

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Theoretische Maschinenlehre**

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

**Grashof, Franz**

**Leipzig, 1883**

I. Elementenpaare

[urn:nbn:de:bsz:31-282938](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-282938)

## I. Die Körper sind gegen einander

- a) um eine gemeinsame Gerade nur drehbar,
- b) längs einer gemeinsamen Geraden nur verschiebbar,
- c) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit unveränderlichem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen.

## II. Die Körper sind gegen einander

- a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit beliebigem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,
- b) um alle zu einer gemeinsamen Ebene senkrechte Axen drehbar,
- c) um alle durch einen gemeinsamen Punkt gehende Axen drehbar.

## III. Die Körper sind gegen einander

- a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit einem in bestimmter Weise veränderlichen Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,
- b) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer
  - $\alpha$ ) ebenen Curve,
  - $\beta$ ) Raumcurve des anderen bleibt,
- c) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer
  - $\alpha$ ) ebenen,
  - $\beta$ ) krummen Fläche des anderen bleibt.

## I. Elementenpaare.

## a. Niedere Elementenpaare.

## §. 4. Niedere Elementenpaare im Allgemeinen; Umschlusspaare.

Indem ein niederes Elementenpaar als ein umkehrbares im Sinne des vorigen §. definiert wurde, so ergeben sich aus der dort angestellten Untersuchung die principiell möglichen Fälle niederer Elementenpaare, und ist daraus vor Allem ersichtlich, dass dergleichen nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein können. Es bleibt nur zu ermitteln, ob, welche und wie diese Fälle

durch sich berührende starre Körper als Elemente des Paares verwirklicht werden können, das hier und im Folgenden im Sinne von §. 1 immer als ein selbständig geschlossenes Paar vorausgesetzt ist, sofern nicht später das Gegentheil ausdrücklich bemerkt wird. Wenn diese materielle Verwirklichung aber überhaupt, dann ist sie u. A. offenbar so möglich, dass die Elemente sich mit zusammenfallenden Oberflächentheilen berühren, da diese es sind, welche den kinematischen Charakter des Paares bestimmen und somit zusammenfallend müssen sein können, wenn durch ihre der Umkehrung des Paares entsprechende Vertauschung die Bewegung nicht geändert werden soll. Auch ist unmittelbar einleuchtend, dass, wenn umgekehrt die Elemente eines Paares sich in einer Fläche beständig berühren, das Paar nothwendig umkehrbar und von höchstens zweifacher Beweglichkeit ist.

Ein selbständig geschlossenes Elementenpaar, dessen Elemente sich in einer Fläche berühren, soll ein Umschlusspaar heissen; dem Vorstehenden zufolge ist es jedenfalls ein niederes. Umgekehrt brauchen zwar niedere Elementenpaare nicht Umschlusspaare zu sein, können aber aus solchen entstanden gedacht werden durch Reduction der Flächenberührung auf eine Berührung in Linien oder Punkten der Art, dass dadurch die gegenseitige Stützung nur der Form, nicht dem Wesen nach, d. h. nicht bezüglich der ihr entsprechenden gegenseitigen Beweglichkeit beider Elemente geändert wird. In den folgenden Paragraphen sollen deshalb zunächst nur die verschiedenen Arten von Umschlusspaaren besprochen, und soll dann erst nachträglich die unbeschadet des kinematischen Charakters des Paares etwa mögliche Reduction der Berührungsfläche auf ein System von Linien oder Punkten untersucht werden. Diese Untersuchung wird insofern von einem allgemeineren Gesichtspunkte aus zu führen sein, als sie zugleich die Vorbereitung und den Uebergang zur sachgemässen Beurtheilung höherer Elementenpaare bildet. Während diese als selbständig geschlossene Paare keine Umschlusspaare sein können, werden niedere Elementenpaare nur ausnahmsweise nicht als solche ausgeführt, weil die Berührung in Flächen, wenn sie den Umständen gemäss zulässig ist, besonders mit Rücksicht auf Abnutzung vorgezogen werden muss.

Uebrigens wird die Eigenschaft eines Paares als Umschlusspaar (vorbehaltlich der Erhaltung seiner selbständigen Geschlossenheit) dadurch nicht beeinträchtigt, dass das eine Element mit seiner Berührungsfläche nur unvollständig ausgeführt wird aus Gründen, die ebenso wie die besondere Art der unvollständigen Ausführung durch die Bestimmung des Paares in der betreffenden Maschine bedingt werden. Wenn z. B. die Führung

eines Teller- oder Kegelventils durch einen mit dem Ventilteller verbundenen Cylinder vermittelt werden soll, der vom Zuflussrohr der Flüssigkeit als entsprechendem Hohlcylander umschlossen wird, so kann jener Cylinder, um den Durchfluss bei gehobenem Ventil zu gestatten, nicht massiv oder als Röhre vollständig ausgeführt werden. Wird er etwa massiv auf 3 oder 4 symmetrisch vertheilte radiale Rippen beschränkt, die äusserlich von nur schmalen Streifen der Cylinderfläche begrenzt werden, so kann es ferner durch eine etwas spiralog gekrümmte Ausführung dieser Rippen beabsichtigt werden, dem Ventil bei jeder Erhebung zugleich eine wenn auch nicht zwangläufig bestimmte Drehung durch den Flüssigkeitsstrom ertheilen zu lassen und so bezüglich der Lagen, in denen es auf seinen Sitz zurückfällt, einen einigermaßen zufälligen Wechsel herbeizuführen.

Die Umkehrbarkeit eines niederen Elementenpaares, insbesondere also eines Umschlusspaares, gewährt oft constructive oder mechanische Vortheile, die der Maschinenbau vielfach ausbeutet. Eine solche kinematisch gleichgültige, aus anderen Gründen aber nicht unwichtige Paarumkehrung ist es z. B., wenn bei Eisenbahnfahrzeugen die mit den Rädern fest verbundene Axe in den am Wagengestell festen Lagern drehbar ist anstatt der bei gewöhnlichen Strassenwagen umgekehrten Anordnung von am Gestell festen Axen, um welche die Räder sich drehen; oder wenn bei dem Condie'schen Dampfhammer der Cylinder auf dem befestigten Kolben anstatt umgekehrt dieser im befestigten Cylinder beweglich ist u. s. f.

#### §. 5. Zwangläufige Umschlusspaare.

Bei einer gewissen gegenseitigen Lage der Elemente  $E$  und  $E'$  seien  $A$  und  $A'$  zwei zusammenfallende Punkte ihrer zusammenfallenden (sich berührenden) Oberflächentheile  $F$  und  $F'$ . Für eine der beiden von dieser Lage ausgehenden einander entgegengesetzten, der vorausgesetzten Zwangläufigkeit entsprechenden elementaren (unendlich kleinen) Bewegungen sei  $A'B$  das Bahnelement von  $A$  in  $F$ . Ferner sei  $B$  der vor dieser Bewegung mit  $B'$  zusammenfallende Punkt von  $F$ ,  $B'C'$  für die fragliche Bewegung sein Bahnelement in  $F'$ ;  $C$  der vorher mit  $C'$  zusammenfallende Punkt von  $F$ ,  $C'D'$  sein Bahnelement in  $F'$  etc. Dann sind  $ABC\dots$  und  $A'B'C'\dots$  zwei Linien beziehungsweise in  $F$  und  $F'$ , die vor und nach der Elementarbewegung, welche im Allgemeinen eine Schraubenbewegung um und längs einer gewissen Polaxe sein kann, zusammenfallen. Die einzige Linie aber, welche die Eigenschaft hat, vor und nach einer solchen

elementaren Schraubenbewegung mit einer ihr congruenten Linie zusammenfallen zu können, ist eine Normalschraubenlinie, d. i. eine cylindrische (auf einer Cylinderfläche gelegene) Schraubenlinie von gleichförmigem Steigungsverhältnisse, deren Axe die Polaxe und deren Steigungsverhältniss dem Verhältnisse von Schiebung und Drehung bei der elementaren Schraubenbewegung gleich ist. Die sich berührenden Flächen der Elemente eines zwangläufigen Umschlusspaares sind also geometrische Oerter von Normalschraubenlinien gleicher Steigung, die auf beliebig verschiedenen coaxialen Cylinderflächen liegen können, nur unbeschadet der Zwangläufigkeit nicht alle auf derselben Cylinderfläche. Diese Schraubenlinien in  $F$  und  $F'$  fallen dann nicht nur vor und nach einer unendlich kleinen gegenseitigen Bewegung, sondern beständig zusammen.

Das hiernach einzig mögliche zwangläufige Umschlusspaar — Schraube mit entsprechender Mutter — hat übrigens zwei so charakteristische Grenzformen, dass es sowohl mit Rücksicht auf deren Eigenthümlichkeiten, als auf den sprachlichen Begriff der Schraube, der jene Grenzfälle ausschliesst, nöthig ist, dieselben als besondere zwangläufige Umschlusspaare neben der Schraube mit Mutter gelten zu lassen. Sie entsprechen dem Uebergange des Steigungsverhältnisses der Schraube in die Grenze 0 oder  $\infty$  und ergeben beziehungsweise den nicht cylindrischen Drehkörper mit entsprechendem Hohlkörper und das nicht cylindrische Prisma mit entsprechendem Hohlprisma. Unbeschadet der Zwangläufigkeit kann zwar das Prisma (bei unbegrenzt wachsender Zahl und abnehmender Breite seiner Seitenflächen) in einen allgemeinen, nur nicht in einen im engeren Sinne sogenannten Cylinder übergehen; was den Drehkörper betrifft, so genügt es nicht, dass er nicht cylindrisch, d. h. dass die Meridianlinie seiner Oberfläche nicht eine mit der Axe parallele Gerade ist, sondern es muss auch diese Meridianlinie, wie im Folgenden immer stillschweigend vorausgesetzt wird, von zwei Geraden berührt werden können, die gegen die Axe in entgegengesetztem Sinne geneigt sind.

Die gefundenen 3 zwangläufigen Umschlusspaare sollen in der Folge einfach als Schraubenpaar, Drehkörperpaar und Prismenpaar bezeichnet werden; sie entsprechen den zu Ende von §. 3 unter I. aufgeführten 3 Fällen. Die Axoide der Elemente des Schrauben- und des Drehkörperpaares sind zwei in der geometrischen Axe, die des Prismenpaares irgend zwei mit den Kanten parallele zusammenfallende Gerade; die Punkte jedes Elementes bewegen sich gegen das andere beziehungsweise in coaxialen Normalschraubenlinien gleicher Steigung, in coaxialen Kreisen und in parallelen Geraden.

Die besondere Gestaltung dieser und anderer Elementenpaare, inso- weit sie für den kinematischen Charakter derselben nicht wesentlich ist, wird vielfach bedingt durch andere Rücksichten, besonders auf möglichst vortheilhafte Verwerthung der Widerstandsfähigkeit des Materials gegen die einwirkenden Kräfte und auf die Leichtigkeit der praktischen Herstellung. So kann z. B. die Leichtigkeit der Herstellung eines Vollycylinders auf der Drehbank und der Bohrung eines cylindrischen Loches oft dazu veranlassen, ein so zunächst hergestelltes Cylinderpaar von zweifacher Beweglichkeit erst nachträglich in ein zwangläufiges Paar zu verwandeln: in ein Drehkörperpaar durch aufgeklemmte Stellringe, zwischen denen der Hohlcyliner eben Platz findet, in ein Prismenpaar durch Feder und Nuth. Auch die als Wellzapfen besonders häufig vorkommenden Drehkörper pflegen wenigstens in der Hauptsache cylindrisch hergestellt und nur durch örtlich ringsum vortretende sogenannte Anläufe bei entsprechender Gestaltung der Hohlkörper (Lager) unverschieblich, also zwangläufig gemacht zu werden.

#### §. 6. Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit.

Während bei zwangläufigen Umschlusspaaren irgend ein Oberflächen- element des einen Körpers nur auf diejenigen Stellen der Oberfläche des anderen zu passen brauchte, an denen es bei der einzig möglichen gegen- seitigen Bewegung vorbeikommt, muss hier jedes Element der einen an jeder Stelle mit der anderen Fläche zur Deckung gebracht werden können. Dazu ist es nöthig, dass die Berührungsfläche der Paarelemente überall gleich gekrümmt ist, und zwar nicht nur in je zwei Punkten gleiches Pro- duct der Hauptkrümmungen, sondern einzeln gleiche Hauptkrümmungen hat, dass sie also entweder eine Kugelfläche, oder eine Cylinderfläche, oder (mit Rücksicht zugleich auf die Verhinderung der gegenseitigen Bewegung senkrecht zur Berührungsfläche) ein System von wenigstens zwei parallelen Ebenen ist, welche die Substanz jedes einzelnen Elementes von entgegen- gesetzten Seiten begrenzen. So ergeben sich auch 3 mögliche Umschluss- paare von zweifacher Beweglichkeit: die Kugel mit Hohlkugel, der Cylinder mit Hohlcyliner und die gleichförmig dicke ebene Platte mit entsprechen- dem Schlitz. Kürzer mögen sie als Kugelpaar, Cylinderpaar und Plattenpaar bezeichnet werden; sie entsprechen den zu Ende von §. 3 unter II. aufgeführten 3 Fällen von umkehrbaren Körperpaaren. Die Axoide resp. Axoidensysteme sind beim Kugelpaar zwei concentrische räum-

liche Strahlenbüschel mit gegenseitiger Drehbarkeit um alle Strahlen, beim Cylinderpaar zwei in der geometrischen Axe zusammenfallende Gerade mit gegenseitiger Drehbarkeit und Schiebbarkeit in beliebigem Verhältnisse, beim Plattenpaar zwei zusammenfallende zu den Berührungsebenen senkrechte Parallelstrahlenbündel mit gegenseitiger Drehbarkeit um alle Strahlen; die Punkte jedes Elementes bewegen sich gegen das andere beziehungsweise in concentrischen Kugelflächen, conaxialen Cylinderflächen und parallelen Ebenen. Das Kugelpaar und das Plattenpaar sind im Gegensatz zum Cylinderpaar dadurch ausgezeichnet, dass die Hauptkrümmungen der Berührungsfläche nicht nur in je zwei Punkten derselben gleich, sondern auch in jedem einzelnen Punkte unter sich gleich sind; die Folge davon ist, dass die beiden Elemente sich um jede gemeinschaftliche Normale der Berührungsfläche gegenseitig verdrehen lassen, die des Cylinderpaares aber nicht, womit es auch zusammenhängt, dass jedes der ersteren Paare mit 3, das Cylinderpaar aber nur mit 2 Freiheitsgraden verbunden ist.

Jedes der drei Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit kann durch eine offene Kette mit nur zwangsläufigen, und zwar so vielen Umschlusspaaren ersetzt werden, wie das betreffende Paar Freiheitsgrade besitzt, durch eine einfache offene kinematische Kette nämlich, deren (je ein Element enthaltende) Endglieder dieselbe gegenseitige Beweglichkeit haben wie die Elemente des zu ersetzenden Paares. So kann das Cylinderpaar offenbar ersetzt werden durch ein Drehkörperpaar mit einem Prismenpaar, dessen Schubrichtung der Axe des ersteren parallel ist; das Kugelpaar durch drei Drehkörperpaare, deren Axen sich in einem Punkte scheiden und nicht in einer Ebene liegen; das Plattenpaar entweder durch zwei Prismenpaare mit gekreuzten Schubrichtungen in Verbindung mit einem Drehkörperpaare, dessen Axe zu beiden Schubrichtungen senkrecht ist, oder durch zwei Drehkörperpaare mit parallelen Axen in Verbindung mit einem Prismenpaare, dessen Schubrichtung beliebig in einer zu beiden Axen senkrechten Ebene liegt. Was nämlich die Alternative in diesem letzten Falle betrifft, so kann irgend ein Punkt der einen von zwei zusammenfallenden Ebenen der Elemente des Plattenpaares an jede Stelle der anderen entweder durch zwei verschieden gerichtete Schiebungen längs diesen Ebenen oder durch eine solche Schiebung in Verbindung mit Drehung der Schubrichtung in den Ebenen, also um eine dazu senkrechte Axe versetzt werden (entsprechend der Bestimmung eines Punktes in der Ebene durch Parallelkoordinaten oder durch Polarkoordinaten); mit Rücksicht auf die beliebige Drehbarkeit um irgend eine Normale der zusammenfallenden Ebenen ist dann aber in beiden Fällen

noch ein Drehkörperpaar mit einer zu den Ebenen senkrechten Axe nöthig.

Obschon der Maschinenbau in der Regel und mit Recht die zwangläufigen Elementenpaare, insbesondere Drehkörper- und Prismenpaare, zur Verbindung der Glieder eines Mechanismus verwendet, weil sie im Allgemeinen am einfachsten, am vollkommensten herstellbar, am wenigsten unter sonst gleichen Umständen angestrengt und am besten gegen Reibung und Abnutzung zu schützen sind, so kann doch zuweilen die Benutzung eines Elementenpaares von mehrfacher Beweglichkeit durch grössere Einfachheit des Mechanismus sich empfehlen und wenigstens dann vorzuziehen sein, wenn die in solchem Falle durch den Mechanismus selbst zu vermittelnde Zwangläufigkeit ohne gesteigerte Anstrengung seiner Glieder geschehen kann. So kann z. B. zur Verbindung von zwei um beliebige (im Allgemeinen windschiefe) Axen drehbaren Körpern eine Koppel (Kuppelungsstange) mit zwei Kugelgelenken vortheilhaft sein, die also mit theilweise (insoweit es die selbständige Geschlossenheit der Kugelpaare erfordert) ausgeführten Hohlkugeln die entsprechend kugelig ausgeführten Zapfen umschliesst, mit denen jene Körper in gewissen Abständen von ihren Drehungsaxen ausgestattet sind. Wenn man aber z. B. bei dem bekannten Schubkurbel-Mechanismus (bestehend aus Kurbel, Koppel, Schieber und einem festgestellten vierten, einerseits die Lager der Kurbelaxe, andererseits das Schiebergleise enthaltenden Gliede) das aus Schieber und Gleise bestehende Paar als Plattenpaar (Berührungsebenen parallel den Axen der ausserdem vorhandenen 3 Drehkörperpaare) statt als Prismenpaar ausführen wollte, so würde dadurch die Kette zwar nicht aufhören zwangläufig zu sein (die 3 Drehkörperpaare als selbständig geschlossen vorausgesetzt), aber es würde keine nennenswerthe Vereinfachung dadurch erzielt und ausserdem namentlich die Koppel in wesentlich höherem Grade angestrengt werden, besonders wenn der Schieber einer wenn auch nur kleinen seitlich einwirkenden äusseren Kraft ausgesetzt sein kann; hier wäre es grundlos, ja fehlerhaft, die Kette mit anderen als zwangläufigen Elementenpaaren zu bilden.

#### b. Beziehung zwischen gegenseitiger Stützungsweise und Beweglichkeit zweier Körper.

Die folgenden Untersuchungen setzen voraus, dass zwei starre Körper sich nicht in Flächen, wie die Elemente eines Umschlusspaares, sondern in



Linien oder Punkten — Stützlinien resp. Stützpunkten — berühren; ihr Zweck ist die Ermittlung der unter gewissen Umständen erforderlichen Zahl und Gruppierung dieser Stützlinien und Stützpunkte, um die gegenseitige Beweglichkeit der Körper in verlangter Weise einzuschränken und zu sichern. Die gemeinsame Normale der beiden Körperoberflächen in einem Stützpunkte resp. Punkte einer Stützlinie heisse die Stütznormale für diesen Punkt und werde, wenn einer der beiden Körper als festgestellt, somit nur<sup>1</sup> der andere als beweglich betrachtet wird, gerichtet angenommen von dem letzteren gegen den ersteren, von dem gestützten gegen den stützenden Körper; diese Richtung der Stütznormale heisse die Stützrichtung für den betreffenden Punkt.

Die Uebersicht der Verhältnisse wird wesentlich erleichtert, wenn die Untersuchung, welche übrigens im Hinblick auf die zu Elementenpaaren vorzugsweise verwendeten einfacheren Körperformen eine erschöpfende Allgemeinheit nicht beabsichtigt, zunächst auf zwei Figuren  $F, F'$  beschränkt wird, die an eine gewisse Ebene gebunden sind und in derselben sich in Punkten berühren. Von diesen Figuren werde  $F'$  in der Ebene festliegend gedacht, und somit die relative Bewegung von  $F$  gegen  $F'$  kurzweg als Bewegung von  $F$  bezeichnet; die Stütznormale in einem Berührungspunkte beider Figuren, welche dabei als Grenzlinsen materieller ebener Flächen betrachtet werden, die sich gegenseitig ausschliessen, d. h. sich nirgend überdecken können, hat dann die Richtung von  $F$  gegen  $F'$ .

### §. 7. Stützung ebener Figuren gegen Schiebung.

1) Die beiden Figuren  $F, F'$  mögen sich zunächst in nur einem Punkte  $A$  berühren, für welchen  $TT$  ihre gemeinsame Tangente,  $AN$  die

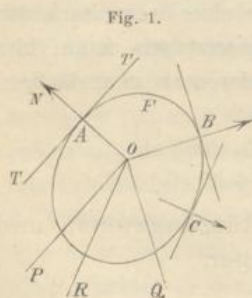


Fig. 1.

Stütznormale sei, deren Richtung hier und im Folgenden bei der Bezeichnung durch die Buchstabenfolge (hier  $A, N$ ), in der Figur durch eine Pfeilspitze (Fig. 1) angedeutet wird. Es ist dann jede Schiebung von  $F$  unmöglich, die eine Componente im Sinne  $AN$  hat, deren von  $A$  aus gezogene Richtung folglich in den gestreckten Winkel  $TNT$  fällt, jede andere Schiebung dagegen möglich. Der gestreckte Winkel  $TNT$  heisse deshalb das Stützungsfeld, der auf der anderen Seite von  $TT$  gelegene das Schiebungsfeld der Figur  $F$  für den

Stützpunkt  $A$ ; da es sich indessen hier nur um Richtungen handelt, so können auch unter dem Stützungs- und Schiebungsfelde die beiderseits irgend einer Senkrechten zur Stütznormale beziehungsweise im Sinne der Stützrichtung und im entgegengesetzten Sinne gelegenen gestreckten Winkel verstanden werden.

2) Hat die Figur 2 Stützpunkte  $A, B$ , so ist ihr Schiebungsfeld der den einzelnen Schiebungsfeldern für die Stützpunkte  $A, B$  gemeinsame Winkelraum, dessen Spitze (gemäss der vorstehenden Bemerkung über die Verlegbarkeit der einzelnen Schiebungsfelder) eine beliebige Lage haben, insbesondere im Schnittpunkte  $O$  der beiden Stütznormalen angenommen werden kann. In Fig. 1 z. B. ist das den Stützpunkten  $A$  und  $B$  zusammen entsprechende Schiebungsfeld von  $F$  der hohle Winkel  $POQ$ , dessen Schenkel den Tangenten von  $F$  in den Stützpunkten  $A, B$  parallel sind. — Sind die beiden Stütznormalen parallel und gleich gerichtet, so ist die Verschiebbarkeit der Figur nicht verschieden von derjenigen, die durch einen der beiden Stützpunkte vermittelt wird; sind sie parallel und entgegengesetzt gerichtet, so reducirt sich das Schiebungsfeld auf eine zu ihnen senkrechte Gerade, längs welcher nun aber Schiebung in beiderlei Sinn möglich ist. In keinem dieser beiden Specialfälle kann durch einen dritten Stützpunkt die Verschiebbarkeit der Figur ganz aufgehoben werden.

3) Kommt aber zu 2 Stützpunkten  $A, B$ , deren Stützrichtungen einen Winkel zwischen  $0$  und  $180^\circ$  bilden, noch ein dritter Stützpunkt  $C$ , so kann es der Fall sein, dass die ihm entsprechende, vom Schnittpunkte  $O$  der beiden ersten Stütznormalen  $OA, OB$  aus gezogene Stützrichtung, wenn sie mit keiner dieser beiden zusammenfällt, a) in dem hohlen Winkel  $AOB$  liegt, oder b) dass weder sie selbst noch ihre Verlängerung über  $O$  hinaus in diesem Winkel liegt, oder c) dass ihre Verlängerung darin liegt. Da immer das den 3 Stützpunkten zusammen entsprechende Schiebungsfeld der den einzelnen 3 Schiebungsfeldern gemeinsame Winkelraum ist, falls deren Grenzlilien durch denselben übrigens beliebigen Punkt gezogen werden, so ist ohne Weiteres ersichtlich, dass im ersten der obigen 3 möglichen Fälle der dritte Stützpunkt keine weitere Beschränkung der Verschiebbarkeit verursacht, dass im zweiten Falle das Schiebungsfeld auf einen kleineren Winkelraum dadurch beschränkt wird, z. B. in Fig. 1 auf den Winkel  $POR$ , wenn  $OR$  parallel der Tangente von  $F$  im Punkte  $C$  ist, dass aber endlich im dritten Falle die Verschiebbarkeit der Figur ganz beseitigt ist. —

Zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung, d. h. zur Unverschiebbarkeit derselben, sind also

3 Stützpunkte nöthig und dann ausreichend, wenn die von irgend einem Punkte aus gezogenen betreffenden Stützrichtungen die ganze Ebene in 3 um diesen Punkt herum liegende hohle Winkelräume theilen. Sind zwei oder mehr Stütznormalen parallel, so sind zur Unverschiebbarkeit wenigstens 2 weitere Stützpunkte nöthig; um dazu ausreichend zu sein, müssen sie mit irgend einem der übrigen Stützpunkte zusammen schon ausreichen, falls alle Stütznormalen der letzteren gleich gerichtet sind, wogegen es anderenfalls genügt, dass die Stütznormalen der zwei weiteren Stützpunkte gegen die parallelen Tangenten in den übrigen entgegengesetzt geneigt sind, d. h. dass die eine Stütznormale mit der einen, die andere mit der entgegengesetzten Tangentenrichtung spitze Winkel bildet.

#### §. 8. Stützung ebener Figuren gegen Drehung.

1) Hat die Figur  $F$  einen Stützpunkt  $A$ , so ist sie um jeden so gelegenen Punkt der Ebene und in solchem Sinne drehbar, dass die entsprechende anfängliche Bewegungsrichtung des Punktes  $A$  von  $F$  in das Schiefungsfeld der Figur für diesen Punkt fällt. Mit Bezug auf einen die Ebene von einer gewissen Seite her Anblickenden ist hiernach offenbar Rechtsdrehung möglich um jeden Punkt und nur um einen solchen, der für den Beschauer, wenn er entgegengesetzt der Stützrichtung (im Sinne  $AA'$ , Fig. 2) längs der Stütznormale hinblickt, rechts von der letzteren gelegen ist, Linksdrehung um jeden und nur um einen solchen Punkt, der auf der anderen Seite liegt. Die beiden von der Stütznormale getrennten Theile der Ebene sollen hiernach beziehungsweise das Rechtsdrehungsfeld und das Linksdrehungsfeld der Figur für den Punkt  $A$  heissen. Um jeden Punkt  $P$  der Stütznormale selbst ist Rechts- und Linksdrehung zugleich möglich, die jedoch, wie leicht ersichtlich, nur dann von endlicher Grösse sein kann, wenn, unter  $M$  und  $M'$  die dem Punkte  $A$  entsprechenden Krümmungsmittelpunkte von  $F$  und  $F'$  verstanden,  $M$  und  $P$  entweder zugleich in der Strecke  $AM'$  oder zugleich ausserhalb derselben liegen. — Bei mehreren Stützpunkten ist Rechts- oder Linksdrehung nur um solche Punkte möglich, die den Rechts- resp. Linksdrehungsfeldern für alle Stützpunkte gemeinsam sind.

2) Bei 2 Stützpunkten  $A, B$  sind von den 4 hohlen Winkeln, welche die Stütznormalen  $AA'$  und  $BB'$  miteinander bilden, diejenigen zwei Scheitelwinkel nicht Drehungsfelder, deren Schenkelrichtungen (vom Scheitel aus

genommen) mit den Stützrichtungen beide übereinstimmend oder beide nicht übereinstimmend sind, weil in diesen Winkelräumen ungleichnamige Drehungsfelder zusammenfallen; von den beiden anderen Scheitelwinkeln ist der eine Rechts-, der andere Linksdrehungsfeld, in Fig. 2 z. B.  $AOB'$  Rechts-,  $BOA'$  Linksdrehungsfeld. Um den Schnittpunkt  $O$  der beiden Stütznormalen ist Drehung in beiderlei Sinn möglich. — Sind die zwei Stütznormalen parallel und gleich gerichtet, so ist der zwischen ihnen liegende Flächenstreifen Stützungsfeld (worum hier der Gegensatz von Drehungsfeld verstanden wird) wegen Zusammenfallens ungleichnamiger Drehungsfelder; von den ausserhalb liegenden Flächenräumen ist der eine Rechts-, der andere Linksdrehungsfeld. Sind die zwei Stütznormalen parallel und entgegengesetzt gerichtet, so ist Drehung nur um die Punkte des zwischen ihnen liegenden Flächenstreifens möglich, und zwar Rechts- oder Linksdrehung, jenachdem die Stütznormalen ihre rechten oder ihre linken Seiten sich zukehren (immer mit Bezug auf einen längs denselben entgegengesetzt den betreffenden Stützrichtungen hin Blickenden). Fallen die entgegengesetzt gerichteten Stütznormalen in einer Geraden zusammen, so ist die Figur nur um die Punkte dieser Geraden, übrigens dann in beiderlei Sinn drehbar.

