winkel AOC nicht veränderlich sein, weil eine Aenderung desselben nur durch gegenseitige Verdrehung der Axen A, C um die Normale der Winkelebene AOC im Punkte O vermittelt werden dürfte, um letztere beständig normal zu den Axen A', B', C' zu erhalten; es müsste also die diese Drehung thatsächlich vermittelnde Axe B parallel mit den Axen A', B', C' sein, wodurch die Kette zu einer viergliedrigen ebenen Drehkörperkette würde. Ist aber somit der Winkel AOC constant, so ist er nothwendig beständig = Null, dem Parallelismus der Axen A, B, C entsprechend, weil sonst die 3 constanten Winkel AOC, COB, BOA die Glieder einer unbeweglichen dreigliedrigen ebenen Drehkörperkette wären. Eine viergliedrige Kette mit 2 gegenüber liegenden Cylinderpaaren kann also aus der sechsgliedrigen Drehkörperkette nur dann erhalten werden, wenn dieselbe solche zwei Gruppen von je 3 auf einander folgenden Drehkörperpaaren enthält, dass die parallelen Axen der einen rechtwinklig gegen die parallelen Axen der anderen gerichtet sind. Offenbar kann auch nur aus diesem Falle die Vereinigung von B mit C' und von C mit B', oder von B mit A' und von A mit B' zu je 2 benachbarten Cylinderpaaren hervorgehen. Somit ist ersichtlich, dass eine viergliedrige Kette mit 2 Cylinderpaaren und 2 Drehkörperpaaren nur aus einer solchen sechsgliedrigen Drehkörperkette abgeleitet werden kann, deren zwei Gruppen von je 3 auf einander folgenden parallelen Paaraxen unter rechten Winkeln gegen einander gerichtet sind; und da ferner die zwei Cylinderpaare einer solchen Kette nur entweder benachbarte oder gegenüber liegende sein können, so sind überhaupt keine anderen Fälle derselben möglich, als die durch Fig. 66 und Fig. 67 dargestellten. Auch können nicht neue Specialfälle daraus durch den Uebergang eines der beiden übrig gebliebenen Drehkörperpaare in ein Prismenpaar erhalten werden, weil dadurch die Kette wieder zu der durch Fig. 70 dargestellten würde unter Beschränkung der Function eines der beiden Cylinderpaare auf die eines Prismenpaares.

§. 54. Mechanismen mit Kugelpaaren.

Die Mannigfaltigkeit kinematischer Ketten mit Kugelpaaren ist vor Allem durch den Umstand beschränkt, dass sie, um zwangläufig zu sein, nur ein Kugelpaar enthalten dürfen; schon bei nur zwei dergleichen wären die durch sie verbundenen Theile der Kette beliebig und unabhängig von gleichzeitigen relativen Bewegungen der einzelnen Glieder dieser Kettentheile um die Verbindungsgerade der beiden Kugelmittelpunkte drehbar. Mit einem Kugelpaare kann aber eine zwangläufige Kette aus einer solchen mit zwangläufigen niederen Paaren nur dann erhalten werden, wenn letztere benachbarte Drehkörperpaare mit sich schneidenden Axen enthält, und da die aus einer viergliedrigen sphärischen Drehkörperkette durch Vereinigung von drei ihrer Paare in einem Kugelpaare hervorgehende zweigliedrige Kette nichts anderes, als ein Drehkörperpaar ist, so können es nur sechs- oder siebengliedrige Drehkörperketten sein, die hier als event. durch Einführung eines Kugelpaares auf eine kleinere Gliederzahl reducirbar in Betracht kommen.

Was die sechsgliedrige Drehkörperkette $ABCC'B'A'$ betrifft, deren zwei Gruppen A, B, C und A', B', C' auf einander folgender Paaraxen sich je in einem Punkte O resp. O' schneiden, so würde der Ersatz einer dieser Gruppen von Drehkörperpaaren, z. B. der zweiten durch ein Kugelpaar K mit Beseitigung der Glieder $C'B'$ und $B'A'$ nichts anderes als eine viergliedrige sphärische Drehkörperkette $ABCK$ zur Folge haben, indem das Kugelpaar K die gegenseitige Drehbarkeit der Glieder CK und KA um jede durch O' gehende Axe, insbesondere also auch die Drehung um OO' vermittelt, die dann zugleich die einzig mögliche, nämlich die einzige ist, die in Drehungen um die Axen A, B, C als Componenten zerlegt werden kann. In Frage kommt also nur die Einführbarkeit eines Kugelpaares für solche zwei benachbarte Drehkörperpaare A, A' oder C, C' der sechsgliedrigen Drehkörperkette, von denen das eine der einen, das andere der anderen der beiden Gruppen A, B, C und A', B', C' angehört, deren Axen sich in je einem Punkte O resp. O' schneiden. Specialfälle können dabei nur insofern stattfinden, als sie der zu Grunde liegenden Kette an und für sich zukommen mit Rücksicht darauf, dass die Punkte O, O' im Unendlichen liegen, dass dann Drehkörper- durch Prismenpaare ersetzt, und event. Cylinderpaare eingeführt werden können.

Sollen nun etwa die Paare C und C' der sechsgliedrigen Drehkörperkette unbeschadet der Zwangläufigkeit durch ein Kugelpaar ersetzbar sein, so müssen die Axen C, C' sich in einem gewissen Punkte P schneiden, und darf ferner die Zwangläufigkeit der sechsgliedrigen Kette dadurch nicht gestört werden, dass das Glied CC' in zwei Glieder zerlegt wird, verbunden durch ein 7tes Drehkörperpaar D, dessen Axe, durch den Punkt P gehend, nicht in der Ebene CC' liegt. Dass aber Letzteres in der That nicht der Fall ist, ergiebt sich durch folgende Erwägung. Beliebige unendlich kleine Drehungen um die Axen der sechsgliedrigen Drehkörperkette sind, als gleichzeitige Elementarbewegungen eines starren Körpers betrachtet, 5 von einander unabhängigen einfachen Elementarbewegungen äquivalent: Drehungen um 3 im Punkte O sich schneidende nicht in einer Ebene liegende Axen und Schiebungen nach 2 sich schneidenden zur Geraden OO' senkrechten Richtungen. Indem nun eine Drehung um die Axe D in eine gleiche Drehung um eine durch O gehende Parallelaxe und eine Schiebung normal zur Ebene CD zerlegt werden kann, d. i. eine Schiebung, die nicht normal zu OO', weil OO' nicht in der Ebene CD enthalten ist, so kommt durch die Einführung des 7ten Drehkörperpaares D jedenfalls eine 6te unabhängige einfache Elementarbewegung hinzu (Verschiebbarkeit auch nach der Richtung OO'), so dass die Kette nach §. 47 jetzt erst mit 7 Gliedern zwangläufig beweglich sein, die sechsgliedrige Kette folglich ihre Zwangläufigkeit nicht durch die Einführung des Drehkörperpaares D und somit auch nicht durch die Einführung eines Kugelpaares an Stelle der Drehkörperpaare C, C' verlieren kann. Hiernach ist die zwangläufige sechsgliedrige Drehkörperkette immer dann auf eine fünfgliedrige, und ebenso jede aus jener sechsgliedrigen Kette abgeleitete auf eine ein Glied weniger enthaltende zwangläufige Kette mit einem Kugelpaare zu reduciren, wenn die Axen der Drehkörperpaare A und A' oder C und C' sich schneiden.

So kann z. B. der sechsgliedrige Mechanismus Fig. 61, §. 48, auf einen fünfgliedrigen reducirt werden durch Anwendung eines Kugelpaares statt der beiden Drehkörperpaare C, C', wie es bei der constructiven Ausführung des Mechanismus für Dampfmaschinen in der That geschehen ist; das stangenförmige Glied OC endigt dabei in einem kugeligen Kopf, dessen entsprechende Hohlkugel, äusserlich prismatisch gestaltet, in dem Rahmen $B'B'$ gleitet. — Der viergliedrige Mechanismus Fig. 67 lässt die Einführung eines Kugelpaares nicht zu, da die Drehkörperpaare A, A' und C, C' schon in Cylinderpaaren AA' und CC' vereinigt sind. Der fünfgliedrige Mechanismus Fig. 68 liefert aber einen viergliedrigen, indem die Glieder b und b' mit Beseitigung des Gliedes c durch ein Kugelpaar verbunden werden, und zwar enthält der Mechanismus dann ein Prismenpaar B, ein Drehkörperpaar B', ein Cylinderpaar AA' und ein Kugelpaar CC'. — Aus dem viergliedrigen Mechanismus Fig. 66 ist gar ein nur dreigliedriger mit zwei Cylinderpaaren und einem Kugelpaare zu erhalten, indem durch letzteres die Glieder a, a' unmittelbar verbunden werden. Bei Feststellung des Gliedes a und Bewegung von c ist dann jede elementare Bewegung von a' die Resultante von zwei Drehungen um Axen, welche, durch den Mittelpunkt des Kugelpaares gehend, mit den Axen der beiden Cylinderpaare parallel sind. —

Von siebengliedrigen Drehkörperketten, die durch Einführung von Kugelpaaren auf kleinere Gliederzahlen beschränkt werden können, sei schliesslich nur ein Beispiel erwähnt, zugleich als Beispiel solcher Umstände, unter denen ein Mechanismus ausnahmsweise trotz nur unvollständiger Zwangläufigkeit doch seinem Zwecke vollkommen entsprechend sein kann. Die 7 Drehkörperpaare der Kette seien auf einander folgend A, B, C, D, C', B', A'; die Axen B, C, D sollen sich in einem Punkte O, die Axen C', B' in einem Punkte O' schneiden, die Axen A und A' aber weder durch O noch durch O' gehen und gegenseitig im Allgemeinen windschief sein. Die Kette fällt dann unter keinen der Specialfälle, in denen sie nach §. 47 schon in Folge eines Theils ihrer Elementenpaare beweglich wäre, und ist sie also jedenfalls zwangläufig. Unbeschadet dieser Zwangläufigkeit können nun die Paare B, C, D unter Beseitigung der Glieder BC und CD durch ein Kugelpaar K mit dem Mittelpunkte O ersetzt werden. Wollte man auch B' und C' durch ein Kugelpaar K' mit dem Mittelpunkte O' ersetzen, so würde zwar die Zwangläufigkeit der Kette insofern aufgehoben, als nun das Glied KK' unabhängig von den übrigen Gliedern beliebig um die Gerade OO' drehbar würde, allein dieser auf ein einzelnes Glied sich beschränkende Mangel an Zwangläufigkeit beeinträchtigt nicht nothwendiger Weise die Brauchbarkeit eines durch Feststellung eines anderen Gliedes aus der Kette hervorgehenden Mechanismus. Insbesondere z. B. bei Feststellung des Gliedes AA' erhält man so einen viergliedrigen Mechanismus, bestehend aus zwei um im Allgemeinen geschränkte Axen A, A' drehbaren Gliedern AK und $A'K'$, die durch eine Koppel KK' mit Kugelgelenken K, K' so verbunden sind, dass die Mittelpunkte O, O' der letzteren ausserhalb der Axen A, A' liegen. Eine gewisse Drehung von AK um A veranlasst hier offenbar eine zwangläufige, d. h. ganz bestimmte entsprechende Drehung von $A'K'$ um A', einerlei wie dabei die Koppel etwa gleichzeitig um OO' sich drehen mag. Dieser Mechanismus kann als geschränkte oder allgemeine Doppelschwinge, Schwingkurbel resp. Doppelkurbel bezeichnet werden, jenachdem von den beiden dem festgestellten benachbarten Gliedern AK und $A'K'$ jedes nur zwischen Grenzlagen schwingen, oder eines stetig in einerlei Sinn rotiren, oder jedes rotiren kann. Wenn man die Bedingungen aufsuchte, unter denen der Mechanismus den ersten, zweiten oder dritten dieser Charaktere hat, so müssten darin die einfacheren, in §. 36 für die ebene Drehkörperkette entwickelten betreffenden Regeln als Specialfall enthalten sein.

2. Einfache Mechanismen mit höheren Elementenpaaren.

§. 55. Vorbemerkungen.

Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit höherer Elementenpaare lassen sich die damit herstellbaren kinematischen Ketten und Mechanismen nicht in ebenso vollständiger Uebersicht systematisch entwickeln, wie es bei der beschränkten Zahl niederer Elementenpaare hinsichtlich der nur aus solchen gebildeten Ketten geschehen konnte. Indessen sind doch die im Maschinenbau bisher benutzten, wenigstens die einfachen Ketten (§. 1) mit höheren Elementenpaaren, von denen hier zunächst nur die Rede ist, in wenigen Gruppen zusammenzufassen. Zum Theil können sie aus Ketten mit nur niederen Elementenpaaren nach dem Princip der Verminderung der Gliederzahl (§. 52) erhalten werden, indem unter Beseitigung eines Kettengliedes die Elementenpaare, die es mit den benachbarten Gliedern verbanden, durch ein einzelnes, die Freiheitsgrade jener in sich vereinigendes Elementenpaar ersetzt werden, das dann ein höheres sein wird, wenn die in ihm vereinigten Freiheitsgrade nicht, wie bei den in §. 53 und §. 54 besprochenen Ketten, einem niederen flächenläufigen Elementenpaare entsprechen. Insbesondere ist das der Fall, wenn die zwei ausgefallenen Elementenpaare Drehkörperpaare mit parallelen Axen waren, oder das eine ein Drehkörperpaar, das andere ein Prismenpaar mit einer zur Axe des Drehkörperpaares senkrechten Schubrichtung; die relative Beweglichkeit der durch das neue Elementenpaar verbundenen Glieder besteht dann in Drehbarkeit um alle Axen, die in einer gewissen Ebene einer gewissen Geraden parallel sind, ist also unter den in §. 3 zusammengestellten möglichen relativen Beweglichkeiten der Elemente eines niederen (umkehrbaren) Paares nicht enthalten.

Auf solche Weise können Ketten selbst mit nur zwei Gliedern (zu betrachten als blosse Elementenpaare) entstehen, wie z. B. die durch Fig. 36 (Seite 105) dargestellte Kette zeigt, die aus einer Kreuzschieberkette (Fig. 55, §. 42) dadurch entstanden zu denken ist, dass sowohl das Drehkörperpaar a, b mit dem Prismenpaare b, c unter Ausfall des Gliedes b, als auch das Drehkörperpaar a, d mit dem Prismenpaare d, c bei Ausfall des Gliedes d je durch ein flächenläufiges höheres Elementenpaar ersetzt wird, bestehend aus einem Drehkörper mit einer entsprechenden, nämlich solchen prismatischen Rinne als Hohlkörper, dass der Querschnitt der Rinnenfläche und der Meridianschnitt der Drehkörperfläche congruent sind. Ebenso könnte aus der allgemeinen ebenen Drehkörperkette, Fig. 39 in §. 36, eine drei- oder zweigliedrige Kette mit einem resp. zwei solchen höheren Elementenpaaren erhalten werden, indem der Zapfen B oder C der Koppel b oder jeder von beiden in einer kreisförmigen entsprechenden Rinne des Steges d geführt würde.