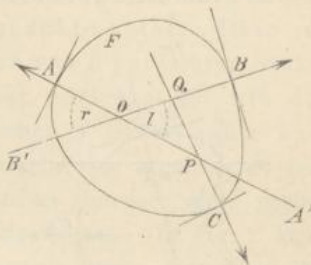
3) Bei 3 Stützpunkten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

a) Bilden die zwei ersten Stützrichtungen einen Winkel zwischen  $0$  und  $180^\circ$ , so wird durch den dritten Stützpunkt  $C$  die Drehbarkeit der Figur am meisten eingeschränkt, wenn die von irgend einem Punkte aus gezogenen 3 Stützrichtungen die ganze Ebene in 3 hohle Winkel theilen, indem dann von den zwei Scheitelwinkeln, die den ersten Stützpunkten  $A, B$  als Drehungsfelder entsprechen ( $AOB'$  und  $BOA'$  in Fig. 2), der eine ganz, der andere bis auf ein Dreieck ( $OPQ$  in Fig. 2) in Stützungsfeld verwandelt wird; um alle Punkte dieses Dreiecks ist Rechts- oder Linksdrehung (in Fig. 2 Linksdrehung) möglich.

Wenn unter obiger Voraussetzung bezüglich ihrer Richtungen die 3 Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden, so schrumpft das dreieckige Drehungsfeld in diesen Punkt zusammen, um den dann aber Rechts- und Linksdrehung stattfinden kann.

Entspricht die dritte Stützrichtung der obigen Voraussetzung (unter welcher nach vorigem §. die Figur unverschiebbar ist) nicht, und ist sie

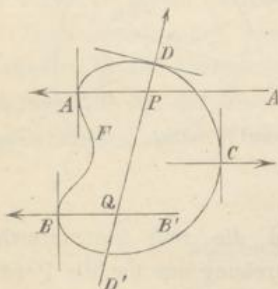
Fig. 2.



auch nicht einer der beiden ersten Stütznormalen parallel, so bleiben die Drehungsfelder je ein unendlich grosses Rechts- und Linksdrehungsfeld, wie ohne den dritten Stützpunkt, nur dass sie nicht mehr einen Punkt gemeinsam haben, ausser wenn alle 3 Stütznormalen sich in einem Punkte schneiden.

b) Sind die zwei ersten Stütznormalen  $AA'$ ,  $BB'$  parallel und gleich gerichtet, so werden durch eine sie

Fig. 3.



sie schneidende dritte ( $DD'$ , Fig. 3) die beiden ausserhalb jener liegenden ungleichnamigen Drehungsfelder auf einen Rechts- und einen Linksdrehungswinkelraum (beziehungsweise  $BQD'$  und  $DPA'$  in Fig. 3) reducirt.

Ist die dritte Stütznormale mit den beiden ersten parallel und gleich gerichtet, so ist die Drehbarkeit der Figur dieselbe, als ob die mittlere der 3 Stütznormalen gar nicht vorhanden wäre. Ist sie aber mit den

beiden ersten parallel und entgegengesetzt gerichtet, so sind 3 Fälle zu unterscheiden. Wenn sie  $\alpha$ ) ausserhalb jener in ihrem Rechts- oder Linksdrehungsfelde liegt, so reducirt sie das gesammte Drehungsfeld auf einen Rechts- resp. Linksdrehungsflächenstreifen zwischen ihr und der zunächst gelegenen von jenen. Wenn sie  $\beta$ ) mit einer von diesen zusammenfällt, so schrumpft der vorgenannte Flächenstreifen zu der Geraden zusammen, in der dieses Zusammenfallen stattfindet. Liegt endlich  $\gamma$ ) die dritte Stütznormale zwischen den beiden ersten, so ist die Drehbarkeit der Figur ganz aufgehoben: siehe Fig. 3 mit Bezug auf die Stützpunkte  $A, B, C$ .

c) Sind die zwei ersten Stütznormalen parallel und entgegengesetzt gerichtet, so wird von einer sie schneidenden dritten der zwischen ihnen liegende beiderseits unendliche Rechts- oder Linksdrehungsflächenstreifen auf einen nur einerseits unendlichen eben solchen reducirt. — Ist die dritte Stütznormale mit den beiden ersten parallel, so können keine anderen Fälle stattfinden, als die unter b) und zwar unter  $\alpha, \beta, \gamma$ ) daselbst erwähnten.

d) Fallen zwei entgegengesetzt gerichtete Stütznormalen in einer Geraden zusammen, um deren sämtliche Punkte dann Rechts- und Linksdrehung möglich ist, so wird diese von einer sie schneidenden dritten Stütznormale in zwei Theile getheilt so, dass um die Punkte des einen Theils nur Rechts-, um die des anderen nur Linksdrehung, um den Schnittpunkt allein nach wie vor beiderlei Drehung möglich ist. — Ist die

dritte Stütznormale mit den in einer Geraden zusammenfallenden ersten auf der einen oder anderen Seite parallel, so bleibt nur Rechts- oder nur Linksdrehung um alle Punkte dieser Geraden möglich, entsprechend dem schon unter  $b, \beta$ ) erwähnten Falle. —

Aus diesen Betrachtungen ergibt sich, dass zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Drehung, d. h. zur Undrehbarkeit derselben, wenigstens 3 Stützpunkte nöthig, diese indessen nur dann ausreichend sind, wenn von 3 parallelen Stütznormalen die mittlere entgegengesetzt gerichtet ist wie die beiden anderen. Im Allgemeinen reichen 4 Stützpunkte aus, d. h. es kann ein vierter Stützpunkt im Allgemeinen so angenommen werden, dass die ihm entsprechenden Drehungsfelder die noch übrig gebliebenen der 3 ersten Stützpunkte ungleichnamig decken. (In Fig. 2 kann ein solcher vierter Punkt in der Nähe derjenigen liegen, in welchen die Figur  $F$  von den Stütznormalen der Punkte  $A, B$  zum zweiten Mal geschnitten wird; in Fig. 3 giebt es unendlich viele Stützpunkte, deren jeder mit  $A, B, D$  zusammen die Figur  $F$  undrehbar macht, in dem von  $C$  an gegen  $D'$  hin gelegenen Theile der Figur.) Wenigstens 5 Stützpunkte sind nöthig, wenn 3 derselben noch irgend einen Punkt übrig lassen, um den die Figur in beiderlei Sinn drehbar ist, wenn also 3 Stütznormalen, von denen auch zwei entgegengesetzt gerichtete zusammenfallen können, sich in einem Punkte schneiden. Ein Kreis ist überhaupt nicht gegen Drehung stützbar, weil alle Normalen sich im Mittelpunkte schneiden.

§. 9. Vollkommene Stützung ebener Figuren gegen Schiebung und Drehung in möglichst wenig Punkten und mit möglichst kleinem Zwange.

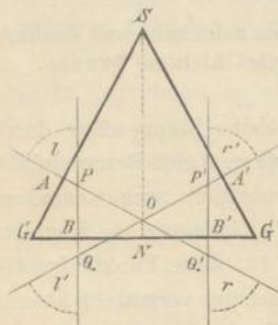
In dem einzigen Falle, in welchem eine ebene Figur schon durch 3 Stützpunkte undrehbar gemacht werden kann (Fig. 3 mit Bezug auf die Stützpunkte  $A, B, C$ ), erfordert ihre Unverschiebbarkeit noch wenigstens 2 weitere Stützpunkte, wohingegen in den Fällen, in denen die Figur in 4 Punkten vollkommen gegen Drehung stützbar ist, diese Punkte im Allgemeinen auch vollkommene Stützung gegen Schiebung vermitteln können (z. B. in Fig. 2 die Punkte  $A, B, C$ , in Fig. 3 die Punkte  $A, B, D$  je mit einem passend angenommenen vierten Stützpunkte). Zur vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung und Drehung in ihrer Ebene sind also 4 Stützpunkte wenigstens nöthig und möglicherweise ausreichend, wenn nicht 3 Stütznormalen sich in

einem Punkte schneiden oder parallel sind, indem ersteren Falls mit Rücksicht auf Drehung, letzteren Falls mit Rücksicht auf Schiebung wenigstens noch 2, im Ganzen also wenigstens 5 Stützpunkte nöthig sind.

Wenn dabei die ebene Figur, wie es zwar in Fig. 1, 2 und 3 angenommen, indessen bisher nicht ausdrücklich vorausgesetzt wurde, eine geschlossene Figur und nur von aussen oder nur von innen zu stützen ist (jenachdem sie als äussere Grenzlinie einer, wie in Fig. 1, 2, 3, innerhalb liegenden, oder als innere Grenzlinie einer ausserhalb liegenden materiellen ebenen Fläche betrachtet wird), so ist es offenbar immer möglich, 3 Stützpunkte so anzunehmen, dass sie die Figur unverschiebbar machen, und nur ausnahmsweise nicht möglich, 4 Punkte so anzunehmen, dass sie die Figur gegen Schiebung und gegen Drehung zugleich vollkommen stützen. Sofern dann ausserdem die Wahl solcher Punkte auf unendlich mannigfache Weise möglich ist, kann sie noch an anderweitige Bedingungen geknüpft werden, insbesondere an die Forderung, dass eine auf Schiebung nach irgend einer Richtungslinie in der Ebene wirkende Kraft resp. ein auf Drehung um irgend eine zur Ebene senkrechte Axe wirkendes Kräftepaar durch möglichst kleine Widerstände, in den Stützpunkten angreifend und entgegengesetzt den Stützrichtungen wirkend, aufgehoben werde, dass also der grösste von den Widerständen dieser verschiedenen Stützpunkte möglichst klein sei, und somit die vollkommene Stützung der Figur mit möglichst kleinem Zwang erreicht werde.

So kann z. B. (Fig. 4) ein gleichschenkeliges Dreieck  $SGG'$  ( $SG=SG'$ ) in 4 Punkten  $A, A', B, B'$  von symmetrischer Lage gegen die Höhenlinie  $SN$  von aussen vollkommen gegen Schiebung und Drehung gestützt werden. Die Stützpunkte  $A, A'$  reduciren die Drehbarkeit auf den Winkelraum  $AOQ$  als Rechtsdrehungsfeld und seinen Scheitelwinkel als Linksdrehungsfeld. Die Aufhebung der Rechtsdrehung durch den Stützpunkt  $B'$ , die der Linksdrehung durch den Stützpunkt  $B$  erfordert den grössten Widerstand in  $B'$  resp.  $B$ , wenn die Drehung um den der betreffenden Stütznormalen nächstgelegenen Punkt des

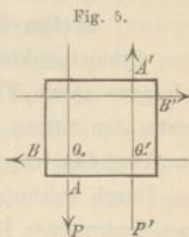
Fig. 4.



Drehungsfeldes, wenn sie also in beiden Fällen um den Punkt  $O$  stattfindet, und diese grössten Widerstände werden um so kleiner, je grösser die von  $O$  auf ihre Richtungslinien gefällten Senkrechten, je weiter folglich  $B$  und  $B'$  nach  $G$  und  $G'$  hin gerückt werden. Die Stützpunkte  $B$  und  $B'$  allein

beschränken die Drehbarkeit auf ein Linksdrehungsfeld links von  $PBQ$  und ein Rechtsdrehungsfeld rechts von  $P'B'Q'$ ; durch den Stützpunkt  $A$  wird ersteres auf den in der Figur mit  $l$ , letzteres auf den mit  $r$  bezeichneten, durch den Stützpunkt  $A'$  ersteres auf den mit  $l'$ , letzteres auf den mit  $r'$  bezeichneten Winkelraum eingeschränkt, und die Beseitigung der Drehungsfelder  $l, r$  durch den Stützpunkt  $A'$ , die der Drehungsfelder  $l', r'$  durch den Stützpunkt  $A$  erfordert die grössten Widerstände in diesen Punkten, wenn die betreffenden Drehungen um  $P, Q'$  resp. um  $Q, P'$  stattfinden. Endlich aber sind wieder diese grössten Widerstände um so kleiner, je grösser die von den fraglichen Drehungspunkten auf ihre Richtungslinien gefällten Senkrechten, je länger also die Strecken  $PQ'$  und  $QP'$  sind, je näher folglich  $B$  und  $B'$  bei  $G$  und  $G'$  liegen, während die Lagen von  $A$   $A'$  in  $SG$  und  $SG'$  nach wie vor gleichgültig bleiben. — Der Widerstand gegen Schiebung ist in jedem Stützpunkte dann am grössten, wenn die Richtungslinie der schiebenden Kraft mit der betreffenden Stütznormale zusammenfällt, und zwar gleich dieser Kraft, wo auch der betreffende Stützpunkt gelegen sein mag. Somit ergibt sich, dass die vollkommene Stützung des gleichschenkligen Dreiecks in 4 symmetrisch gelegenen Punkten dann mit kleinstem Zwange erfolgt, wenn die zwei Stützpunkte in der Grundlinie möglichst nahe an den Ecken liegen, wögegen die Lage der zwei anderen Stützpunkte in den gleichen Seiten in dieser Hinsicht einerlei ist.

Soll ein Rechteck in 4 Punkten gegen Schiebung und gegen Drehung vollkommen gestützt werden, so muss in jeder Seite ein Stützpunkt liegen, und wenn die Stützung noch an weitere Bedingungen von allgemeiner Art geknüpft wird, so sind, da je zwei gegenüberliegende Seiten ganz gleichwerthig sind, die Stützpunkte  $A$  und  $A'$ ,  $B$  und  $B'$  (Fig. 5) in ihnen einander diametral gegenüberliegend anzunehmen. Nun wird durch  $A, A'$  die Drehbarkeit auf solche Drehpunkte beschränkt, die in dem Flächenstreifen zwischen den Stütznormalen  $AP, A'P'$  liegen, welcher Streifen bei der Lage von  $A$  und  $A'$  in Fig. 5 ein Rechtsdrehungsfeld ist. Dasselbe wird durch den Stützpunkt  $B$  auf den Flächenstreifen  $PQQ'P'$  beschränkt, und die gänzliche Aufhebung der Drehbarkeit unter Einwirkung eines gewissen Kräftepaars durch den vierten Stützpunkt  $B'$  erfordert in diesem ungünstigsten Falles, nämlich bei Drehung um einen Punkt von  $QQ'$  eine um so kleinere Widerstandskraft, je mehr die Stütznormalen für die Punkte  $B, B'$  von einander, je weniger sie also





von den gegenüberliegenden Seiten des Rechtecks entfernt sind. Von den Punkten  $A, A'$  gilt dasselbe, wie von  $B, B'$ , und es wird also ein Rechteck in seiner Ebene durch möglichst wenig, nämlich durch 4 Stützpunkte mit kleinstmöglichem Zwange vollkommen gestützt, wenn jene Punkte in den 4 Seiten dicht bei gegenüberliegenden Ecken liegen.

### §. 10. Stützung von Körpern in Linien oder Punkten.

Unter der Stützung eines Körpers gegen Schiebung nach gewissen Richtungen oder gegen Drehung um Axen von gewissen Richtungen wird eine solche Stützung verstanden, durch welche jene Schiebungen resp. diese Drehungen unmöglich gemacht werden. Hiernach kann Alles, was in den vorigen Paragraphen von der vollkommenen Stützung einer ebenen Figur gegen Schiebung oder Drehung in ihrer Ebene gesagt wurde, unmittelbar auf die Stützung eines prismatischen Körpers in geraden Linien, die mit den Kanten parallel sind, gegen Schiebung normal zu diesen Kanten resp. gegen Drehung um damit parallele Axen übertragen werden. An die Stelle der Stützpunkte, der Stütznormalen und Stützrichtungen dort treten dann nur hier die Stützlinien, die Stütznormalebenen und deren Richtungen, normal zu den Stützlinien verstanden. Ein Prisma (oder auch ein allgemeiner Cylinder) kann also immer in 3 mit den Kanten parallelen Geraden gegen Schiebung nach jeder zu denselben senkrechten Richtung, und im Allgemeinen in 4 solchen Geraden zugleich gegen Drehung um jede damit parallele Axe gestützt werden; zu dem Ende sind diese Geraden nur so anzunehmen, dass in ihren Schnittpunkten mit einer Querschnittsebene des Prisma der als geschlossene ebene Figur sich ergebende betreffende Querschnitt desselben gemäss den Sätzen der vorigen Paragraphen vollkommen gegen Schiebung resp. Drehung in seiner Ebene gestützt wird.

Durch solche 4 Stützlinien  $a, b, c, d$ , welche das Prisma nach jeder zu ihnen senkrechten Richtung unverschiebbar und um jede mit ihnen parallele Axe undrehbar machen, wird offenbar auch seine Drehbarkeit um jede dazu senkrechte Axe aufgehoben, die Beweglichkeit also auf Verschiebbarkeit nach der Kantenrichtung beschränkt, entsprechend der gegenseitigen Beweglichkeit der Elemente eines Prismenpaares. Unbeschadet dieser Zwangläufigkeit können nun aber die Stützlinien auch durch einzelne Stützpunkte in ihnen ersetzt werden. Bloss zur Verhinderung jeder Schiebung senkrecht

zu den Kanten und jeder Drehung um Axen, die mit den Kanten parallel sind, wäre je ein Stützpunkt  $A, B, C, D$  von beliebiger Lage in jeder der Stützlinien  $a, b, c, d$  ausreichend. Um aber das Prisma auch gegen Drehung um irgend eine zu den Kanten senkrechte Axe zu sichern, ist es ausreichend, in einer der Geraden  $a, b, c, d$  zwei Stützpunkte anzunehmen, etwa  $A_1$  und  $A_2$  in der Geraden  $a$ , und zwar so, dass von den übrigen Punkten  $B, C, D$  in den Geraden  $b, c, d$  wenigstens zwei zwischen den durch die Punkte  $A_1$  und  $A_2$  gehenden Querschnittsebenen liegen, etwa die Punkte  $B$  und  $C$ , sofern das Prisma weder von der Ebene  $ab$  in  $a$  oder  $b$ , noch von der Ebene  $ac$  in  $a$  oder  $c$  berührt wird, und somit die Stützrichtungen der Punkte  $A_1$  und  $A_2$  sowohl solche Componenten haben, die in der Ebene  $ab$  einer Componente der Stützrichtung in  $B$ , wie auch solche, die in der Ebene  $ac$  einer Componente der Stützrichtung in  $C$  entgegengesetzt sind. Nach §. 8 unter 3, b,  $\gamma$ ) ist dann nämlich keines der Linienpaare  $a, b$  und  $a, c$  in seiner Ebene, d. h. um irgend eine zu seiner Ebene senkrechte Axe drehbar, und in Drehungen um zwei solche Axen würde jede Drehung um irgend eine zu den Kanten senkrechte Axe zerlegt werden können. Von den zusammenfallenden Oberflächen der Elemente eines Prismenpaares kann also (unbeschadet der demselben zukommenden Umkehrbarkeit und besonderen Art von Zwangläufigkeit) die eine auf 4 mit den Kanten parallele Stützlinien oder auf 5 Stützpunkte reducirt werden, die auf unendlich mannigfache Weise gemäss den vorhergehenden Bemerkungen gewählt werden können. Uebrigens sind dadurch nicht alle Möglichkeiten einer der Aufgabe entsprechenden Stützung erschöpft; in Linien könnte dieselbe noch auf mancherlei andere Weise, insbesondere z. B. in zwei geschlossenen Querschnittslinien des Prisma geschehen, oder in beliebigen Linien, die 5 so gelegene Punkte, wie die oben mit  $A_1, A_2, B, C, D$  bezeichneten, enthalten.

Die systematische Verallgemeinerung dieser Betrachtungen zur Aufsuchung aller Arten, wie die gegebene Beweglichkeit durch Stützung in Linien oder Punkten erzielt werden kann, sowie ihre Ausdehnung auf die Ermittlung der bei weniger einfachen Körperformen zu gewissen Einschränkungen der Beweglichkeit wenigstens nöthigen Zahl von Stützlinien oder Stützpunkten bei entsprechender Lage derselben, ist ohne erhebliches praktisches Interesse, da mit Rücksicht auf die Abnutzung gewöhnlich nicht sowohl die eingeschränkste, als vielmehr gerade umgekehrt die ausgedehnteste den Umständen nach zulässige Stützung vorzuziehen ist. In speciellen Fällen lässt auch meistens die unmittelbare Anschauung leicht erkennen, wie wenigstens unter anderen Möglichkeiten die Stützung reducirt ist, zu welchem Ende die Gesetze der Stützung einer ebenen Figur in ihrer

Ebene auch bei nicht prismatischen Körpern Dienste leisten können. Hier mögen nur noch (ohne eingehende Beweisführung) Angaben folgen über die Art, wie bei den übrigen Umschlusspaaren (ausser dem besprochenen Prismenpaare) unbeschadet ihres kinematischen Charakters die das eine Element berührende Oberfläche des andern auf Stützlinsen oder Stützpunkte reducirt werden kann.

Die Beweglichkeit eines Drehkörpers kann auf die dem Drehkörperpaare entsprechende Drehbarkeit um seine Axe beschränkt werden durch Stützung in zwei solchen Parallelkreisen  $k_1$  und  $k_2$ , dass die Stützrichtungen für die Punkte von  $k_1$  in entgegengesetztem Sinne gegen die Axe geneigt sind wie die Stützrichtungen für die Punkte von  $k_2$ , d. h. dass die ersteren mit der einen, die letzteren mit der entgegengesetzten Axrichtung spitze Winkel bilden, die nicht beide = Null sein dürfen (widrigenfalls der Körper die Beweglichkeit eines Plattenpaar-Elementes hätte); oder auch durch Stützung in 3 solchen Meridianlinien  $a, b, c$ , dass in ihren Schnittpunkten mit irgend einem Parallelkreise der letztere (nach §. 7) in seiner Ebene gegen Schiebung vollkommen gestützt wird. Dieselbe Beschränkung der Beweglichkeit wird aber auch schon durch Stützung in den 6 Punkten  $A_1$  und  $A_2$ ,  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$  erreicht, in denen die Meridianlinien  $a, b, c$  von den Kreisen  $k_1$  und  $k_2$  geschnitten werden, und schliesslich können von diesen 3 Punktepaaren zwei, etwa  $B_1$  und  $B_2$ ,  $C_1$  und  $C_2$ , noch durch einzelne Punkte  $B, C$  ersetzt werden, die in den Meridianlinien  $b, c$  so liegen, dass die von ihnen auf die Gerade  $A_1A_2$  gefällten Senkrechten  $BB'$  und  $CC'$  solche Punkte  $B'$  und  $C'$  dieser Geraden treffen, die zwischen  $A_1$  und  $A_2$  liegen, und dass ferner weder die Stütznormale eines der Punkte  $A_1, A_2, B$  rechtwinklig gegen  $BB'$ , noch die Stütznormale eines der Punkte  $A_1, A_2, C$  rechtwinklig gegen  $CC'$  gerichtet ist, und dass somit die Stützrichtungen der Punkte  $A_1$  und  $A_2$  Componenten nach den Richtungen  $BB'$  und  $CC'$ , die der Punkte  $B$  und  $C$  Componenten nach den entgegengesetzten Richtungen  $B'B$  resp.  $C'C$  haben. Unter diesen Umständen ist nach §. 8 unter 3, b,  $\gamma$ ) der Körper weder um eine zur Ebene  $A_1A_2B$  noch um eine zur Ebene  $A_1A_2C$  senkrechte Axe, also auch nicht um eine zur Geraden  $A_1A_2$  senkrechte Axe drehbar. Dann ist aber auch Drehung um jede zur geometrischen Axe des Körpers senkrechte Axe unmöglich, weil eine solche mit einer um diese geometrische Axe selbst ohnehin möglichen Drehung immer zu einer Drehung um eine zu  $A_1A_2$  senkrechte Axe zusammengesetzt werden könnte.\*

\* Dieser letzte Schluss, weil wesentlich durch die vorhandene Drehbarkeit um die geometrische Axe bedingt, wäre unthunlich bei einem Prisma, das man

Sind die Kreise  $k_1$  und  $k_2$  gleich, so dass die Gerade  $A_1 A_2$  parallel mit der Axe ist, so kommen die Bedingungen für die Wahl der 4 Stützpunkte  $A_1, A_2, B, C$  in den wie oben charakterisirten Parallelkreisen  $k_1, k_2$  und Meridianlinien  $a, b, c$  darauf hinaus, dass  $B$  und  $C$  zwischen den Ebenen von  $k_1$  und  $k_2$  liegen müssen und dass die Stütznormale für keinen der 4 Punkte parallel mit der Axe sein darf. Was schliesslich noch einmal die Stützung in Linien betrifft, so kann dieselbe natürlich auch in jedem anderen System von Linien geschehen, welche 4 so gelegene wie die hier mit  $A_1, A_2, B, C$  bezeichneten Punkte enthalten.

Eine Schraube kann als Element eines Schraubenpaares in den Durchschnittslinien  $a, b, c$  ihrer Oberfläche mit 3 solchen Ebenen gestützt werden, welche sich in der Axe unter hohlen Winkeln schneiden, die sich zu  $360^\circ$  ergänzen; oder in zwei solchen Schraubenlinien, dass die Stütznormalen für die Punkte der einen im entgegengesetzten Sinne gegen die Axe geneigt sind wie die Stütznormalen für die Punkte der anderen; oder auch in den Schnittpunkten dieser Schraubenlinien mit den Linien  $a, b, c$ , die unter ähnlichen Voraussetzungen, wie beim Drehkörperpaare, wieder auf 4 Stützpunkte reducirbar sind. Schliesslich kann die Stützung auch in beliebigen anderen Systemen von Linien erfolgen, die eine dazu ausreichende Gruppe von Stützpunkten enthalten.

Ein Cylinder kann als Element eines Cylinderpaares in 4 Punkten  $A_1, A_2, B, C$  gestützt werden, falls die in einer geraden Meridianlinie  $a$  befindlichen Punkte  $A_1$  und  $A_2$  auf entgegengesetzten Seiten ausserhalb der Querschnittsebenen liegen, welche die in zwei anderen Meridianlinien  $b, c$  befindlichen Stützpunkte  $B, C$  enthalten, vorausgesetzt ferner, dass irgend ein Querschnitt von den Geraden  $a, b, c$  in den Ecken eines spitzwinkligen Dreiecks geschnitten wird. Beliebige Linien in der Cylinderfläche, die solche 4 Punkte enthalten, können als Stützlilien dienen.

Eine Kugel kann gegen Schiebung nach jeder Richtung und somit als Element eines Kugelpaares in je 4 solchen Punkten gestützt werden, in denen sie von den Begrenzungsebenen eines sie umschliessenden Tetraeders berührt werden kann, selbstverständlich dann auch in jedem Liniensystem, das 4 solche Punkte enthält.

etwa als Element eines Prismenpaares statt in 5 auch in nur 4 Punkten  $A, B, C, D$  zu stützen vermeinen wollte, indem dieselben in den oben mit  $a, b, c, d$  bezeichneten Geraden des Prisma analog in gleicher Reihenfolge den hier mit  $A_1, B, C, A_2$  bezeichneten Punkten des Drehkörpers angenommen würden; aus der Undrehbarkeit um jede zur Geraden  $AD$  senkrechte Axe würde nicht auch Undrehbarkeit um jede zu den Prismenkanten senkrechte Axe folgen.

Endlich kann auch eine gleichförmig dicke ebene Platte als Element eines Plattenpaares in 4 Punkten  $A, B, C, D$  gestützt werden, von denen entweder zwei, etwa  $A$  und  $B$ , in der einen Begrenzungsebene  $E_1$  beliebig und die zwei anderen  $C, D$  in der anderen  $E_2$  so liegen, dass die Projection  $C'D'$  der Strecke  $CD$  auf die Ebene  $E_1$  und die Strecke  $AB$  in derselben sich ohne Verlängerung, d. h. in einem zwischen  $A$  und  $B$  sowie zwischen  $C'$  und  $D'$  liegenden Punkte schneiden, oder von denen 3, etwa  $A, B$  und  $C$ , in  $E_1$  beliebig liegen, dagegen der Punkt  $D$  in  $E_2$  so, dass seine Projection auf  $E_1$  in das Innere des Dreiecks  $ABC$  fällt. Stützlinien sind wieder alle solche Systeme von Linien in  $E_1$  und  $E_2$ , welche 4 Punkte von den angegebenen Lagen enthalten.