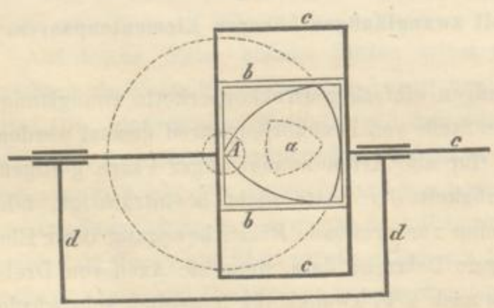
Die auf solche Weise zu erhaltenden Ketten mit höheren Elementenpaaren, die natürlich voraussetzen, dass die ausgefallenen Glieder der ursprünglichen Kette mit nur niederen Paaren für den Zweck des Mechanismus in der betreffenden Maschine nicht wesentlich sind, haben indessen nur untergeordnetes Interesse, weil der Vortheil der Vereinfachung durch Verminderung der Gliederzahl in der Regel mehr als aufgewogen wird durch den Nachtheil vermehrter Abnutzung der höchstens in Linien sich berührenden Elemente des höheren Paares bei Uebertragung grösserer Kräfte, wozu in gewissen Fällen (bei Kapselwerken) der Uebelstand vermehrter Durchlässigkeit für Flüssigkeiten hinzukommen kann. Im Folgenden ist deshalb nur noch von solchen Ketten die Rede, deren Glieder eine theilweise andere gegenseitige Beweglichkeit haben, als die Glieder von Ketten mit nur niederen Elementenpaaren, aus denen sie somit nicht durch blosse Reduction der Glieder, also durch Specialisirung, sondern nur durch Verallgemeinerung, event. mit Verminderung der Gliederzahl verbunden, erhalten werden können. Sie mögen als n-fach höhere Prismenketten, n-fach höhere Drehkörperketten oder n-fach höhere Schraubenketten bezeichnet werden, wenn sie ausser n höheren Paaren nur Prismenpaare, oder nur Drehkörperpaare event. mit Prismenpaaren, oder Schraubenpaare event. mit Drehkörper- oder Prismenpaaren enthalten. Praktische Verwendung haben besonders höhere Drehkörperketten gefunden.

§. 56. Drehkörperketten mit zwangläufigen höheren Elementenpaaren.

Wenn in einer zwangläufigen einfachen Drehkörperkette zwangläufige höhere Elementenpaare an die Stelle von Drehkörperpaaren gesetzt werden, so wird dadurch gemäss der (für alle Arten zwangläufiger Paare gültigen) Regel in §. 47 die Zwangläufigkeit der Kette nicht beeinträchtigt, falls auch diesen höheren Paaren eine nur drehende Relativbewegung ihrer Elemente zukommt um so gelegene Polaxen, dass, wenn sie Axen von Drehkörperpaaren wären, die Kette nach §. 47 zwangläufig beweglich sein würde. Insbesondere kann also ein Drehkörperpaar, dessen Axe in der ursprünglichen Drehkörperkette mit denen der beiden benachbarten Paare parallel ist, durch ein höheres Paar mit cylindrischen Axoiden ersetzt werden, deren Berührungslinie als Polaxe beständig mit denselben Axen parallel bleibt; ein Drehkörperpaar, dessen Axe die der benachbarten in einem gewissen Punkte O schneidet, durch ein höheres Paar mit conischen Axoiden, deren Mittelpunkte (Spitzen) in diesem Punkte O liegen. Solche höhere Drehkörperketten können analog den früher für niedere oder schlechtweg sogenannte Drehkörperketten festgesetzten Bezeichnungen als eben oder sphärisch bezeichnet werden, wenn die Polaxen aller ihrer Elementenpaare (die der Drehkörperpaare sind bekanntlich ihre geometrischen Axen) parallel sind resp. in einem Punkte sich schneiden; der obigen Bemerkung zufolge sind sie mit derselben Gliederzahl, wie niedere ebene oder sphärische Drehkörperketten (§. 36 und §. 45), also mit 4 Gliedern zwangläufig beweglich.

Ein zwangläufiges höheres Paar mit cylindrischen Axoiden seiner Elemente kann aus einer Scheibe mit entsprechendem Rahmen gebildet werden, so dass das Profil der ersteren eine Figur von constanter Breite (§. 14), das des Rahmens ein jene Figur berührend umschliessendes Quadrat (allgemeiner ein Rhombus) ist. So ist z. B. in dem ebenen Schubkurbelmechanismus (Fig. 47, §. 39) bei seiner Benutzung als Kurbelschubgetriebe zur Bewegung des Steuerungsschiebers von Dampfmaschinen das die Kurbel a mit der Koppel b verbindende Drehkörperpaar B durch eine Curvenscheibe mit Rahmen ersetzt worden (jene der Kurbel, dieser der Koppel angehörig), um das Bewegungsgesetz des Schiebers in zweckdienlicher Weise abzuändern. Dabei kann ebenso, wie in solchem Falle die gewöhnliche Kurbel nach dem Princip der Zapfenerweiterung (§. 44) als excentrische Scheibe gestaltet zu werden pflegt, auch hier die allgemeinere Curvenscheibe in solchen Dimensionen ausgeführt werden, dass von ihrer Elementenfläche die des Drehkörperpaares A, das die Kurbel a mit dem Stege d verbindet, eingeschlossen wird. Fig. 71 stellt einen Specialfall dieses Mechanismus dar, entsprechend dem Uebergange des die rahmenförmige Koppel b mit dem Schieber c verbindenden Drehkörperpaares C in ein Prismenpaar; der Schieber ist dadurch zu einem Kreuzschieber geworden, der

Fig. 71.



sowohl mit dem Stege *d*, als mit dem Rahmen *b* prismatisch gepaart ist. Unmittelbar geht der Mechanismus aus der Kreuzschieberkurbel (Fig. 56, §. 42) hervor, indem das Drehkörperpaar *B* derselben durch das höhere Curvenscheibenpaar ersetzt wird. Als Profil der Curvenscheibe ist in Fig. 71 ein gleichseitiges Bogendreieck (§. 14) angenommen worden, von dem eine Ecke in *A* liegt. Der Mechanismus kann als Kreuzschieberkurbel aufgefasst werden, deren Kurbellänge nach einem gewissen Gesetze veränderlich ist, nämlich bei jeder Viertelumdrehung einmal den Verbindungslinien des Punktes *A* mit allen Punkten der Polbahn des Bogendreiecks (in Fig. 71 als kleineres Bogendreieck punktirt eingetragen) nach und nach gleich wird.

Noch häufiger, als die Benutzung von dergleichen selbständig geschlossenen höheren Elementenpaaren, ist die von unselbständigen, die durch äusseren Druck geschlossen und durch die entsprechende Reibung zwangläufig gemacht werden. Die Elementenflächen solcher Paare (Reibungsräderpaare, Rollenpaare, Walzenpaare) sind zugleich ihre Axoide, und besteht ihre Zwangläufigkeit in relativ rollender Bewegung. So bilden z. B. zwei cylindrische Walzen mit einem Gestelle, in dem die untere Walze mit horizontaler Axe fest gelagert (durch ein Drehkörperpaar damit verbunden) ist, während die Zapfenlager der oberen in entsprechenden Schlitzen des Gestelles geführt (durch ein Prismenpaar damit verbunden) sind, eine einfach höhere ebene Drehkörperkette, deren höheres Paar von der so eben erklärten Art und von deren Drehkörperpaaren das eine durch ein Prismenpaar ersetzt ist. Ein vierrädriger Wagen ist als eine zweifach höhere ebene Drehkörperkette zu betrachten; die Vorder- und die Hinterräder als gegenüber liegende Glieder sind mit dem Wagengestelle als drittem Gliede durch Drehkörperpaare, mit der Fahrbahn als viertem Gliede durch Reibungsräderpaare verbunden. Ein Körper, der mit seiner ebenen Unterfläche auf zwei cylindrischen Walzen liegend fortgerollt wird, bildet mit diesen Walzen und der festen Rollbahn einen sogar vierfach höheren ebenen Drehkörpermechanismus, indem hier alle 4 Elementenpaare der Kette kraftschlüssige, durch Reibung zwangläufig gemachte höhere Paare sind.

§. 57. **Verminderte höhere Drehkörperketten.**

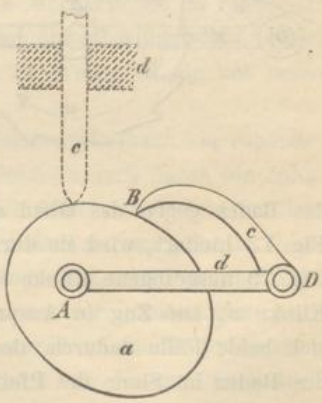
Dass das Princip der Verminderung der Gliederzahl einer kinematischen Kette, d. h. die Ersetzung benachbarter zwangläufiger Paare durch ein nicht zwangläufiges unter Wegfall der zwischenliegenden Glieder, auch bei höheren Ketten Anwendung finden kann, und zwar in Beziehung sowohl auf die darin vorkommenden niederen als höheren Elementenpaare, ist selbstverständlich. Als Beispiel kann die im vorigen §. erwähnte und durch Fig. 71 dargestellte Kette dienen. Bei ihrer Benutzung als Curvenkurbelschubgetriebe (Kurbelschubgetriebe, in dem die Kurbel durch eine rotirende Curvenscheibe ersetzt ist) oder, wie es kürzer genannt werde, als Curvenschubgetriebe kommt es nur darauf an, durch Drehung der Curvenscheibe *a* den Schieber *c* zu gesetzmässig entsprechender Schiebung zu nöthigen, die dadurch keine Aenderung erfährt, dass der Rahmen *b* weggelassen wird, so dass nun die Curvenscheibe und der Schieber ein flächenläufiges höheres Elementenpaar bilden, die Kette auf eine dreigliedrige einfach höhere ebene Drehkörperkette reducirt wird, als welche sie, von Hornblower angegeben, mehrfach benutzt wird. Auch ist hier die in Rede stehende Verminderung der Kette nicht nur zulässig, sondern unbedingt gerechtfertigt, da die ursprüngliche höhere Paarung von *a* mit *b* nur durch eine andere höhere Paarung von *a* mit *c* ersetzt wird, somit dem Vortheil der Vereinfachung nicht ebenso ein Nachtheil gegenüber steht, wie es bei dem Ersatze von niederen Paaren mit Flächenberührung durch ein höheres Paar mit Linienberührung seiner Elemente eben durch diese Aenderung der Berührungsart der Fall ist.

Das dreigliedrige Curvenschubgetriebe kann übrigens auf mehrfach verschiedene Weise ausgeführt werden nicht nur, was die Form der Curvenscheibe betrifft, sondern auch hinsichtlich der Art ihrer Paarung mit dem Schieber. Ist ihr Profil F eine Figur von constantem Durchmesser und der innerhalb liegende Drehungspunkt A ihr Mittelpunkt, d. h. sind alle ihre durch diesen Punkt A gehenden Durchmesser von gleicher Länge d, so kann der Schieber *c* mit zwei geradlinigen, der Axe A parallelen Kanten versehen werden, deren Ebene durch diese Axe geht und deren Entfernung $= d$ ist, um in denselben von der dazwischen liegenden Curvenscheibe berührt zu werden. Bei beliebiger Beziehung zwischen gleichzeitiger Drehung und Schiebung der Glieder *a* und *c*, welcher entsprechend das Profil F eine Figur von im Allgemeinen weder constanter Breite noch constantem Durchmesser sein würde, kann der Schieber mit einem cylinderförmigen Zapfen in eine Rinne der Curvenscheibe eingreifen, deren Begrenzungsflächen die zwei äquidistanten Umhüllungsflächen aller relativen Lagen der Zapfenumfläche gegen die Scheibe sind. Oder es kann der Schieber kraftschlüssig mit der Curvenscheibe gepaart werden, indem er dieselbe nur an einer Stelle in einer geraden Linie berührt, z. B. in verticaler Richtung periodisch durch die rotirende Scheibe gehoben wird und durch seine eigene Schwere niedersinkt, die Scheibe beständig von oben her berührend. Würde in diesem Falle zur Vermeidung relativ gleitender Bewegung an der Scheibenfläche und des entsprechenden Arbeitsverlustes durch Reibung der Schieber mit einer Rolle versehen, um mittels derselben die Scheibe zu berühren, so würde damit die auf 3 verminderte Gliederzahl der Kette wieder auf 4 vermehrt, und wäre das höhere Elementenpaar derselben wieder zwangläufig: ein durch äusseren Druck geschlossenes und durch die entsprechende Reibung zwangläufig gemachtes Rollenpaar (§. 56).

Wenn in der vorliegenden dreigliedrigen Kette das Drehkörperpaar *A* durch ein Prismenpaar ersetzt würde, dessen Schubrichtung senkrecht zur Axe *A*, mit der des Prismenpaares *c*, *d* aber nicht parallel ist, so ginge sie in eine einfach höhere ebene Prismenkette über, die sich von der niederen oder kurzweg so genannten ebenen Prismenkette (§. 34) durch die Veränderlichkeit des Verhältnisses der den Elementen ihrer zwei Prismenpaare zukommenden relativen Schiebungsgeschwindigkeiten unterscheidet.

Die allgemeine dreigliedrige einfach höhere ebene Drehkörperkette geht aus der allgemeinen ebenen Drehkörperkette (Fig. 39, §. 36) dadurch hervor, dass benachbarte Drehkörperpaare, etwa *B* und *C* mit Beseitigung des Gliedes $BC = b$ durch ein flächenläufiges höheres Paar ersetzt werden, entstanden zu denken dadurch, dass zunächst eines dieser Drehkörperpaare durch ein zwangläufiges höheres Paar ersetzt und dieses dann mit dem anderen zu einem flächenläufigen combinirt wird unter Wegminderung des Gliedes *b*. Eine so entstandene Kette, die als Curvenschwingkette bezeichnet werden kann, zeigt Fig. 72 bei kraftschlüssiger Ausführung des höheren Paares, gebildet aus der beliebig profilirten Curvenscheibe *a* und der damit durch eine äussere Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) längs einer geraden Linie *B* in Berührung erhaltenen Schwinge *c*. Diese Curvenschwingkette geht wieder in eine Curvenschubkette über, wenn das Drehkörperpaar *D*, indem seine Axe ins Unendliche rückt, zu einem Prismenpaar wird, wie in Fig. 72 punktirt angedeutet wurde vorbehaltlich hinzuzudenkender starrer Verbindung der Prismenführung des Schiebers *c* mit dem einen Elemente des Drehkörperpaares *A* durch das Glied *d*.

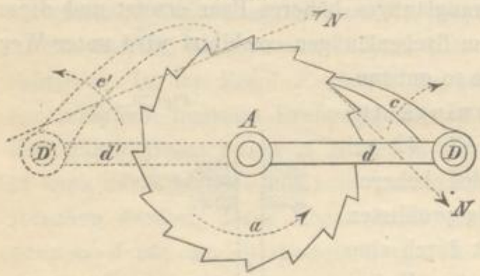
Fig. 72.



§. 58. Gesperre.

Die ebene Curvenschwingkette kommt u. A. in einer Form zur Verwendung, die besonders hervorgehoben zu werden verdient. Wenn nämlich bei derselben (Fig. 72) von einer gewissen Lage aus das Glied *a* gegen *d* in einem gewissen Sinne gedreht wird, so ist der entsprechende Drehungssinn von *c* gegen *d* bestimmt durch die Bedingung beständiger Berührung von *a* und *c* längs einer stetigen Folge gerader Linien *B* der Scheibenfläche *F*. Indem aber diese Drehung von *c* gegen *d*, wenn in solchem Sinne stattfindend, dass dabei die Entfernung der Geraden *B* von der Axe *A* zunimmt, durch den Normaldruck *N* der Curvenscheibe auf die Schwinge entgegen der die letztere angreifenden Schliessungskraft des Elementenpaares *a*, *c* bewirkt werden muss, wird sie unmöglich und damit die Kette zu einem Gesperre, wenn der Druck *N* eine solche Richtung hat, dass er die Schwinge im umgekehrten, d. h. im Sinne einer Annäherung der Berührungslinie *B* an die Axe *A* zu drehen strebt. Insbesondere kann das in gewissen Configurationen der Kette bei unstetiger, zackiger Form der Scheibenfläche *F* der Fall sein (Fig. 73), wobei dann die Schwinge als Klinke, die gezahnte Curvenscheibe als Klinkrad bezeichnet werde. Indem erstere, durch eine äussere Kraft (Schwerkraft oder Federkraft) gegen das Klinkrad angedrückt, eine durch eine andere Kraft angestrebte relative Drehung

Fig. 73.



des Rades gegen das Glied *d* entgegengesetzt dem Sinne des Pfeils *a* in Fig. 73 hindert, wird sie durch den Normaldruck *N* entweder, wie die in Fig. 73 ausgezogene Klinke *c*, auf Druck oder, wie die daselbst punktirte Klinke *c'*, auf Zug in Anspruch genommen. Kinematisch unterscheiden sich beide Fälle dadurch, dass bei der unbeschränkt möglichen Drehung des Rades im Sinne des Pfeils *a* die Zugklinke sich in demselben Sinne, die Druckklinke dagegen im umgekehrten Sinne dreht, indem ihre Angriffskante längs der schrägen Fläche eines Zahns gleitet, nämlich in dem durch den betreffenden Pfeil *c'* resp. *c*, Fig. 73, angedeuteten Sinne.

Von anderem Charakter wird dieses Gesperre, wenn seine Klinke *c*, angedrückt durch die das Paar *a*, *c* schliessende äussere Kraft, mit einem Haken in eine so gestaltete Zahnlücke des Klinkrades *a* eingreift, dass dadurch dieses in beiderlei Sinne undrehbar wird, so lange nicht durch eine andere äussere Kraft die Klinke ausgehoben, das Gesperre „ausgelöst" wird. Diese Klinke vereinigt dann in sich die Eigenschaften einer Druck- und einer Zugklinke; das Gesperre kann mit Reuleaux als ruhendes im Gegensatze zu jenem durch Fig. 73 dargestellten als laufendem Gesperre bezeichnet werden.

Während das laufende Gesperre in der durch Fig. 73 dargestellten Lage bezüglich auf eine angestrebte relative Drehung von *a* gegen *d* entgegen dem Sinne des Pfeils *a* als Sperrung, das Klinkrad als Sperrrad wirkt, kommt es als sogenannte Schaltung zur Verwendung, nämlich zur Vermittelung einer periodisch absetzenden Drehung des Rades *a* als Schaltrad um seine Axe *A*, wenn das Glied *d* um diese Axe hin und her gedreht und jedesmal bei seiner Drehung entgegen dem Pfeile *a* das Schaltrad an dieser Drehung verhindert (festgestellt) wird; letzteres geschieht in der Regel durch ein zweites laufendes Klinkengesperre, dessen Sperrrad mit dem Schaltrade *a* identisch sein kann. So kann z. B. das in Fig. 73 bezüglich seiner Glieder c' und d' punktirt angedeutete Gesperre *a*, c', d' bei beständiger Feststellung seines Gliedes d' als Sperrung, das andere *a*, *c*, *d* als Schaltung dienen. Der aus beiden zusammen bestehende Mechanismus ist ein vollständiges Schaltwerk oder Schaltgetriebe. Obgleich hier das Rad *a* mit 4 anderen Gliedern (*c*, *d* und c', d') gepaart ist, handelt es sich dabei doch nicht um einen zusammengesetzten Mechanismus im Sinne der Definition eines solchen (§. 1), weil jenes Rad abwechselungsweise gegen die Glieder *c*, *d* oder c', d' unbeweglich, d. i. zu einem Gliede mit ihnen verbunden ist.

Als Sperrung kann bei einem solchen Schaltwerke auch ein ruhendes Gesperre dienen, und kann die Drehung des Rades *a* auch durch ein Zahnrad vermittelt werden, das nicht am ganzen Umfange verzahnt ist, so dass bei seiner Drehung seine vereinzelt stehenden Zähne nur zeitweise in Zahnlücken des Rades *a* behufs dessen Schaltung eingreifen, nachdem die Klinke des ruhenden Gesperres (z. B. durch einen anderen vereinzelten Zahn jenes unvollständig verzahnten Rades) ausgehoben wurde. Ueberhaupt kommen solche Schaltwerke in sehr verschiedenen Formen vor, die zum Theil übrigens wirklich zusammengesetzte Mechanismen (nicht nur einfache Mechanismen von wechselnder Zusammensetzung) sind. Dass insbesondere auch zur Vermittelung einer periodisch absetzenden geradlinigen Bewegung das Klinkrad durch eine in ähnlicher Weise gezahnte Stange ersetzt werden kann, entsprechend dem Uebergange des Drehkörperpaares A in ein Prismenpaar, bedarf hier keiner weiteren Ausführung.

§. 59. Einfache Zahnräderketten.

Die allgemeinste dreigliedrige einfach höhere Drehkörperkette, von der die einfache Zahnräderkette eine besondere Ausführungsform ist, ergiebt sich aus der Erwägung, dass, wenn a und a' zwei Körper sind, von denen a durch ein Drehkörperpaar A, a' durch ein anderes Drehkörperpaar A' mit einem dritten Körper b verbunden ist, dieselben stets unter sich durch ein höheres Elementenpaar a, a' so gepaart werden können, dass sie mit dem Körper b eine zwangläufig geschlossene Kette bilden und dass, unter ω die relative Winkelgeschwindigkeit von a gegen b um die Axe A, unter ω' die relative Winkelgeschwindigkeit von a' gegen b um die Axe A' verstanden, das Verhältniss $\omega:\omega'$ nach einem beliebig gegebenen Gesetze veränderlich ist. Dass das Paar a, a' an und für sich nicht zwangläufig sein kann, folgt aus der allgemeinen Regel in §. 47 bezüglich der Gliederzahl einer einfachen geschlossenen und zwangläufig beweglichen kinematischen Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren, übrigens auch unmittelbar aus der Erwägung, dass Zwangläufigkeit dieses Paares a, a', um die in dem Element a feste Gerade A in unveränderlicher Lage gegen die im Element a' feste Gerade A' zu erhalten, nur in relativer Drehbarkeit von a' gegen a um die Axe A oder von a gegen a' um die Axe A' bestehen könnte, so dass dann das Paar a, a' ein mit A oder A' coaxiales Drehkörperpaar wäre, auf das sich die ganze Kette reducirte.

Die Axen A, A' der gleich bezeichneten Drehkörperpaare können im Allgemeinen windschief gegen einander gerichtet sein, und sind dann die den Elementen des Paares a, a' angehörigen Elementenflächen F, F' nach §. 25 auf unendlich mannigfache Weise bestimmbar, nachdem ihre betreffenden Axoide gemäss §. 24 bestimmt worden sind. Letztere sind Flächen, die von der Polaxe P bei ihrer relativen Bewegung beziehungsweise gegen a und a' beschrieben werden; diese Polaxe ist eine Gerade, welche die gemeinsame Normale OO' der Axe A, A' in einem solchen (im Allgemeinen veränderlichen) Punkte Q rechtwinklig schneidet und unter solchen (im Allgemeinen veränderlichen) Winkeln α, α' gegen A und A' geneigt ist, dass, unter $r = QO$, $r' = QO'$ die Abstände des Punktes Q von den Fusspunkten O, O' jener gemeinsamen Normale der Axen A, A' verstanden, nach Gl. (1) und (3) in §. 24:

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha'; \quad \frac{r}{r'} = \frac{tg\,\alpha}{tg\,\alpha'}$$

ist. Die gleitend-rollende Relativbewegung der in der Polaxe P sich berührenden Axoide entspricht einer Winkelgeschwindigkeit Ω um dieselbe und einer Schiebungsgeschwindigkeit v längs derselben, die nach Gl. (7) und (8) in §. 24 bestimmt sind durch die Gleichungen:

$$\frac{\Omega}{e} = \frac{\omega \cos \alpha}{r'} = \frac{\omega' \cos \alpha'}{r}; \quad \frac{v}{e} = \omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha',$$

unter e die kürzeste Entfernung OO' der Axen A, A' verstanden. Liegen diese in einer Ebene, so ist $e = 0$ und werden damit auch r, r' und $v =$ Null; die Polaxe geht in der Ebene der Axen A, A' durch ihren Schnittpunkt, und die dann conischen Axoide haben eine rein rollende Relativbewegung. Sind insbesondere die Axen A, A' parallel, so sind sie es auch mit der in ihrer Ebene liegenden Polaxe und werden die Axoide cylindrische Flächen. In diesen besonderen Fällen conischer oder cylindrischer Axoide ergeben sich die Elementenflächen F, F' des Paares a, a' nach §. 23 resp. nach §. 15 bis §. 20.

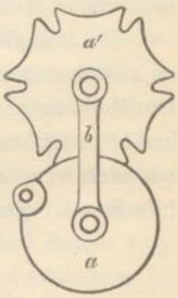
Während sich die Glieder a, a' um ihre Polaxe mit der Winkelgeschwindigkeit Ω gegenseitig drehen und event. längs derselben mit der Geschwindigkeit v gleiten (wenn die Axen A, A' nicht in einer Ebene liegen), haben die Elementenflächen F, F' in einem Berührungspunkte, dessen Entfernung von der Polaxe $= p$ ist, eine relativ gleitende Bewegung mit der Geschwindigkeit $p\Omega$ resp. $\sqrt{v^2 + p^2\Omega^2}$. Dieselbe ist um so grösser, und entspricht ihr eine um so grössere Reibungsarbeit in Folge des gegenseitigen Drucks der Glieder a, a', je grösser p ist. Durch diese Erwägung wird, wenn die Glieder a, a' gegen das Glied b um grössere oder gar um beliebig grosse Winkel drehbar sein sollen, die Ausführung des Elementenpaares a, a' als Zahnräderpaar, der Kette als Zahnräderkette begründet, d. h. eine Trennung der Elementenflächen F, F' in Theile, die nur in der Nähe der Polaxen sich berühren, dabei aber so angeordnet sind, dass wenigstens ein Paar solcher Flächentheile (Zahnflächen) sich stets in Berührung befindet. Sofern diese Berührung und entsprechende Stützung nur einseitig stattfindet in Folge des Spielraums der Zähne des einen in den Zahnlücken des anderen Rades, muss der Schluss des Paares a, a' und somit der Kette durch die äussere Kraft vermittelt werden, von der bei Benutzung der Kette als Getriebe die Bewegung verursacht wird.

Aus dieser einfachen Zahnräderkette gehen zweierlei Mechanismen hervor, jenachdem das Glied b oder eines der Räder a, a' festgestellt wird. Der erstere dieser Mechanismen kann als Zahnrädermechanismus, der andere als Kurbelradmechanismus bezeichnet werden, indem dabei das Glied b zur Kurbel, d. h. zu einem Gliede wird, das sowohl mit dem festgestellten, als mit dem andererseits benachbarten Gliede durch ein Drehkörperpaar verbunden und gegen ersteres unbegrenzt drehbar ist. Während sich im ersten Falle die Räder a, a' mit den Winkelgeschwindigkeiten ω, ω' um ihre Axen A, A' drehen, entspricht im zweiten Falle einer Drehung der Kurbel um ihre feste Axe eine Bewegung des beweglichen Rades, die mit der durch Ω, v und die Lage der gegenseitigen Polaxe der Glieder a, a' bestimmten Relativbewegung als jetzt absolute Bewegung identisch ist.

Von den Drehkörperpaaren A, A' kann eines, etwa A' in ein Prismenpaar übergehen, entsprechend dem Uebergange des betreffenden Zahnrades a' in eine Zahnstange. Jenachdem b, das Zahnrad a oder die Zahnstange a' das festgestellte Glied ist, sind dann dreierlei Mechanismen zu unterscheiden. Würden beide Drehkörperpaare A, A' durch Prismenpaare ersetzt, so wäre die Relativbewegung der Glieder a, a' eine blosse Schiebung, deren Richtung mit den Schubrichtungen der Prismenpaare derselben Ebene E parallel ist. Jenachdem diese Glieder durch ein Prismenpaar (dessen Schubrichtung auch jener Ebene E parallel sein muss) oder durch ein höheres Paar verbunden werden, wäre die Kette eine gewöhnliche (niedere) oder eine einfach höhere Prismenkette; übrigens ist dieser Specialfall der einzige, in welchem unbeschadet der Beweglichkeit der Kette die Glieder a, a' auch durch ein niederes Paar verbunden werden können. —

Auch die einfache Zahnräderkette kann als Gesperre (§. 58) gebildet werden. Insbesondere wird die ebene Zahnräderkette, entsprechend dem Falle, dass die Axen der Drehkörperpaare A, A' in einer gewissen Entfernung e parallel sind, dadurch zu einem Gesperre, dass das eine Rad, etwa a, nur an einem zusammenhängenden Theile des Umfangs verzahnt, im Uebrigen durch eine Umdrehungsfläche zur Axe A begrenzt, das andere Rad a' aber an mehreren Umfangstheilen von gleicher Länge mit dem verzahnten Umfangstheile von a entsprechend verzahnt und in den unter sich gleichen Zwischenräumen durch Umdrehungsflächen begrenzt wird, die der das Rad begrenzenden Umdrehungsfläche congruent sind und deren Axen von der Axe A' des Rades a' die Entfernungen e haben; es kann z. B. a als sogenanntes Einzahnrad mit nur einem Zahne, das mit Rücksicht auf seine Gestalt als Sternrad zu bezeichnende Rad a' mit entsprechenden einzelnen Zahnlücken versehen werden: Fig. 74. So lange dann, wie es in der Figur der Fall ist, die Umdrehungsfläche des Einzahnrades *a* von einer der entsprechenden Begrenzungsflächen des Sternrades *a'* berührt wird, ist letzteres bezüglich seiner relativen Beweglichkeit gegen das Glied *b* gehemmt (gesperrt), die Kette somit auf ein Drehkörperpaar mit der Axe *A* reducirt, für dessen kinematischen Charakter die Zusammengesetztheit seiner Elementenfläche aus zwei coaxialen Umdrehungsflächen gleichgültig ist; durch den bei jeder vollen Umdrehung von *a* gegen *b* einmal erfolgenden Eingriff des Zahnes von *a* in eine der *n* Zahnlücken des Sternrades wird aber letzteres gedreht bis es nach $\frac{1}{n}$ Umdrehung auf's Neue gehemmt wird.

Fig. 74.



Dieses Sternradgesperre ist im Sinne der in §. 58 getroffenen Unterscheidung als laufendes zu bezeichnen, unterscheidet sich aber von dem dort betrachteten laufenden Klinkengesperre dadurch, dass, während bei diesem die Kette durch Sperrung zu einem starren Körper wird und deshalb die Drehung des Klinkrades nur in einem Sinne unbegrenzt stattfinden kann, hier die Drehung des Rades *a* in beiderlei Sinn möglich ist, indem durch die Sperrung nur das Sternrad *a'* und das Glied *b* gegenseitig unbeweglich werden.

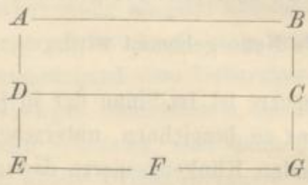
Den dreierlei Mechanismen, die aus dieser Kette durch Feststellung eines der Glieder *b*, *a*, *a'* erhalten werden können, entsprechen auch nur ebenso viel Getriebe, da die Bewegung immer nur eingeleitet werden kann durch die relative Bewegung der Glieder *a*, *b*, so dass sie vom Gliede *a* ausgehen muss bei Feststellung von *b* oder *a'*, vom Gliede *b* bei Feststellung von *a*. Mit Rücksicht auf die periodisch absetzende Relativbewegung der Glieder *b*, *a'* wirkt auch ein solches Getriebe als Schaltung ausser als Sperrung mit Rücksicht auf die zeitweilige relative Unbeweglichkeit dieser Glieder.

b. Zusammengesetzte Mechanismen.

§. 60. **Vorbemerkungen.**

Eine zusammengesetzte geschlossene kinematische Kette ist aus einfachen geschlossenen Ketten dadurch entstanden zu denken, dass gewisse

Glieder von verschiedenen dieser einfachen Ketten zu ternären, quaternären etc., d. h. zu Gliedern verbunden werden, die Elemente von mehr als zwei Paaren enthalten. Umgekehrt kann durch Zerlegung ihrer ternären, quaternären etc. Glieder in binäre, die zusammengesetzte in einfache geschlossene Ketten aufgelöst werden. Wären die letzteren ebenso wie jene alle zwangläufig, so wären die durch Feststellung eines Gliedes aus der zusammengesetzten Kette hervorgehenden Mechanismen keine elementare Mechanismen, die vielmehr gemäss ihrer Definition in §. 1 dadurch charakterisirt sind, dass ihre zwangläufige kinematische Kette entweder einfach oder, wenn zusammengesetzt, einer Zerlegung in lediglich zwangläufige einfache oder weniger zusammengesetzte Ketten nicht fähig ist.