### c. Höhere Elementenpaare.

Während bei gegenseitiger Bewegung der Elemente eines niederen Paares stets dieselben Punkte der Oberfläche des einen Elementes in der Oberfläche des anderen bleiben, die eine Elementenfläche durch Linien der anderen beschrieben werden kann, die Elemente deshalb auch in einer Fläche sich berühren können, haben bei höheren Elementenpaaren die Berührungspunkte veränderliche Lagen in beiden Oberflächen, deren jede die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die andere bei der relativen Bewegung des ihr zugehörigen Elementes gegen das der ersteren zugehörige einnimmt, und es berühren sich die Elemente nur in Linien oder Punkten. Während endlich die Axoide oder Axoidensysteme der beiden Elemente eines niederen Paares zwei zusammenfallende geradlinige Gebilde sind, und in Folge dessen die Umkehrung des Paares keine Aenderung der Bewegung zur Folge hat, sind die Axoide oder Axoidensysteme höherer Elementenpaare verschiedene geradlinige Gebilde, und ist dann auch die Umkehrung des Paares mit einer Aenderung der Bewegung verbunden, d. h. wenn  $P$  und  $P'$  zwei solche Punkte beziehungsweise der Elemente  $E$  und  $E'$  sind, die bei einer gewissen gegenseitigen Lage von  $E$  und  $E'$  zusammenfallen, so ist die Bahn, überhaupt das Bewegungsgebiet von  $P$  bei Bewegung von  $E$  und Feststellung von  $E'$  nicht identisch mit der Bahn, überhaupt dem Bewegungsgebiete von  $P'$  bei Bewegung von  $E'$  und Feststellung von  $E$ . — Die folgenden Untersuchungen beschränken sich übrigens auf zwangsläufige höhere Elementenpaare, bei denen es sich um bestimmte Axoide und Punktbahnen, nicht um Axoidensysteme

und allgemeinere Bewegungsgebiete der Punkte handelt.\* Dergleichen höhere Paare sind einzutheilen mit Rücksicht auf den Charakter ihrer Axoide, welche cylindrische Flächen, conische Flächen, allgemeinere abwickelbare oder auch nicht abwickelbare geradlinige Flächen sein können; in den ersten Fällen ist die gegenseitige Bewegung der sich beständig berührenden Axoide beider Paarelemente eine nur rollende, im letzten Falle eine gleitend-rollende.

### 1. Höhere Elementenpaare mit cylindrischen Axoiden.

#### §. 11. Vorbemerkungen.

Unter einer cylindrischen Fläche soll eine allgemeine Cylinderfläche, unter einem cylindrischen Körper ein allgemeiner Cylinder verstanden werden im Gegensatze zu einer kurzweg so genannten Cylinderfläche beziehungsweise einem Cylinder (§. 1). Die Axoide von Paarelementen sind dann cylindrische Flächen, wenn die Elemente selbst cylindrische Körper sind, die sich in parallelen Geraden berühren, während sie behufs der vorausgesetzten Zwangläufigkeit durch vortretende Ränder oder auf andere Weise an einer Axialverschiebung verhindert werden. Die kinematischen Eigenschaften solcher Elementenpaare sind einerlei mit denen ihrer zusammengehörigen Profile, d. h. ihrer in Punkten sich berührenden Querschnittsfiguren, auf deren Betrachtung deshalb die folgende Untersuchung sich beschränken kann; jedes Profil ist die Umhüllungslinie aller Lagen, die das andere bei seiner Bewegung gegen jenes nach und nach einnimmt. Die diese Profile enthaltende Querschnittsebene schneidet auch die Axoide der beiden Elemente in Querschnittslinien, welche die Pol-

\* Kinematische Ketten mit Elementenpaaren von mehrfacher Beweglichkeit können im Allgemeinen aus Ketten mit zwangläufigen Elementenpaaren durch Verminderung der Gliederzahl entstanden gedacht werden, wie es in Betreff der Umschlusspaare von zweifacher Beweglichkeit schon in §. 6 angedeutet wurde und in Betreff anderer, insbesondere auch höherer Elementenpaare später an einigen Beispielen gezeigt werden wird. In der That ist ohne Weiteres begreiflich, dass, wenn ein Glied  $b$  einerseits mit dem Gliede  $a$  durch ein zwangläufiges Elementenpaar  $\alpha$ , andererseits mit dem Gliede  $c$  durch ein zwangläufiges Elementenpaar  $\gamma$  verbunden ist, bei Beseitigung dieses Gliedes  $b$  die Glieder  $a$  und  $c$ , um die frühere gegenseitige Beweglichkeit zu behalten, durch ein Elementenpaar zu verbinden sein werden, welches die Beweglichkeiten der Elementenpaare  $\alpha$  und  $\gamma$  in sich vereinigt.

bahnen der Elementenprofile heissen und sich beständig in einem Punkte, dem sogenannten Pol, berühren.

Die gegenseitige Bewegung der Elementenprofile in ihrer Ebene ist dadurch bestimmt, dass die mit ihnen verbundenen Polbahnen auf einander rollen, entsprechend einer stetigen Folge von elementaren Drehungen um ihren jeweiligen Berührungspunkt, den Pol. Diese Art von gegenseitiger Beweglichkeit der Elementenprofile erfordert eine beständige solche gegenseitige Stützung derselben, welche nur Drehung um einen Punkt in beiderlei Sinn zulässt, wozu es (§. 7 und 8) nöthig ist, dass die wenigstens 3 Stütznormalen sich stets in einem Punkte schneiden. Uebrigens ist es nicht nöthig, die Erfüllung dieser Bedingung besonders nachzuweisen, wenn man erkannt hat, dass die Elementenprofile in stetig auf einander folgenden Lagen sich gegen Schiebung vollkommen stützen, indem sie dann von irgend einer dieser Lagen aus nur um einen einzigen Punkt  $P$  gegenseitig drehbar sein können; wäre nämlich ausserdem noch Drehung um einen zweiten Punkt  $P_1$  möglich, so könnte diese in eine gleiche Drehung um  $P$  und in Schiebung senkrecht zur Geraden  $PP_1$  zerlegt werden, entgegen der Voraussetzung vollkommener Stützung gegen Schiebung.

Die sich hier darbietenden Aufgaben betreffen vor Allem 1) die Bestimmung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile, 2) die Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen. Letztere bestimmen unmittelbar die Punktbahnen, d. h. die Bahnen aller mit dem einen Elementenprofil fest verbunden gedachter Punkte in Beziehung auf das andere. Umgekehrt wird die Polbahn jedes Elementenprofils durch die Bahnen von zwei Punkten des anderen bestimmt, indem sie, wie die allgemeine Kinematik lehrt, der Ort der Schnittpunkte je zweier Normalen dieser Punktbahnen in entsprechenden Punkten derselben, d. h. in gleichzeitigen Oertern der beschreibenden Punkte ist.

Ausser jenen unter 1) und 2) bezeichneten Gruppen von Aufgaben kann es noch der Fall sein, dass die gegenseitige Beweglichkeit der cylindrischen Paarelemente weder durch die Elementenprofile, noch durch die Polbahnen gegeben, sondern an anderweitige Bedingungen geknüpft ist, denen entsprechend dann erst die betreffenden Polbahnen und event. die Profile bestimmt werden sollen. In dieser Hinsicht soll im Folgenden insbesondere der Fall behandelt werden, dass die Elemente des Paares um parallele Axen von unveränderlichem Abstände und von unveränderlichen Lagen gegen die Elemente in gegebener Weise drehbar sind, also die Aufgabe, betreffend 3) die Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte

ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen. Nachdem die Polbahnen gefunden sind, gehört die Bestimmung der Elementenprofile zu der unter 2) genannten Gruppe von Aufgaben.

*α.* Bestimmung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile.

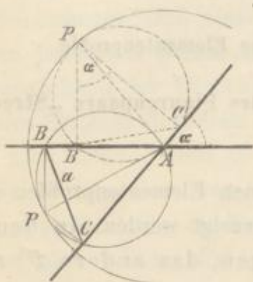
§. 12. Die Cardanischen Kreise als Polbahnen des Figurenpaars „Strecke und Winkel“.

Die Ermittlung der Polbahnen zu gegebenen Elementenprofilen soll im Folgenden beispielsweise für solche Fälle gezeigt werden, in denen das eine Elementenprofil  $F$  aus Kreisbögen, das andere  $F'$  aus geraden Linien besteht, da solche Profile auch abgesehen von ihrer leichten Herstellbarkeit von besonderem Interesse sind. In allen solchen Fällen kann die Aufgabe auf eine andere von elementarem Charakter zurückgeführt werden, auf die auch später wiederholt Bezug zu nehmen sein wird, und welche deshalb hier zunächst einer gesonderten Betrachtung unterworfen werden soll. Sind nämlich  $b'$  und  $c'$  zwei nicht parallele Seiten der geradlinigen Figur  $F'$ , mit denen bei einer gewissen Bewegung von  $F$  gegen  $F'$  zwei Bogenseiten von  $F$  in Berührung bleiben, und sind  $B, C$  die Mittelpunkte,  $b, c$  die Halbmesser der Kreise, zu denen diese Bogenseiten von  $F$  gehören, so bewegen sich die Punkte  $B, C$  von  $F$  in geraden Linien, die beziehungsweise in den Entfernungen  $b, c$  mit den geraden Linien  $b', c'$  der Figur  $F'$  parallel sind. Die gegenseitige Bewegung der beiden Figuren ist also dadurch bestimmt, dass die Endpunkte einer gewissen Strecke  $BC = a$  der aus Kreisbögen bestehenden Figur  $F$  in den Schenkeln eines gewissen Winkels  $BAC = \alpha$  der geradlinigen Figur  $F'$  gleiten resp. diese Winkelschenkel von  $F'$  durch jene zwei Punkte von  $F$  hindurch gleiten. Die Polbahnen eines solchen elementaren Figurenpaars „Strecke und Winkel“ (Fig. 6), auf dessen gegenseitige Bewegung die der Elementenprofile  $F, F'$  in ihren einzelnen Theilen (entsprechend den verschiedenen Combinationen, in denen zwei Bogenseiten des einen mit zwei geraden Seiten des anderen Profils zur Berührung kommen können) immer zurückführbar ist, ergeben sich folgendermaassen, wobei zu berücksichtigen ist, dass die hier als Winkel bezeichnete Figur ein System von zwei sich schneidenden Geraden ist, die also im gewöhnlichen Sinne eigentlich 4 Winkel bilden, von denen je 2 entweder Neben- oder Scheitelwinkel sind, und von denen jeder die Strecke in sich aufnehmen kann, wenn die Figuren ihre sämtlichen gegenseitigen Lagen stetig durchlaufen.



Die Polbahn des Winkels ist der Ort der Punkte (Pole)  $P$ , um welche bei fester Lage des Winkels die Strecke sich nach und nach dreht.

Fig. 6.



Für irgend eine Lage  $BC$  (Fig. 6) der letzteren ergibt sich dieser Pol im Durchschnitte der Normalen in den Punkten  $B, C$  der betreffenden Bahnen  $AB, AC$  dieser Punkte. Er liegt in der Peripherie des Kreises, der durch  $A, B, C$  geht, und zwar so, dass  $AP = R = \frac{a}{\sin \alpha}$  ein

Durchmesser dieses Kreises ist. Die Polbahn des Winkels ist also der aus seinem Scheitelpunkte  $A$  mit dem Radius  $R = \frac{a}{\sin \alpha}$  beschriebene Kreis.

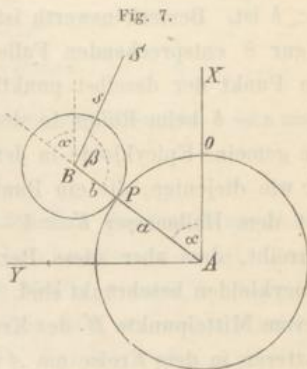
Die Polbahn der Strecke ist der Ort aller relativen Lagen des Pols  $P$  gegen  $BC$ , d. i. der Ort der Durchschnittspunkte aller Geraden, welche, durch  $B$  und  $C$  gehend, sich unter den Winkeln  $\alpha$  und  $180^\circ - \alpha$  schneiden, also der die Strecke  $BC$  als Sehne enthaltende Kreis mit dem

$$\text{Radius } r = \frac{1}{2} R = \frac{1}{2} \frac{a}{\sin \alpha}.$$

Die Polbahnen des Figurenpaars „Strecke und Winkel“ sind also zwei Kreise vom Halbmesserverhältnisse 1:2, von denen der kleinere (in der Folge kurz der Kreis  $r$  genannt) im grösseren (dem Kreise  $R$ ), resp. der grössere um den kleineren rollt. Mit Reuleaux mögen dieselben die Cardanischen Kreise genannt werden nach dem Mathematiker Cardano, der sich im 16. Jahrhundert zuerst mit dem Problem beschäftigt zu haben scheint. Die mit der Strecke verbundenen Punkte beschreiben also relative Bahnen gegen den Winkel, die zur Classe der Hypocykloiden gehören, hier aber, wie sogleich gezeigt werden soll, in Ellipsen übergegangen sind; die mit dem Winkel verbundenen Punkte beschreiben relative Bahnen gegen die Strecke, die zur Classe der Epicykloiden gehören, im vorliegenden Falle aber Cardioiden heissen. Die Gleichungen dieser Curven (zunächst auf Grund allgemeinerer Voraussetzungen) ergeben sich wie folgt.

Auf einem Kreise mit dem Mittelpunkt  $A$  und Halbmesser  $a$  (Fig. 7) rolle ein anderer mit dem Mittelpunkt  $B$  und Halbmesser  $b$ , mit welchem ein Punkt  $S$  in der Entfernung  $s$  von  $B$  verbunden ist. Für  $A$  als Anfangspunkt werde die positive  $x$ -Axe so angenommen, dass sie den Berührungspunkt der beiden Kreise in derjenigen Lage  $O$  enthält, bei welcher  $BO$  und  $BS$  einerlei Richtung haben, die positive  $y$ -Axe senkrecht zur

$x$ -Axe so, dass der Berührungspunkt  $P$  sich auf dem Kreise um  $A$  im Sinne von der positiven  $x$ -Axe durch den rechten Winkel  $XAY$  zur positiven  $y$ -Axe bewegt;  $\alpha$  und  $\beta$  seien die Mittelpunktswinkel  $OAP$  und  $SBP$  der Bögen beider Kreise, die sich seit ihrer Berührung im Punkte  $O$  von einander abgewälzt haben. Wenn sich nun die Kreise von aussen berühren, so dass in der Anfangslage die Richtungen  $BO$  und  $BS$  der Richtung  $AO$  entgegengesetzt sind, so ergeben sich aus Fig. 7 sofort die folgenden Ausdrücke der Coordinaten  $x, y$  des beschreibenden Punktes  $S$ :



$$x = (a + b) \cos \alpha - s \cos (\alpha + \beta)$$

$$y = (a + b) \sin \alpha - s \sin (\alpha + \beta)$$

oder wegen  $a\alpha = b\beta$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= (a + b) \cos \alpha - s \cos \frac{a + b}{b} \alpha \\ y &= (a + b) \sin \alpha - s \sin \frac{a + b}{b} \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (1).$$

Berühren sich aber die Kreise von innen, so dass in der Anfangslage (Fig. 8 und Fig. 9) die Richtungen  $BO$  und  $BS$  mit der Richtung  $AO$  übereinstimmen, so sind in Gl. (1) nur  $b$  und  $s$  entgegengesetzt zu nehmen, wodurch sich ergibt:

Fig. 8.

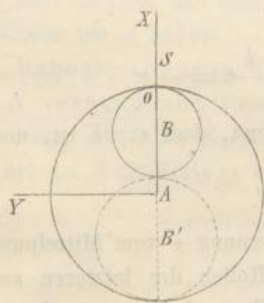
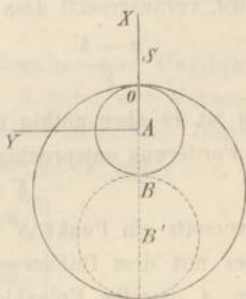


Fig. 9.



tung  $AO$  übereinstimmen, so sind in Gl. (1) nur  $b$  und  $s$  entgegengesetzt zu nehmen, wodurch sich ergibt:

$$\left. \begin{aligned} x &= (a - b) \cos \alpha + s \cos \frac{a - b}{b} \alpha \\ y &= (a - b) \sin \alpha - s \sin \frac{a - b}{b} \alpha \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (2).$$

Die Bahnen der Punkte  $S$  sind in Fig. 7 und Fig. 9 Epicykloiden, in Fig. 8 Hypocykloiden, und zwar sogenannte gemeine, wenn  $s=b$  ist, verlängerte oder verschlungene, wenn  $s>b$ , verkürzte oder gedehnte, wenn  $s<b$  ist. Bemerkenswerth ist, dass die gemeine Hypocykloide in dem der Fig. 8 entsprechenden Falle nicht verschieden ist von derjenigen, die ein Punkt der daselbst punktirten Kreislinie um  $B'$  mit dem Halbmesser  $b'=a-b$  beim Rollen in dem Kreise um  $A$  beschreibt, und dass ebenso die gemeine Epicykloide in dem der Fig. 9 entsprechenden Falle dieselbe ist wie diejenige, die ein Punkt der daselbst punktirten Kreislinie um  $B'$  mit dem Halbmesser  $b'=b-a$  beim Rollen auf dem Kreise um  $A$  beschreibt, dass aber diese Beziehungen auf gemeine Hypocykloiden und Epicykloiden beschränkt sind. Soll nämlich ein Punkt  $S'$  in der Entfernung  $s'$  vom Mittelpunkte  $B'$  des Kreises mit dem Halbmesser  $b'$  beim Rollen des letzteren in dem Kreise um  $A$  mit dem Halbmesser  $a>b'$  dieselbe Hypocykloide beschreiben wie der mit dem Kreise um  $B$  verbundene Punkt  $S$  (Fig. 8) im gleichen Falle, so muss nach Gl. (2) für alle Werthe von  $\alpha$

$$(a-b') \cos \alpha' + s' \cos \frac{a-b'}{b'} \alpha' = (a-b) \cos \alpha + s \cos \frac{a-b}{b} \alpha$$

$$(a-b') \sin \alpha' - s' \sin \frac{a-b'}{b'} \alpha' = (a-b) \sin \alpha - s \sin \frac{a-b}{b} \alpha$$

sein, was der Fall ist, wenn

$$b' = a - s; \quad s' = a - b; \quad \alpha' = -\frac{a-b}{b} \alpha$$

gesetzt wird, vorausgesetzt dass dann auch

$$\frac{a-b'}{b'} \alpha' = -\frac{s}{a-s} \frac{a-b}{b} \alpha = -\alpha$$

ist. Dazu ist es aber nöthig und ausreichend, dass  $s=b$  ist, und wird dann der Forderung entsprochen durch:

$$b' = a - b = s'.$$

Soll andererseits ein Punkt  $S'$  in der Entfernung  $s'$  vom Mittelpunkte  $B'$  des Kreises mit dem Halbmesser  $b'$  beim Rollen des letzteren auf dem Kreise um  $A$  dieselbe Epicykloide beschreiben wie der mit dem Kreise um  $B$  verbundene Punkt  $S$  (Fig. 9), so muss nach Gl. (1) und (2) für alle Werthe von  $\alpha$

$$(a+b') \cos \alpha' - s' \cos \frac{a+b'}{b'} \alpha' = (a-b) \cos \alpha + s \cos \frac{a-b}{b} \alpha$$

$$(a+b') \sin \alpha' - s' \sin \frac{a+b'}{b'} \alpha' = (a-b) \sin \alpha - s \sin \frac{a-b}{b} \alpha$$

sein, was der Fall ist, wenn

$$b' = s - a; s' = b - a; \alpha' = \frac{b - a}{b} \alpha$$

gesetzt wird, falls dann auch

$$\frac{a + b'}{b'} \alpha' = \frac{s}{s - a} \frac{b - a}{b} \alpha = \alpha$$

ist. Dazu ist es aber wieder nöthig und ausreichend, dass  $s = b$  ist, und wird dann der Forderung entsprochen durch:

$$b' = b - a = s'. \quad -$$

Was nun den hier vorliegenden besonderen Fall der Cardanischen Kreise betrifft, so ergeben sich die Bahngleichungen der mit dem kleineren Kreise  $r$  verbundenen Punkte  $S$  (Fig. 8 unter der Voraussetzung, dass der Kreis um  $B$  als Kreis  $r$  einen halb so grossen Durchmesser hat, wie der um  $A$  als Kreis  $R$ ) aus Gl. (2) mit  $a = 2r, b = r$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= (r + s) \cos \alpha \\ y &= (r - s) \sin \alpha \end{aligned} \right\} \frac{x^2}{(r + s)^2} + \frac{y^2}{(r - s)^2} = 1 \dots \dots \dots (3)$$

Für  $s = 0$  ist diese Bahn ein Kreis um  $A$  mit dem Halbmesser  $r$ . Wächst  $s$ , so wird die Bahn eine Ellipse mit den Halbaxen  $r + s, r - s$ , die innerhalb des Kreises  $R$  liegt und, indem sie sich im Sinne der  $x$ -Axe mehr und mehr streckt, im Sinne der  $y$ -Axe zusammenzieht, für  $s = r$  in den mit der  $x$ -Axe zusammenfallenden Durchmesser des Kreises  $R$  übergeht. Für  $s > r$  wird die Bahn eine Ellipse mit den Halbaxen  $s + r, s - r$ , die zunächst den Kreis  $R$  in 4 Punkten schneidet, bei  $s = 3r$  ihn in der  $y$ -Axe berührt, dann ihn ganz umgiebt und sich mit weiter wachsendem  $s$  einem unendlich grossen Kreise um  $A$  nähert.

Die Bahngleichungen der mit dem grösseren Cardanischen Kreise  $R$  verbundenen Punkte  $S$  (Fig. 9 unter der Voraussetzung, dass der Kreis um  $B$  als Kreis  $R$  einen doppelt so grossen Durchmesser hat, wie der um  $A$  als Kreis  $r$ ), ergeben sich aus Gl. (2) mit  $a = r, b = 2r$ :

$$\left. \begin{aligned} x &= -r \cos \alpha + s \cos \frac{\alpha}{2} \\ y &= -r \sin \alpha + s \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4)$$

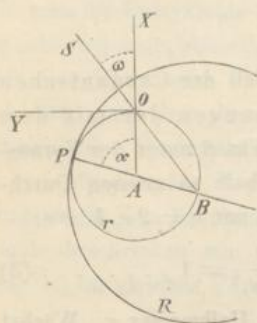
Wenn der Anfangspunkt der Coordinaten von  $A$  nach  $O$  verlegt wird, so gehen diese Bahngleichungen (4), worin dann  $x + r$  statt  $x$  zu setzen ist, über in

$$\begin{aligned} x &= s \cos \frac{\alpha}{2} - r(1 + \cos \alpha) = \left( s - 2r \cos \frac{\alpha}{2} \right) \cos \frac{\alpha}{2} \\ y &= \left( s - 2r \cos \frac{\alpha}{2} \right) \sin \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{oder } x = \rho \cos \omega; y = \rho \sin \omega \\ \text{mit } \rho = s - 2r \cos \omega; \omega = \frac{\alpha}{2} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (5).$$

Daraus folgt (Fig. 10), dass die Gerade, welche den Mittelpunkt  $B$  des Kreises  $R$  mit dem beschreibenden Punkte  $S$  verbindet, beständig durch denselben Punkt  $O$  des Kreises  $r$  geht, und dass

Fig. 10.



die Bahn von  $S$  erhalten wird, indem man eine durch  $O$  gehende Gerade um diesen Punkt sich drehen lässt und von ihrem zweiten Durchschnittspunkte  $B$  mit dem Kreise  $r$  aus die Strecke  $BS = s$  stets in gleichem Sinne darauf abträgt. Dieser stets gleiche Sinn ist, wenn er anfangs von  $B$  gegen  $O$  gerichtet war, nach dem Durchgange des Punktes  $B$  durch den Punkt  $O$  von  $O$  gegen  $B$  gerichtet und umgekehrt.

Für  $s = 0$  ist die Bahn der Kreis  $r$  selbst. Mit wachsender Grösse  $s$  geht sie in zwei Schleifen, die eine innerhalb, die andere ausserhalb des Kreises  $r$  mit dem Knotenpunkte  $O$  über (verschlungene Cardioide); die innere Schleife wird immer kleiner, die äussere grösser, bis erstere mit  $s = 2r$  ganz verschwindet und die Bahn bei  $O$  eine Spitze bildet (gemeine Cardioide). Mit weiter wachsendem  $s$  flacht sich diese Spitze, indem sie sich vom Kreise  $r$  entfernt, mehr und mehr ab (gedehnte Cardioide), und nähert sich die Bahn wieder einem unendlich grossen Kreise um  $A$ .

### §. 13. Gleichseitiges Bogenzweieck im gleichseitigen Dreieck.

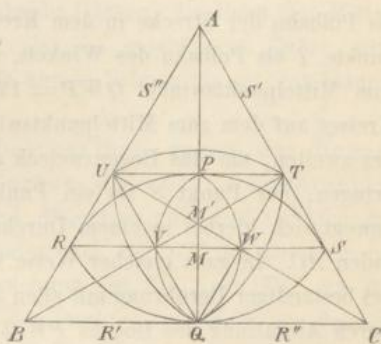
Als einfachster Fall von Elementenprofilen, deren eines aus Kreisbögen und anderes aus geraden Linien besteht, werde jenes als ein Bogenzweieck vorausgesetzt, gebildet von zwei Kreisbögen  $RQS$  und  $RPS$  (Fig. 11), die aus den Endpunkten einer Strecke  $PQ = a$  mit derselben als Halbmesser beschrieben sind, dieses als ein gleichseitiges Dreieck, dessen Höhe  $= 2a$  ist. Um diese Figuren als zulässige Profile eines zwangläufigen höheren Elementenpaares nachzuweisen, ist nach §. 11 zu zeigen, dass sie sich in stetig aufeinander folgenden Lagen gegen Schiebung vollkommen stützen, was aber nach §. 7 der Fall ist, wenn das Bogenzweieck bei stetiger Drehung im Dreieck beständig von allen 3 Seiten des letzteren berührt werden kann.

Zunächst ergibt sich eine dieser Bedingung entsprechende Anfangslage durch folgende Erwägung. Zieht man (Fig. 11) die Gerade  $BC$  durch  $Q$  senkrecht zu  $PQ$ , also tangential an den Bogen  $RQS$ , verlängert  $PQ$  um  $PA = PQ$  und zieht die Geraden  $ARB$ ,  $ASC$ , so ist  $ABC$  ein gleichschenkliges Dreieck mit der Höhe  $AQ = 2a$ , von dem also nur noch zu zeigen bleibt, dass es gleichseitig, somit  $\angle BAQ = \angle CAQ = 30^\circ$  ist, und dass seine Seiten  $AB$ ,  $AC$  den Bogen  $RPS$  in  $R$ ,  $S$  berühren, somit  $\angle ARQ = \angle ASQ = 90^\circ$  ist. Beides folgt aber daraus, dass den Voraussetzungen zufolge

$$\begin{aligned} \angle RQP &= \angle RPQ = 2 \cdot \angle RAP = 60^\circ, \\ \angle SQP &= \angle SPQ = 2 \cdot \angle SAP = 60^\circ \text{ ist.} \end{aligned}$$

Um nun zu zeigen, dass von dieser Anfangslage aus das Bogenzweieck stetig so gedreht werden kann, dass es beständig alle Seiten des Dreiecks  $ABC$  berührt, und um zugleich die Polbahnen beider Profile zu erkennen, werde die Gerade  $TU$  durch  $P$  parallel  $RS$  und  $BC$  gezogen und  $Q$  mit  $T$ ,  $U$  durch die Geraden  $QT$ ,  $QU$  verbunden, die von der Geraden  $RS$  in den Punkten  $W$ ,  $V$  geschnitten werden, so dass dann  $Q$ ,  $T$ ,  $U$  die Mittelpunkte der Seiten des Dreiecks  $ABC$  und  $P$ ,  $V$ ,  $W$  die Mittelpunkte der Seiten des gleichfalls gleichseitigen Dreiecks  $QTU$  sind; ferner werde aus den Eckpunkten dieses letzteren Dreiecks mit seinen Seitenlängen als Halbmessern das Bogendreieck  $QTU$  verzeichnet, und über der Strecke  $VW$  als kleiner Axe das gleichseitige Bogenzweieck mit der grossen Axe  $PQ$ , dessen aus  $V$  und  $W$  als Mittelpunkten beschriebene Bogenseiten  $PWQ$ ,  $PVQ$  zu halb so grossen Kreisen gehören wie die Bogenseiten des Bogendreiecks  $QTU$ . Nun kann das Bogenzweieck  $RS$  durch Drehung um  $60^\circ$  links herum, während der Bogen  $RP$  beständig von der Geraden  $AB$ , der Bogen  $QR$  beständig von der Geraden  $BC$  berührt wird, in eine solche Lage  $R'S'$  gebracht werden, in der es gegen  $AB$  ebenso liegt wie in der Figur gegen  $BC$ , und es fragt sich nur, ob bei dieser Bewegung der Punkt  $S$  des Bogenzweiecks  $RS$  beständig in der Geraden  $AC$  bleibe? Indem aber der Punkt  $P$  des Bogenzweiecks  $RS$  als Mittelpunkt des Kreisbogens  $QR$  in der Geraden  $PQ$  parallel  $BC$ , und der Punkt  $Q$  als Mittelpunkt des Kreisbogens  $RP$  in der Geraden  $QW$  parallel  $AB$  sich bewegen muss, ist die fragliche

Fig. 11.