Es sei z. B. nach vorstehendem Schema $ABCD$ eine viergliedrige, also zwangläufige, und $CDEFG$ eine fünfgliedrige, also nicht zwangläufige ebene Drehkörperkette. Würden diese zwei einfachen Ketten so mit einander verbunden, dass CD als ein nunmehr quaternäres Glied (durch zwei coaxiale Drehkörperpaare CD, DA und CD, DE und die zwei coaxialen Drehkörperpaare BC, CD und GC, CD mit folgenden Gliedern gepaart) ihnen gemeinsam ist, so wäre die entstandene zusammengesetzte Kette noch ebenso wenig zwangläufig wie es die eine der beiden einfachen Ketten war. Auch durch Verbindung der Glieder DA und DE zu dem ternären Gliede ADE, wodurch das vorher quaternäre Glied CD zu einem gleichfalls ternären (bei D nur noch mit einem anderen Gliede gepaarten) wird, würde die Zwangläufigkeit der zusammengesetzten Kette noch nicht erzielt werden, weil gleichzeitige elementare relative Drehungen der auf einander folgenden Glieder CD, DE, EF, FG, GC nach wie vor durch eine derselben nicht bestimmt sein würden. Wenn aber auch noch BC und GC zu dem ternären Gliede BCG verbunden werden, wobei dann CD ein binäres Glied wird, so sind dadurch gleichzeitige relative Drehungen der Glieder GC, CD und CD, DE von einander abhängig, nämlich den relativen Drehungen der Glieder BC, CD und CD, DA der zwangläufigen einfachen Kette $ABCD$ gleich geworden, und die somit zwangläufig gewordene zusammengesetzte Kette ist von solcher Art, dass sie nicht in zwangläufige Ketten zerlegt werden kann, dass es also elementare Mechanismen sind, die daraus durch Feststellung eines Gliedes erhalten werden können.

Würde aber die Zwangläufigkeit der zusammengesetzten Kette dadurch herbeigeführt, dass, nachdem DA und DE zu dem ternären Gliede ADE verbunden waren, ausserdem noch GC mit CD zu dem (ebenso wie CD ternären) Gliede GCD verbunden werden, so hätte man damit zwei benachbarte Glieder der ursprünglichen fünfgliedrigen Drehkörperkette $CDEFG$ zu einem einzigen Gliede fest verbunden, d. h. diese Kette zu einer viergliedrigen, somit zwangläufigen Kette gemacht, deren Verbindung mit der auch schon für sich zwangläufigen Kette $ABCD$ natürlich eine, wenn überhaupt bewegliche, dann jedenfalls zwangläufige zusammengesetzte Kette liefert, aus der aber, da sie umgekehrt in zwei zwangläufige Ketten zerlegt werden könnte, nicht elementare Mechanismen durch Feststellung je eines Gliedes hervorgehen.

Zur Bildung der zwangläufigen Kette eines elementaren Mechanismus durch Zusammensetzung einfacher geschlossener Ketten ist es also wesentlich, dass letztere nicht alle schon für sich zwangläufig sind und dass ihre Zusammensetzung nur durch Verbindung von Gliedern verschiedener der einfachen Ketten herbeigeführt wird. Die dadurch eingeführte Beschränkung lässt es möglich erscheinen, alle Arten solcher Bildungen von Ketten zusammengesetzter elementarer Mechanismen aus gegebenen Arten von einfachen Ketten in systematischer Uebersicht zu entwickeln, wogegen die Kettenbildung nicht elementarer Mechanismen aus einfachen Ketten von gegebener Art einer unendlich grossen Mannigfaltigkeit fähig und nur durch den Zweck beschränkt ist, gewissen Gliedern bestimmte Bewegungen oder solche Bewegungen zu ertheilen, die in bestimmter Beziehung zu einander stehen. Indem die Auswahl der dazu dienlichen Arten zusammengesetzter Mechanismen eine dem Combinationsvermögen des Constructeurs und der Berücksichtigung praktischer Anforderungen anheimfallende Aufgabe ist, werden die nicht elementaren Mechanismen überhaupt als in das Gebiet des Maschinenbaues oder der Technologie fallend hier betrachtet und die Aufgabe der theoretischen (einen Theil der theoretischen Maschinenlehre ausmachenden) Kinematik nur dahin verstanden, dass sie durch eine möglichst systematische und vollständige Uebersicht der elementaren Mechanismen und ihrer kinematischen Eigenschaften den wissenschaftlichen Grund zur Behandlung jener weiteren Aufgabe zu legen hat. Selbst bei dieser beschränkten Auffassung der theoretischen Kinematik fehlt freilich noch viel an der vollständigen Lösung ihrer Aufgabe, und sind besonders die hier in Rede stehenden zusammengesetzten elementaren Mechanismen einer systematischen Ordnung bisher nicht unterworfen worden.

Jene angeführte Ableitung zusammengesetzter Ketten von elementaren Mechanismen aus einfachen, wegen zu grosser Gliederzahl nicht zwangläufigen Ketten durch feste Verbindung gewisser ihrer Glieder mit solchen von anderen einfachen Ketten setzte voraus, dass alle Kettenglieder starre Körper sind. Zusammengesetzt sind aber ferner geschlossene Ketten mit Zug- oder Druckkraftorganen (§. 28), und wie auch daraus elementare Mechanismen hervorgehen können, zeigen die in §. 30 erwähnten Beispiele des Riemengetriebes (Fig. 31) und des Wassergestänges (Fig. 32).

Wenn endlich die zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen eines Getriebes durch Kettenschluss (§. 32) herbeigeführt wird, wie z. B. bei dem Parallelkurbelgetriebe durch feste Verbindung seiner Kurbeln mit denen eines anderen Parallelkurbelgetriebes, das mit jenem den Steg gemein hat, oder wie bei dem gleichschenkligen Schleifkurbelgetriebe durch Verdoppelung seiner Kurbel und Schleife (Fig. 54, §. 41), so geht daraus ein zusammengesetzter Mechanismus hervor, der bedingungsweise auch elementar ist, indem er nicht in einfache Ketten zerlegt werden kann, die für die betreffende Verwendung als Getriebe unbedingt zwangläufig geschlossen sind. Wird aber die zwangläufige Ueberschreitung der Todlagen eines einfachen Getriebes durch Elementenpaare herbeigeführt, wie z. B. bei dem symmetrischen Zwillingskurbelgetriebe (Fig. 35, §. 32), so wird der betreffende elementare Mechanismus dadurch nur bedingungsweise, nämlich nur bei Ueberschreitung der Todlagen ein zusammengesetzter.

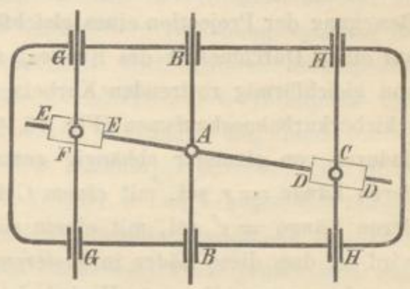
§. 61. Zusammengesetzte ebene Drehkörperketten.

Eine einfache geschlossene kinematische Kette mit nur zwangläufigen Elementenpaaren, die aus x Gliedern mehr besteht, als sie haben dürfte, um nach dem in §. 47 nachgewiesenen Kriterium zwangläufig zu sein, kann im Allgemeinen zwangläufig gemacht werden durch eine solche Verbindung mit anderen einfachen Ketten, dass dadurch x weitere Beziehungen zwischen den gleichzeitigen Relativbewegungen ihrer Elementenpaare herbeigeführt werden. Bei ebenen Drehkörperketten insbesondere betreffen diese Beziehungen die Winkel der Axenebenen, d. h. die Winkel, unter denen sich irgend zwei solche Ebenen schneiden, deren jede durch zwei Axen von Drehkörperpaaren hindurch geht.

So wird z. B. nach dem Schema auf S. 206 durch die Verbindung der fünfgliedrigen ebenen Drehkörperkette *CDEFG* mit der viergliedrigen, also zwangläufigen *ABCD* der Art, dass *GC* mit *BC*, *CD* mit *CD*, *DE* mit *DA* zu je einem einzigen Gliede verbunden wird, die Summe der Winkel *GCD* und *BCD* constant (unter den Buchstaben die betreffenden Paaraxen verstanden, so dass z. B. *GCD* der Winkel zwischen den Ebenen *GC* und *CD* ist), desgleichen die Summe der Winkel *CDE* und *CDA*. Indem aber die Winkel *BCD* und *CDA* in der viergliedrigen Kette sich gegenseitig bedingen, gilt dasselbe nun auch von den Winkeln *GCD* und *CDE* der fünfgliedrigen Kette, und ist diese somit zwangläufig geworden, da sie ein Glied zu viel dazu hatte.

Aus einer solchen zusammengesetzten ebenen Drehkörperkette mit 6 Gliedern (4 binären, 2 ternären) und 7 Drehkörperpaaren kann bei theilweisem Ersatze der letzteren durch Prismenpaare u. A. ein Mechanismus gebildet werden, vermittels dessen die nach einem gewissen Gesetze stattfindende geradlinig schwingende Bewegung eines Körpers nach constantem Verhältnisse verkleinert oder vergrössert auf einen anderen Körper übertragbar ist. Zu dem Ende seien (Fig. 75, worin die bei *H* und *H* angedeuteten prismatischen Führungen einstweilen durch starre Verbindungen ersetzt zu denken sind) *BB* und *DE* zwei durch das Drehkörperpaar *A* verbundene gerade Stangen, von denen die erste (bei *B* und *B*) mit einem festen Gestelle, die andere mit zwei Hülsen *DD* und *EE* (als Hohlprismen) prismatisch gepaart ist; die Hülse *DD* sei um den festen Bolzen *C*, die Hülse *EE* um den Bolzen *F* einer Stange *GG* drehbar, die parallel der Stange *BB* im Gestelle prismatisch geführt ist. Hiernach ist *CDEFG* eine fünfgliedrige Kette, die zwangläufig gemacht ist durch ihre Verbindung mit der viergliedrigen *ABCD*; *BCG* ist das festgestellte, *ADE* das andere ternäre Glied. Jenachdem die Bewegung von der Stange *GG* oder *BB* ausgeht, wird sie verkleinert oder vergrössert auf die andere übertragen, und zwar in dem constanten Verhältnisse $CA : CF$.

Fig. 75.



Wenn die Hülse *DD* durch das Drehkörperpaar *C* nicht mit dem festen Gestelle, sondern, wie Fig. 75 darstellt, mit einer Stange *HH* gepaart wird, die parallel den Stangen *BB* und *GG* prismatisch im Gestelle geführt ist, so würde die nun siebengliedrige und 8 Elementenpaare enthaltende zusammengesetzte Kette nicht mehr zwangläufig sein, falls nach wie vor die Bewegung nur von einer der Stangen BB, GG, HH ausginge, sofern nicht zwei derselben durch eine weitere Kette mit einander verbunden werden, um ihre gleichzeitigen Schiebungen von einander abhängig zu machen. Ist das aber der Fall oder geht die Bewegung von zwei der drei Stangen zugleich aus, z. B. von GG und HH, indem sie nach gewissen Gesetzen hin und her bewegt werden, so setzt sich aus ihren gleichzeitigen Schiebungen g, h die Schiebung b der dritten Stange BB nach einem bestimmten Verhältnisse zusammen:

$$b = \frac{fg + ch}{f + c},$$

wenn das constante Verhältniss der veränderlichen Axenentfernungen:

$$AC : AF = f : c$$

gesetzt wird. Der Mechanismus ist immer noch elementar und als **Interferenzmechanismus** zu bezeichnen.

Sollte er z. B. benutzt werden, um das Resultat der Interferenz von zwei parallelen sogenannten einfach harmonischen geradlinigen Bewegungen darzustellen (d. h. von Bewegungen, die demselben Gesetze folgen wie die Bewegung der Projection eines gleichförmig im Kreise umlaufenden Punktes auf einen Durchmesser des Kreises), so können die Stangen GG und HH von gleichförmig rotirenden Kurbeln aus vermittels rechtwinkliger Kreuzschieberkurbelmechanismen (Fig. 56, §. 42) bewegt und diese Bewegungen dadurch von einander abhängig gemacht werden, dass die erste Kurbel, deren Länge $= r$ sei, mit einem Cylinderrade von z Zähnen, die andere, deren Länge $= r'$ sei, mit einem solchen von z' Zähnen fest verbunden wird so, dass diese Räder in äusserem Eingriffe sind der Art im Allgemeinen, dass, wenn die erste Kurbel sich in einer ihrer zwei Mittelstellungen befindet (gegen die Schubrichtung der betreffenden Stange im einen oder anderen Sinne rechtwinklig gerichtet ist), die zweite um einen gewissen Winkel δ über ihre entgegengesetzt gerichtete Mittelstellung hinaus ist. Dem Drehungswinkel α der ersten Kurbel, der von jener Mittelstellung aus gerechnet werde, entspricht dann der Drehungswinkel $\frac{z}{z'}\alpha$ der zweiten, und ist im Falle $f = c$, d. h. bei gleichen Entfernungen der äusseren Stangen GG und HH von der mittleren BB, der entsprechende Weg dieser letzteren von derjenigen Lage aus gerechnet, die sie hätte, wenn beide Kurbeln sich zugleich in ihren Mittelstellungen befänden:

$$b = \frac{1}{2}\left[r \sin \alpha + r' \sin\left(\delta + \frac{z}{z'}\alpha\right)\right].$$

Die interferirenden Schwingungen hätten gleiche Amplitude für $r = r'$, gleiche Schwingungsdauer für $z = z'$, gleiche Phase für $\delta = 0$. Der Mechanismus, der so dazu dient, die Stangen GG und HH in bestimmter Weise zu bewegen, ist zusammengesetzt ohne elementar zu sein, da seine Kette in drei zwangläufige Ketten (zwei Kreuzschieberketten und eine einfache Zahnräderkette) zerlegbar ist.

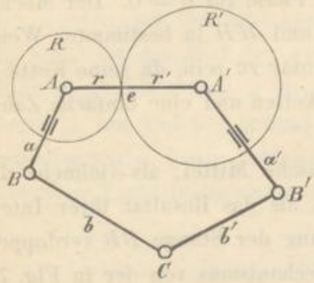
Um endlich nicht sowohl das arithmetische Mittel, als vielmehr die Summe der beiden gegebenen Schwingungen als das Resultat ihrer Interferenz zu erhalten, müsste noch die Bewegung der Stange BB verdoppelt werden, was u. A. wieder mit Hülfe eines Mechanismus von der in Fig. 75 dargestellten Art (bei Feststellung einer der beiden äusseren Stangen und mit $f = e$) geschehen könnte.

§. 62. Zusammengesetzte ebene Zahnräderketten.

Sind a, b, c drei auf einander folgende Glieder einer einfachen geschlossenen Drehkörperkette, die aus mehr als vier Gliedern besteht und somit nicht zwangläufig ist, so kann eine weitere Beziehung zwischen den Winkeln der Axenebenen dieser Kette u. A. auch dadurch herbeigeführt werden, dass a mit einem gezahnten Cylinderrade fest verbunden wird, das mit dem Drehkörperpaare a, b coaxial ist, und c mit einem solchen, das mit jenem in Eingriff und mit dem Drehkörperpaare b, c coaxial ist. Gleichzeitige relative Drehungen der Glieder a und c gegen das Glied b haben dann immer dasselbe Verhältniss zu einander, indem sie den Theilkreisradien der mit ihnen verbundenen Räder umgekehrt proportional sind. Die ursprüngliche Drehkörperkette findet sich auf solche Weise mit der einfachen Zahnräderkette a, b, c zu einer elementar zusammengesetzten Kette mit den ternären Gliedern a und c verbunden, und wenn sie aus $x + 4$ Gliedern besteht, kann sie dadurch zwangläufig gemacht werden, dass x mal drei verschiedene auf einander folgende ihrer Glieder auf solche Weise mit einfachen Zahnräderketten verbunden werden. Durch Feststellung eines Gliedes sind daraus verschiedene elementar zusammengesetzte ebene Zahnrädermechanismen zu erhalten.