Bewegung dieselbe wie die der Strecke  $PQ = a$  im Winkel  $UTQ = 60^\circ$ , entsprechend nach vorigem §. dem Rollen des Kreises mit der Sehne  $PQ$  und dem Durchmesser  $R = \frac{a}{\sin 60^\circ} = TQ = VS$ , also dem Mittelpunkte  $W$ , als Polbahn der Strecke in dem Kreise mit dem Halbmesser  $R$  und Mittelpunkte  $T$  als Polbahn des Winkels, und zwar bedarf es der Abwälzung des zum Mittelpunktswinkel  $QWP = 120^\circ$  gehörigen Bogens  $QVP$  des ersten Kreises auf dem zum Mittelpunktswinkel  $QTU = 60^\circ$  gehörigen Bogen  $QU$  des zweiten, um das Bogenzweieck aus der Lage  $RS$  in die Lage  $R'S'$  zu bringen; der Punkt  $S$  als ein Punkt des kleineren Cardanischen Kreises bewegt sich hierbei in einem Durchmesser des grösseren, d. h. in der Geraden  $AC$ . In ganz gleicher Weise kann dann weiter das Bogenzweieck  $RS$  bei beständiger Berührung mit allen 3 Seiten des umliegenden Dreiecks  $ABC$  durch Abwälzung des Bogens  $PWQ$  auf dem Bogen  $UT$  aus der Lage  $R'S'$  in die Lage  $R''S''$ ; endlich durch Abwälzung des Bogens  $QVP$  auf dem Bogen  $TQ$  in die der ursprünglichen Lage  $RS$  gerade entgegengesetzte gelangen. Die Polbahn des Bogenzweiecks ist also ein ihm ähnliches Bogenzweieck, dessen grosse Axe die kleine des gegebenen ist; die Polbahn des Dreiecks ist ein Bogendreieck, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des gegebenen Dreiecks liegen. Einer vollen Umdrehung des Bogenzweiecks im Dreieck entspricht eine dreimalige Abwälzung seiner Polbahn auf der des Dreiecks, die dabei 2 mal vom Berührungspunkte durchlaufen wird; einer vollen Umdrehung des Dreiecks um das Bogenzweieck entspricht eine zweimalige Abwälzung seiner Polbahn auf der des Bogenzweiecks, die dabei 3 mal vom Berührungspunkte durchlaufen wird.

Hieraus und mit Rücksicht auf die im vorigen §. angestellte Untersuchung der Bahnen, die von den mit den Cardanischen Kreisen verbundenen Punkten gegenseitig beschrieben werden, ergibt sich, dass die Punkte des Bogenzweiecks gegen das Dreieck in sich zurücklaufende Curven beschreiben, die aus je 6 Ellipsenbögen (in besonderen Fällen in Kreisbögen oder gerade Linien übergehend) bestehen. Von denselben sind besonders bemerkenswerth die Bahnen von Punkten, die in der kleinen oder grossen Axe  $PQ$  resp.  $RS$  des Bogenzweiecks oder in den Verlängerungen derselben liegen; sie sind symmetrisch gegen die Mittellinien  $AQ$ ,  $BT$ ,  $CU$  des Dreiecks  $ABC$ . Die Grundfigur der Bahnen solcher Punkte, die in der Geraden  $PQ$  des Bogenzweiecks liegen, ist das gleichseitige Dreieck  $QTU$ , von den Punkten  $P$  und  $Q$  selbst beschrieben; die Grundfigur der Bahnen von Punkten in  $RS$  ist die von den Punkten  $R$

und  $S$  selbst beschriebene Bahn  $SS'S''RR'R''S$ , bestehend aus 3 geradlinigen Strecken  $SS'$ ,  $S''R$ ,  $R'R''$ , die durch 3 (in Fig. 11 nicht gezeichnete) Ellipsenbögen  $S'S''$ ,  $RR'$ ,  $R''S$  verbunden werden. Alle Punkte im Innern der geschlossenen Polbahn  $PVQWP$  durchlaufen verschlungene (sich selbst schneidende), je 3 Schleifen bildende Curven; die Bahn des Mittelpunktes  $M$  erscheint zwar als eine einfache geschlossene Curve, wird aber zweimal durchlaufen, während alle übrige Bahnen einmal durchlaufen werden.

Die Punkte des Dreiecks beschreiben gegen das Bogenzweieck in sich zurücklaufende Curven, die aus je 6 Cardioidenbögen bestehen. Von denselben sind diejenigen, die von Punkten der (beliebig verlängert gedachten) Mittellinien  $AQ$ ,  $BI$ ,  $CU$  des Dreiecks beschrieben werden, symmetrisch in Beziehung auf die Axen  $PQ$ ,  $RS$  des Bogenzweiecks; und diejenigen, welche von Punkten im Innern der Polbahn  $QTU$  des Dreiecks beschrieben werden, sind verschlungene, je 2 Schleifen bildende Curven. Die Bahn des Mittelpunktes  $M'$  erscheint zwar als eine einfache geschlossene Curve, wird aber dreimal durchlaufen, während alle übrige Bahnen einmal durchlaufen werden.\* —

Ebenso hier, wie auch in anderen Fällen, in denen die Polbahnen Mittelpunkte haben (dieselben, wie  $M$  und  $M'$  in Fig. 11, als Durchschnittspunkte von Mittellinien der Polbahnen verstanden), sind von den unendlich vielen Punktbahnen, die von Punkten der beweglichen Figur gegen die ruhende beschrieben werden, besonders folgende (mit ihren Reuleaux'schen Benennungen) bemerkenswerth:

- 1) die gemeine Form der Punktbahnen, d. i. die Bahn irgend eines Punktes der beweglichen Polbahn selbst;
- 2) die concentrirte Form, d. i. die Bahn des Mittelpunktes der beweglichen Polbahn;
- 3) die homocentrischen Punktbahnen, nämlich diejenigen, welche durch den Mittelpunkt der ruhenden Polbahn hindurch gehen, und welche von den Punkten der concentrirten Bahnform des umgekehrten, d. h. des Profilpaars beschrieben werden, bei dem das vorher ruhende zum beweglichen Profil gemacht ist.

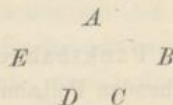
\* Auf Tafel I zu Reuleaux's „theoretischer Kinematik“ sind verschiedene solcher Punktbahnen des Bogenzweiecks und des Dreiecks verzeichnet.



## §. 14. Figuren von constanter Breite als Elementenprofile.

Von grösserer Wichtigkeit als Profile von Elementen zwangläufiger höherer Paare sind Figuren von constanter Breite, d. h. Figuren, die bei beliebiger Drehung zwischen zwei in bestimmtem Abstände parallelen Geraden beständig von denselben in einer stetigen Folge von je zwei Punkten berührt werden können. Eine solche Figur kann auch von allen Seiten eines Rhombus in einer stetigen Folge von je 4 Punkten beständig berührt werden, und indem dabei der letztere und die fragliche Figur einander stets gegen Schiebung stützen, müssen (nach §. 11) die Stütznormalen sich stets in einem Punkte schneiden, je zwei derselben also, den Berührungspunkten der gegenüber liegenden Seiten des Rhombus zugehörig, zusammenfallen; die fragliche Figur und der sie einschliessende Rhombus können als Profile eines zwangläufigen Elementenpaares dienen.

Figuren von constanter Breite  $b$  sind u. A. aus Kreisbögen von einerlei Halbmesser  $b$  zu bilden so, dass von je zwei die Figur berührend zwischen sich fassenden parallelen Geraden stets die eine einen solchen Kreisbogen berührt und die andere durch den eine Ecke der Figur bildenden Mittelpunkt des zugehörigen Kreises geht; die Entfernung dieser Geraden ist dann immer  $= b$ , und die beiden Stütznormalen fallen zusammen. Diesen Bedingungen entspricht insbesondere ein reguläres Bogen-neck von ungerader Seitenzahl, d. h. eine Figur, welche von Kreisbögen gebildet wird, die aus den Ecken eines regulären necks ungerader Seitenzahl als Mittelpunkten über den gegenüber liegenden Seiten als Sehnen beschrieben sind. Wenn z. B. bei dem regulären Bogenfünfeck

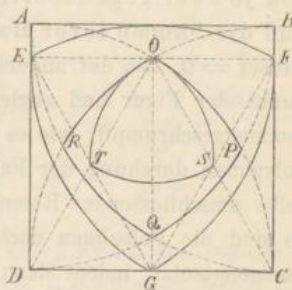


die eine der beiden parallelen Geraden den aus  $C$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebenen Bogen  $EA$  in  $A$  berührt, so berührt die andere den aus  $A$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebene Bogen  $CD$  in  $C$ ; wird die erste um  $A$  rechts herum gedreht bis sie den aus  $D$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebenen Bogen  $AB$  in  $A$  berührt, so wälzt sich die andere auf dem Bogen  $CD$  ab bis zur Berührung in  $D$ ; einer Wälzung der ersten auf dem Bogen  $AB$  entspricht dann eine Drehung der zweiten um  $D$  bis zur Berührung des aus  $B$  mit dem Halbmesser  $b$  beschriebenen Bogens  $DE$  u. s. f.

Als Beispiel werde der einfachste Fall näher betrachtet, dass das Bogenneck ein Bogendreieck und der Rhombus ein Quadrat ist, also das Elementenprofilpaar:

Gleichseitiges Bogendreieck im Quadrat. Die Seite des Quadrats  $ABCD$  (Fig. 12) ist  $=$  dem Halbmesser  $b$  der Seiten des Bogendreiecks  $EFG$   $=$  der Seitenlänge des Sehnendreiecks  $EFG$  des letzteren. In der gezeichneten Lage beider Figuren, bei welcher eine Seite  $EF$  des Sehnendreiecks mit zwei Seiten  $AB, CD$  des Quadrats parallel ist und die gegenüberliegende Ecke  $G$  des Dreiecks im Mittelpunkte der einen  $CD$  dieser Quadratseiten liegt, ist der Mittelpunkt  $O$  von  $EF$  der Durchschnittspunkt der 4 Stütznormalen, also der Pol. Wird das Bogendreieck bei beständiger Umschliessung durch das Quadrat etwa links herum gedreht, bis  $FG$  gegen  $BC$  so liegt wie in der Figur  $EF$  gegen  $AB$  und somit auch  $E$  mit dem Mittelpunkte von  $AD$  zusammenfällt, was eine Drehung um den Winkel  $GFC = 30^\circ$  erfordert, so bewegt sich  $E$  auf  $AD$ ,  $G$  auf  $DC$ , also die Strecke  $EG$  im rechten Winkel  $ADC$ , und es ist also (§. 12) die Bewegung identisch mit dem Rollen eines Kreises vom Durchmesser  $EG = DO = b$  als Polbahn der Strecke oder des Bogendreiecks in einem Kreise vom Halbmesser  $b$  als Polbahn des Winkels oder des Quadrats, ersterer (von welchem  $OS$  in Fig. 12 ein Bogen ist) aus dem Mittelpunkte  $T$  von  $EG$ , letzterer (von welchem  $OP$  in Fig. 12 ein Bogen ist) aus  $D$  als Mittelpunkt beschrieben. Aus der neuen Lage kann dann das Bogendreieck in gleichem Sinne weiter gedreht werden bis (abermals nach einer Drehung von  $30^\circ$ )  $EG$  gegen  $DC$  so liegt wie in der Figur  $EF$  gegen  $AB$  u. s. f. So ergibt sich schliesslich, dass die Polbahn des Bogendreiecks ein auch gleichseitiges Bogendreieck  $OST$  ist, dessen Ecken in den Mittelpunkten der Seiten des dem gegebenen Bogendreieck zugehörigen Sehnendreiecks liegen, und dass die Polbahn des Quadrats ein gleichseitiges Bogenviereck  $OPQR$  ist, beschrieben aus den Ecken des gegebenen Quadrats als Mittelpunkten mit seiner Seitenlänge als Halbmesser. Um bei stetiger Bewegung die ursprüngliche gegenseitige Lage beider Figuren wieder herbeizuführen, ist die  $\frac{360}{30} = 12$ malige Abwälzung einer Seite der einen auf einer Seite der anderen Polbahn erforderlich; der Berührungspunkt beider muss also die

Fig. 12.



3seitige Polbahn des Bogendreiecks 4mal, die 4seitige des Quadrats 3mal durchlaufen. Die Punktbahnen sind wieder aus Ellipsenbögen resp. aus Cardioidenbögen zusammengesetzt.\* —

Figuren von constanter Breite  $b$  können allgemeiner aus Kreisbögen so gebildet werden, dass die Mittelpunktswinkel von je zwei gegenüberliegenden derselben Scheitelwinkel sind, und die Summe ihrer Halbmesser  $= b$  ist. Wenn einer dieser Halbmesser  $= 0$ , also der andere  $= b$  ist, so ist der eine Bogen zu einem Eckpunkt der Figur und zugleich zum Mittelpunkt des anderen Bogens zusammengeschrumpft, wie es bei den zuvor besprochenen regulären Bogenpolygonen der Fall ist. Werden eine solche Figur und ein dieselbe umschliessender Rhombus als Profile eines Elementenpaares benutzt, so sind die Polbahnen nach wie vor aus Bögen Cardanischer Kreise zusammengesetzt, indem dann, wie schon im §. 12 allgemein nachgewiesen wurde, die gegenseitige Bewegung in ihren einzelnen Theilen immer auf die einer gewissen Strecke der einen in einem gewissen Winkel der anderen Figur zurückgeführt werden kann. Beispielsweise können dergleichen Figuren von constanter Breite aus einem gleichschenkligen Dreieck  $GSG'$  (Fig. 13—15) auf verschiedene Art hervorgehen wie folgt.

Sind die gleichen Seiten  $SG, SG'$  kleiner, als die dritte Seite  $GG'$  (Fig. 13), so entspricht der Forderung das Bogenviereck, welches gebildet

Fig. 13.

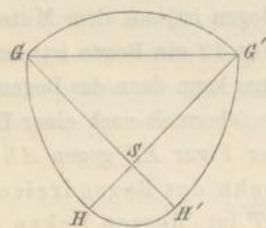
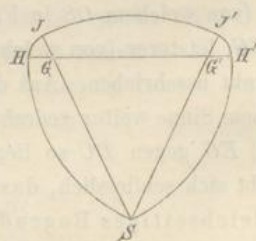


Fig. 14.



wird von den Kreisbögen  $GH$  aus  $G'$ ,  $G'H'$  aus  $G$ ,  $GG'$  und  $HH'$  aus  $S$  beschrieben:  $b = GG' = GH' = G'H$ .

Sind die gleichen Seiten  $SG, SG'$  grösser, als die dritte Seite (Fig. 14), so kann ein Bogenfünfeck von constanter Breite  $b$  gebildet werden durch die Kreisbögen  $SH$  aus  $G'$ ,  $S'H'$  aus  $G$ ,  $HJ$  aus  $G$ ,  $H'J'$  aus  $G'$ ,  $JJ'$  aus  $S$  beschrieben, und ist dann  $b = HH' = SJ = S'J'$ . — Oder auch, wenn

\* Siehe Reuleaux's „theoretische Kinematik“, Tafel II.

$GOG'$  (Fig. 15) ein gleichschenkliges Dreieck ist, dessen gleiche Seiten  $OG, OG'$  halb so lang wie die des Dreiecks  $GSG'$  sind, kann ein der Aufgabe entsprechendes Bogenfünfeck gebildet werden durch die Bögen  $SH$  aus  $G'$ ,  $SH'$  aus  $G$ ,  $GG'$  aus  $S$ , und endlich, da hiernach  $OG = OG' = OH = OH'$  ist, durch die aus  $O$  beschriebenen Bögen  $GH$  und  $G'H'$ ; es ist dann  $b = SG = SG' = GH' = G'H$ .

Endlich kann die solcher Weise erhaltene Figur von constanter Breite  $b$  in eine Figur von constanter Breite  $= b + 2x$  transformirt werden dadurch, dass bei unveränderten Mittelpunkten die Halbmesser aller Kreisbögen um  $x$  vergrößert, etwaige Eckpunkte also überhaupt durch Kreisbögen vom Halbmesser  $x$  ersetzt werden. So geht z. B. aus dem Bogenfünfeck  $GG'H'SH$  von constanter Breite  $b$  in Fig. 15 das daselbst punktirte Bogenachtheck  $gg'\gamma'h's'sh\gamma$  von constanter Breite  $= b + 2x$  hervor, wenn  $Gg = G'g' = G\gamma = \gamma'h' = h's' = s'h = \gamma\gamma' = x$  ist.



$\beta$ . Bestimmung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen.

### §. 15. Allgemeine Hilfssätze und Vorbemerkungen.

Während die in den vorigen Paragraphen unter  $\alpha$ . behandelte Aufgabe, betreffend die Ermittlung der Polbahnen für gegebene Elementenprofile, insofern eine ganz bestimmte war, als die gegebenen Elemente eines selbständig geschlossenen zwangläufigen Paares eine bestimmte gegenseitige Beweglichkeit derselben bedingen, kann umgekehrt eine gewisse gegenseitige Beweglichkeit der Elemente eines Paares im Allgemeinen durch unendlich viele verschiedene Formen derselben bewirkt werden, und wird deshalb auch die hier unter  $\beta$ . jetzt vorliegende Aufgabe zu einer bestimmten erst durch gewisse willkürliche Annahmen oder durch Bedingungen, denen die gesuchten Elementenprofile ausser ihrer Zugehörigkeit zu gegebenen Polbahnen genügen sollen. Damit sind dann auch verschiedene zum Ziele führende Methoden zu unterscheiden, die aber alle auf dem einen oder anderen der folgenden aus dem Vorhergehenden bekannten, die Elementenprofile charakterisirenden Sätze beruhen:

1) Jedes der beiden Profile ist die Umhüllungslinie aller Lagen, die das andere nach und nach einnimmt, wenn die mit

ihm verbundene Polbahn auf der mit ersterem verbundenen Polbahn rollt.

2) Die gemeinschaftliche Normale der beiden Profile in einem Berührungspunkt derselben geht durch den Pol, d. h. durch den Berührungspunkt der beiden Polbahnen.

Die Elementenprofile werden hier nur mit Rücksicht auf einen einzigen Berührungspunkt betrachtet, abgesehen von den übrigen oder von sonstigen Hilfsmitteln, die nöthig sind, um das betreffende Elementenpaar zu einem zwangsläufig geschlossenen zu machen. Entsprechende Punkte der beiden Profile oder der beiden Polbahnen sollen solche Punkte derselben heissen, mit denen sie bei ihrer gegenseitigen Bewegung zur Berührung kommen.

Zur Vermeidung wiederholter Erklärungen werden in den folgenden Paragraphen die Polbahnen stets mit  $B$  und  $B'$ , ihr augenblicklicher Berührungspunkt (der Pol) mit  $P$ , die zu  $B$  und  $B'$  gehörigen Profile beziehungsweise mit  $F$  und  $F'$ , ihr augenblicklicher Berührungspunkt mit  $p$  bezeichnet. Entsprechende Punkte der beiden Profile seien  $a$  und  $a'$ ,  $b$  und  $b'$ ,  $c$  und  $c'$  . . . ., entsprechende Punkte der Polbahnen seien  $\alpha$  und  $\alpha'$ ,  $\beta$  und  $\beta'$ ,  $\gamma$  und  $\gamma'$  . . .; und zwar seien  $a$  und  $a'$  die Punkte, mit denen sich  $F$  und  $F'$  dann berühren, wenn  $B$  und  $B'$  sich mit den Punkten  $\alpha$  und  $\alpha'$  berühren,  $b$  und  $b'$  die entsprechenden Punkte von  $F$ ,  $F'$ , die in gleicher Weise den entsprechenden Punkten  $\beta$  und  $\beta'$  von  $B$ ,  $B'$  entsprechen u. s. f. Indem nun nach obigem Satze unter 2), wenn sich die Profile mit entsprechenden Punkten  $a$ ,  $a'$  berühren, ihre Normalen für diese Punkte, die entsprechende Normalen heissen sollen, zusammenfallend durch den Pol gehen, in welchem dann zugleich die entsprechenden Punkte  $\alpha$ ,  $\alpha'$  der Polbahnen liegen und letztere eine gemeinsame Tangente haben, also von jenen zusammenfallenden Normalen unter gleichen Winkeln geschnitten werden, ergibt sich der allgemeine Satz:

3) Entsprechende Normalen der Profile schneiden die zugehörigen Polbahnen in entsprechenden Punkten derselben unter gleichen Winkeln, und es sind die zwischen den Profilen und ihren Polbahnen enthaltenen Strecken dieser entsprechenden Normalen gleich lang. —

Sollten die Elementenprofile eine rein rollende Bewegung gegen einander haben, so müsste ihr Berührungspunkt  $p$  immer mit dem Pol  $P$  zusammenfallen, die Elementenprofile müssten also mit den Polbahnen, die Oberflächen der Elemente mit ihren Axoiden identisch sein. Letztere, materiell ausgeführt, wären zu dem Ende durch eine hinlänglich grosse Kraft

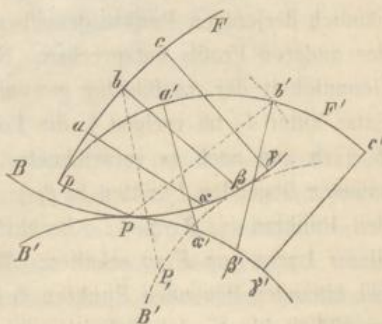
gegen einander zu pressen, um durch die entsprechende Reibung das Gleiten zu hindern; ein Specialfall, der bei sogenannten Reibungsrädern verwirklicht ist.

Von praktischem Interesse ist die Bestimmung der Elementenprofile für gegebene Polbahnen besonders hinsichtlich der Zahnprofile von Zahnrädern, deren gegebene Polbahnen, hier sogenannte Theilrisse, um feste Punkte in ihrer gemeinsamen Ebene drehbar sind. Die Willkürlichkeit der Annahmen, durch welche, wie oben bemerkt, die Aufgabe erst bestimmt und welche in allen Fällen praktisch beschränkt wird durch die Forderung, dass keins der Profile eine Spitze oder gar Schleife bilden oder das andere in irgend einer Lage ausser der Berührung zugleich schneiden darf, wird im Falle der Zahnprofile noch durch weitere praktische Rücksichten eingeschränkt, oder es werden wenigstens die benutzbaren Profiltheile dadurch beschränkt, z. B. durch die Forderung eines nach Grösse und Richtung nur wenig veränderlichen Drucks der Zähne aufeinander, einer nur mässig grossen Differenz der miteinander in Berührung kommenden Bogenlängen beider Profile (dem Betrag ihrer gegenseitigen Gleitung entsprechend) u. s. f. Die Berücksichtigung dieser und anderer Nebenbedingungen gehört theils in das Gebiet des Maschinenbaues, theils in andere Abschnitte dieses Buches.

§. 16. Bestimmung des einen Profils zu dem gegebenen anderen.

Wenn das Profil  $F'$  bezüglich auf seine Gestalt und Lage gegen die Polbahn  $B$  gegeben ist, und das der anderen Polbahn  $B'$  zugehörige Profil  $F'$  in der Lage gezeichnet werden soll, in der sich  $B$  und  $B'$  im Punkte  $P$  berühren (Fig. 16), so ist ein Punkt des Profils  $F'$ , nämlich sein Berührungspunkt mit  $F$ , der Fusspunkt  $p$  des von  $P$  auf  $F$  gefällten Perpendikels gemäss dem Satze unter 2) im vorigen §. Um aber den einem beliebigen Punkte  $b$  von  $F$  entsprechenden Punkt  $b'$  von  $F'$  zu finden, werde  $b\beta$  normal zu  $F$  gezogen bis zum Schnittpunkte  $\beta$  mit  $B$ , und der Bogen  $P\beta'$  von  $B'$  dem Bogen  $P\beta$  von  $B$  gleich gemacht (durch Abtragung hinlänglich kleiner Sehnen); dem vorigen §. unter 3) zufolge muss dann  $b'$  in dem

Fig. 16.



Kreise liegen, der aus dem Mittelpunkte  $\beta'$  mit dem Halbmesser  $\beta b$  beschrieben wird. Zeichnet man ferner die Polbahn  $B'$  in der Lage  $B'$ , in der sie mit ihrem Punkte  $\beta'$  die Polbahn  $B$  im Punkte  $\beta$  derselben berührt, so ist, wenn der Bogen  $\beta P$ , von  $B'$  = dem Bogen  $\beta' P$  von  $B'$  ist,  $P$ , der Ort des Punktes  $P$  von  $B'$ , der dem Orte  $b$  des Punktes  $b'$  entspricht, und muss folglich für die Lage, in der sich die Polbahnen in  $P$  berühren, der Punkt  $b'$  auch in dem Kreise liegen, der aus dem Mittelpunkte  $P$  mit dem Halbmesser  $Pb$  beschrieben wird. Auf solche Weise können beliebig viele, gewissen Punkten  $a, b, c \dots$  von  $F$  entsprechende Punkte  $a', b', c' \dots$  von  $F'$  als Schnittpunkte von je zwei Kreisen erhalten werden, von denen die einen aus gewissen durch  $a, b, c \dots$  bestimmten Punkten  $a', \beta', \gamma' \dots$  von  $B'$ , die anderen aus dem Punkte  $P$ , und zwar mit Halbmessern beschrieben werden, die in der dargelegten Weise gleichfalls durch die Punkte  $a, b, c \dots$  bestimmt sind.

Nach dem Satze 3) im vorigen §. können auch, nachdem die Normalen  $aa, b\beta \dots$  von  $F$  gezogen und die Bögen  $Pa', a'\beta' \dots$  von  $B'$  den Bögen  $Pa, a\beta \dots$  von  $B$  gleich gemacht sind, von  $a', \beta' \dots$  aus die Geraden  $a'a', \beta'b' \dots$  so gezogen werden, dass sie die Polbahn  $B'$  unter denselben Winkeln schneiden, unter denen die Polbahn  $B$  beziehungsweise von  $aa, \beta b \dots$  geschnitten wird, wonach dann nur  $a'a' = aa, \beta'b' = \beta b \dots$  zu machen ist, um die Punkte  $a', b' \dots$  von  $F'$  als die entsprechenden der Punkte  $a, b \dots$  von  $F$  zu erhalten.