Von grösserem Interesse ist der einfachste hierher gehörige Fall einer fünfgliedrigen elementar zusammengesetzten ebenen Zahnräderkette $abb'a'c$, schematisch dargestellt durch Fig. 76, worin die Glieder durch gerade Linien, die sie verbindenden Drehkörperpaare A, B, C, B', A' durch kleine Kreise, die mit den Gliedern a und a' fest verbundenen Zahnräder R und R' durch ihre Theilkreise, deren Radien $= r$ und r' seien, angedeutet sind; die Einschliessung der geraden Linien a und a' zwischen kurzen Parallellinien innerhalb der Theilkreise soll die feste Verbindung der betreffenden Glieder und Zahnräder andeuten. Mehrere der aus dieser Kette unter speciellen Voraussetzungen hervorgehenden Mechanismen haben praktische Anwendung gefunden oder sind dazu vorgeschlagen worden, wenigstens als mehr oder weniger zufällig und unabhängig von einander, unbewusst ihres principiellen Zusammenhanges concipirte Mechanismen. Dergleichen besondere Fälle können namentlich in der Gleichheit gewisser Dimensionen oder darin bestehen, dass einzelne Gliedlängen = Null (benachbarte Drehkörperpaare coaxial) oder unendlich (Drehkörperpaare durch Prismenpaare ersetzt) sind.

Fig. 76.



1) Ist $a = a'$, $b = b'$, $r = r'$ und sind die Räder in Eingriff gebracht, während die Kette (verstanden als Durchschnittsfigur mit einer zu den Axen ihrer Drehkörperpaare senkrechten Ebene) in Bezug auf die Gerade symmetrisch ist, von der die Strecke $AA' = e$ in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig geschnitten wird, so bleibt sie beständig in dieser Weise symmetrisch, wird also bei Feststellung des Gliedes e der Punkt C in der Symmetrieaxe geführt: Cartwright'sche Geradführung.

2) Verschwinden kann offenbar nur eine der Gliedlängen a, a'; denn mit $e = 0$ würden auch die Räder R, R' verschwinden und ginge die Kette in eine einfache viergliedrige Drehkörperkette über, während mit $b = 0$ oder $b' = 0$ die Kette gar unbeweglich, nämlich zu einer viergliedrigen Drehkörperkette würde, die durch ihre Verbindung mit der Räderkette einem weiteren, also übermässigen Zwange unterläge. Die Voraussetzung $a = 0$ aber (principiell nicht verschieden von dem Falle $a' = 0$, da a und a' gleichwerthige Glieder der Kette sind) liefert eine zwangläufig bewegliche Kette, da mit dem Wegfalle des Gliedes a, mit dem das Rad R fest verbunden war, auch jeder Zwang der Drehkörperkette durch das Räderpaar beseitigt ist; bei Feststellung des Gliedes $AC = b$ geht daraus ein Mechanismus hervor, der, falls e die kleinste der vier Gliedlängen b, b', a', e und die Summe aus ihr und der grössten Gliedlänge kleiner als die

Summe der beiden anderen Gliedlängen ist, von Watt in seinem sogenannten Planetenräderwerke benutzt wurde. Nach §. 36 verhält er sich als Schwingkurbel mit b' als Schwinge (Arm eines um C schwingenden Balanciers) und mit e als Kurbel, zusammenhängend mit jener durch die Koppel a'. Benutzt wird aber bei diesem Watt'schen Mechanismus nicht die Drehung der Kurbel e (in Bezug auf welche in der That die Räder R, R' eine unnütze Beigabe wären), sondern die des Rades R in ihrer Abhängigkeit von den Schwingungen des Gliedes b'. So oft letzteres eine Hin- und Herschwingung macht und somit die Kette $ACB'A'$ in die Anfangslage zurückkehrt, macht die Kurbel eine Umdrehung und im entgegengesetzten Sinne das Rad R' eine relative Umdrehung gegen die Kurbel; im Sinne der absoluten Kurbeldrehung macht dann also das mit R' in äusserem Eingriffe befindliche Rad R relativ gegen die Kurbel $\frac{r'}{r}$ Umdrehungen, absolut oder in Bezug auf das festgestellte Glied folglich

$$\frac{r'}{r} + 1 = \frac{e}{r} \text{ Umdrehungen,}$$

insbesondere zwei Umdrehungen im Falle $r = r'$.

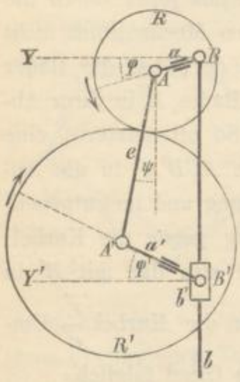
3) Mannigfaltig sind die Specialfälle, die aus der vorliegenden Kette dadurch erhalten werden können, dass eins ihrer fünf Drehkörperpaare durch ein Prismenpaar ersetzt wird, in welcher Hinsicht (Fig. 76) vor Allem die drei Fälle zu unterscheiden sind, dass solcher Uebergang in ein Prismenpaar (verbunden mit unendlich grosser Länge der zwei dadurch gepaarten Glieder) entweder das Paar C oder eins der Paare B, B' oder eins der Paare A, A' betrifft.

Zunächst werde das Drehkörperpaar C durch ein Prismenpaar ersetzt angenommen. Ist dessen Schubrichtung parallel der Axenebene BB' (entsprechend dem Falle, dass die Axe C nach einer zu dieser Ebene senkrechten Richtung ins Unendliche rückte), so geht daraus bei Feststellung eines der beiden benachbarten Glieder ein Mechanismus hervor, der 1858 von Reuleaux unter dem Namen des Zahnexcentriks als ein neuer Bewegungsmechanismus bekannt gemacht wurde.* Fig. 77 stellt ihn schematisch dar ohne nach obigen Bemerkungen zu Fig. 76 einer näheren Erklärung zu bedürfen; b ist darin als festgestelltes Glied vorausgesetzt,

* Seine kinematischen Eigenschaften wurden vom Verf. demnächst eingehender entwickelt im Jahrgange 1858, S. 236 u. ff. der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

prismatisch gepaart mit dem Schieber b'. Sofern das mit dem Rade R fest verbundene Glied um die Axe B ringsum drehbar ist (wozu nöthig, dass $a < e + a'$), kann der Mechanismus betrachtet werden als eine **Schubkurbel mit gelenkartig gegliederter Koppel** unter Herstellung der durch solche Gliederung gestörten Zwangläufigkeit durch die Verbindung der Kette mit der Zahnräderkette R, e, R'.

Fig. 77.



Um die **Beziehung zwischen der Bewegung des Schiebers** b' **und der Drehung der Kurbel** a auszudrücken, seien

φ und φ' gleichzeitige Drehungswinkel der Glieder a, a' um die Axen B, B', gerechnet von den zu BB' senkrechten Richtungen BY und $B'Y'$ aus im Sinne der Pfeile,

ψ der von den Richtungen AA' und BB' gebildete und positiv oder negativ gesetzte Winkel, jenachdem er von der durch A nach der Richtung BB' gezogenen Geraden im Sinne BY (wie in Fig. 77) oder auf der anderen Seite gelegen ist.

Dann ist:

$$BB' = x = e \cos\psi + a \sin\varphi + a' \sin\varphi' \ldots\ldots\ldots (1),$$

worin, um x als Function von φ allein zu erhalten, noch φ' und ψ durch φ auszudrücken sind. Zu dem Ende hat man zuvörderst:

$$\sin\psi = \frac{a' \cos\varphi' - a \cos\varphi}{e} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Ist ferner in der Anfangslage ($\varphi = 0$): $\varphi' = \alpha$ und $\psi = \beta$, welche Winkel α und β nach Gl. (2) in der Beziehung stehen:

$$\sin\beta = \frac{a' \cos\alpha - a}{e},$$

so entsprechen dem Drehungswinkel φ des Gliedes a um B die folgenden Aenderungen der Winkel $A'AB$ und $AA'B'$:

$$\Delta(A'AB) = \varphi + \psi - \beta; \quad \Delta(AA'B') = \varphi' - \alpha - \psi + \beta$$

und da wegen des Eingriffes der Räder auch

$$r \,.\, \Delta(A'AB) = r' \,.\, \Delta(AA'B')$$

ist, so folgt:

$$(r + r')(\psi - \beta) = r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi$$

$$\psi = \beta + \frac{r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi}{e} \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Durch die Gleichungen (2) und (3) sind φ' und ψ als Functionen von φ bestimmt, freilich in solcher Weise, dass die durch Elimination von ψ sich ergebende Gleichung für φ':

$$\sin\left(\beta + \frac{r'(\varphi' - \alpha) - r\varphi}{e}\right) = \frac{a' \cos\varphi' - a\cos\varphi}{e}$$

eine allgemeine Auflösung nicht gestattet. Man erhält indessen eine Vorstellung von der Bewegungsart des Schiebers, indem man sich in einer Ebene die drei wellenförmigen Linien verzeichnet denkt, deren gemeinsame Abscissen $= \varphi$ und deren Ordinaten den drei Gliedern des Ausdruckes (1) von x gleich sind; die durch Interferenz dieser drei Wellensysteme entstehende Linie bildet Wellen von periodisch wechselnder Gestalt und Lage gegen die Abscissenaxe, indem, falls x' ein Maximum, x'' das vorhergehende oder folgende Minimum von x bedeutet, sowohl die Amplitude $= \frac{x' - x''}{2}$, als die Entfernung der Hubmitte vom Punkte $B = \frac{x' + x''}{2}$ für die auf einander folgenden Schwingungen des Punktes B' einem periodischen Wechsel unterliegt. Eine Periode, nach der dieselbe Gruppe von Schwingungen wiederkehrt, ist dann vollendet, wenn die Kette in ihre Anfangslage zurückgekehrt ist, wenn also

$$\varphi = n.2\pi, \quad \varphi' = \alpha + n'.2\pi, \quad \psi = \beta$$

geworden ist, unter n und n' die kleinsten ganzen Zahlen verstanden, die der fraglichen Bedingung Genüge leisten können. Die Substitution dieser Werthe von φ, φ' und ψ in Gl. (3) giebt aber:

$$0 = r'n' - rn, \quad \text{also } \frac{n}{n'} = \frac{r'}{r} = \frac{z'}{z},$$

unter z und z' die Zähnezahlen der Räder R und R' verstanden. Wäre z. B. $z = 18$, $z' = 26$, so würde die Periode $n = 13$ Umdrehungen von R und $n' = 9$ Umdrehungen von R' umfassen.

Näherungsweise liesse sich x durch φ ausdrücken, wenn a und a' sehr klein im Vergleich mit e wären. Es wäre dann ψ ein stets sehr kleiner Winkel und nach Gl. (3) bei Vernachlässigung von ψ und β:

$$\varphi' = \alpha + \frac{r}{r'}\varphi$$

sowie nach Gl. (1) mit $\cos\psi = 1$:

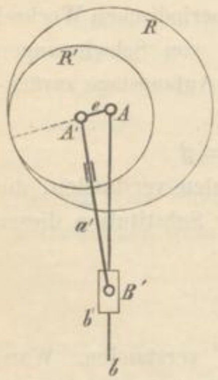
$$x = e + a\sin\varphi + a'\sin\left(\alpha + \frac{r}{r'}\varphi\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Von besonderen Fällen des Zahnexcentriks sind folgende hervorzuheben.

a) Mit $a' = 0$ wäre die gegenseitige Abhängigkeit der Bewegungen des Schiebers b' und der Kurbel a dieselbe wie bei der einfachen Schubkurbel (Fig. 47, §. 39), so dass in dieser Hinsicht die Zahnräderkette R, e, R' eine unnütze Beigabe wäre und deshalb die Annahme $a' = 0$ weiter kein Interesse hat, als dass sie zeigt, wie die gewöhnliche Schubkurbel als Specialfall des allgemeineren Zahnexcentriks angesehen werden kann. Ebenso würde es sich im Falle $a = 0$ verhalten, wenn nicht b (wie mit Bezug auf Fig. 77 hier vorausgesetzt ist), sondern b' das festgestellte Glied wäre.

b) Um so bemerkenswerther ist (mit b als festgestelltem Gliede) der Specialfall $a = 0$. Ist dabei $e < a'$, so ist der Mechanismus ein besonderer Fall des oben unter 2) erwähnten Watt'schen Planetenräderwerkes. Auch ist er so zur Anwendung gekommen, dass R als Hohlrad ausgeführt wurde (Fig. 78), z. B. in dem Mechanismus zum Steuerruderbetriebe von Caird und Robertson, wobei die Steuerruderaxe coaxial mit dem Rade R verbunden ist, während der Antrieb durch Drehung des Gliedes e erfolgt. Da jeder Umdrehung dieses Gliedes, wie oben unter 2) nachgewiesen wurde, $\frac{e}{r}$ Umdrehungen des Rades R in demselben Sinne entsprechen, so kann dadurch, dass $r' = r - e$ nur wenig $< r$ gemacht wird, eine beträchtliche Uebersetzung ins Langsame erzielt werden. Dass jene Umdrehungszahl $= \frac{e}{r}$ des Rades R bei einer Umdrehung von e auch hier für inneren Eingriff gilt, ist leicht zu erkennen; denn einer Umdrehung von e entsprechen im umgekehrten Sinne eine relative Umdrehung von R' gegen e, also $\frac{r'}{r}$ relative Umdrehungen von R gegen e, somit

Fig. 78.



$$1 - \frac{r'}{r} = \frac{e}{r}$$

absolute Umdrehungen von R in einerlei Sinne mit e.

Während in diesem Falle $e < a'$ das Glied e um A rotirt, a' um B' schwingt und die Schublänge von $b' = 2\,e$ ist, hat im umgekehrten Falle $e > a'$ das Glied e eine schwingende Bewegung um A, a' eine rotirende um B' und ist die Schublänge von $b' = 2\,a'$. Der diesem letzteren Falle entsprechende Mechanismus ist es namentlich, der bei äusserem Eingriffe der

Räder und mit R als treibendem Gliede von Reuleaux als ein zu Pressen, Nietmaschinen, Lochmaschinen und dergl. u. A. geeignetes Getriebe empfohlen wurde. Im Vergleich mit einem gewöhnlichen Kurbelschubgetriebe gewährt es den Vortheil, dass das Rad R an einer beliebigen Stelle der treibenden Welle ohne Kröpfung derselben angebracht werden kann und dass es eine starke Koppelstange AA' unnöthig macht, wenn man die Räder R, R' mit längs ihren Axoiden abgedrehten Rändern sich berühren lässt, so dass der in solchen Fällen beträchtliche Druck ohne Vermittelung der Koppel von R gegen R' übertragen wird; da ferner die Schwingungszahl des Schiebers b' sich zur gleichzeitigen Umdrehungszahl des Rades R wie $r:r'$ verhält, so kann zugleich diesem Verhältnisse ohne anderweitige Uebersetzung, nur durch passende Wahl der Räder, ein gewünschter Werth gegeben werden.

c) Während die Annahme $a = a'$ für sich allein die Bewegung des Schiebers b' nicht wesentlich vereinfacht, weil ihre Periode nach wie vor mehrere (n resp. n') Umdrehungen der Räder R, R' um die excentrischen Axen B, B' umfasst, wird dagegen eine solche Vereinfachung herbeigeführt durch die Annahme gleich grosser (und dann natürlich in äusserem Eingriffe befindlicher) Räder: $r = r' = \frac{e}{2}$. Die Periode enthält dann nur eine Umdrehung jedes Rades ($n = n' = 1$), und es haben alle Schwingungen des Schiebers gleiche Amplitude $= \frac{x' - x''}{2}$ und gleiche Entfernung $= \frac{x' + x''}{2}$ des Schwingungsmittelpunktes vom Punkte B, ebenso wie es für $a' = 0$ ($n = 1$) und für $a = 0$ ($n' = 1$) der Fall ist. Vor diesen unter a) und b) besprochenen Fällen ist aber der vorliegende dadurch ausgezeichnet, dass er durch blosse Aenderung des Winkels α (dadurch zu bewirken, dass die Räder an einer anderen Stelle in Eingriff gebracht werden) eine wesentliche Aenderung der Amplitude gestattet.

Im Allgemeinen lässt sich zwar auch mit $r = r'$ die veränderliche Entfernung $BB' = x$ noch nicht als eine entwickelte Function von φ (Fig. 77) ausdrücken. Werden aber ausserdem a und a' als klein im Vergleich mit r, somit

$$\frac{a}{r} = \varepsilon \text{ und } \frac{a'}{r} = \varepsilon'$$

als kleine Brüche angenommen, so findet man aus den Gleichungen (1) bis (3) bei Vernachlässigung kleiner Grössen von höherer als der zweiten Ordnung*:

* Siehe die oben citirte Abhandlung des Verfassers im Jahrgange 1858 der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure.

$$x = 2\,r\left\{1 + \frac{\varepsilon}{2}\,\sin\varphi + \frac{\varepsilon'}{2}\left[\sin\omega + \left(\varepsilon'\cos\omega - \varepsilon\cos\varphi\right)\cos\omega\right]\right.$$
$$\left. - \frac{1}{8}\left(\varepsilon'\cos\omega - \varepsilon\cos\varphi\right)^2\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

$$\text{mit } \omega = \varphi + \alpha - 2\,\beta,$$

und insbesondere bei vorläufiger Berücksichtigung nur kleiner Grössen erster Ordnung:

$$x = 2\,r\left(1 + \frac{\varepsilon\sin\varphi + \varepsilon'\sin\omega}{2}\right) \text{ mit } \omega = \varphi + \alpha.$$

Durch die Bestimmung des Maximum x' und Minimum x'' dieses Ausdruckes von x ergiebt sich die Amplitude der Schieberschwingungen:

$$\frac{x' - x''}{2} = r\sqrt{\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + 2\,\varepsilon\varepsilon'\cos\alpha} = \sqrt{a^2 + a'^2 + 2\,aa'\cos\alpha}$$

$$\text{am grössten} = a + a' \text{ für } \alpha = 0,$$
$$\text{am kleinsten} = \pm(a - a') \text{ für } \alpha = 180^0,$$

am meisten veränderlich also im Falle $a = a'$, der deshalb als der zugleich einfachste sich zur Ausführung empfiehlt, wenn die in Rede stehende Abhängigkeit der Schwingungsweite des Schiebers vom Winkel α praktisch benutzt werden soll.

d) In diesem Falle $r = r'$, $a = a' = \varepsilon r$ ergiebt sich aus Gl. (5):

$$x = 2\,r\left\{1 + \frac{\varepsilon}{2}\left[\sin\varphi + \sin(\varphi + \alpha)\right]\right.$$
$$\left. + \frac{\varepsilon^2}{8}\left[3\cos^2(\varphi + \alpha) + 2\cos(\varphi + \alpha)\left(4\sin^2\frac{\alpha}{2} - \cos\varphi\right) - \cos^2\varphi\right]\right\}$$

und daraus:

$$\frac{x' - x''}{2} = \pm\,2\,a\left(\cos\frac{\alpha}{2} - \varepsilon\sin^3\frac{\alpha}{2}\right) \ldots\ldots\ldots (6).$$

Der mit dem Winkel α hiernach sehr verschiedenen Schwingungsweite des Schiebers entsprechen auch etwas verschiedene Entfernungen

$$\frac{x' + x''}{2} = 2\,r\left(1 + \frac{\varepsilon^2}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

des Schwingungsmittelpunktes vom Punkte B. In dem Ausdrucke (6) für die Amplitude gilt das Zeichen $+$ oder $-$, jenachdem α kleiner oder grösser als der Werth ist, für welchen (mit der hier zu Grunde liegenden Annäherung) die Amplitude $=$ Null wird und für den man findet:

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \sqrt[3]{\frac{1}{2\,\varepsilon^2}}\left(\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{27\,\varepsilon^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + \frac{4}{27\,\varepsilon^2}}}\right) (8).$$

Von dieser Eigenschaft der in Rede stehenden Specialform des Zahnexcentriks, dass bei einem gewissen Werthe des Winkels α die excentrische Axe B' des Rades R' mit dem Schieber b' fast unbeweglich ist, kann eine nützliche Anwendung gemacht werden. Denkt man sich nämlich, während α den durch Gl. (8) bestimmten Werth hat, den Schieber mit der Axe B' festgestellt in der durch den Ausdruck (7) bestimmten Entfernung von B, während das Glied e beseitigt wird, so können die nun fest gelagerten Räder R, R' sich gegenseitig ihre Rotationsbewegung mittheilen, sofern nur ε hinlänglich klein ist und die Zähne hinlänglich lang, die Zahnlücken hinlänglich tief gemacht werden, um eine kleine Aenderung der Entfernung AA' ohne Störung des Eingriffes zu gestatten; und wenn das treibende Rad mit gleichförmiger Geschwindigkeit rotirt, so wird das andere in periodisch ungleichförmige Rotation versetzt ähnlich wie durch Ellipsenräder, nämlich durch Zahnräder mit elliptischen Polbahnen, deren feste Brennpunkte B, B' und deren Mittelpunkte A, A' sind.

Ist m das Verhältniss der grössten und kleinsten Winkelgeschwindigkeit des getriebenen Rades, n das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier auf einander folgender halber Umdrehungen desselben, so stehen m, n und das Verhältniss $\varepsilon = \frac{a}{r}$ in den durch die Gleichungen (10) und (11), §. 22, dargestellten Beziehungen und erscheint es thunlich, etwa bis

$$n = 2, \text{ entsprechend } m = 3 \text{ und } \varepsilon = 0{,}2679$$

die Ellipsenräder durch excentrisch gelagerte kreisrunde Räder zu ersetzen, falls dieselben so in Eingriff gebracht werden, dass nach Gl. (7) und (8):

$$\alpha = 151^0\ 42' \text{ und } BB' = 1{,}0337 \,.\, 2\,r$$

ist. Jener Winkel α wird dabei freilich nur angenähert realisirt werden können, da er nicht stetig, sondern nur sprungweise geändert werden kann in um so kleineren Intervallen, je grösser die Zahnzahlen der Räder sind. —

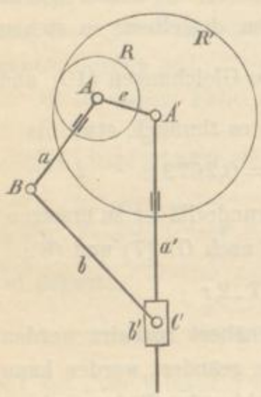
Wenn im Falle $r = r'$, $a = a'$ die Räder R, R' so in Eingriff gebracht werden, dass $\alpha = 0$ ist, dass also φ und φ' (Fig. 77) gleichzeitig $= 0$ sind, so bleibt offenbar AA' beständig parallel BB' und der Mechanismus, der deshalb mit Reuleaux das symmetrische Zahnexcentrik genannt werde, beständig symmetrisch in Bezug auf die Gerade, welche die Strecke AA' in ihrem Mittelpunkte rechtwinklig schneidet. Der Punkt M des Gliedes b, in dem sich der Punkt B' in der Anfangslage ($\varphi = \varphi' = 0$) befindet, ist sein Schwingungsmittelpunkt; seine veränderliche Entfernung von demselben aber:

$$\xi = 2\, a \sin \varphi.$$

Beschreibt man um A' mit dem Radius $A'B' = a$ einen Kreis K, so geht derselbe durch M, weil BM parallel und $= AA'$, also $A'M = AB = a$ ist, und wenn D' den zweiten Durchschnittspunkt dieses Kreises K mit der Geraden $A'B'$ bezeichnet, so ist $B'MD'$ ein rechter Winkel. Die Bewegung des Gliedes a' gegen b ist also einerlei mit der Bewegung der Strecke $B'D'$ im rechten Winkel $B'MD'$; der Kreis K mit dem Durchmesser $2\,a$ und ein Kreis um M als Mittelpunkt mit dem Radius $2\,a$ sind als sogenannte Cardanische Kreise (§. 12) die relativen Polbahnen beziehungsweise der Glieder a' und b, und alle Punkte des Kreises K bewegen sich in geraden Linien, nämlich in den verschiedenen Durchmessern des Kreises um M. Diese letztere Eigenschaft des symmetrischen Zahnexcentriks kann u. A. nützliche Verwendung finden.

4) Auch so ist die hier in Rede stehende Kette, Fig. 76, zur Ausführung gekommen, dass eins der Drehkörperpaare B, B' durch ein Prismenpaar ersetzt wurde; Fig. 79 stellt den Fall dar beispielsweise mit B' als Prismenpaar und innerem Eingriffe der Räder R, R'. Ist dabei a' das festgestellte Glied und $e < a + b$, so verhält sich auch dieser Mechanismus als eine Schubkurbel mit gelenkartig gegliederter Koppel (e Kurbel, b' Schieber) ähnlich wie das Zahnexcentrik, Fig. 77, im Falle $a < e + a'$; wenn die Bewegung von der Kurbel ausgeht, so bewegt sich der Schieber nach einem ähnlich wie dort im Allgemeinen verwickelten Gesetze.

Fig. 79.



Bemerkenswerth ist der Specialfall, dass bei innerem Eingriffe der Räder (Fig. 79) $a = r = \frac{1}{2} r'$ gemacht wird. Der Punkt B als ein Punkt in der Peripherie des kleineren R von zwei Cardanischen Kreisen R, R' bewegt sich dann in einem Durchmesser des grösseren Kreises R'; bei Feststellung des Gliedes a' (mit dem Rade R') kann also der Mechanismus als Geradführung dienen und ist er als solche mehrfach in Benutzung. Wenn freilich nur die Beziehung zwischen dieser geradlinigen Bewegung des Punktes B und der Rotation der Kurbel e benutzt werden soll, so sind die Glieder b und b' überflüssig. Beim Wegfalle derselben geht der zusammengesetzte in einen einfachen Mechanismus über: einen Kurbelradmechanismus nach der Bezeichnung in §. 59, indem die Kette dadurch auf die einfache Zahnräderkette R, e, R' reducirt wird.

5) Die unter 2), 3) und 4) besprochenen Fälle können combinirt werden, wie es z. B. bei dem Flaschenzuge von Eade* geschehen ist. Seine kinematische Kette geht aus der in Fig. 78 schematisch dargestellten dadurch hervor, dass auch noch das Drehkörperpaar B' durch ein Prismenpaar ersetzt wird, und zwar so, dass dessen Schubrichtung zu der des Prismenpaares b, b' senkrecht ist; das Glied b' ist dann ein rechtwinkliger Kreuzschieber. Sind z und z' die Zahnzahlen der Räder R, R', so entsprechen bei Stellung auf b einer Umdrehung von e:

$$\frac{e}{r} = \frac{r - r'}{r} = \frac{z - z'}{z}$$

Umdrehungen von R. Bei der hier in Rede stehenden Ausführung hat R' nur einen Zahn weniger als R, so dass sich letzteres Rad auch nur um einen Zahn dreht bei einer vollen Umdrehung von e und somit eine beträchtliche Uebersetzung ins Langsame dadurch erreicht werden kann, entsprechend der Hebung einer bedeutenden Last durch eine Kraft von mässiger Grösse. Indem dabei die Kurbel e sehr klein ausfällt, ist sie nach dem Princip der Zapfenerweiterung (§. 44) als Excentrik gestaltet.

6) Endlich könnte man auch eins der Drehkörperpaare A, A' der Kette, Fig. 76, in ein Prismenpaar übergehen lassen, womit die Strecke AA' und also einer der Radien r, r' unendlich gross würde, so dass von den Rädern R, R' eins durch eine Zahnstange zu ersetzen wäre. Gleichzeitig könnte als Combination mit einem der unter 3) und 4) besprochenen Fälle auch das Paar C oder eins der Paare B, B' als Prismenpaar ausgeführt sein, indem nur nicht drei Prismenpaare in der Kette enthalten sein dürften, um sie nicht in eine ebene Prismenkette zu verwandeln. Auch kann als Combination mit dem Falle unter 2) immer dann $a = 0$ oder $a' = 0$ sein, wenn nicht A und B' oder A' und B zugleich Prismenpaare sind.

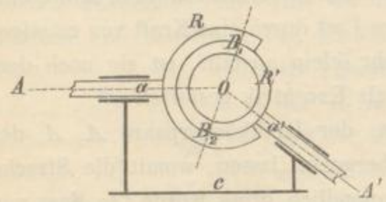
§. 63. Zusammengesetzte sphärische Zahnräderketten.

Ebenso wie nach vorigem §. eine ebene, kann auch eine sphärische Drehkörperkette mit $x + 4$ Gliedern dadurch zwangläufig gemacht werden, dass x mal drei verschiedene auf einander folgende ihrer Glieder mit einfachen Zahnräderketten verbunden werden, die dann nur nicht cylindrische, sondern conische Räder enthalten. Ein elementar zusammengesetzter Mechanismus, dessen Kette auf solche Weise insbesondere aus einer sechs-

* Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1868, Tafel II.

gliedrigen sphärischen Drehkörperkette entstanden gedacht werden kann, ist z. B. das Blees'sche Universalgelenk, wobei zugleich das Princip der Verminderung der Gliederzahl (§. 52) in Anwendung gebracht, die Kette nämlich auf eine viergliedrige reducirt ist in Folge des Ersatzes von drei Drehkörperpaaren durch ein Kugelpaar. Dieser Mechanismus, welcher bezweckt, den Ungleichförmigkeitsgrad der Rotationsbewegung einer getriebenen Welle a' bei gleichförmiger Rotation der treibenden Welle a möglichst auf Null zu reduciren selbst bei grösseren spitzen Winkeln α, unter denen sich die Axen A und A' von a und a' im Punkte O (Fig. 80) schneiden (während bei dem gewöhnlichen Universalgelenk dieser Ungleichförmigkeitsgrad nach §. 46 einen beträchtlich von Null verschiedenen, mit α schnell wachsenden Werth hat), liegt die folgende Ueberlegung zu Grunde.

Fig. 80.

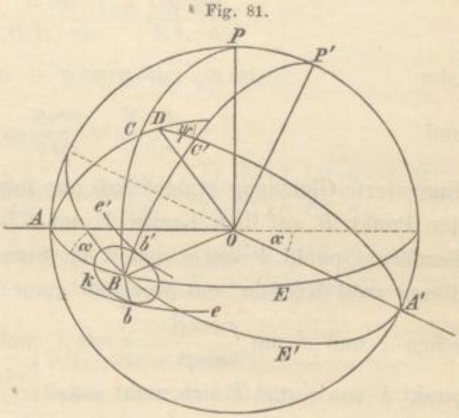


Wenn die Wellen a, a' um ihre Axen A, A' mit jeder Zeit gleichen Winkelgeschwindigkeiten relativ gegen den gemeinsamen Lagerkörper c (Fig. 80) als festgestelltes Glied rotirten, so würde die Durchschnittslinie B einer durch A gehenden und in a festen Ebene E mit einer durch A' gehenden und in a' festen Ebene E', falls sie in irgend einer Lage in der Ebene H enthalten wäre, die in der Halbirungslinie des Winkels AOA' normal zur Ebene AA' ist, beständig in dieser Ebene H bleiben, in derselben um den Punkt O rotirend. Wenn also umgekehrt a und a' durch einen Bolzen b von veränderlicher relativer Lage gegen a und a' so verbunden werden könnten, dass dessen Axe B ($B_1 OB_2$ in Fig. 80) in der Ebene H um den Schnittpunkt O der Axen A, A' rotirt, so würden a und a' stets gleiche Winkelgeschwindigkeiten haben.