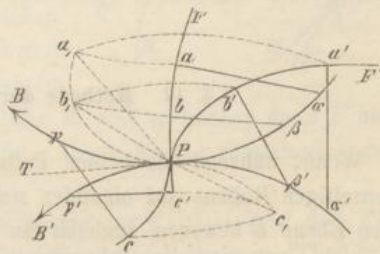
Diese beiden Verfahrungsweisen, welche das Profil  $F'$  als Punktecurve (Ort gewisser Punkte) bestimmen, sind indessen zeitraubend und lästig, besonders im allgemeinen Falle beliebiger (nicht kreisförmiger) Polbahnen. Leichter kann es als Umhüllungcurve mit beliebiger Annäherung gefunden werden, wenn, wie gewöhnlich, nicht zugleich die Ermittlung bestimmter, nämlich derjenigen Punkte desselben bezweckt wird, die gewissen Punkten des anderen Profils entsprechen. Nichts wäre freilich an Leichtigkeit und Genauigkeit der Ausführung gewonnen, wenn man gemäss dem allgemeinen Satze unter 1) im vorigen §. die Polbahn  $B$  sammt dem zugehörigen Profil  $F$  nach und nach so verzeichnete, dass sie mit verschiedenen, nahe zusammen liegenden Punkten  $a, \beta, \gamma \dots$  die Polbahn  $B'$  in den entsprechenden Punkten  $a', \beta', \gamma' \dots$  berührt, um so  $F'$  als Umhüllungslinie aller dieser Lagen von  $F$  zu erhalten. Wesentlich einfacher ist es aber, in nahe bei einander liegenden Punkten  $a, b, c \dots$  (Fig. 16) die Normalen von  $F$  zu ziehen bis zu den Schnittpunkten  $a, \beta, \gamma \dots$  mit  $B$ , dann die Bögen  $Pa', a'\beta', \beta'\gamma' \dots$  von  $B'$  den Bögen  $Pa, a\beta, \beta\gamma \dots$  von  $B$  gleich zu machen, aus  $a', \beta', \gamma' \dots$  als Mittelpunkten mit den Halbmessern  $aa, \beta b,$

$\gamma c \dots$  Kreisbögen zu beschreiben und deren Umhüllungscurve zu zeichnen. Letztere ist das gesuchte Profil  $F'$  mit einer Annäherung, die derjenigen entspricht, mit welcher  $F$  als Umhüllungsline der aus  $\alpha, \beta, \gamma \dots$  mit den Halbmessern  $\alpha\alpha, \beta\beta, \gamma\gamma \dots$  beschriebenen Kreise sich verzeichnen lässt, und die somit durch Vervielfältigung der angenommenen Punkte  $a, b, c \dots$  beliebig gesteigert werden kann. —

Von sogenannten Zahnprofilen  $F, F'$ , deren Polbahnen (Theilrisse)  $B, B'$  um feste Punkte  $A, A'$  in ihrer gemeinsamen Ebene  $E$  drehbar sind, kann das eine  $F'$  durch die Punkte  $a', b', c' \dots$  desselben, die gewissen Punkten  $a, b, c \dots$  des gegebenen anderen entsprechen, sehr zweckmässig auch durch Vermittelung der entsprechenden Eingriffspunkte, d. h. derjenigen Punkte  $a, b, c, \dots$  der Ebene  $E$  gefunden werden, in denen sich die Punkte  $a, b, c \dots$  des gegebenen Profils  $F$  befinden, wenn es in ihnen von dem gesuchten Profil  $F'$  berührt wird. Zu dem Ende ist zunächst zu bemerken, dass die Theilrisse, auch wenn sie nicht kreisförmig sind, sich beständig in der Geraden  $AA'$  berühren, weil ihre gegenseitige Rollung in einer Folge von elementaren Drehungen um ihre jeweiligen Berührungspunkte  $P$  besteht, diese aber nur dann die Resultirenden elementarer Drehungen um  $A$  und  $A'$  sein können, wenn jedes  $P$  in der Geraden  $AA'$  liegt. Wenn sich nun  $F$  und  $F'$  mit den entsprechenden Punkten  $a, a'$  im

Punkte  $a$ , (Fig. 17) der Ebene  $E$  berühren,  $B$  und  $B'$  also mit den entsprechenden Punkten  $a, a'$  im Pol  $P$ , der gefunden wird durch Abtragung der Strecke  $AP = Aa$  auf der Geraden  $AA'$ , so sind die entsprechenden Normalen  $aa$  und  $a'a'$  von  $F$  und  $F'$  in die Lage  $a, P$  gekommen; es ist also  $a$ , der Durchschnittspunkt des aus  $A$  mit dem Halbmesser  $Aa$  und des aus  $P$  mit dem Halbmesser  $Pa$  beschriebenen Kreises, so dass, wenn hiernach  $a$ , construiert ist, dann auch  $a'$  als Durchschnittspunkt des aus  $A'$  mit dem Halbmesser  $A'a'$ , und des aus  $a$  mit dem Halbmesser  $aa$  beschriebenen Kreises gefunden werden kann. Ebenso sind in Fig. 17, worin die Theilrisse  $B, B'$  als Kreise (Theilkreise) angenommen sind, so dass  $P$  eine unveränderliche Lage in  $AA'$  hat, die den Punkten  $b, c$  von  $F$  entsprechenden Punkte  $b', c'$  der Eingriffslinie (d. i. des Ortes der Eingriffspunkte)  $a, b, P, c$ , und damit die entsprechenden Punkte  $b', c'$  des Profils  $F'$  construiert worden.

Fig. 17.





Die Eingriffslinie lässt erkennen, wie sich die Richtung des Zahndrucks nach und nach ändert: in Fig. 17, wenn  $F$  das getriebene,  $F'$  das treibende Zahnprofil und  $PT$  gemeinsame Tangente der hier kreisförmigen Theilrisse ist, von  $c, P$  durch  $PT$  und  $Pb$ , bis  $Pa$ , während der Angriffspunkt (Berührungspunkt) sich längs  $F$  von  $c$  bis  $a$ , längs  $F'$  von  $c'$  bis  $a'$  bewegt. Die gegenseitige Bewegung der Profile ist (wie immer bei Ausschluss der im vorigen §. erwähnten Reibungsräder) eine theils rollende, theils gleitende; der Betrag des Gleitens ist auf der einen Seite von  $AA' = Pc - Pc'$ , auf der anderen  $= Pa' - Pa$ . —

Aus dem Satze unter 3) im vorigen §. folgt, dass, wenn das gegebene Profil seine Polbahn schneidet, auch das andere seine Polbahn und zwar unter demselben Winkel schneidet. Die betreffenden Durchschnittspunkte sind entsprechende Punkte der beiden Profile und zugleich der beiden Polbahnen, indem die einen und die anderen sich in diesen Punkten berühren, während letztere mit dem Pol zusammenfallen: siehe Fig. 17, woselbst die Profile, wie bei Zahnprofilen üblich, ihre Polbahnen rechtwinklig schneiden.

Ist die Polbahn  $B$  selbst als das eine Profil  $F$  gegeben, so ist die andere Polbahn  $B'$  das zugehörige Profil  $F'$ .

Ist das Profil  $F$  als ein Punkt gegeben, so ist  $F'$  die Bahn dieses Punktes beim Rollen von  $B$  auf  $B'$ . Bei Zahnradern entspricht diesem Specialfalle die sogenannte Punktverzahnung.

### §. 17. Methode der Hülfpolbahnen.

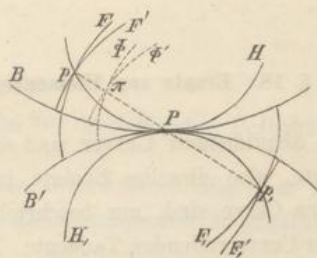
Wenn, während die beiden Polbahnen  $B$  und  $B'$  vorbehaltlich ihres gegenseitigen Rollens auf einander sich übrigens beliebig in ihrer gemeinsamen Ebene  $E$  bewegen, zugleich ein Punkt  $p$  in dieser Ebene sich so bewegt, dass die entsprechenden Elemente seiner relativen Bahnen gegen  $B$  und gegen  $B'$  stets senkrecht zu seiner Verbindungslinie mit dem Berührungspunkte  $P$  von  $B$  und  $B'$  gerichtet sind, dass also stets seine elementare Bewegung gegen  $B$  in der Drehung um einen gewissen Punkt  $m$ , gegen  $B'$  in der Drehung um einen gewissen Punkt  $m'$  der Geraden  $Pp$  besteht, so sind die relativen Bahnen von  $p$  gegen  $B$  und  $B'$  entsprechende Profile  $F$  und  $F'$  gemäss dem die letzteren charakterisirenden Satze unter 2) in §. 15. Hierauf beruht das Verfahren der Verzeichnung von Elementenprofilen für gegebene Polbahnen vermittels sogenannter Hülfpolbahnen, und zwar entspricht dasselbe dem besonderen Falle, dass die Pole  $m, m'$  für die

relativen Bewegungen des beschreibenden Punktes  $p$  gegen die Polbahnen  $B$  und  $B'$  beständig mit dem Pol  $P$  für die gegenseitige Bewegung der letzteren zusammenfallen. Unter einer Hülfspolbahn wird nämlich eine Linie  $H$  verstanden, welche, während die beiden gegebenen Polbahnen  $B, B'$  auf einander rollen, in solcher Weise mitrollt, dass sie  $B$  und  $B'$  beständig in ihrem Berührungspunkte, dem Pol  $P$ , berührt. Die elementaren relativen Bewegungen irgend eines mit einer solchen Linie  $H$  fest verbundenen Punktes  $p$  gegen  $B$  und  $B'$  sind elementare Drehungen verschiedener Grösse um den Pol  $P$ , so dass die relativen Bahnen  $F$  und  $F'$  von  $p$  gegen  $B$  und  $B'$  als zugehörige Elementenprofile dienen können.

Liegt  $H$  ausserhalb  $B$  und  $B'$  auf der Seite von  $B$ , d. h.  $B$  zwischen  $B'$  und  $H$  (Fig. 18), und liegt  $p$  in  $H$  selbst oder jenseits  $H$  ( $H$  zwischen  $B$  und  $p$ ), so liegen  $F$  und  $F'$  ganz auf denselben Seiten von  $B$  und  $B'$ , so dass auf den Gegenseiten Raum für weitere Profile  $F$ , (mit  $B$  verbunden) und  $F'$ , (mit  $B'$  verbunden) bleibt, die vermittels einer zweiten Hülfspolbahn  $H$ , und eines damit verbundenen Punktes  $p$ , unter solchen Umständen beschrieben werden, dass  $H$ , auf dieser anderen Seite ausserhalb  $B$  und  $B'$  (Fig. 18) und der Punkt  $p$ , entweder in  $H$ , selbst oder jenseits  $H$ , ( $H$ , zwischen  $B'$  und  $p$ ), liegt. Wenn insbesondere, wie in Fig. 18,  $p$  in  $H$ ,  $p$ , in  $H$ , selbst liegt, so erreichen die Profile  $F$  und  $F'$ , die Polbahn  $B$  von entgegengesetzten Seiten unter rechten Winkeln, ebenso  $F'$  und  $F''$ , die Polbahn  $B'$ , und es können dann  $F$  und  $F''$ ,  $F'$  und  $F''$  je zu einem einzigen stetig (ohne Knick) zusammenhängenden Profil vereinigt werden.

Bei der Anwendung dieses Verfahrens zur Profilierung der Zähne gewöhnlicher Zahnräder mit kreisförmigen Polbahnen (Theilkreisen) benutzt man auch Kreise, die sogenannten Radkreise, als Hülfspolbahnen, so dass die Profile, von je einem Punkte dieser Radkreise selbst beschrieben, auf den einen Seiten der Theilkreise Epicykloiden, auf den anderen Seiten Hypocykloiden sind. Wenn solcher Weise die Zähne von mehr als zwei Rädern mit Hilfe derselben Radkreise (allgemein vermittels derselben Hülfspolbahnen) profilirt werden, so bilden dieselben eine Gruppe, einen sogenannten Satz, wovon je zwei zu einem Elementenpaar combinirt werden können. Solche Räder heissen deshalb Satzräder. Sollte nur eins derselben,  $R$ , mit jedem der übrigen  $R', R'' \dots$  zu richtigem Eingriff ge-

Fig. 18.



bracht werden können, so dürften die beiden Hilfskreise  $H, H$ , verschieden sein, wenn nur mit Hilfe desselben Kreises  $H$  die Zähne von  $R$  innerhalb, die Zähne aller übrigen Räder ausserhalb des Theilkreises, und ebenso mit demselben Kreise  $H$ , die Zähne von  $R$  ausserhalb, die aller übrigen innerhalb des Theilkreises profilirt werden. Sollen aber je zwei dieser Räder zu einem Elementenpaar combinirt werden können, so müssen die Hilfskreise  $H, H$ , einander gleich sein.

Wenn die Hülfsbahn zu einem einzelnen Punkt zusammenschrumpft, mit dem der beschreibende Punkt  $p$  zusammenfällt, so beschreibt dieser die Polbahnen  $B$  und  $B'$  selbst als zusammengehörige Profile.

Fällt die Hülfsbahn  $H$  mit  $B$  zusammen, so reducirt sich  $F$  auf einen Punkt  $p$ , während  $F'$  die Bahn dieses Punktes beim Rollen von  $B$  auf  $B'$  ist. Ebenso wenn  $H$ , mit  $B'$  zusammenfällt, reducirt sich  $F'$  auf einen Punkt  $p'$ , während  $F$ , die Bahn des letzteren beim Rollen von  $B'$  auf  $B$  ist. Bei Zahnradern entsteht so wieder die schon im vorigen §. erwähnte Punktverzahnung.

#### §. 18. Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven.

Aequidistante Curven sind solche, welche dieselben Krümmungsmittelpunkte, also dieselbe Evolute haben, oder welche Evolventen derselben dritten Curve sind, nur beschrieben von verschiedenen Punkten einer auf dieser Curve rollenden Tangente. Die Entfernung der beschreibenden Punkte ist die Entfernung der äquidistanten Curven, und gleichzeitige Oerter jener Punkte heissen entsprechende Punkte dieser Curven.

Sind nun zwei Profile  $F, F'$  für die Polbahnen  $B, B'$  nach irgend einem Verfahren gefunden, so können zwei Curven  $\Phi$  und  $\Phi'$  (Fig. 18) auch als Profile dienen, wenn  $\Phi$  mit  $F$ ,  $\Phi'$  mit  $F'$  der Art äquidistant ist, dass für entsprechende Punkte  $p, \pi$  die Krümmungshalbmesser von  $F$  und  $\Phi$  dieselbe constante Differenz haben wie die Krümmungshalbmesser von  $F'$  und  $\Phi'$ , und zwar in gleichem oder entgegengesetztem Sinne, jenachdem  $F$  und  $F'$  in den entsprechenden Punkten, mit denen sie sich in  $p$  berühren, in gleichem oder entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind, d. h. auf derselben oder auf verschiedenen Seiten ihrer gemeinsamen Tangente liegen. Denn da die Normalen äquidistanter Curven für entsprechende Punkte zusammenfallen, so ist die gemeinsame Normale  $pP$  von  $F, F'$  stets auch gemeinsame Normale von  $\Phi, \Phi'$ , geht also auch letztere beständig durch den Pol  $P$ .

Die Ersetzung von Elementenprofilen durch Aequidistante geschieht bei Verzahnungen besonders dann, wenn das eine Profil ein Punkt ist; die Aequidistanten desselben sind concentrische Kreise um ihn als Mittelpunkt. Aus der Punktverzahnung geht so die Triebstockverzahnung hervor. Zu dem kreisförmigen Querschnitte eines solchen Triebstocks als Elementenprofil  $F$  der Polbahn  $B$  gehört als entsprechendes Profil  $F'$  der anderen Polbahn  $B'$  eine der beiden Umhüllungslinien aller Lagen, die der Kreis beim Rollen von  $B$  auf  $B'$  nach und nach einnimmt, und welche mit der dabei vom Mittelpunkte jenes Kreises beschriebenen Curve beiderseits in Entfernungen = dem Halbmesser des Kreises äquidistant sind.

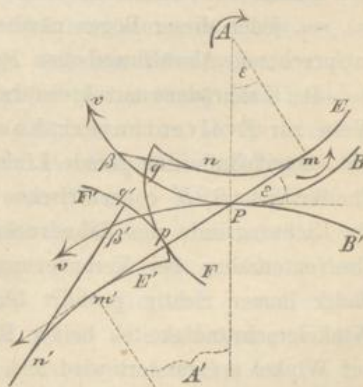
Von demselben Princip war auch schon in §. 14 Gebrauch gemacht worden, um aus dem Elementenprofil  $GG'H'SH$  (Fig. 15) ein anderes zu erhalten, bei dem die Ecken  $G, G', S$  durch Kreisbögen  $g\gamma, g'\gamma', ss'$  ersetzt sind. — Allgemein wird eine Curve  $\Phi$  als Aequidistante einer Curve  $F$  erhalten, indem sie als Umhüllungslinie von Kreisen gezeichnet wird, die aus den Punkten von  $F$  als Mittelpunkten mit gleichen Halbmessern beschrieben werden.

### §. 19. Kreisevolventen als Elementenprofile für kreisförmige Polbahnen.

Ausser den in den vorigen Paragraphen besprochenen allgemein gültigen Verfahrungsweisen der Bestimmung von Elementenprofilen zu gegebenen Polbahnen können in besonderen Fällen noch andere Methoden dazu dienen, von denen namentlich bei kreisförmigen Polbahnen eine bemerkenswerth ist, die auf folgender Erwägung beruht.

Es seien  $F, F'$  zwei Elementenprofile, die den (vorläufig beliebigen) Polbahnen  $B, B'$  entsprechen, und es sei  $E$  die Evolute von  $F, E'$  die Evolute von  $F'$  (Fig. 19). Wenn  $B'$  (mit  $F'$  und  $E'$ ) auf  $B$  rollt, so ist die durch den Pol  $P$  gehende Stütznormale (gemeinsame Normale von  $F$  und  $F'$  in ihrem Berührungspunkte) beständig zugleich gemeinsame Tangente von  $E$  und  $E'$ , und indem ein gewisser Punkt  $p$  derselben gegen  $B$  die Curve  $F$ , gegen  $B'$  die Curve  $F'$  beschreibt, bewegt

Fig. 19.



sie sich wie ein die Evoluten  $E, E'$  verbindender gespannter Faden, der von der einen sich ab- und auf die andere sich aufwickelt, etwa längs den Bögen  $mn$  von  $E$  und  $m'n'$  von  $E'$ , während die Polbahnen  $B, B'$  mit den gleichen Bögen  $P\beta, P\beta'$  auf einander rollen und der Berührungspunkt der Profile  $F, F'$  in  $F$  den Bogen  $pq$ , in  $F'$  den Bogen  $p'q'$  durchläuft. Wenn sich also umgekehrt zwei Curven  $E, E'$  so verzeichnen liessen, dass beim Rollen von  $B, B'$  auf einander

1) ihre gemeinsame Tangente  $mm', nn' \dots$  stets durch den Pol geht, und dass

2) immer  $nn' = mm' \pm (\text{arc. } m'n' - \text{arc. } mn)$  ist, so würden als Elementenprofile irgend zwei Evoluten der Curven  $E, E'$  dienen können, die von demselben Punkte  $p$  ihrer gemeinsamen Tangente beschrieben werden.

Nun kann man der Bedingung 1) zwar immer leicht Genüge leisten, indem man durch je zwei entsprechende Punkte  $\beta, \beta'$  von  $B, B'$  gerade Linien von gleicher Neigung gegen  $B$  resp.  $B'$  zieht und  $E$  als Umhüllungslinie der durch die Punkte  $\beta, E'$  als Umhüllungslinie der durch die Punkte  $\beta', E$  gezogenen Geraden verzeichnet. Indessen lässt sich nicht allgemein behaupten, dass diese Curven  $E, E'$  auch der Bedingung 2) entsprechen. Offenbar ist es aber dann der Fall, wenn die Polbahnen  $B, B'$  kreisförmig sind und von den durch je zwei ihrer entsprechenden Punkte  $\beta, \beta'$  gezogenen Geraden unter denselben gleichen Winkeln  $\varepsilon$  geschnitten werden, so dass die Umhüllungslinien  $E, E'$  der letzteren Kreise werden, die mit den Kreisen  $B, B'$  concentrisch sind und deren Halbmesser sich ebenso wie die der Kreise  $B, B'$  zu einander verhalten, indem sie beide im Verhältnisse  $\cos \varepsilon$  kleiner sind; denn es ist dann offenbar immer  $nn' = mm'$  und  $\text{arc. } m'n' = \text{arc. } mn$ , jeder dieser Bögen nämlich im Verhältnisse  $\cos \varepsilon$  kleiner, als der entsprechende Abwälzungsbogen  $P\beta = P\beta'$  der Polbahnen.

Bei Zahnrädern mit kreisförmigen Theilrissen gelangt man auf solche Weise zur Evolventenverzahnung, die dadurch ausgezeichnet ist, dass die Eingriffslinie eine gerade Linie (die gemeinsame Tangente der mit den Theilkreisen  $B, B'$  concentrischen Hilfskreise  $E, E'$ ) und folglich immer die Richtungslinie des Zahndrucks ist, sowie auch dadurch, dass solche Evolventenzähne bei Veränderung der Axenentfernung der betreffenden Räder immer richtig profilirt bleiben (stets demselben Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten beider Räder entsprechend), indem dadurch nur der Winkel  $\varepsilon$  verändert wird und beide Theilkreise in demselben Verhältnisse, wie  $\sec \varepsilon$ , grösser oder kleiner werden. Satzräder sind in diesem Falle solche, deren Zähne für gegebene Axenentfernungen demselben Winkel  $\varepsilon$  entsprechend profilirt sind.

Während die Theilkreise  $B, B'$  um ihre festen Mittelpunkte  $A, A'$  in ihrer gemeinsamen Ebene sich drehen, so dass der in dieser Ebene unbewegliche Pol  $P$  in den beiden Theilkreisen mit derselben Geschwindigkeit  $v$  fortrückt, können die Profile  $F, F'$  auch als die relativen Bahnen betrachtet werden, die dabei beziehungsweise gegen  $B$  und  $B'$  ein Punkt  $p$  durchläuft, der in der ruhenden Ebene mit der Geschwindigkeit  $v \cos \varepsilon$  in einer Geraden  $mPm'$  beweglich ist, die im Pol  $P$  die gemeinsame Tangente der Theilkreise unter dem Winkel  $\varepsilon$  schneidet. Die Fusspunkte  $m, m'$  der von den Mittelpunkten  $A, A'$  auf diese Gerade gefällten Perpendikel (die Berührungspunkte der Geraden mit den Hilfskreisen  $E, E'$ ) sind dabei beständig die Pole für die relativen Bewegungen des Punktes  $p$  beziehungsweise gegen  $B$  und  $B'$ , sie haben also dieselben Bedeutungen wie die ebenso bezeichneten Punkte zu Anfang von §. 17. Wenn z. B.  $b$  und  $e$  die Halbmesser der Kreise  $B$  und  $E$  sind, so kann die geradlinige Bewegung des Punktes  $p$  mit der Geschwindigkeit  $v \cos \varepsilon$  im Sinne  $mm'$  (Fig. 19) durch ein Paar von Drehungen ersetzt werden, die mit der Winkelgeschwindigkeit

$$\frac{v \cos \varepsilon}{e} = \frac{v}{b}$$

um  $m$  und  $A$  im Sinne der in Fig. 19 beigezeichneten Pfeile stattfinden, und da diese Drehung um  $A$  eben diejenige ist, welche der eigenen Bewegung des Theilkreises  $B$  in der festen Ebene zukommt, so entspricht die Drehung um  $m$  der relativen Bewegung von  $p$  gegen  $B$ . — Statt als Punktcurven durch die Bewegung eines Punktes  $p$  kann man die Profile  $F, F'$  auch als Umhüllungscurven durch die Bewegung einer Geraden entstanden denken, die mit der Normalgeschwindigkeit  $v \cos \varepsilon$  in der festen Ebene sich so bewegt, dass sie gegen die Centrale  $AA'$  beständig unter dem Winkel  $\varepsilon$  geneigt, d. h. zu der Geraden  $mm'$  senkrecht bleibt. —

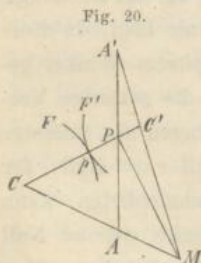
Die in ihren Durchschnittspunkten mit den Evolutenkreisen  $E, E'$  endigenden Evolventen  $F, F'$  können sich bei der Drehung der Theilkreise  $B, B'$  um ihre Mittelpunkte  $A, A'$  nur so lange berühren, als der Drehungs- oder Eingriffspunkt  $p$  in der Strecke  $mm'$  der Eingriffslinie liegt, da diese über  $m$  hinaus von  $F$ , über  $m'$  hinaus von  $F'$  unter spitzem Winkel geschnitten wird. Dadurch wird bei gegebenem Winkel  $\varepsilon$  die zulässige Verlängerung der Profile  $F, F'$  oder bei gegebenen Profillängen die zulässige Verkleinerung des Winkels  $\varepsilon$  begrenzt. Der Grenzfall  $\varepsilon = \text{Null}$ , für welchen  $E$  und  $E'$  beziehungsweise mit  $B$  und  $B'$  zusammenfielen, kann deshalb nicht verwirklicht werden, weil dabei die Strecke  $mm' = \text{Null}$  würde und die Profile  $F, F'$  auf Punkte der Theilkreise beschränkt werden müssten. Dem entgegengesetzten Grenzfall  $\varepsilon = 90^\circ$ , in dem die Kreise  $E, E'$  sich auf ihre Mittelpunkte  $A, A'$  reduciren und die Profile  $F, F'$  in

die Theilkreise  $B, B'$  selbst übergehen, entsprechen wieder die sogenannten Reibungsräder (§. 15) als allgemeiner Grenzfall aller Profilierungsmethoden.

§. 20. Kreisbögen als angenäherte Elementenprofile für kreisförmige Polbahnen.

Im Falle von Zahnrädern mit kreisförmigen Theilrissen, oder überhaupt im Falle von zwei Körpern, die als Elemente eines Elementenpaares um parallele Axen mit constantem Winkelgeschwindigkeitsverhältnisse sich drehen sollen, entsprechend kreisförmigen Querschnitten ihrer cylindrischen Axoide als Polbahnen, während zwei dazu dienende Profile  $F, F'$  jene Drehungen nur für kleine Drehungswinkel zu vermitteln und deshalb nur kleine Längen zu erhalten brauchen, können dieselben annäherungsweise durch Kreisbögen ersetzt werden. Eine bemerkenswerthe dazu dienende, von Willis angegebene Methode beruht auf folgender Erwägung.

Es seien  $A, A'$  (Fig. 20) die festen Mittelpunkte der kreisförmigen Polbahnen,  $P$  ihr Berührungspunkt (der Pol), und in einer gewissen Lage  $C, C'$  die Mittelpunkte der als Profile  $F, F'$  zu benutzenden Kreisbögen. Diese wären genau richtige Profile, wenn ihre Centrale  $CC'$  als Stütznormale beständig durch  $P$  ginge; sie sind aber wenigstens näherungsweise richtig, wenn in einer gewissen Lage  $CC'$  durch  $P$  geht und sich zugleich so bewegt, dass dasselbe auch noch für eine unendlich wenig von jener verschiedene Lage der Fall ist. Dazu muss die fragliche Bewegung von  $CC'$  in der festen Ebene eine Drehung um irgend einen Punkt der in  $P$  auf  $CC'$  errichteten Senkrechten sein. Da sich aber thatsächlich  $CC'$  um den Schnittpunkt der Geraden dreht, die in  $C$  und  $C'$  auf den Bahnen dieser Punkte senkrecht sind, d. h. um den Schnittpunkt  $M$  der Geraden  $AC$  und  $A'C'$ , so ergibt sich die folgende Construction: Fig. 20.



entspricht dem nach §. 18 immer zulässigen Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven.

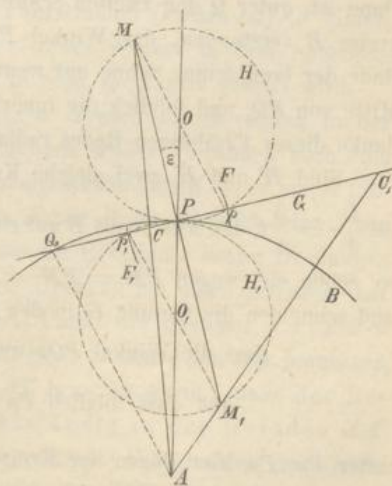
Von dem angenommenen Mittelpunkte  $C$  des einen Profils  $F$  ziehe  $CP$ , dann durch  $P$  die Gerade  $PM$  senkrecht zu  $CP$  bis zum Schnittpunkte  $M$  mit  $AC$ , endlich die Gerade  $MA'$ ; diese schneidet die Gerade  $CP$  im Mittelpunkte  $C'$  des anderen Profils  $F'$ . Die Radien der um  $C$  und  $C'$  zu beschreibenden Kreisbögen  $F, F'$  können beliebig, wenn nur so angenommen werden, dass letztere sich berühren; diese Willkür

Bei der Anwendung dieses Profilierungsverfahrens auf Zahnräder, welche Satzräder sein sollen, ist zu bemerken, dass mit dem Rade, dessen Theilkreis den Mittelpunkt  $A'$  und den Halbmesser  $A'P$ , und dessen kreisförmiges Zahnprofil  $F'$  den Mittelpunkt  $C'$  und den Halbmesser  $C'p$  hat (Fig. 20), jedes Rad zusammenarbeiten kann, dessen Theilkreis-mittelpunkt  $A$  in  $A'P$ , und dessen Profilmittelpunkt  $C$  (bei Berührung beider Profile in  $p$ ) in der Geraden  $C'Pp$  so liegt, dass die Gerade  $CA$  durch  $M$  geht. Somit werden angenähert richtige Satzräder erhalten, wenn bei ihrer Profilierung nach dem so eben erklärten Verfahren der Winkel  $APC$  und die zu einander senkrechten Strecken  $PM, Pp$  bei allen Rädern gleich angenommen werden.