Bei der Blees'schen Ausführung dieses Gedankens sind E, E' die Mittelebenen zweier Ringe R, R', mit denen die Wellen a, a' endigen und wovon der eine R den anderen R' umgreift, indem sich beide in einer Kugelfläche mit dem Mittelpunkte O berühren. R' ist ein geschlossener Ring, R aber so weit aufgeschnitten, wie das ungehinderte Spiel mit Rücksicht auf den Neigungswinkel α der Axen A, A' und die Dicke der Welle a' erfordert. An zwei diametral gegenüber liegenden Stellen B_1 und B_2 sind die Ringe längs ihren Mittelebenen E, E' geschlitzt auf solche Längen, dass der Bolzen b, indem seine Axe B mit der Durchschnittslinie der Ebenen E, E' zusammenfällt, stets in allen vier Schlitzen Raum zum Durchgange durch die Ringe findet. Um ihn aber zu nöthigen, diese Lage beständig zu behalten, ist er bei B_1 und B_2 ringsum conisch verzahnt, so dass die Zahnflächen gegen O convergiren, und sind ebenso die inneren Flächen der Ringschlitze mit entsprechenden Zähnen versehen, jedoch nur einseitig und wechselweise auf entgegengesetzten Seiten des Bolzens, so dass diese vier Ringverzahnungen durch ihre Eingriffe mit den (doppelt so breiten) Zähnen des Bolzens diesen alle in gleichem Sinne um seine Axe drehen, während sich bei der Rotation der Wellen a, a' die Ebenen E, E' längs OB_1 und OB_2 in entgegengesetztem Sinne gegen einander bewegen. —

Um zu untersuchen, in welchem Grade der Zweck eines möglichst constanten Winkelgeschwindigkeitsverhältnisses der Wellen a, a' durch diesen Mechanismus erreicht wird, sei um O als Mittelpunkt mit dem Radius $= 1$ eine Kugelfläche beschrieben, die von den Axen A, A' in den Punkten A, A' (Fig. 81), von den Mittelebenen E, E' der Ringe in den grössten Kreisen E, E', von der Bolzenaxe im Punkte B (und seinem hier nicht gezeichneten Gegenpunkte) als Schnittpunkt der grössten Kreise E, E', von den Theilrisskegeln (Axoiden) der Ringverzahnungen in den kleineren Kreisen e, e' und von dem Theilrisskegel des Bolzens in dem kleinen Kreise k geschnitten wird. Letzterer werde von

Fig. 81.



e und e' in den Punkten b und b' berührt, und es sei der Winkel $BOb = = BOb' = \beta$. Der Radius von k ist dann $= \sin\beta$, der Radius von e und $e' = \cos\beta$.

Es werde ausgegangen von derjenigen Lage als Anfangslage, in welcher E normal zur Axenebene AOA' ist, und es seien die Verzahnungen so in Eingriff gebracht, dass in dieser Lage zugleich E' und folglich auch die Bolzenaxe normal zur Axenebene ist; E und E', ebenso e und e' schneiden sich dann unter dem Winkel $\alpha =$ dem Neigungswinkel der Axen A, A'. Wird ferner in der Axenebene OP normal zu OA, OP' normal zu OA' gezogen, so dass in der Anfangslage P der Pol von E und e, P' der Pol von E' und e' ist, so liegen die Berührungspunkte b, b' beziehungsweise in den grössten Kreisen PB und $P'B$, deren Ebenen normal zu OA und OA' sind.

Wenn nun die Welle a mit den Ebenen E, e sich um den Winkel $\varphi = BC$ dreht, so sei $\varphi' = BC'$ der entsprechende Drehungswinkel von a' mit den Ebenen E', e', und ψ der Winkel, unter dem sich nach diesen Drehungen die Ebenen E, E' in OD (der Bolzenaxe) schneiden, ferner $CD = x$ und $C'D = x'$. Das sphärische Dreieck $AA'D$ hat dann die folgenden Seiten nebst gegenüber liegenden Winkeln:

$$AA' = \pi - \alpha, \qquad A'D = \frac{\pi}{2} + x', \qquad DA = \frac{\pi}{2} + x$$

$$D = \pi - \psi, \qquad A = \frac{\pi}{2} + \varphi, \qquad A' = \frac{\pi}{2} + \varphi'.$$

Zwischen ihnen bestehen drei von einander unabhängige Relationen:

$$\cos D = -\cos A \cos A' + \sin A \sin A' \cos (AA')$$

$$\frac{\sin D}{\sin (AA')} = \frac{\sin A}{\sin (A'D)} = \frac{\sin A'}{\sin (DA)}$$

oder

$$\cos \psi = \sin \varphi \sin \varphi' + \cos \varphi \cos \varphi' \cos \alpha \quad \ldots \ldots \ldots (1)$$

und

$$\frac{\sin \psi}{\sin \alpha} = \frac{\cos \varphi}{\cos x'} = \frac{\cos \varphi'}{\cos x} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2).$$

Eine vierte Gleichung ergiebt sich aus folgender Erwägung. Dadurch, dass der Punkt B auf dem Kreise E um $CD = x$ fortrückt, bewegt sich der Berührungspunkt b von e und k im Sinne be (Fig. 81) um $x \cos \beta$ längs diesen zwei Kreisen, entsprechend einer Vergrösserung des Winkels zwischen e und e' um $\frac{x \cos \beta}{\sin \beta} = x \operatorname{cotg} \beta$, wenn unterdessen der Berührungspunkt b' von e' und k sich nicht geändert hätte. In der That ist aber letzterer im Sinne $b'e'$ um $x' \cos \beta$ längs e' und k fortgerückt, entsprechend einer Verkleinerung des Winkels zwischen e und e' um $x' \operatorname{cotg} \beta$, falls b ohne Lagenänderung geblieben wäre. Aus beiden Gründen zusammen hat sich also jener Winkel um $(x' - x) \operatorname{cotg} \beta$ verkleinert, und folgt daraus die Gleichung:

$$(x' - x) \operatorname{cotg} \beta = \alpha - \psi \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (3).$$

Die Elimination von x, x' und ψ zwischen den 4 Gleichungen (1)—(3) liefert eine Beziehung zwischen φ', φ, α und β, somit dann auch das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss der Wellen a', a:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi}$$

als eine Function von φ mit den Constanten α, β. Einer Viertelumdrehung von a entspricht auch eine solche von a' der Art, dass sich $\frac{\omega'}{\omega}$ bei der

1^{ten}, 3^{ten}, 5^{ten} ... Viertelumdrehung auf gleiche und zwar entgegengesetzte Weise ändert wie bei der 2^{ten}, 4^{ten}, 6^{ten} ... Viertelumdrehung. Je kleiner dabei β ist, je grösser also $cotg\,\beta$, desto weniger sind x' und x nach Gl. (3), also φ' und φ nach Gl. (2), somit auch ω' und ω verschieden.

Ist β ein kleiner Bruch, so kann aus den Gleichungen (1)—(3) näherungsweise gefolgert werden:

$$\varphi' = \varphi - \eta;\quad \eta = \frac{(\alpha - 2\,\vartheta)\cos\varphi}{cotg\,\frac{\alpha}{2}\,cotg\,\beta + \sin\varphi\,tg\,\vartheta};\quad \sin\vartheta = \sin\frac{\alpha}{2}\cos\varphi \quad . (4)$$

und findet man daraus beispielsweise für $tg\,\beta = 0{,}163$ (Werth von $tg\,\beta$ bei einem ausgeführten Modell) und

	$\alpha = 30^0$	$\alpha = 45^0$
$max\,\frac{d\eta}{d\varphi} =$	0,0085	0,0198 bei nahe $\varphi = 33^0$,
$min\,\frac{d\eta}{d\varphi} =$	$-0{,}0229$	$-0{,}0530$ bei $\varphi = 90^0$,

also den Ungleichförmigkeitsgrad (§. 46):

$$\delta = max\,\frac{\omega'}{\omega} - min\,\frac{\omega'}{\omega} = max\,\frac{d\eta}{d\varphi} - min\,\frac{d\eta}{d\varphi} = \begin{cases} 0{,}0314 \text{ für } \alpha = 30^0 \\ 0{,}0728 \text{ für } \alpha = 45^0. \end{cases}$$

Für andere kleine Werthe von β ist er näherungsweise proportional $tg\,\beta$. Der Ungleichförmigkeitsgrad Δ des gewöhnlichen Universalgelenkes ist nach §. 46, Gl. (5) erheblich grösser:

$$\Delta = \frac{\sin^2\alpha}{\cos\alpha} = \begin{cases} 9{,}2\,\delta \text{ für } \alpha = 30^0 \\ 9{,}7\,\delta \text{ für } \alpha = 45^0. \end{cases}$$

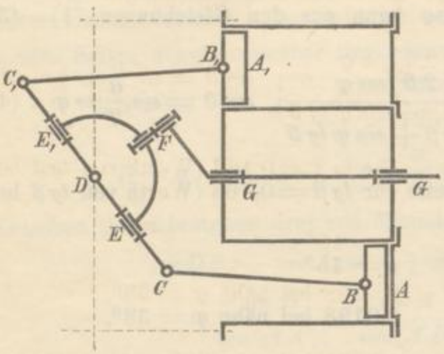
§. 64. Nicht elementare Mechanismen.

Wenn auch die Untersuchung der kinematischen Eigenschaften von nicht elementaren Mechanismen, wie schon in §. 60 bemerkt wurde, im Allgemeinen hier nicht beabsichtigt ist, so mögen doch an dieser Stelle schliesslich einige solche Mechanismen als Beispiele besprochen werden, um ihre Unterschiede von elementar zusammengesetzten deutlicher hervortreten zu lassen.

1) Um durch den in einem Dampfcylinder hin und her gehend bewegten Kolben AB, Fig. 82, eine Welle FG in stetige Rotation zu versetzen, deren Axe G mit der Cylinderaxe parallel ist, kann ein Hebel CD, dessen fest (in fester Verbindung mit dem Cylinder) gelagerte Drehungs-

axe D die Wellenaxe G rechtwinklig schneidet, einerseits durch die Koppel BC, deren Axen B, C parallel der Axe D sind, so mit dem Kolben, andererseits durch den Bügel EF, dessen Axen E, F, indem dabei D und E, E und F rechte Winkel bilden, durch den Schnittpunkt der Axen D, G gehen, so mit der Welle verbunden werden, dass dadurch ein zusammengesetzter Mechanismus $ABCDEFG$ entsteht, der indessen nicht elementar ist, da seine Kette in zwei zwangläufige Ketten zerlegt werden kann: in die Ketten der ebenen (allgemeinen) Schubschwinge $ABCD$ und der sphärischen Schwingkurbel $DEFG$. Wenn die Schwinge CD über D hinaus verlängert und an der anderen Seite mittels einer Koppel $C_,B_,$ mit dem Kolben $B_,A_,$ eines zweiten Dampfcylinders verbunden wird, so kann ohne allzu ungleichförmige Rotation der Welle jeder dieser Dampfcylinder einfach wirkend, an der Koppelseite offen und der Mechanismus dann sehr compendiös gemacht werden durch unmittelbare Verbindung der Koppel mit dem Kolben ohne Kolbenstange. — Wenn auch dieselbe hier besprochene Bewegungsumwandlung durch einen elementaren, insbesondere sogar durch einen einfachen, z. B. durch den sechsgliedrigen Drehkörpermechanismus nach Fig. 61, §. 48, erreichbar ist, so kann doch von praktischen Gesichtspunkten aus jener nicht elementare Mechanismus den Vorzug verdienen.

Fig. 82.

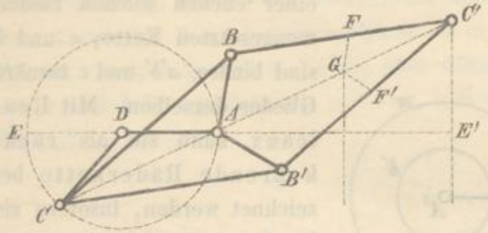


2) Um einen Punkt C' in gerader Linie (resp. eine Gerade C' nach einer zu ihr normalen Richtung in einer Ebene) zu führen durch Vermittelung eines ebenen Drehkörpermechanismus, dessen Paaraxen alle im Endlichen liegen, kann man den geometrischen Satz benutzen, dass, wenn man durch einen Punkt A in der Peripherie eines Kreises alle möglichen Secanten desselben zieht und, unter C ihre zweiten Schnittpunkte mit dem Kreise verstanden, die Punkte C' in ihnen so wählt, dass die Producte $AC \, . \, AC'$ gleich gross sind, alsdann der Ort der Punkte C' eine Gerade $C'E'$ und zwar normal zu dem durch A gehenden Durchmesser AE des Kreises ist; aus der Aehnlichkeit der rechtwinkligen Dreiecke ACE und $AE'C'$ (Fig. 83) folgt nämlich:

$$AC : AE = AE' : AC', \text{ also } AC \, . \, AC' = AE \, . \, AE'.$$

Diese Bemerkung liegt der Peaucellier'schen Geradführung, Fig. 83, zu Grunde. Dieselbe besteht aus drei viergliedrigen, also zwangläufigen ebenen Drehkörperketten $ABCD$, $AB'CD$, $BCB'C'$, von denen die erste mit der zweiten die Glieder CD und DA, die erste mit der dritten das Glied BC, die zweite mit der dritten das Glied CB' gemein hat, und deren Gliedlängen so gewählt sind, dass

Fig. 83.



$$CD = DA,\ AB = AB',\ BC = CB' = B'C' = C'B$$

ist, während das Glied AD in solcher Lage festgestellt ist, dass seine Axenebene DA normal zu der Ebene $C'E'$ ist, in der die Axe C' geführt werden soll. Dass unter diesen Umständen die Punkte A, C, C' beständig in gerader Linie liegen, und dass C in dem durch A gehenden Kreise zum Mittelpunkte D geführt wird, ist ohne Weiteres einleuchtend; dass aber auch das Product $AC.AC'$ constant ist, folgt daraus, dass es gleich dem Producte der Abschnitte jeder anderen durch A gehenden Sehne des aus B als Mittelpunkt mit $BC = BC'$ als Radius beschriebenen Kreises, insbesondere also

$$= (CB + BA)(CB - BA)$$

= dem Producte der Abschnitte des durch A gehenden Durchmessers jenes Kreises ist. Bei der durch Fig. 83 angedeuteten Anordnung erscheint der Mechanismus als ein um die Axe A schwingender, aus 6 paarweise gleichen Stäben gebildeter Balancier von veränderlicher Form, dessen Endpunkt C' dadurch in einer Geraden sich zu bewegen genöthigt ist, dass der andere Endpunkt C in einem durch A gehenden Kreise geführt wird. Durch die punktirten Linien FG und $F'G$ ($BF = B'F'$, $FG = F'G$) ist angedeutet, wie es nur der Hinzufügung von je zwei weiteren gleich langen Gliedern bedarf, die bei G unter sich, bei F und F' mit den Gliedern BC' und $B'C'$ durch Drehkörperpaare verbunden sind, um ausser C' noch andere Punkte G in geraden Linien zu führen, die mit der Bahn des Punktes C' parallel sind, entsprechend aber solchen darin durchlaufenen Strecken (Hublängen), die sich zu der des Punktes C' verhalten

$$= AG : AC' = BF : BC'.$$

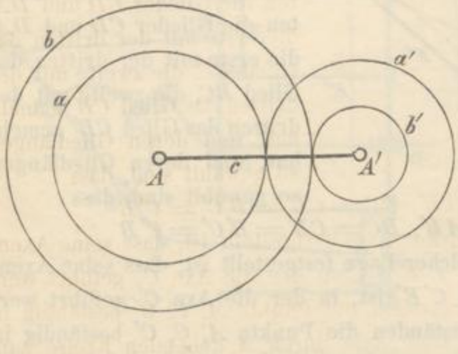
3) Von nicht elementaren Zahnrädermechanismen sind solche bemerkenswerth, deren viergliedrige Ketten aus zwei einfachen Zahnräderketten a, a', c und b, b', c so zusammengelegt sind, dass der Steg c ihnen gemeinsam

ist, die Räder a, b zusammenfallende Axen A, die Räder a', b' dagegen die gemeinsame Axe A' haben, indem sie zu einem Gliede fest verbunden sind: siehe Fig. 84 für den Fall einer ebenen solchen zusammengesetzten Kette; a und b sind binäre, $a'b'$ und c ternäre Glieder derselben. Mit Reuleaux kann sie als rückkehrende Räderkette bezeichnet werden, insofern sie bei der Reihenfolge

$$a, \quad a'b', \quad c, \quad b$$

ihrer Glieder eine Rückkehr des letzten Gliedes b zur Axe A des ersten Gliedes a vermittelt.

Fig. 84.