Wird  $PM$  unendlich gross angenommen, so werden  $CA$  und  $C'A'$  senkrecht zu  $CPC'$ , und  $F, F'$  werden die Krümmungskreise im Berührungspunkte  $p$  der beiden Kreisevolventen, die von diesem Punkte der Geraden  $CC'$  beschrieben werden, jenachdem sie auf dem einen oder dem anderen zweier Kreise  $E, E'$  rollt, deren Mittelpunkte  $A, A'$  und deren Halbmesser  $AC, A'C'$  sind. Die Kreisverzahnung ist dann eine Annäherung an die Evolventenverzahnung für die Eingriffslinie  $CPC'$ . Sofern es dabei am angemessensten ist, die Grenzlagen des Eingriffspunktes  $p$  auf entgegengesetzten Seiten von  $P$  anzunehmen (die Zähne vor und hinter der Centrale  $AA'$  auf einander wirken zu lassen), ist mit Willis  $Pp = 0$  anzunehmen.

Sollen die Zähne ausserhalb und innerhalb des Theilkreises nach verschiedenen Kreisbögen so profilirt werden, dass die einen auf der einen, die anderen auf der anderen Seite der Centrale  $AA'$  zur Wirkung kommen (als Annäherung an die Cycloidalverzahnung mit Epicykloiden ausserhalb, Hypocykloiden innerhalb des Theilkreises), und wird verlangt, dass der äussere resp. innere Kreisbogen das richtige Zahnprofil eines Satzrades sei, wenn der Eingriffspunkt  $p$  resp.  $p_1$  um  $\frac{1}{n}$  resp.  $\frac{1}{n_1}$  der gemeinschaftlichen Theilung  $t$  aller Satzräder vom Pol  $P$  entfernt ist, so ist wieder durch  $P$  die Gerade  $G$  (Fig. 21) unter dem angenommenen Winkel  $\varepsilon$  gegen die Tangente

Fig. 21.





im Punkte  $P$  des Theilkreises geneigt zu ziehen, darauf  $Pp = \frac{1}{n}t$  und  $Pp_1 = \frac{1}{n_1}t$  abzutragen,  $PM = PM$ , senkrecht zu  $G$  zu ziehen, endlich der Mittelpunkt  $A$  des Theilkreises mit  $M$  und  $M$ , durch gerade Linien zu verbinden. In den Schnittpunkten  $C, C$ , dieser Geraden mit der Geraden  $G$  erhält man die Mittelpunkte, dann in den Strecken  $Cp, Cp_1$ , die Halbmesser beziehungsweise des äusseren und des inneren Kreisbogens, welche letzteren dann nur noch durch Zusammenrückung ihrer Anfangspunkte in denselben Punkt des Theilkreises zum vollen Zahnprofil zu vereinigen sind. — Die Länge  $PM = PM$ , ist von der kleinsten Zahnzahl  $= z$  irgend eines der Satzräder abhängig zu machen, oder von dem entsprechenden Theilrisshalbmesser

$$r = \frac{zt}{2\pi}$$

desselben. Wenn insbesondere für dieses kleinste Rad der innere Theil  $F$ , des Zahnprofils eine gerade Linie werden soll, so muss dabei  $C$ , im Unendlichen liegen, also der Winkel  $PM, A = 90^\circ$  sein, und somit

$$PM = PM, = r \cos \varepsilon.$$

Willis nimmt  $n = n_1 = 2$ , somit  $Pp = Pp_1 = \frac{1}{2}t$ ;

$$z = 12, \text{ somit } r = \frac{6}{\pi}t; \varepsilon = 15^\circ.$$

Dann ist, unter  $Q$  den zweiten Schnittpunkt der Geraden  $G$  mit dem Theilkreise  $B$  verstanden, der Winkel  $PAQ = 30^\circ$ , also bei dem 12zähligen Rade der (von seiner Sehne nur wenig verschiedene) Bogen  $PQ = t, p$ , die Mitte von  $PQ$ , und folglich die innerhalb des Theilkreises geradlinige Zahnflanke dieses 12zähligen Rades radial gerichtet. —

Sind  $H$  und  $H$ , zwei gleiche Kreise mit den Halbmessern  $PO = PO$ ,  $= \frac{1}{2}r = \frac{3}{\pi}t$ , den Theilkreis  $B$  auf entgegengesetzten Seiten in  $P$  berührend, so gehen sie (wegen  $PM = PM, = r \cos \varepsilon$ ) beziehungsweise durch  $M, M$ , und schneiden die Gerade  $G$  in den Punkten  $p, p$ , so,

dass die Winkel  $POp$  und  $PO,p, = 2\varepsilon = 30^\circ$  sind,

$$\text{und dass folglich } Pp = Pp, = \frac{r\pi}{2 \cdot 6} = \frac{1}{2}t \text{ ist,}$$

unter  $Pp, Pp$ , hier Bögen der Kreise  $H, H$ , verstanden, die aber von ihren in der Geraden  $G$  liegenden Sehnen nur sehr wenig verschieden sind. Daraus ergibt sich folgende von Reuleaux angegebene Construction, bei der nur

$\frac{7}{8}t$  für  $\frac{3}{\pi}t$  gesetzt ist. Man zeichnet die Hilfskreise  $H, H$ , mit dem Halbmesser  $\frac{7}{8}t$  in Berührung mit dem Theilkreise  $B$  im Punkte  $P$ , macht die Winkel  $POp = PO,p = 30^\circ$ , zieht  $pp$ , und durch die den Punkten  $p, p$ , diametral gegenüber liegenden Punkte  $M, M$ , der Hilfskreise die Geraden  $AM, AM$ . Letztere bestimmen in ihren Durchschnittspunkten  $C, C$ , mit der Geraden  $pp$ , die Mittelpunkte der mit den Halbmessern  $Cp, Cp$ , zu beschreibenden Profilkreisbögen.

$\gamma$ . Bestimmung von Polbahnen, die um feste Punkte ihrer gemeinsamen Ebene in gegebener Weise drehbar sein sollen.

### §. 21. Allgemeine Regeln.

Es seien  $B$  und  $B'$  die Polbahnen (die sogenannten Theilrisse im Falle von Zahnrädern),  $A$  und  $A'$  die Punkte, um welche sie in ihrer gemeinsamen Ebene  $E$  mit den (im Allgemeinen veränderlichen) Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$  und  $\omega'$  drehbar sein sollen;  $Q$  und  $Q'$ ,  $R$  und  $R'$  . . . entsprechende, d. h. solche Punkte der Polbahnen, mit denen sie im jeweiligen Pol  $P$  zu gegenseitiger Berührung kommen,  $r$  und  $r'$  entsprechende Fahrstrahlen der Polbahnen, wie  $AQ$  und  $A'Q'$ ,  $AR$  und  $A'R'$  . . .,  $\varphi$  und  $\varphi'$  die Winkel (Polarwinkel), welche irgend zwei entsprechende Fahrstrahlen mit zwei bestimmten entsprechenden Fahrstrahlen (Polaraxen) so bilden, dass von letzteren aus gerechnet jeder dieser Winkel in dem entgegengesetzten Sinne wächst, als in welchem  $\omega$  resp.  $\omega'$  positiv gesetzt wird.

Die relative Bewegung von  $B'$  gegen  $B$  wird als Bewegung in der Ebene  $E$  erhalten, indem zu den Bewegungen beider Polbahnen noch eine gemeinschaftliche Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega$  um  $A$  hinzugefügt und dadurch  $B$  in der Ebene  $E$  zur Ruhe gebracht wird. Die relative Bewegung von  $B'$  gegen  $B$  ist also die Resultante zweier Drehungen beziehungsweise um  $A$  und  $A'$ , somit eine Drehung um einen gewissen (mit  $\omega$  und  $\omega'$  im Allgemeinen veränderlichen) Punkt der Geraden  $AA'$ ; indem sie aber auch als Rollen von  $B'$  auf  $B$  in einer Drehung um den jeweiligen Pol  $P$  besteht, so folgt (wie schon im §. 16 bemerkt wurde), dass der Berührungspunkt  $P$  der Polbahnen beständig in der Geraden  $AA'$  liegen muss. Hiernach fallen auch entsprechende Fahrstrahlen gleichzeitig in die Gerade  $AA'$ , und werden die zugehörigen Polbahnen unter gleichen Winkeln von ihnen geschnitten; entsprechende Polarwinkel  $\varphi, \varphi'$  der letzteren

sind entsprechende (gleichzeitige) Drehungswinkel derselben, und wenn insbesondere  $\varphi, \varphi'$  die Polarwinkel der nach dem Pol  $P$  gehenden Fahrstrahlen  $r, r'$  und  $d\varphi, d\varphi'$  ihre entsprechenden elementaren Aenderungen, also entsprechende elementare Drehungswinkel sind, so ist das Verhältniss der entsprechenden (gleichzeitigen) Winkelgeschwindigkeiten:

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} \dots \dots \dots (1).$$

Ist ferner  $\psi$  der Winkel, unter dem die Polbahnen von ihren entsprechenden Fahrstrahlen geschnitten werden, und ist  $ds$  das Bogenelement, mit dem sie bei den entsprechenden Drehungen  $d\varphi, d\varphi'$  auf einander rollen, so ist

$$r d\varphi = r' d\varphi' = ds \cdot \sin \psi,$$

also mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$r\omega = r'\omega' \dots \dots \dots (2).$$

Auch ist, unter  $e$  die Strecke  $AA'$  verstanden,

$$r \pm r' = \pm e \dots \dots \dots (3),$$

welche Gleichung die folgenden 3 Fälle umfasst:

$$r + r' = e; \quad r - r' = e; \quad r - r' = -e$$

entsprechend den Lagen

$$APA'; \quad AA'P; \quad PAA'$$

der betreffenden 3 Punkte. Aus Gl. (2) und (3) folgt:

$$r = \pm e \frac{\omega'}{\omega' \pm \omega}; \quad r' = \pm e \frac{\omega}{\omega' \pm \omega} \dots \dots \dots (4),$$

wo wieder die doppelten Vorzeichen auf dreierlei Art zusammengehören können analog Gl. (3).

Ist nun das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten = einer Constanten gegeben, so bestimmen die Gleichungen (4) die Halbmesser der dann kreisförmigen Polbahnen. Ist aber

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi),$$

so folgt:

$$r = \pm e \frac{f(\varphi)}{f(\varphi) \pm 1}; \quad r' = \pm e \frac{1}{f(\varphi) \pm 1} \dots \dots \dots (5).$$

Die Gleichung für  $r$  ist die Polargleichung der Curve  $B$  und gestattet unmittelbar die Zeichnung derselben; die Polargleichung von  $B'$  ergibt sich durch Elimination von  $\varphi$  zwischen der Gleichung für  $r'$  und der aus Gl. (1) folgenden Gleichung

$$\varphi' = \int_0^{\varphi} \frac{\omega'}{\omega} d\varphi = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi) \dots \dots \dots (6).$$

Hiernach würde die Bestimmung der Polbahnen keine weitere Schwierigkeit darbieten, wenn die Function  $f(\varphi)$ , d. h. das Winkelgeschwindigkeitsverhältniss derselben als Function des Drehungswinkels einer von ihnen gegeben wäre, was indessen ohne Einschränkung nur dann zulässig ist, wenn die Polbahnen nicht geschlossene Curven zu sein brauchen, wie es dann in der That nicht nöthig ist, wenn ihre Bewegungen um  $A, A'$  schwingende Drehungen sein sollen, die weniger als  $360^\circ$  umfassen.

Wenn aber die Drehungen von  $B, B'$  um  $A, A'$  in unveränderlichem Sinne stattfinden sollen (in welchem Falle die keine Zeichenwechsel erfahrenden Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  beide positiv gesetzt werden können), so ist die Wahl der Function  $f(\varphi)$  an die Bedingung zu knüpfen, dass jede Polbahn eine geschlossene, ihren zugehörigen Drehungspunkt umschliessende Curve sein muss. Wenn dann ferner verlangt wird, dass dasselbe Aenderungsgesetz von  $\frac{\omega'}{\omega}$  nach je  $\frac{1}{n}$  Umdrehung von  $B$  und nach je  $\frac{1}{n'}$  Umdrehung von  $B'$  sich wiederholen solle, so muss die von  $B$  umgrenzte Fläche  $F$  durch von  $A$  aus gezogene Fahrstrahlen in  $n$  congruente Sektoren, ebenso die von  $B'$  umgrenzte Fläche  $F'$  durch von  $A'$  aus gezogene Fahrstrahlen in  $n'$  congruente Sektoren theilbar sein, und müssen die den Sektoren von  $F$  zugehörigen Bögen von  $B$  ebenso lang sein wie die den Sektoren von  $F'$  zugehörigen Bögen von  $B'$ , die ganzen Längen von  $B$  und  $B'$  also  $= n:n'$  sich verhalten. Um diesen Forderungen zu genügen, muss die Function  $f(\varphi)$  für alle Werthe von  $\varphi$  einen endlichen Werth  $> 0$  haben und wenigstens 2 Parameter enthalten, die durch die Gleichungen

$$f(0) = f\left(\frac{2\pi}{n}\right); \quad \frac{2\pi}{n'} = F\left(\frac{2\pi}{n}\right) \dots \dots \dots (7)$$

mit Rücksicht auf die Beziehung (6) zwischen den Functionen  $f$  und  $F$  bestimmt sind. Ein dritter Parameter kann der Bedingung gemäss bestimmt werden, dass der grösste Werth von  $\frac{\omega'}{\omega}$  ein gegebenes Vielfache des kleinsten Werthes dieses Verhältnisses, also

$$\frac{\max \frac{\omega'}{\omega}}{\min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\max f(\varphi)}{\min f(\varphi)} = m \dots \dots \dots (8)$$

= einer gegebenen Zahl sei u. s. f.

Von anderen Forderungen, denen im Allgemeinen nicht sowohl durch die Werthe gewisser Parameter, als vielmehr durch die Form der Function  $f(\varphi)$  zu genügen ist, sind die folgenden erwähnenswerth, bei deren Erörterung die Fahrstrahlen, von denen aus die Polarwinkel  $\varphi, \varphi'$  gemessen werden, als kleinste oder grösste Fahrstrahlen  $r, r'$  von  $B, B'$  vorausgesetzt werden. (Jenachdem der Pol  $P$  in der Strecke  $AA' = \epsilon$  oder ausserhalb derselben liegt, jenachdem also die Drehungen von  $B, B'$  in entgegengesetztem oder in gleichem Sinne stattfinden, ist, wenn  $r$  ein Minimum ist, das entsprechende  $r'$  ein Maximum oder auch ein Minimum, wenn dagegen  $r$  ein Maximum ist, das entsprechende  $r'$  ein Minimum oder auch ein Maximum.)

1) Wenn jede Polbahn von jeder durch ihren Drehungspunkt gehenden Geraden in nur zwei Punkten geschnitten werden soll, so müssen die Differentialquotienten

$$\frac{dr}{d\varphi} \text{ und } \frac{dr'}{d\varphi'} = \frac{1}{f(\varphi)} \frac{dr'}{d\varphi}$$

für alle Werthe von  $\varphi$  endliche Werthe haben, muss also gemäss den Gleichungen (5) die Function  $f(\varphi)$  so beschaffen sein, dass

$$\frac{df(\varphi)}{d\varphi} = f'(\varphi)$$

nicht unendlich wird.

2) Sollen die Polbahnen keinen Knick haben, so müssen die kleinsten oder grössten Fahrstrahlen, von denen die  $n$  resp.  $n'$  Sektoren der Flächen  $F, F'$  begrenzt werden, nicht blos constructive, aus dem Abbrechen der Curven hervorgehende, sondern analytische Minima resp. Maxima sein, muss also die ihnen entsprechende elementare Aenderung von  $f(\varphi)$  gemäss Gl. (5) = 0, d. h.

$$f'(0) = f'\left(\frac{2\pi}{n}\right) = 0 \dots\dots\dots (9)$$

sein mit Benutzung der so eben unter 1) erklärten Functionsbezeichnung  $f'$ .

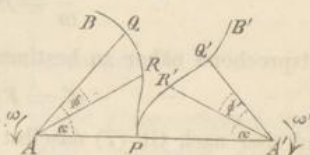
3) Sollen die periodische Zunahme und Abnahme von  $\frac{\omega'}{\omega}$  in gleicher Weise stattfinden, so muss die Gleichung erfüllt sein:

$$f(\varphi) = f\left(\frac{2\pi}{n} - \varphi\right) \dots\dots\dots (10).$$

Die  $n$  resp.  $n'$  Sektoren der Flächen  $F$  und  $F'$  sind dann symmetrisch in Bezug auf die Halbirungslinien ihrer Winkel =  $\frac{2\pi}{n}$  resp.  $\frac{2\pi}{n'}$ .

4) Congruente Polbahnen  $B, B'$ , welche gleich liegend, d. h. durch Verschiebung in ihrer gemeinsamen Ebene zur Deckung zu bringen sind, können nur dem Falle entsprechen, dass ihre Drehungen um  $A, A'$  in entgegengesetztem Sinne stattfinden, und dass somit der Pol  $P$  zwischen  $A$  und  $A'$  liegt, ferner dem Falle  $n = n'$ . Befinden sich nun die Polbahnen in solcher Lage (Fig. 22), dass ein kleinster Fahrstrahl  $AP$  von  $B$  und

Fig. 22.



folglich ein grösster  $A'P$  von  $B'$  in der Geraden  $AA'$  liegt, und ist  $AQ$  der im Sinne von  $\omega$  nächstfolgende grösste,  $A'Q'$  der im Sinne von  $\omega'$  nächstfolgende kleinste Fahrstrahl beziehungsweise von  $B$  und  $B'$ , so sind auch  $AQ$  und  $A'Q'$  entsprechende Fahrstrahlen, und es stehen die von ihnen aus gerechneten Polarwinkel  $QAR = \varphi$  und  $Q'A'R' = \varphi'$  von irgend zwei anderen entsprechenden Fahrstrahlen  $AR, A'R'$  in der Beziehung:  $\varphi' = F(\varphi)$  gemäss Gl. (6). Bei Congruenz der Polbahnen sind aber die Winkel  $QAP$  und  $P'A'Q'$  einander gleich, etwa  $= \alpha$ , und muss der Winkel  $P'A'R' = \alpha - \varphi'$  zu dem Winkel  $PAR = \alpha - \varphi$  in derselben Beziehung stehen wie  $\varphi$  zu  $\varphi'$  (entsprechend der Vertauschung von  $AQ$  mit  $A'P, A'Q'$  mit  $AP$ ), d. h. es muss

$$\alpha - \varphi = F(\alpha - \varphi') \Rightarrow F(\alpha - F(\varphi)) \dots \dots \dots (11)$$

sein, unter  $\alpha$  den Winkel verstanden, welcher, entsprechend Gl. (11) mit  $\varphi = \varphi' = 0$ , durch die Gleichung

$$\alpha = F(\alpha) \dots \dots \dots (11, a)$$

bestimmt ist. Durch Differentiation ergibt sich diese für congruente Polbahnen charakteristische Gleichung (11) auch in der Form:

$$-1 = f[\alpha - F(\varphi)] \cdot [-f(\varphi)]$$

oder  $f(\varphi) \cdot f[\alpha - F(\varphi)] = 1 \dots \dots \dots (12)$

mit  $f(0) \cdot f(\alpha) = 1 \dots \dots \dots (12, a)$

als Bestimmungsgleichung für  $\alpha$ . Ist zugleich die vorige Bedingung unter

3) erfüllt, so ist  $\alpha = \frac{\pi}{n}$ .

Congruente, um feste Punkte  $A, A'$  drehbare Polbahnen von symmetrischer Lage werden im folgenden §. besprochen.

## §. 22. Beispiele.

1) Das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$ , mit denen die Polbahnen  $B, B'$  um die festen Punkte  $A, A'$  in ihrer gemeinsamen Ebene rotiren, sei einem Ausdrucke von der Form

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) = a + bk \cos(k\varphi)$$

entsprechend näher zu bestimmen. Nach Gl. (6) im vorigen §. ist dann

$$\varphi' = F(\varphi) = a\varphi + b \sin(k\varphi)$$

und sind nach Gl. (7) daselbst zwei der Parameter  $a, b, k$  bestimmt durch die Gleichungen:

$$a + bk = a + bk \cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right)$$

und

$$\frac{2\pi}{n'} = a \frac{2\pi}{n} + b \sin\left(k \frac{2\pi}{n}\right).$$

Aus der ersten folgt:

$$\cos\left(k \frac{2\pi}{n}\right) = 1, \text{ also } k = n,$$

sofern  $\frac{2\pi}{n}$  nicht nur irgend ein, sondern der kleinste Werth von  $\varphi$  sein soll, für welchen  $\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi)$  wieder ebenso gross wird wie für  $\varphi = 0$ . Aus der zweiten Gleichung folgt dann

$$\frac{2\pi}{n'} = a \frac{2\pi}{n}; \quad a = \frac{n}{n'}$$

und somit vorläufig

$$f(\varphi) = \frac{n}{n'} + bn \cos(n\varphi).$$

Indem danach

$$\max f(\varphi) = f(0) = \frac{n}{n'} + bn,$$

$$\min f(\varphi) = f\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{n}{n'} - bn$$

ist, ergibt sich, wenn nach Gl. (8) im vorigen §. das Verhältniss

$$\frac{\max f(\varphi)}{\min f(\varphi)} = \frac{\max \frac{\omega'}{\omega}}{\min \frac{\omega'}{\omega}} = \frac{\frac{n}{n'} + bn}{\frac{n}{n'} - bn} = m$$

gesetzt wird,  $b = \frac{1}{n'} \frac{m-1}{m+1}$  und somit schliesslich:

$$\frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) = \frac{n}{n'} \left[ 1 + \frac{m-1}{m+1} \cos(n\varphi) \right] \dots \dots \dots (1)$$

$$\varphi' = F(\varphi) = \frac{n}{n'} \left[ \varphi + \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi) \right] \dots \dots \dots (2)$$

Wegen  $f(0) = \max f(\varphi)$  entsprechen den Polarwinkeln  $\varphi = 0$ ,  $\varphi' = 0$  Maximal- oder Minimalwerthe von  $r$ ,  $r'$ , und da

$$f'(\varphi) = \frac{df(\varphi)}{d\varphi} = -\frac{n}{n'} \frac{m-1}{m+1} n \sin(n\varphi)$$

ist, erkennt man, dass die Bedingungen unter 1) und 2) im vorigen §. durch Gl. (1) erfüllt sind. Auch der Bedingung unter 3) daselbst wird entsprochen wegen

$$\cos \left[ n \left( \frac{2\pi}{n} - \varphi \right) \right] = \cos(2\pi - n\varphi) = \cos(n\varphi).$$

Sollten aber die Polbahnen congruent sein, so müsste  $n = n'$  und wegen  $\alpha = \frac{\pi}{n}$  nach Gl. (11) im vorigen §. mit Rücksicht auf obige Gl. (2):

$$\frac{\pi}{n} - \varphi = F \left( \frac{\pi}{n} - \varphi' \right) = \frac{\pi}{n} - \varphi' + \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(\pi - n\varphi'),$$

also 
$$\varphi' - \varphi = \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi) = \frac{1}{n} \frac{m-1}{m+1} \sin(n\varphi')$$

oder  $\varphi' = \varphi$ ,  $m = 1$  sein, entsprechend  $\omega' = \omega$ , also kreisförmigen Polbahnen.

Nimmt man mit Ausschluss dieses letzteren Specialfalles beispielsweise

$$n = n' = 1, m = 4,$$

so wird 
$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) &= 1 + \frac{3}{5} \cos \varphi \\ \varphi' = F(\varphi) &= \varphi + \frac{3}{5} \sin \varphi \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (3);$$

mit  $n = n' = 4$ ,  $m = 2$  ergibt sich:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega'}{\omega} = f(\varphi) &= 1 + \frac{1}{3} \cos(4\varphi) \\ \varphi' = F(\varphi) &= \varphi + \frac{1}{12} \sin(4\varphi) \end{aligned} \right\} \dots \dots \dots (4).$$

Sollen dabei die Polbahnen in entgegengesetztem Sinne rotiren, so sind ihre entsprechenden Fahrstrahlen nach Gl. (5) im vorigen §.

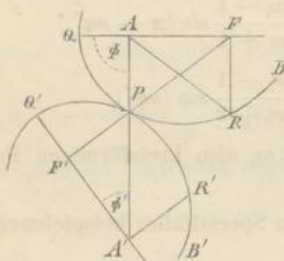


$$r = e \frac{f(\varphi)}{f(\varphi) + 1}; r' = e \frac{1}{f(\varphi) + 1} \dots \dots \dots (5),$$

und können sie selbst hiernach leicht verzeichnet werden.\*

2) Die Polbahnen seien congruent und symmetrisch liegend, d. h. so, dass sie erst dann durch Verschiebung in ihrer gemeinsamen Ebene *E* zur Deckung gebracht werden können, nachdem eine von ihnen um irgend eine Gerade in *E* um 180° gedreht wurde. Wenn solche Polbahnen *B, B'* von einer Lage aus, in der sie sich berühren und in Bezug auf die gemeinsame Tangente symmetrisch liegen, auf einander rollen, so bleibt ihre gemeinsame Tangente immer Symmetrieaxe; wenn dabei ein gewisser mit *B* fest verbundener Punkt *A* von einem gewissen mit *B'* fest verbundenen Punkte *A'* eine unveränderliche Entfernung = *e* behielte und die Gerade *AA'* beständig durch den Berührungspunkt *P* von *B, B'* ginge, so würden diese Curven *B, B'* unbeschadet ihrer gegenseitigen Rollung auf einander, d. h. unbeschadet ihres Charakters als Polbahnen, um diese Punkte *A, A'* als feste Punkte der Ebene *E* sich drehen können. Gäbe es aber ein Paar solcher Punkte *A, A'*, so müsste es auch noch ein zweites Paar *F, F'* geben, so dass in Bezug auf die gemeinsame Tangente beständig *A* und *F', F* und *A'* (Fig. 23) symmetrisch liegen, also

Fig. 23.



beständig *A* und *F', F* und *A'* (Fig. 23) symmetrisch liegen, also

$$PA = PF', PF = PA'$$

ist. Mit der Forderung, dass die Strecke *AA'* constant sein und dass die Gerade *AA'* stets den Berührungspunkt *P* enthalten, dass also auch (jenachdem *P* in der Strecke *AA'* oder ausserhalb derselben liegt) die Summe oder Differenz von *PA* und *PA'* constant sein soll, sind die Gleichungen *PA = PF', PF = PA'*

dann, aber nur dann verträglich, wenn die Summe oder Differenz von *PA* und *PF*, also auch von *PA'* und *PF'* constant ist, d. h. wenn die Polbahnen congruente Ellipsen oder Hyperbeln mit den Brennpunkten *A* und *F, A'* und *F'*, und mit grossen Axen = *AA'* sind. Hier kommen nur erstere als geschlossene Polbahnen in Betracht, d. h. zwei congruente Ellipsen, die um je einen *A* resp. *A'* ihrer Brennpunkte in entgegengesetztem Sinne rotiren und deren grosse Axen der Strecke *AA'*

\* Zeichnungen der Polbahnen für diese zwei Beispiele (als Theilrisse verzahnter Räder) finden sich in Redtenbacher's „Maschinenbau“, Band I, Tafel XIX, Fig. 16 und Tafel XX, Fig. 1.

gleich sind. Sie entsprechen mit  $n = n' = 1$  den Gleichungen (7) des vorigen §. und allen unter 1) bis 4) daselbst angeführten Bedingungen, der letzten insofern, als zwei congruente Figuren, die je eine Symmetrieaxe haben, zu gleicher Zeit gleich und symmetrisch liegend sind.

Ist  $a$  die grosse,  $b$  die kleine Halbaxe der Ellipse,  $p = \frac{b^2}{a}$  die Hälfte der durch den Brennpunkt gehenden zur grossen Axe senkrechten Sehne,  $\epsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$  die Excentricität ( $\epsilon a$  die Entfernung der Brennpunkte vom Mittelpunkte), und wird (Fig. 23) der Polarwinkel  $\varphi$  der Ellipse  $B$  von dem nach dem nächsten Scheitelpunkte  $Q$  gehenden Fahrstrahle, der Polarwinkel  $\varphi'$  der anderen  $B'$  von dem entsprechenden, also von dem nach dem entferntesten Scheitelpunkte  $Q'$  gehenden Fahrstrahle aus gerechnet, so sind die Polargleichungen derselben:

$$r = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} \quad \text{und} \quad r' = \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi'} \dots \dots \dots (6),$$

und kann aus der Gleichung

$$r + r' = \frac{p}{1 + \epsilon \cos \varphi} + \frac{p}{1 - \epsilon \cos \varphi'} = 2a \dots \dots \dots (7)$$

$$\varphi' = F(\varphi); \quad \frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi)$$

entwickelt werden. Doch ist das Aenderungsgesetz von  $\frac{\omega'}{\omega}$  hauptsächlich nur mit Rücksicht auf das sich unmittelbar ergebende Verhältniss

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a + \epsilon a}{a - \epsilon a} = \frac{1 + \epsilon}{1 - \epsilon} \dots \dots \dots$$

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{a - \epsilon a}{a + \epsilon a} \dots \dots \dots$$

von praktischem Interesse; ist dasselbe  $= m$  gegeben, so folgt

$$\epsilon = \frac{\sqrt{m} - 1}{\sqrt{m} + 1}; \quad \frac{b}{a} = \sqrt{1 - \epsilon^2} \dots \dots \dots (8).$$

Sind  $R$  und  $R'$  (Fig. 23) solche zwei entsprechende Punkte der Ellipsen  $B, B'$ , deren Projectionen auf die grossen Axen in den Brennpunkten  $F, A'$  liegen, also  $FR = A'R' = p$ , so dreht sich  $B'$  um je einen rechten Winkel, wenn sich  $B$  um den stumpfen Winkel  $QAR$  oder um den spitzen Winkel  $RAF$  dreht; und wenn sich  $B$  mit gleichförmiger Winkelgeschwindigkeit dreht, so ist das Verhältniss dieser Winkel  $QAR, RAF =$  dem Verhältnisse der Zeiten, welche  $B'$  zu den beiden halben Umdrehungen

gebraucht, in deren Mittellagen  $A'F'$  beziehungsweise die Richtung  $A'A$  und die entgegengesetzte Richtung hat. Dasselbe ist das grösste Verhältniss der Zeiten irgend zweier auf einander folgender halber Umdrehungen von  $B'$ ; ist es  $= n$  gegeben, so ist also

$$n = \frac{\pi - \operatorname{arc\,sin} \frac{p}{2a-p}}{\operatorname{arc\,sin} \frac{p}{2a-p}}; \operatorname{arc\,sin} \frac{p}{2a-p} = \frac{\pi}{n+1}$$

$$\frac{p}{2a-p} = \frac{\frac{b^2}{a}}{2a - \frac{b^2}{a}} = \frac{1}{2\frac{a^2}{b^2} - 1} = \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}$$

$$\frac{b}{a} = \sqrt{\frac{2 \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}{1 + \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}} \dots \dots \dots (9).$$

Als Function von  $n$  ausgedrückt ist hiernach auch

$$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{1 - \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}{1 + \operatorname{sin} \frac{\pi}{n+1}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n+1}\right)}{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{n+1}\right)}} =$$

$$= \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{n-1}{n+1} \frac{\pi}{4}\right) \dots \dots (10)$$

und wegen  $\varepsilon = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2(n+1)}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}}{1 + \operatorname{tg} \frac{\pi}{2(n+1)}}$

$$m = \left(\frac{1 + \varepsilon}{1 - \varepsilon}\right)^2 = \operatorname{cotg}^2 \frac{\pi}{2(n+1)} \dots \dots \dots (11).$$

So findet man z. B. für

$n = 2$	3	4	5
$\frac{b}{a} = 0,9634$	0,9102	0,8604	0,8165
$\varepsilon = 0,2679$	0,4142	0,5095	0,5773
$m = 3$	5,83	9,47	13,93

2. Höhere Elementenpaare mit nicht cylindrischen Axoiden.

§. 23. Elementenpaare mit conischen Axoiden.

Die Axoide von Paarelementen sind concentrische conische Flächen (allgemeine Kegelflächen), wenn die Elemente selbst von conischen Flächen begrenzt werden und mit denselben (in Folge entsprechenden Zwanges durch geeignete Stützung) sich in Geraden so berühren, dass sie beständig concentrisch bleiben. Die kinematischen Eigenschaften solcher Elementenpaare sind einerlei mit denen ihrer zusammengehörigen Profile, worunter hier ihre in Punkten sich berührenden Durchschnitfiguren mit irgend einer mit den Elementenflächen concentrischen Kugelfläche zu verstehen sind. Dieselbe Kugelfläche schneidet auch die Axoide der beiden Elemente in sphärischen Linien, die analog den Bezeichnungen bei cylindrischen Axoiden die Polbahnen der Elementenprofile heissen mögen, und welche sich beständig in einem Punkte, dem Pol, berühren. Hiernach können analoge Aufgaben, wie die im Vorhergehenden für cylindrische Elemente und Axoide behandelten, auf analoge Weise im vorliegenden Falle behandelt werden bei Ersetzung aller ebenen durch entsprechende sphärische Figuren.

Besondere Erwähnung verdient der bei conischen Rädern vorliegende Fall, dass die Elemente um Axen  $OA, OA'$  von unveränderlichen Lagen in ihnen drehbar sind, die einen unveränderlichen Winkel  $AOA' = \varepsilon$  mit einander bilden. Die Axoide sind dann conische Flächen, deren Berührungslinie (Polaxe)  $OP$  beständig in der Ebene  $AOA'$  liegt, die Profile sind sphärische Figuren in einer Kugelfläche  $K$  mit dem Mittelpunkte  $O$ , etwa mit dem Halbmesser  $OP$ , deren Berührungspunkt (Pol)  $P$  beständig in dem grössten Kreise  $AA'$  liegt, in welchem die Kugelfläche von der Ebene  $AOA'$  geschnitten wird. Sind dann  $\omega, \omega'$  die betreffenden Winkelgeschwindigkeiten der Elemente um  $OA, OA'$ , ferner  $\varphi, \varphi'$  entsprechende Drehungswinkel, und ist analog §. 21

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi), \text{ entsprechend } \varphi' = \int_0^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi)$$

gegeben, so findet man die Winkel  $AOP = \alpha$  und  $A'OP = \alpha'$ , die hier als Functionen von  $\varphi$  resp.  $\varphi'$  die Axoide bestimmen, aus den Gleichungen:

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \text{ und } \alpha + \alpha' = \pm \varepsilon \dots \dots \dots (1),$$

von denen die letzte eine der folgenden 3 Formen haben kann:

$$\alpha + \alpha' = \varepsilon; \alpha - \alpha' = \varepsilon; \alpha - \alpha' = -\varepsilon$$

entsprechend den Fällen, dass sich die Axoide von aussen oder von innen berühren und letzteren Falles entweder das Axoid um  $OA'$  oder das um  $OA$  das innere ist. Dabei sind  $\alpha$  und  $\alpha'$  spitze Winkel, so dass  $\varepsilon$  bei Berührung von innen auch spitz, bei Berührung von aussen aber spitz oder stumpf ist. Aus den Gleichungen (1) folgt

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{\omega'} \sin \alpha &= \sin(+\alpha') = \sin(+\varepsilon - \alpha) \\ &= \sin(+\varepsilon) \cos \alpha - \cos \varepsilon \sin \alpha \end{aligned}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin(+\varepsilon)}{\frac{\omega}{\omega'} + \cos \varepsilon},$$

woraus  $\operatorname{tg}(+\alpha')$  durch Vertauschung von  $\omega$  mit  $\omega'$  erhalten wird. Somit ist

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{+\sin \varepsilon}{\cos \varepsilon + \frac{\omega}{\omega'}}; \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{+\sin \varepsilon}{\frac{\omega'}{\omega} + \cos \varepsilon} \dots \dots \dots (2),$$

wobei das Vorzeichen von  $\sin \varepsilon$  im Zähler übereinstimmend mit dem von  $\varepsilon$  in Gl. (1), das Vorzeichen im Nenner aber mit dem von  $\alpha'$  in Gl. (1) übereinstimmend zu nehmen ist. Diese Gleichungen (2) gehen in die Gleichungen (4) von §. 21 über, wenn man nach ihrer Multiplication mit dem Kugelhalmesser  $OP$  diesen letzteren unendlich wachsen und zugleich  $\varepsilon$  in die Grenze Null übergehen lässt.

Die Zahnprofile conischer Räder, deren Axoide gegeben oder auf die so eben erklärte Weise bestimmt worden sind, können nun analog den in §. 16—20 besprochenen Methoden gefunden werden, z. B. nach der Methode der Halbspolbahnen (§. 17) als die Bahnen eines mit einer sphärischen Curve  $H$  in der Kugelfläche  $K$  verbundenen Punktes  $p$  beim Rollen von  $H$  in der Kugelfläche auf den sphärischen Polbahnen  $B, B'$ , im Falle von Kegelrädern (mit im engeren Sinne so genannten Kegelflächen als Axoiden) auch nach der Methode der Evolventenverzahnung (§. 19) als die Spuren, die ein Punkt  $p$  eines durch den Pol  $P$  gelegten grössten Kreises von  $K$  hinterlässt, wenn derselbe auf zwei ihn berührenden kleineren Kugeln, deren Mittelpunkte beziehungsweise in  $OA$  und  $OA'$  liegen, rollt. Sofern aber von den so zu erhaltenden Curven nur kleine Stücke nahe den Polbahnen  $B, B'$  als Zahnprofile benutzt werden, kann die betreffende Construction statt in der Kugelfläche selbst ohne erheblichen Fehler auch in zwei abwickelbaren Flächen  $G, G'$  ausgeführt werden, welche die Kugelfläche beziehungsweise längs  $B, B'$  berühren, wodurch der Vortheil erlangt wird, dass sie thatsächlich in einer Ebene  $E$  auszuführen und dann erst

nachträglich durch Aufwicklung der letzteren auf die Flächen  $G, G'$  zu übertragen ist. Insbesondere bei runden oder im engeren Sinne sogenannten Kegelrädern sind jene Flächen  $G, G'$  selbst Kegelflächen, von denen die mit ihnen conaxialen kegelflächigen Axoide rechtwinklig geschnitten werden; die Abwickelungen der kreisförmigen Polbahnen  $B, B'$  mit jenen Kegelflächen  $G, G'$  in einer Ebene  $E$  sind zwei sich berührende Kreisbögen

mit den Halbmessern  $OP \operatorname{tg} \alpha, OP \operatorname{tg} \alpha'$ ,

und den Längen  $2\pi \cdot OP \sin \alpha, 2\pi \cdot OP \sin \alpha'$ ,

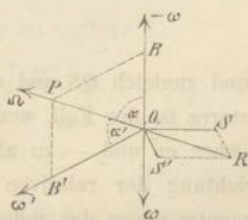
also den Mittelpunktswinkeln  $2\pi \cos \alpha, 2\pi \cos \alpha'$ , zu denen als Polbahnen die Zahnprofile nach den betreffenden Methoden gezeichnet werden können, um dann auf die Kegelflächen  $G, G'$ , z. B. als Begrenzungsflächen anzufertigen der Radmodelle, durch Aufwicklung übertragen und schliesslich nach gegen  $O$  convergirenden conischen Flächen zu Zähnen ausgearbeitet zu werden.

§. 24. Axoide von Paarelementen, die um windschiefe Axen von unveränderlicher gegenseitiger Lage drehbar sind.

Von Fällen, denen als Axoide der Elemente eines Paares im Allgemeinen weder cylindrische noch conische Flächen entsprechen, sollen hier solche näher betrachtet werden, in denen eine gewisse Gerade  $OA$  des einen Elementes gegen eine gewisse Gerade  $O'A'$  des anderen bei der gegenseitigen Bewegung beider stets dieselbe und zwar im Allgemeinen windschiefe Lage behält, so dass beide Gerade stets denselben Winkel  $\varepsilon$  mit einander bilden und dieselbe kürzeste Entfernung  $OO' = e$  mit denselben Fusspunkten  $O, O'$  behalten. Die Elemente sind dann um diese Geraden  $OA, O'A'$  als feste Axen drehbar.

Die Bestimmung der Axoide für ein gewisses Gesetz der sich entsprechenden (gleichzeitigen) Drehungen der Elemente um diese Axen erfordert die Bestimmung der Polaxe für irgend eine gegenseitige Lage der Elemente, bei der sie sich mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  resp. um  $OA, O'A'$  drehen, d. h. die Bestimmung einer so gelegenen Geraden, dass die betreffende elementare gegenseitige Bewegung der Elemente als Combination einer Drehung und Schiebung um resp. längs dieser Geraden zu betrachten ist. Zu dem Ende sei  $Q$  ein Punkt der Geraden  $OO'$  in den Entfernungen  $OQ = r$  und  $O'Q = r'$  von  $O$  und  $O'$ ,  $QB$  parallel

Fig. 24.



$OA, QB'$  parallel  $O'A'$ : siehe Fig. 24, wo  $Q$  zwischen  $O$  und  $O'$ ,  $OA$  vor,  $O'A'$  hinter der Ebene  $BQB'$  liegend gedacht ist, während die Pfeilspitzen bei  $\omega$  und  $\omega'$  die Axrichtungen der betreffenden Drehungen, d. h. ihren Drehungssinn in der üblichen Weise andeuten sollen, dass sie einem der Pfeilrichtung entgegen Blickenden rechtläufig (wie die Bewegung der Gestirne gegen die Erde einem von Nord nach Süd blickenden Beobachter) erscheinen. Wenn nun zu den vorausgesetzten Drehungen der Elemente um ihre Axen  $OA, O'A'$  noch eine gemeinschaftliche Drehung beider mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega$  um  $OA$  hinzugefügt und dadurch das um  $OA$  drehbare erste Element in Ruhe versetzt wird, so ist die jetzt absolute Bewegung des zweiten seine relative Bewegung gegen das erste, die also aus den Drehungen mit den Winkelgeschwindigkeiten  $-\omega$  und  $\omega'$  um  $OA$  und  $O'A'$  zusammengesetzt ist. Von diesen kann die erstere durch eine gleiche mit der Winkelgeschwindigkeit  $-\omega$  um  $QB$  und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit  $r\omega$  nach der Richtung  $QS$  senkrecht zur Ebene  $OQB$ , die andere durch eine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega'$  um  $QB'$  und eine Schiebung mit der Geschwindigkeit  $r'\omega'$  nach der Richtung  $QS'$  senkrecht zur Ebene  $O'QB'$  ersetzt werden, und können dann die Drehungen um  $QB$  und  $QB'$  zu einer resultirenden Drehung um eine gewisse Axe  $QP$  in der zu  $OO'$  senkrechten, also mit den gegebenen Drehungsaxen  $OA, O'A'$  parallelen Ebene  $BQB'$  zusammengesetzt werden, deren Lage in dieser Ebene durch die Gleichung

$$\omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \dots \dots \dots (1)$$

bestimmt ist, unter  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Winkel  $BQP$  und  $B'QP$  verstanden. Diese Gerade  $QP$  ist die Polaxe, wenn die zwei Schiebungen nach  $QS$  und  $QS'$  eine in  $QP$  fallende resultirende Schiebung  $QR$  ergeben, wenn also,  $\alpha$  und  $\alpha'$  als spitze Winkel vorausgesetzt,

$$r\omega \cos \alpha = r'\omega' \cos \alpha' \dots \dots \dots (2)$$

oder mit Rücksicht auf Gl. (1)

$$\frac{r}{r'} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha'} \dots \dots \dots (3)$$

ist und zugleich  $QS$  und  $QS'$  auf entgegengesetzten Seiten von  $QP$  liegen. Letzteres ist der Fall, wenn, wie in Fig. 24 angenommen, die Diagonale  $Q$  des über  $\omega'$  und  $-\omega$  als Seiten construirten Parallelogramms (d. i. die Axrichtung der relativen Winkelgeschwindigkeit des um  $O'A'$  drehbaren Elementes gegen das andere) mit beiden Seiten des Parallelogramms spitze Winkel bildet und der Punkt  $Q$  zwischen  $O$  und  $O'$  liegt, wogegen die Lage einer

der Schubrichtungen  $QS$  und  $QS'$  gegen  $QP$  sich umkehren würde, wenn  $Q$  in der Geraden  $OO'$  ausserhalb der Strecke  $OO'$  läge oder wenn die Axrichtung von  $\Omega$  nur mit einer der Axrichtungen von  $\omega'$  und  $-\omega$  einen spitzen Winkel bildete. Letzteren Falls wird also die Gerade  $OO'$  von der Polaxe in einem solchen Punkte  $Q$  geschnitten, der ausserhalb der Strecke  $OO'$  liegt, und zwar auf der Seite von  $O'$  oder von  $O$ , jenachdem die Axrichtung von  $\Omega$  mit der von  $\omega'$  oder mit der von  $-\omega$  den spitzen Winkel bildet, also  $\omega \cos \alpha \leq \omega' \cos \alpha'$ , nach Gl. (2) somit  $r \geq r'$  ist: siehe die Figuren 25 und 26, deren Ebene  $BQB'$  beziehungsweise hinter und vor  $OO'$  liegend gedacht ist, den Punktfolgen  $OO'Q$  bei Fig. 25,  $QOO'$  bei Fig. 26 entsprechend.

Wenn nun, wie es in den Figuren 24—26 gesehen ist, mit  $QB$  und  $QB'$  allgemein solche Richtungen der mit den Drehungsaxen  $OA, O'A'$  parallel gezogenen betreffenden Geraden bezeichnet werden, die mit der im einen oder andern Sinne genommenen Polaxe  $QP$  die spitzen Winkel  $PQB = \alpha$  und  $PQB' = \alpha'$  bilden, und wenn  $\varepsilon$  den Winkel  $BQB'$  bezeichnet, der in den Fällen von Fig. 25 und Fig. 26 = dem Winkel  $(\omega, \omega')$  und jedenfalls spitz, im Falle von Fig. 24 dagegen = dem Winkel  $(-\omega, \omega')$  und spitz oder stumpf ist, so entsprechen den unterschiedenen 3 Fällen die Beziehungen:

Fig. 24.	Fig. 25.	Fig. 26.
$\alpha + \alpha' = \varepsilon$	$\alpha - \alpha' = \varepsilon$	$\alpha - \alpha' = -\varepsilon$
$r + r' = e$	$r - r' = e$	$r - r' = -e,$

welche zusammengefasst werden können in den Gleichungen:

$$\alpha \pm \alpha' = \pm \varepsilon; \quad r \pm r' = \pm e \dots \dots \dots (4)$$

Aus der ersten und aus Gl. (1) folgt ebenso wie im vorigen §.:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\cos \varepsilon \pm \frac{\omega}{\omega'}}; \quad \operatorname{tg} \alpha' = \frac{\pm \sin \varepsilon}{\frac{\omega'}{\omega} \pm \cos \varepsilon} \dots \dots \dots (5),$$

aus der zweiten und aus Gl. (3):

$$r = \pm e \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \alpha'}; \quad r' = \pm e \frac{\operatorname{tg} \alpha'}{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \alpha'} \dots \dots \dots (6).$$

Fig. 25.

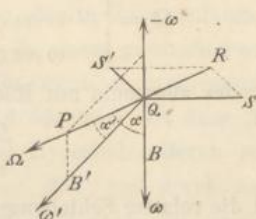
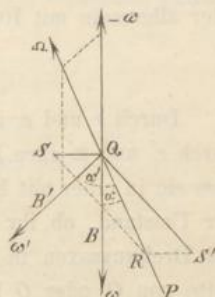


Fig. 26.





Die Ansicht der Figuren 24—26 lässt erkennen, dass die Winkelgeschwindigkeit der relativen Drehung um die Polaxe:

$$\Omega = \begin{cases} \omega \cos \alpha + \omega' \cos \alpha' & \text{für } e = r + r' \text{ (Fig. 24)} \\ -\omega \cos \alpha + \omega' \cos \alpha' & \text{,, } e = r - r' \text{ (Fig. 25)} \\ \omega \cos \alpha - \omega' \cos \alpha' & \text{,, } e = r' - r \text{ (Fig. 26)} \end{cases}$$

ist, oder allgemein mit Rücksicht auf Gl. (2):

$$\frac{\Omega}{e} = \frac{\omega \cos \alpha}{r} = \frac{\omega' \cos \alpha'}{r'} \dots \dots \dots (7),$$

und die relative Schiebungsgeschwindigkeit längs der Polaxe ( $QR$  in Fig. 24 bis 26),

$$v = \begin{cases} r \omega \sin \alpha + r' \omega' \sin \alpha' & \text{für } e = r + r' \\ r \omega \sin \alpha - r' \omega' \sin \alpha' & \text{,, } e = r - r' \\ -r \omega \sin \alpha + r' \omega' \sin \alpha' & \text{,, } e = r' - r \end{cases}$$

oder allgemein mit Rücksicht auf Gl. (1):

$$\frac{v}{e} = \omega \sin \alpha = \omega' \sin \alpha' \dots \dots \dots (8).$$

Durch  $r$  und  $\alpha$  ist die Lage der Polaxe gegen die Drehungsaxe  $OA$ , durch  $r'$  und  $\alpha'$  ihre Lage gegen  $O'A'$  bestimmt, da man ausserdem weiss, dass sie in einer mit beiden Drehungsaxen parallelen Ebene liegt, und auch der Umstand, ob ihr Schnittpunkt  $Q$  mit der gemeinsamen Normale  $OO'$  der Drehungsaxen in der Strecke  $OO'$  oder ausserhalb derselben auf der Seite von  $O'$  oder  $O$  liegt, dadurch entschieden wird, dass die Diagonale des über  $\omega'$  und  $-\omega$  (mit Berücksichtigung der betreffenden Axrichtungen) construirten Parallelogramms beziehungsweise mit beiden Seiten, oder nur mit der Seite  $\omega'$ , oder nur mit der Seite  $-\omega$  einen spitzen Winkel bildet. Ist diese Entscheidung getroffen, so sind dadurch auch der Winkel  $\varepsilon$  (als Winkel der Axrichtungen  $\omega'$  und  $-\omega$  im ersten,  $\omega'$  und  $\omega$  im zweiten und dritten Falle) und die Vorzeichen in den Gleichungen (5) und (6) bestimmt, so dass  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $\operatorname{tg} \alpha'$  nach Gl. (5), dann  $r$  und  $r'$  nach Gl. (6) unzweideutig berechnet werden können.

Sind  $\varphi$  und  $\varphi'$  entsprechende Drehungswinkel der beiden Elemente, und ist

$$\frac{\omega'}{\omega} = \frac{d\varphi'}{d\varphi} = f(\varphi)$$

gegeben, so sind durch die Gleichungen (5) und (6) die Grössen  $\operatorname{tg} \alpha$  und  $r$ ,  $\operatorname{tg} \alpha'$  und  $r'$  als Functionen von  $\varphi$ , letztere dann auch als Functionen von

$$\varphi' = \int_v^{\varphi} f(\varphi) d\varphi = F(\varphi)$$

bestimmt und somit die Gestalten beider Axoide. Wenn insbesondere das Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  constant ist, so sind die Axoide sogenannte hyperbolische oder einschalige Rotationshyperboloide um  $OA$  und  $O'A'$  als Axen, nämlich Flächen, welche eine in ihrer Anfangslage die gemeinsame Normale  $OO'$  von  $OA$  und  $O'A'$  in einem gewissen Punkte  $Q$  rechtwinklig schneidende Gerade  $QP$  beschreibt, wenn sie in unveränderlichen relativen Lagen beziehungsweise gegen  $OA$  oder  $O'A'$  um diese Axen rotirt. Die Meridianlinien dieser Flächen sind Hyperbeln, deren reelle Halbachsen beziehungsweise  $OQ=r$  und  $O'Q'=r'$  sind, und deren Asymptoten unter den Winkeln  $\alpha$  resp.  $\alpha'$  gegen  $OA$  resp.  $O'A'$  als imaginäre Hauptachsen geneigt sind. Ist nämlich, was z. B. die Fläche um  $OA$  als Axe betrifft, die Strecke  $QP=p$ , und ist  $P'$  die Projection des Punktes  $P$  auf die durch  $OO'$  gehende Normalebene zur Axe  $OA$  (die Ebene des kleinsten Parallelkreises oder sogenannten Kehlkreises der in Rede stehenden Fläche), so ergibt sich aus

$$OP' = x = \sqrt{OQ^2 + QP'^2} = \sqrt{r^2 + p^2 \sin^2 \alpha}$$

und  $PP' = y = p \cos \alpha$

die Gleichung der Meridianlinie durch Elimination von  $p$ :

$$\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{(r \cotg \alpha)^2} = 1.$$

#### §. 25. Bestimmung von Elementenflächen für gegebene Axoide.

Wenn die Axoide von Paarelementen gegeben oder (für ein gegebenes Gesetz ihrer gleichzeitigen Drehungen um windschiefe Axen von unveränderlicher gegenseitiger Lage) nach vorigem §. bestimmt worden sind, so können entsprechende Elementenflächen, d. h. sich berührende und deshalb kinematisch allein in Betracht kommende Oberflächentheile der Elemente nach Methoden gefunden werden, die den früher für den Fall cylindrischer Axoide besprochenen analog sind. Zu dem Ende ist zunächst der allgemein für die Oberflächen höherer Elementenpaare gültige (dem ersten der in §. 15 für den Fall cylindrischer Axoide angeführten Hilfssätze entsprechende) Satz zur Verfügung, dass jede der beiden Elementenflächen die Umhüllungsfläche aller Lagen ist, welche die andere bei der gleitend-rollenden Bewegung des mit ihr verbundenen Axoids gegen das mit jener verbundene Axoid nach und nach einnimmt. Er kann unmittelbar dazu dienen, eine Elementenfläche  $F'$  zu der gegebenen anderen  $F$  zu bestimmen oder

auch praktisch herzustellen, indem ein Werkzeug mit schneidigen Kanten, die nahe neben einander in einer der gegebenen Fläche  $F$  congruenten Fläche liegen, gegen einen Körper, aus dem das andere Element oder ein Modell desselben gebildet werden soll, unter allmählicher Annäherung in eine solche relative Bewegung versetzt wird, die der gegebenen relativen Bewegung beider Elemente gleich ist oder wenigstens vollkommen gleich wird, wenn die Annäherung des Werkzeugs an den zu bearbeitenden Körper einen gewissen Grad erreicht hat. Dieses Verfahren ist besonders dann brauchbar, wenn die Fläche  $F$  durch mechanische Hilfsmittel leicht herstellbar, wenn sie z. B. eine Schraubenfläche, d. h. eine Fläche ist, die von irgend einer Linie bei gleichzeitiger Drehung und Schiebung um resp. längs einer Axe mit constantem Verhältnisse der elementaren Drehungen und Schiebungen erzeugt wird, insbesondere z. B. zur Herstellung des Schraubenrades als des einen Elementes zu einer gegebenen Schraube als dem anderen Elemente eines Paares. — In allen diesen Fällen berühren sich die Elemente in Linien, nämlich in den Durchschnittslinien der auf einander folgenden Lagen der einen Elementenfläche gegen das andere Element.

Die Sätze unter 2) und 3) in §. 15 lassen sich nicht ebenso unmittelbar auf den vorliegenden allgemeinen Fall übertragen, und somit auch nicht die darauf beruhenden Bestimmungsmethoden entsprechender Elementenflächen  $F, F'$ . Ist nämlich  $B$  ein Berührungspunkt von  $F, F'$  und  $BP = p$  das Perpendikel auf die Polaxe  $PQ$ , so braucht die gemeinsame Normale von  $F$  und  $F'$  im Punkte  $B$  nicht etwa mit  $BP$  zusammen zu fallen noch überhaupt eine ganz bestimmte Lage gegen  $BP$  oder gegen die Polaxe  $PQ$  zu haben. Ist  $\Omega$  die relative Winkelgeschwindigkeit,  $v$  die relative Schiebungsgeschwindigkeit der Elemente um resp. längs der Polaxe, so bewegt sich der Punkt  $B$  des einen Elementes gegen das andere nach der Richtung  $BB'$ , welche senkrecht zu  $BP$  ist und mit  $PQ$  den Winkel

$$\tau = \arctg \frac{p\Omega}{v} \dots \dots \dots (1)$$

bildet, und damit diese Bewegung unbeschadet andauernder Berührung möglich sei, ist nur nöthig, dass die gemeinsame Berührungsebene von  $F$  und  $F'$  im Punkte  $B$  durch die Gerade  $BB'$  hindurch gehe, dass also die gemeinsame Normale  $BN$  in der Ebene liege, die zu  $BB'$  senkrecht ist, also in der Ebene, die durch  $BP$  geht und mit der Polaxe den Winkel  $\nu = 90^\circ - \tau$  bildet. Bei cylindrischen Axoiden ist  $v = 0$ , also  $\tau = 90^\circ$ ,  $\nu = 0$ ;  $BN$  muss die Polaxe schneiden, und zwar rechtwinklig schneiden, entsprechend dem Satze 2) in §. 15, sofern dann die Elemente selbst cylindrisch und ihre erzeugenden Geraden mit denen der Axoide parallel sind-

Durch eine bewegliche Linie  $L$  können entsprechende Elementenflächen, die sich beständig in der Linie berühren (analog der in §. 17 erklärten Methode der Hülfspolbahnen), als die von der Linie gegen das eine und andere Element beschriebenen Flächen  $F, F'$  erhalten werden, wenn ihre Bewegung so geregelt wird, dass die entsprechenden relativen Bewegungsrichtungen jedes Punktes  $B$  von  $L$  gegen das eine und andere Element stets mit der durch Gl. (1) bestimmten Richtung  $BB'$  übereinstimmen. Das ist der Fall, wenn die elementare relative Bewegung von  $L$  gegen das eine und folglich dann auch gegen das andere Element stets eine elementare Schraubenbewegung um die Polaxe von solcher Art ist, dass die betreffenden relativen Winkelgeschwindigkeiten und Schiebungsgeschwindigkeiten  $\Omega', v'$  resp.  $\Omega'', v''$  dieselben Verhältnisse zu einander haben wie die entsprechenden Grössen  $\Omega, v$  für die relative Bewegung der Elemente gegen einander:

$$\frac{p\Omega}{v} = \frac{p\Omega'}{v'}, \text{ also auch } = \frac{p(\Omega + \Omega')}{v + v'} = \frac{\Omega''}{v''} \dots \dots (2).$$

Mechanisch können so entsprechende Elementenflächen hergestellt werden, indem als Linie  $L$  die schneidige Kante eines Werkzeugs benutzt und dieses relativ gegen die zu bearbeitenden Körper gemäss der Bedingung (2) bewegt wird.