Der durch die Stellung auf c hervorgehende Mechanismus, als rückkehrender Zahnrädermechanismus zu bezeichnen (entsprechend den für die Mechanismen aus der einfachen Zahnräderkette in §. 59 gewählten Namen), kann zur Vermittelung einer von der des Rades a verschiedenen Winkelbewegung des Rades b oder einer gewissen relativen Winkelbewegung von b gegen a dienen. Sind nämlich a, b, a', b' die Theilrisshalbmesser der gleich bezeichneten Räder, so hat die Winkelgeschwindigkeit ω_a des Rades a die in gleichem Sinne stattfindende Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_b = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}\omega_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (1)$$

des Rades b zur Folge, also die relative Winkelgeschwindigkeit

$$\omega_b - \omega_a = \left(\frac{a}{a'}\frac{b'}{b} - 1\right)\omega_a \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (2)$$

von b gegen a, positiv im Sinne von ω_a. Wenn insbesondere die Räder nicht nach Fig. 84 mit kreisförmigen Theilrissen, sondern als unrunde Räder ausgeführt werden, so aber, dass die Mittelwerthe von ω_a und ω_b einander gleich sind (wie es z. B. der Fall ist, wenn alle 4 Räder congruente elliptische Räder, a' und b' aber ungleich liegend verbunden sind), so erhält b gegen a eine zu verschiedenen Zwecken verwendbare oscillatorische relative Winkelbewegung.

Durch Feststellung des Rades a ergiebt sich ein Mechanismus, der analog den in §. 59 gewählten Bezeichnungen ein rückkehrender Kurbelradmechanismus genannt werden kann. Sind dabei ω_b und ω_c die Winkelgeschwindigkeiten des Rades b und der Kurbel c (ω_c absolut verstanden, ω_b aber positiv oder negativ, jenachdem der betreffende Drehungssinn mit dem der Kurbel übereinstimmend oder ihm entgegengesetzt ist), so folgt die Beziehung zwischen ω_b und ω_c aus der Bemerkung, dass dieser Mechanismus in den vorigen übergeführt wird durch seine Drehung um die Axe A mit der Winkelgeschwindigkeit $-\omega_c$, wodurch die Bewegung des Gliedes c aufgehoben wird. Indem aber dann die Winkelgeschwindigkeiten von a und b beziehungsweise $= -\omega_c$ und $= \omega_b - \omega_c$ würden, ist nach Gl. (1):

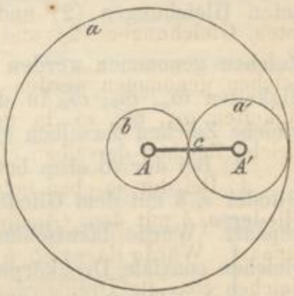
$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}\left(-\omega_c\right),$$

also

$$\omega_b = \left(1 - \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}\right)\omega_c \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Diese Formeln gelten allgemein für die verschiedenen Specialfälle solcher Räderwerke, wenn nur der Radius eines Hohlrades (Rades mit innerer Verzahnung) mit entgegengesetztem Zeichen in die betreffende Formel eingesetzt wird. Bemerkenswerth ist z. B. der Fall, dass (bei kreisförmigen Theilrissen) a ein Hohlrad ist, und dass die Räder a', b' einander gleich sind, somit zu einem einzigen mit a und b zugleich in Eingriff befindlichen Rade vereinigt werden können: Fig. 85. Mit c als festgestelltem Gliede ergiebt sich daraus u. A. ein bekanntes Gangspillgetriebe; wird dabei das Rad b mit der Winkelgeschwindigkeit ω_b gedreht, so folgt die Winkelgeschwindigkeit ω_a der innen verzahnten Kettentrommel aus Gl. (1) mit $-a$ statt a und mit $a' = b'$:

Fig. 85.



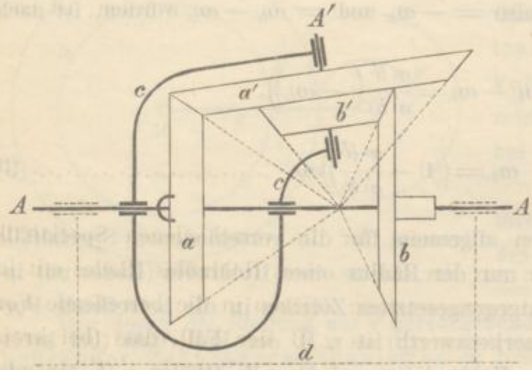
$$\omega_a = -\frac{b}{a}\omega_b.$$

Es dreht sich also die Trommel mit einer im Verhältnisse $\frac{b}{a}$ kleineren Winkelgeschwindigkeit, und zwar, wie das Minus-Zeichen ausdrückt, im entgegengesetzten Sinne wie das Rad b. — Mit a als festgestelltem Gliede erhält man aus der Kette, Fig. 85, ein vielfach benutztes Göpelgetriebe, bei dem es umgekehrt darauf ankommt, die kleine Winkelgeschwindigkeit ω_c, womit das Glied c von dem Pferde umgedreht wird, mit Uebersetzung ins Schnelle auf die Welle des Rades b zu übertragen; die betreffende Winkelgeschwindigkeit ω_b derselben folgt aus Gl. (3) mit $-a$ statt a und mit $a' = b'$:

$$\omega_b = \left(1 + \frac{a}{b}\right) \omega_c.$$

Wenn die hier besprochene rückkehrende Räderkette mit Kegelrädern statt mit Cylinderrädern ausgeführt wird, wie Fig. 86 schematisch darstellt (ohne das später zu besprechende, punktirt angedeutete Glied d, und indem b mittels einer Hülse lose drehbar zu denken ist um die mit a fest verbundene Welle), so ist zu berücksichtigen, dass bei überall äusserer Verzahnung und Feststellung des Gliedes c die coaxialen Räder a, b nicht, wie in Fig. 84, in gleichem Sinne, sondern in entgegengesetztem Sinne um die Axe A rotiren, so dass in Gl. (1) und somit auch in den daraus abgeleiteten Gleichungen (2) und (3) der Factor $\frac{a}{a'}\frac{b'}{b}$ mit entgegengesetztem Zeichen genommen werden muss, falls nach wie vor die Winkelgeschwindigkeiten ω_a, ω_b, ω_c in der Weise algebraisch verstanden werden, dass gleiche Zeichen derselben einerlei Drehungssinne entsprechen.

Fig. 86.



4) Bei der so eben betrachteten rückkehrenden Räderkette waren die Glieder a, b mit dem Gliede c durch coaxiale Drehkörperpaare unmittelbar gepaart. Würde dazwischen ein weiteres Glied d eingefügt, das durch dergleichen coaxiale Drehkörperpaare mit den Rädern a, b und dem Gliede c, oder auch nur mit einem Theil dieser Glieder unmittelbar gepaart ist, so wäre die nun fünfgliedrige zusammengesetzte Kette zwar nicht mehr zwangläufig, dieser Mangel an Zwangläufigkeit indessen unwesentlich, wenn nicht etwa d als festgestelltes Glied oder anderweitig die relative Bewegung dieses Gliedes gegen ein anderes der Kette bei dem betreffenden Mechanismus benutzt werden soll. Bei dem Mechanismus aber, der durch Feststellung des Gliedes d aus der Kette hervorgeht, kann die Zwangläufigkeit dadurch wieder hergestellt werden, dass zwei der Glieder a, b, c gleichzeitig und unabhängig von einander gedreht werden, etwa a und c mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_a und ω_c; der Mechanismus ist dann als Inter-

ferenzmechanismus zu bezeichnen, insofern die Winkelgeschwindigkeit ω_b des Rades b sich als Resultat der Interferenz jener zwei unabhängigen Winkelgeschwindigkeiten ω_a und ω_c ergiebt. Die betreffende Beziehung folgt aus Gl. (1) mit Rücksicht darauf, dass jetzt $\omega_a - \omega_c$ und $\omega_b - \omega_c$ die relativen Winkelgeschwindigkeiten von a und b gegen c sind:

$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}(\omega_a - \omega_c) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (4).$$

Darin sind wieder die Radien etwaiger Hohlräder mit negativen Vorzeichen einzusetzen; auch ist wieder der aus diesen Radien gebildete Factor im Falle von Kegelrädern (Fig. 86) entgegengesetzt zu nehmen, so dass dann die Beziehung lautet:

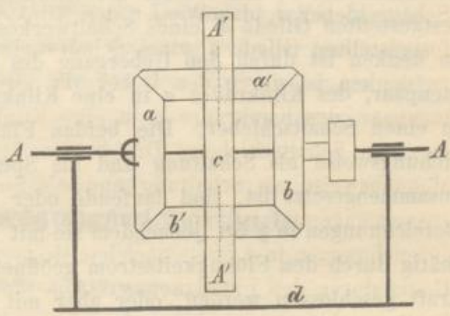
$$\omega_b - \omega_c = \frac{a}{a'}\frac{b'}{b}(\omega_c - \omega_a) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Dieser letztere Mechanismus ist es namentlich, der bei gewissen Spinnmaschinen Anwendung findet, und zwar so, dass $a = b$ und $a' = b'$, folglich nach Gl. (5):

$$\omega_a + \omega_b = 2\,\omega_c \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

ist. Die Axen A und A' sind dann rechtwinklig gegen einander gerichtet, und können a', b' zu einem einzigen zugleich mit a und b in Eingriff befindlichen Rade vereinigt werden, statt dessen jedoch der Symmetrie halber zwei gleiche Räder a', b' benutzt zu werden pflegen, die auf entgegengesetzten Seiten der Axe A zugleich mit a und b in Eingriff und in dem als Cylinderrad ausgeführten Gliede c um die Axe A' drehbar sind. Fig. 87 stellt diesen Mechanismus schematisch dar, unter AA eine Welle verstanden, auf der das Rad a fest sitzt, während b und c lose darauf drehbar sind; durch ein Rad auf der Hülse des Rades b kann seine Drehung weiter fortgepflanzt werden, wogegen die Räder a und c ihre Drehungen beziehungsweise durch die Welle AA und durch die Verzahnung von c empfangen.

Fig. 87.



5) Als besonders artenreiche Gruppe von nicht elementar zusammengesetzten Mechanismen sind solche zu erwähnen, bei denen Flüssigkeiten zur Gliedbildung benutzt werden, namentlich in der Weise, dass die Bewegung der betreffenden Maschine von dieser Flüssigkeit ausgeht (Kraft-

maschine) oder dass umgekehrt die Ortsänderung der Flüssigkeit durch die Maschine bezweckt wird (Pumpe). Dabei wird die zusammengesetzte Kettenbildung im Allgemeinen durch einen Hülfsmechanismus so vermittelt, dass ein Glied desselben als Kapsel (Hohlkörper), ein anderes als ein damit gepaarter Kolben gestaltet wird, während beide mit der Flüssigkeit durch kraftschlüssige Paarung eine Kette bilden, die sich mit der Kette jenes Hülfsmechanismus zu einer nicht elementaren Kette zusammensetzt. Als Hülfsmechanismus kann insbesondere z. B. ein einfacher Zahnrädermechanismus oder ein viergliedriger Drehkörpermechanismus dienen, ersteren Falles so, dass der Steg als Kapsel, die Zahnräder als Kolben auf verschiedene Weise ausgebildet werden, wogegen im anderen Falle eine grössere Mannigfaltigkeit je nach der Art des Drehkörpermechanismus und der Wahl seiner als Kapsel und als Kolben auszubildenden Glieder stattfinden kann.

Wenn im Falle einer solchen Pumpe im weiteren Sinne des Wortes durch Ventile oder Schieber ein periodisches Oeffnen und Schliessen des Kapselraumes vermittelt wird, so kommt die aus dieser sogenannten Steuerung, aus der Kapsel, dem Kolben und der Flüssigkeit gebildete Kette ganz analog einem Schaltwerke (§. 58) zur Wirkung, so dass die betreffende Pumpe mit Reuleaux nicht unpassend ein Flüssigkeitsschaltwerk genannt werden kann. So entspricht z. B. bei der gewöhnlichen Wasser-Saug- und Hebepumpe mit Ventilkolben das Bodenventil der Sperrklinke c', das Kolbenventil der Schaltklinke c, der Kolben selbst dem hin und her bewegten Schaltschieber d, das Wasser der Klinkstange a, der Pumpencylinder dem festgestellten Gliede d' eines Schaltwerkes, wie es aus Fig. 73 entstanden zu denken ist durch den Uebergang des Drehkörperpaares A in ein Prismenpaar, des Klinkrades a in eine Klinkstange und der Schaltschwinge d in einen Schaltschieber. Die beiden Flüssigkeitsgesperre, aus denen beziehungsweise als Schaltung und als Sperrung das Flüssigkeitsschaltwerk zusammengesetzt ist, sind laufende oder ruhende Gesperre im Sinne der Bezeichnungen in §. 58, jenachdem sie mit Ventilen gebildet sind, die selbstthätig durch den Flüssigkeitsstrom geöffnet, durch Schwerkraft oder Federkraft geschlossen werden, oder aber mit Schiebern (auch mit entlasteten Ventilen), die kettenschlüssig zwangläufig bewegt werden. Letzteres ist namentlich dann nöthig, wenn die Bewegung von der Flüssigkeit ausgeht, also bei hydraulischen Kraftmaschinen von der hier in Rede stehenden Art (Wassersäulenmaschinen, Kolbendampfmaschinen etc.), die als rückläufige Flüssigkeitsschaltwerke bezeichnet werden können. —

Die besprochenen Beispiele lassen erkennen, wie die Bildung zusammengesetzter Mechanismen wesentlich durch den Zweck bedingt ist, der dadurch erreicht werden soll, bestehend bei den Beispielen unter 1) in der Verwandlung der gegebenen Bewegungsart eines Gliedes in eine andere Bewegungsart eines anderen Gliedes, unter 2) in der an gewisse Bedingungen geknüpften Erzielung einer bestimmten Bahn, die von einem gewissen Körperpunkte durchlaufen werden soll, unter 3) in der Verwandlung einer gegebenen Bewegungsart (dort Rotation um eine gewisse Axe) in eine eben solche (Rotation um dieselbe Axe) mit anderer Geschwindigkeit, unter 4) in der Zusammensetzung verschiedener Bewegungen zu einer resultirenden Bewegung, unter 5) in der Förderung einer Flüssigkeit oder in ihrer Benutzung als Arbeitsflüssigkeit einer Kraftmaschine. Noch mannigfaltiger, als solche Zwecke selbst, sind die möglichen Arten ihrer Erfüllung, so dass eine allgemeine und erschöpfende synthetische Entwickelung von dergleichen nicht elementaren Mechanismen kaum thunlich erscheint. Eine mit Bezug auf technische Anwendungen beschränkte, in erster Reihe vom Zwecke, sowie event. von der Form des zum Betriebe disponiblen Arbeitsvermögens ausgehende Uebersicht derselben und ihre Besprechung mit Rücksicht auf die Vollkommenheit und Einfachheit der Erreichung des Zweckes, mit Rücksicht ferner auf die Anforderungen der praktischen Ausführung und des Betriebes, auch auf die Wirthschaftlichkeit der Benutzung des disponiblen Arbeitsvermögens, ist aber theils als Aufgabe der Technologie und des Maschinenbaues zu betrachten, theils in die einzelnen folgenden Abschnitte der theoretischen Maschinenlehre zu verweisen, wenigstens so lange die synthetische Entwickelung und systematische Uebersicht selbst der elementaren Mechanismen, als Grundlage jener weiteren Aufgabe, einstweilen nur so unvollständig durchgeführt ist, wie aus dem Vorhergehenden sich ergeben hat.

B. Allgemeine Bewegungswiderstände.

§. 65. Einleitende Erklärungen.

Die auf die Glieder eines Getriebes wirkenden äusseren Kräfte können unterschieden werden als active oder treibende Kräfte, als passive Kräfte oder Widerstände und als indifferente Kräfte, jenachdem ihre Arbeiten bei der Bewegung des Getriebes positiv, negativ oder Null sind. Diese Charaktere sind also nicht den Kräften an sich eigenthümlich, sondern davon abhängig, wie sie an dem betreffenden Getriebe zur Wirkung kommen; so kann die Schwerkraft ebensowohl treibende Kraft (z. B. bei