Insbesondere ist diese Bedingung dann erfüllt, wenn die Linie  $L$  mit dem einen der gegebenen Axoide fest verbunden ( $\Omega' = 0, v' = 0$ , also  $\Omega'' = \Omega, v'' = v$ ), z. B. mit einer Geraden dieses Axoids zusammenfallend angenommen wird. Bei Zahnrädern entsteht so eine Verzahnungsart, die analog der Punktverzahnung bei cylindrischen Rädern (die eigentlich auch eine Linienverzahnung ist, da den Punkten der Zahnprofile gerade Linien der Zahnflächen entsprechen) als Linienverzahnung bezeichnet werden kann, ebenso wie dort aber praktisch durch eine Triebstockverzahnung ersetzbar ist, indem die Elementenflächen durch äquidistante Flächen (analog dem Ersatz von Elementenprofilen durch äquidistante Curven nach §. 18), insbesondere also gerade Linien als Elementenflächen durch conaxiale Cylinderflächen ersetzt werden.

Liesse man die Linie  $L$  sich so bewegen, dass sie beständig mit der Polaxe zusammenfällt, wodurch wegen  $p = 0$  der Bedingung (2) unabhängig von  $\Omega'$  und  $v'$  genügt wird, so beschriebe sie die gegebenen Axoide selbst als zusammengehörige Elementenflächen. Eine rein rollende gegenseitige Bewegung der letzteren würde selbst diesem durch allgemeinere Reibungsräder zu realisirenden Falle nur dann zukommen, wenn die zugleich als Axoide und als Elementenflächen wirksamen Oberflächen derselben cylindrisch oder conisch wären. —

Beschränkt man sich auf die weniger weit gehende Forderung, dass sich die Elementenflächen stets nur in wenigstens einem Punkte berühren sollen, so können dergleichen noch allgemeiner durch eine bewegliche Fläche  $H$  erhalten werden als die Umhüllungsflächen  $F, F'$  aller Lagen derselben beziehungsweise gegen das eine und das andere Element, ohne dass die Bewegung dieser Fläche an irgend eine Bedingung geknüpft wäre. Indem dieselbe in jeder Lage sowohl  $F$  wie  $F'$  in je einer Linie  $L$  resp.  $L'$  berührt (in der Durchschnittslinie dieser und einer unendlich nahe benachbarten Lage von  $H$  gegen das betreffende Element), ist es, um principiell, d. h. abgesehen von Rücksichten der Ausführbarkeit und der praktischen Zweckmässigkeit, die Flächen  $F, F'$  als Elementenflächen benutzen zu können, nur nöthig, dass die Linien  $L, L'$  in der Fläche  $H$  sich schneiden, so dass der Schnittpunkt, in dem sich dann  $F, F'$  gegenseitig berühren, in jeder dieser Flächen eine gewisse Bahn durchläuft, wie es im Allgemeinen der Fall sein wird. Sofern nämlich die Bedingung, dass  $F, F'$  in ihrem Berührungspunkte  $B$  eine gemeinsame Tangente von gewisser durch Gl. (1) bestimmter Richtung  $BB'$  haben müssen, in Beziehung auf jede der beiden Flächen die Erfüllung nur einer Gleichung erfordert, kann ihr im Allgemeinen durch eine stetige Folge zusammengehöriger Werthe der zwei Coordinaten entsprochen werden, wodurch die Lage des Punktes  $B$  in  $F$  oder  $F'$  bestimmt ist. Beschränkt wird aber die zulässige Bewegung und die Gestalt der Hilfsfläche  $H$  durch weitere Forderungen, z. B. durch die, dass die Berührungslinien  $L, L'$  von  $F$  und  $F'$  mit  $H$  nicht nur einen, sondern alle Punkte gemein haben, d. h. sich nicht schneiden, sondern zusammenfallen sollen in einer Linie, in der sich dann  $F$  und  $F'$  gegenseitig berühren, ferner durch die Forderung, dass diese Berührungslinie eine Gerade sein soll u. s. f. Im folgenden §. werden diese Forderungen für einen speciellen Fall näher in Betracht gezogen.

§. 26. Evolventenflächen von Schraubelinien als Elementenflächen für Umdrehungshyperboloide als Axoide.

Wenn die Elemente  $R, R'$  eines Paares um windschiefe Axen  $A, A'$  von unveränderlicher gegenseitiger Lage mit Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  von unveränderlichem Grössenverhältnisse drehbar, ihre Axoide folglich nach §. 24 einschalige Rotationshyperboloide sind, so giebt es gewisse Elementenflächen  $F, F'$ , die den in §. 19 besprochenen Kreisevolventen als Elementenprofile für kreisförmige Pol-

bahnen analog und ihrer Eigenschaften wegen von besonderem Interesse sind, namentlich als Zahnflächen von Rädern, die dann mit Rücksicht auf die Gestalt ihrer Axoide Hyperboloidräder genannt werden können, während ihre fragliche Verzahnungsart als allgemeine Evolventenverzahnung\*) zu bezeichnen ist.

Nach §. 19 konnte die Kreisevolvente als Zahnprofil von Cylinder-rädern vermittle einer Geraden entstanden gedacht werden, die in der gemeinsamen Ebene der kreisförmigen Polbahnen sich so bewegt, dass sie einer festen Geraden in derselben parallel bleibt und von ihr mit einer der gemeinsamen Peripheriegeschwindigkeit, also auch den Winkelgeschwindigkeiten der Polbahnen proportionalen Geschwindigkeit sich entfernt, indem dann die fraglichen Profile als Umhüllungscurven der relativen Lagen dieser Geraden gegen die eine und die andere Polbahn sich ergaben. Analog werde hier angenommen, dass, während die Elemente  $R, R'$  mit den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  um ihre festen Axen  $A, A'$  sich drehen, eine Ebene  $E$  sich so bewegt, dass sie einer festen Ebene  $E_0$  parallel bleibt und von derselben mit einer den Winkelgeschwindigkeiten  $\omega, \omega'$  proportionalen Geschwindigkeit  $u$  sich entfernt. Die Umhüllungsfläche  $F$  aller relativen Lagen von  $E$  gegen  $R$  ist der Ort der geraden Durchschnittslinien  $G$  von je zwei auf einander folgenden relativen Lagen dieser Ebene  $E$ , und da je zwei auf einander folgende dieser Geraden  $G$  in einer Ebene liegen (in der mittleren von 3 auf einander folgenden Lagen der Ebene  $E$ ), so muss  $F$  eine abwickelbare Fläche sein, also eine Wendecurve (Umhüllungscurve ihrer Geraden) haben, die mit  $S$  bezeichnet sei. Ebenso seien  $G'$  die Geraden und sei  $S'$  die Wendecurve der abwickelbaren Fläche  $F'$ , die von den relativen Lagen der Ebene  $E$  gegen das Element  $R'$  umhüllt wird. Sind insbesondere  $G, G'$  zwei entsprechende, d. h. solche Gerade, in denen die Flächen  $F, F'$  gleichzeitig von der Hülfebene  $E$  berührt werden, so schneiden sich diese Geraden im Allgemeinen in einem gewissen Punkte  $B$ , in dem dann  $F, F'$  die gemeinsame Berührungsebene  $E$  haben, somit sich gegenseitig berühren, so dass sie principiell als Elementenflächen dienen können. Die 3 Grössen, welche die Bewegung der Ebene  $E$  bestimmen, nämlich die Geschwindigkeit  $u$  und die spitzen Winkel  $\varphi, \varphi'$ , unter denen sie von den Axen  $A, A'$  geschnitten werden mag, können dabei einstweilen beliebig gewählt werden.

\* Auch spiraloïdische Verzahnung genannt: siehe J. Pützer, über den spiraloïdischen Zahneingriff; Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Jahrg. 1860, S. 234.

Jede der Flächen  $F, F'$  kann als geradlinige Fläche auch von einer Geraden beschrieben werden; um aber die relative Bewegung zu erkennen, die zu dem Ende diese Gerade beziehungsweise gegen  $R$  und  $R'$  haben muss, sind die Flächen  $F, F'$  näher zu bestimmen. Zunächst kann man bemerken, dass die relative Bewegung der Ebene  $E$  gegen  $R$ , wobei sie  $F$  als Umhüllungsfläche erzeugt, zusammengesetzt ist aus einer Drehung um  $A$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entgegengesetzt der Drehung von  $R$  um  $A$  und aus einer Schiebung senkrecht zur festen Ebene  $E_0$  mit der Geschwindigkeit  $u$ . Letztere kann zerlegt werden in eine Schiebung mit der Geschwindigkeit

$$a = \frac{u}{\sin \varphi}$$

im Sinne der Axe  $A$  und eine Schiebung im Sinne der Ebene  $E$  selbst, die aber gleichgültig ist für die Gerade  $G$ , in welcher  $E$  von einer nächstfolgenden Lage geschnitten wird, so dass auch  $F$  bezeichnet werden kann als Umhüllungsfläche aller Lagen einer Ebene, die mit der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  entgegengesetzt dem Drehungssinne von  $R$  um  $A$  gedreht und mit der Geschwindigkeit  $a$  längs  $A$  verschoben wird. Denkt man sich nun um  $A$  als Axe eine Cylinderfläche mit dem Radius  $\rho$  und in derselben eine Schraubenlinie, deren Tangenten unter dem Winkel  $\varphi$  gegen  $A$  geneigt sind, so stimmt jene Bewegung von  $E$  überein mit der Bewegung einer Normalebene der Cylinderfläche  $C$ , die nach und nach durch alle Tangenten  $G$  der Schraubenlinie hindurchgeht, wenn nur  $\rho$  so gewählt wird, dass die Winkel- und die Schiebungsgeschwindigkeit um resp. längs  $A$  sich wie  $\omega : a$  zu einander verhalten, d. h. wenn

$$\rho \omega = a \operatorname{tg} \varphi = \frac{u}{\cos \varphi} \dots \dots \dots (1)$$

gemacht wird. Hieraus ergibt sich, dass  $F$  die Tangenten- oder Evolventenfläche einer Schraubenlinie ist, die auf der mit  $A$  conaxialen Cylinderfläche  $C$  zum Radius  $\rho$  liegt, und deren Tangenten unter dem Winkel  $\varphi$  gegen  $A$  geneigt sind; die Schraubenlinie selbst ist die Wendecurve  $S$  der Fläche  $F$ . Ebenso ist  $F'$  die Evolventenfläche einer unter dem Winkel  $\varphi'$  gegen ihre Axe  $A'$  geneigten Schraubenlinie  $S'$  auf einer Cylinderfläche um  $A'$  als Axe, deren Radius  $\rho'$  der Gleichung entspricht:

$$\rho' \omega' = a' \operatorname{tg} \varphi' = \frac{u}{\cos \varphi'} \dots \dots \dots (2),$$

unter  $a'$  die Geschwindigkeit verstanden, mit welcher der Schnittpunkt von  $E$  und  $A'$  in dieser Axe sich bewegt.

Die Elementenfläche  $F$ , z. B. als Zahnfläche eines Rades  $R$ , kann hier nach praktisch hergestellt werden, indem eine gerade Meisselkante, unter dem Winkel  $\varphi$  gegen die Axe  $A$  geneigt und mit einem kürzesten Abstände  $\rho$  von derselben, nach der Richtung von  $A$  mit einer Geschwindigkeit  $a$  bewegt wird, die zu der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$ , mit welcher gleichzeitig der zu bearbeitende Radkörper  $R$  um  $A$  gedreht wird, das Verhältniss  $\rho \cotg \varphi$  hat. In gleicher Weise ist die Fläche  $F'$  herzustellen bei Substitution von  $\varphi', \rho', a', \omega'$  für  $\varphi, \rho, a, \omega$ . Dabei können die 4 Grössen  $\varphi, \rho, \varphi', \rho'$ , durch welche  $a$  und  $a'$  bei gegebenen Werthen von  $\omega$  und  $\omega'$  bestimmt sind, beliebig so gewählt werden, dass sie nur der einen aus Gl. (1) und (2) folgenden Bedingung genügen:

$$\rho \omega \cos \varphi = \rho' \omega' \cos \varphi' \dots \dots \dots (3).$$

Diese an eine Bedingungsgleichung geknüpfte Wahl der 4 Grössen  $\varphi, \rho, \varphi', \rho'$  lässt der Ebene  $E$  dieselbe Bewegungsfreiheit wie die bedingungslose Wahl der ihre Bewegung ursprünglich bestimmenden 3 Grössen  $\varphi, \varphi', u$ .

Jede Berührungsebene  $T$  der Cylinderfläche  $C$  schneidet die Fläche  $F$  in einer Geraden  $G$  und zwar rechtwinklig, da sie normal zu der die Fläche  $F$  in dieser Geraden  $G$  berührenden Normalebene  $E$  von  $C$  ist; jede Normale von  $F$ , weil in einer solchen Normalebene  $T$  von  $F$  liegend, berührt also die Cylinderfläche  $C$ . Ebenso wird  $C'$  von jeder Normale der Fläche  $F'$  berührt. Die gemeinsame Normale von  $F, F'$  im Schnittpunkte  $B$  von zwei entsprechenden Geraden  $G, G'$  berührt also beide Cylinderflächen  $C, C'$ , etwa in den Punkten  $M, M'$ , während sie unter den Winkeln  $90^\circ - \varphi$  und  $90^\circ - \varphi'$  beziehungsweise gegen die Axen  $A$  und  $A'$  geneigt ist, so dass, wenn  $N$  den Normaldruck zwischen  $F$  und  $F'$  im Berührungspunkte  $B$  bedeutet, die durch ihn übertragene Arbeitstärke

$$= N \rho \omega \cos \varphi = N \rho' \omega' \cos \varphi'$$

ist, die nach Gl. (3) einander gleichen Producte also der pro Einheit des Normaldrucks übertragenen Arbeitstärke gleich sind. In der Geraden  $MM'$  als sogenannter Eingriffslinie im Falle von Zahnrädern  $R, R'$  bewegt sich der Eingriffspunkt  $B$  mit der Geschwindigkeit  $u$  im Sinne der Bewegung von  $E$ .

Nun giebt es aber 4 gerade Linien  $MM'$ , welche die Cylinderflächen  $C, C'$  berühren und mit  $A, A'$  gegebene Winkel  $= 90^\circ - \varphi$  und  $90^\circ - \varphi'$  bilden; sie liegen gegen einander wie parallele Kanten eines Parallelepipedum, je zwei auf entgegengesetzten Seiten von  $C$  und von  $C'$ , und es fragt sich, welche von ihnen als Eingriffslinie zu benutzen sei, wenn ausserdem gefordert wird, dass die Flächen  $F, F'$  sich in ihrem Berührungspunkte  $B$  ihre convexen Seiten zuehren sollen, um (bei Beschränkung auf hin-



länglich kleine Flächentheile) sicher zu sein, dass sie nicht etwa an einer Stelle sich schneiden und somit als Zahnflächen unbrauchbar werden. Zur Beantwortung dieser Frage kann man bemerken, dass, ebenso wie jede Gerade  $G$  durch ihren Berührungspunkt mit der Wendecurve  $S$ , so die vollständige Fläche  $F$  durch die Wendecurve selbst in zwei Theile getheilt wird, die in entgegengesetztem Sinne gekrümmt sind, indem der eine Theil mit dem andern dadurch zur Deckung gebracht werden kann, dass er mit seiner Axe  $A$  in die entgegengesetzte Lage der letzteren umgewendet und die ihn begrenzende Schraubenlinie  $S$  mit der den anderen Theil begrenzenden nämlichen Schraubenlinie  $S$  zur Deckung gebracht wird. Von der Seite der Axe  $A$  aus gesehen, nach welcher bei Beschreibung der Fläche  $F$  durch die Gerade  $G$  die Schiebungsgeschwindigkeit  $a$  dieser letzteren gerichtet ist, erscheint derjenige Theil von  $F$  convex, welcher hierbei von dem Theil der Geraden  $G$  beschrieben wird, der sich von der Schraubenlinie  $S$  abwickelt. Von derselben Seite der Axe  $A$  aus gesehen muss sich das Rad  $R$  mit der Cylinderfläche  $C$  und der darauf liegenden Schraubenlinie  $S$  in solchem Sinne um  $A$  drehen, als ob letztere als Schraubenspindel in eine Mutter hineingeschraubt werden sollte, wenn der genannte Theil von  $F$  mit vorausgekehrter convexer Seite als treibende Zahnfläche dienen soll, wobei sich  $B$  im Sinne von  $M$  gegen  $M'$  bewegt, diese Gerade  $MM'$  also, wenn sie in ihrer eigenen Richtung mit der Geschwindigkeit  $u$  gleitend (der Punkt  $B$  in ihr fest) gedacht wird, sich bei  $M$  von einer Schraubenlinie  $L$  abwickelt, die, auf der Cylinderfläche  $C$  liegend, die Schraubenlinie  $S$  rechtwinklig schneidet. Umgekehrt muss dabei, wenn die getriebene Zahnfläche  $F'$  ihre convexe Seite hinterwärts, der treibenden Zahnfläche  $F$  zukehren soll, dieselbe Gerade  $MM'$  sich bei  $M'$  auf eine Schraubenlinie  $L'$  aufwickeln, die in der Cylinderfläche  $C'$  die Schraubenlinie  $S'$  rechtwinklig schneidet. Diesen Bedingungen (analog dem Verhalten der Eingriffslinie  $mm'$  in Fig. 19, §. 19 für die Evolventenverzahnung von Cy linderrädern bezüglich auf die den Schraubenlinien  $L$  und  $L'$  entsprechenden, dort mit  $E$  und  $E'$  bezeichneten Hilfskreise) entspricht aber nur eine jener 4 Geraden  $MM'$ , die unter den Winkeln  $90^\circ - \varphi$  und  $90^\circ - \varphi'$  beziehungsweise gegen  $A$  und  $A'$  geneigt die Cylinderflächen  $C$  und  $C'$  berühren; diese ist dann die zu benutzende Eingriffslinie und bedingt die Stellen, wo die Räder  $R, R'$  auf den Axen  $A, A'$  zu befestigen sind. Auch ist der Eingriff durch Beschränkung der Zahnlangen so zu begrenzen, dass der Berührungspunkt  $B$  beständig zwischen  $M$  und  $M'$  (ebenso wie in Fig. 19 der Eingriffspunkt  $p$  beständig zwischen  $m$  und  $m'$ ) liegt. Wegen jener Abhängigkeit der Eingriffslinie vom Drehungssinne der Räder sind

für den umgekehrten Drehungssinn (wobei das vorher treibende zum getriebenen Rade wird) die anderen Seiten der Zähne im Allgemeinen nicht als Zahnflächen zu gebrauchen, ist vielmehr ein eigenes Räderpaar an solchen anderen Stellen der Axen nöthig, dass diejenige jener 4 Geraden  $MM'$  jetzt als Eingriffslinie zur Geltung kommt, welche der vorher benutzten diagonal gegenüber, d. h. auf der anderen Seite sowohl von  $C$  wie von  $C'$  liegt. —

Von besonderem Interesse ist die Frage, welchen Bedingungen die Grössen  $\varphi, \varrho, \varphi', \varrho'$  ausser der Gleichung (3) genügen müssen, wenn die Flächen  $F, F'$  sich beständig in einer Geraden berühren sollen. In dieser müssen dann zwei entsprechende Gerade  $G, G'$ , also auch zwei Berührungsebenen  $T, T'$  der Cylinderflächen  $C, C'$  als gemeinsame Normalebene von  $F, F'$  zusammenfallen. Eine gemeinsame Berührungsebene  $T$  haben aber die Cylinderflächen  $C, C'$ , sofern ihre Axen  $A, A'$  nicht parallel sind, nur dann, wenn sie sich selbst in einem gewissen Punkte  $D$  berühren, der dann in der Geraden liegt, welche die Axen  $A, A'$  in gewissen Punkten  $O, O'$  rechtwinklig schneidet, so dass, wenn wieder  $e$  den kürzesten Abstand  $OO'$  dieser Axen bedeutet,

$$\varrho + \varrho' = \pm e \dots \dots \dots (4)$$

sein muss, nämlich

$$\varrho + \varrho' = e, \varrho - \varrho' = e \text{ oder } \varrho - \varrho' = -e,$$

jenachdem  $D$  in der Strecke  $OO'$  oder ausserhalb derselben auf der Seite von  $O'$  oder von  $O$  liegt. Indem ferner die Berührungsebene  $T$  der Cylinderflächen  $C, C'$  mit den Axen  $A, A'$  parallel, also senkrecht zu  $OO'$ , die zur Ebene  $T$  senkrechte Ebene  $E$  folglich parallel mit  $OO'$  ist, müssen ihre spitzen Winkel  $\varphi, \varphi'$  mit den Axen  $A, A'$  der Bedingung

$$\varphi + \varphi' = \pm \varepsilon \dots \dots \dots (5)$$

entsprechen, unter  $\varepsilon$  den Winkel verstanden, den zwei von irgend einem Punkte  $q$  der Ebene  $E$  aus parallel mit den Axen  $A, A'$  so gezogene Richtungen  $qb, qb'$  mit einander bilden, dass sie gegen die in gewissem Sinne  $qp$  genommene Durchschnittslinie der Ebenen  $E$  und  $bqb'$  unter den spitzen Winkeln  $\varphi, \varphi'$  geneigt sind. Dabei hat Gl. (5) die erste, zweite oder dritte der Formen:

$$\varphi + \varphi' = \varepsilon; \varphi - \varphi' = \varepsilon; \varphi - \varphi' = -\varepsilon,$$

jenachdem  $qp, qb'$  oder  $qb$  die mittlere der fraglichen 3 Richtungen ist, entsprechend den Figuren 24, 25 und 26 (§. 24) bei Ersetzung der Buchstaben  $Q, P, B, B', \alpha, \alpha'$  durch  $q, p, b, b', \varphi, \varphi'$ .

Durch die Gleichungen (3), (4) und (5) sind die 4 Grössen  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\varphi'$ ,  $\rho'$  immer noch nicht vollständig als Functionen der gegebenen Grössen  $e$ ,  $\varepsilon$  und  $\frac{\omega'}{\omega}$  bestimmt; es giebt also unendlich viele selbst solche Verzahnungs-

arten von Hyperboloidrädern, bei denen sich die Zähne in geraden Linien berühren. Sind durch die Annahme einer vierten Beziehung zwischen den gegebenen und den die Flächen  $F$ ,  $F'$  charakterisirenden Grössen  $\varphi$ ,  $\rho$ ,  $\varphi'$ ,  $\rho'$  die Zahnformen bestimmt worden, so wird durch nachträgliche Aenderung von  $e$  oder  $\varepsilon$  die Erfüllung von Gl. (4) oder (5) zwar gestört, die von Gl. (3) aber nicht: der Eingriff dieser Zähne bleibt ein dem gegebenen constanten Verhältnisse der Winkelgeschwindigkeiten  $\omega$ ,  $\omega'$  entsprechender richtiger Eingriff, nur geht die Linienberührung in Punktberührung über.

Würde als vierte Beziehung die Gleichung

$$\omega \sin \varphi = \omega' \sin \varphi'$$

angenommen, so wären sie und die Gleichungen (3), (4), (5) mit den Gleichungen (1), (2) und (4) in §. 24 identisch, wenn  $\varphi = \alpha$ ,  $\varphi' = \alpha'$ ,  $\rho = r$ ,  $\rho' = r'$  gesetzt wird: statt der Zahnflächen ergäben sich die Axoide selbst als Oberflächen hyperboloidischer Reibungsräder.

Wird als vierte Beziehung die Gleichung

$$\rho \omega = \rho' \omega' \dots \dots \dots (6)$$

angenommen, so ergeben sich hieraus und aus Gl. (4) die Halbmesser  $\rho$ ,  $\rho'$  der Cylinderflächen  $C$ ,  $C'$  ebenso wie nach §. 21, Gl. (4) die Theilkreis-

halbmesser von Cyllinderrädern, deren Axenentfernung  $= e$  und deren Winkelgeschwindigkeitsverhältniss  $= \frac{\omega}{\omega'}$  ist. Aus Gl. (3) und (5) folgt dann

$$\varphi = \varphi' = \frac{\varepsilon}{2} \dots \dots \dots (7).$$

Lässt man  $\varphi$  in die Grenze Null übergehen, so geht die von der Eingriffslinie  $MM'$  berührte Schraubenlinie  $L$  auf  $C$  in das kreisförmige Profil dieser Cylinderfläche mit dem Halbmesser  $\rho$  über, die Zahnfläche  $F$  (beschrieben von einer Geraden, welche  $C$  berührt und  $MM'$  rechtwinklig schneidet, bei der Abwälzung dieser Geraden  $MM'$  auf  $L$ ) in die cylindrische Fläche, deren Profil die Evolvente des Kreises  $L$  ist; das Rad  $R$  ist dann ein Cyllinderrad mit Evolventenverzahnung (§. 19). Mit Punktberührung ist der Eingriff auch eines solchen Rades mit einem Hyperboloidrade auf unendlich mannigfache Weise möglich, indem die Grössen  $\rho$ ,  $\rho'$  und  $\varphi$  nur der einen Bedingung

$$\rho \omega = \rho' \omega' \cos \varphi' \dots \dots \dots (8)$$

entsprechend anzunehmen sind, in welche die Gl. (3) für diesen Fall übergeht. Für Linienberührung kommen aber nach Gl. (4) und (5) noch die weiteren Bedingungen

$$\rho \pm \rho' = \pm e; \varphi' = \varepsilon. \dots \dots \dots (9)$$

hinzu, woraus dann für  $\rho$  und  $\rho'$  sich dieselben Ausdrücke ergeben wie für die Theilkreishalbmesser von Cylinderrädern, deren Axenentfernung =  $e$

und deren Winkelgeschwindigkeitsverhältniss =  $\frac{\omega}{\omega' \cos \varepsilon}$  ist. Dieser (von

Olivier in seiner *théorie géométrique des engrenages* für sich erörterte) Eingriff ist übrigens an die Voraussetzung  $\varepsilon < 90^\circ$  gebunden.

Sind endlich beide Räder Cylinderräder mit Evolventenverzahnung, d. h.  $\varphi = 0$  und  $\varphi' = 0$ , so geht die Bedingung (3), der die Halbmesser  $\rho, \rho'$  ihrer Hilfskreise (Hülfszylinder) zu entsprechen haben, in die Form (6) über. Sollen sich die Zähne in geraden Linien berühren, so müssen die Axen  $A, A'$  parallel sein, entsprechend  $\varepsilon = 0$  nach Gl. (5), während dann Gl. (4) als Bedingung dafür, dass die Cylinderflächen  $C, C'$  eine gemeinsame Berührungsebene haben, fortfällt. Bei geänderter Entfernung  $e$  der parallelen Axen findet deshalb ein solcher Eingriff nach wie vor mit Linienberührung in richtiger Weise, einem gegebenen Verhältnisse  $\frac{\omega}{\omega'}$ , entsprechend, statt, während er durch gleichzeitige oder alleinige Aenderung von  $\varepsilon$  in einen richtigen Eingriff mit Punktberührung übergeht.

## II. Unselbständige Elementenpaare und kinematische Ketten.

Wenn der im §. 1 aufgestellte Begriff einer Maschine allgemein zutreffend sein soll, wenn also jede Maschine als eine zwangläufig geschlossene kinematische Kette mit einem festgestellten Gliede soll betrachtet werden können, so ist nun eine nachträgliche Erweiterung der Voraussetzungen nöthig, die dem Begriffe einer zwangläufig geschlossenen Kette bisher zu Grunde lagen; insbesondere gilt das in Betreff der seitherigen Voraussetzungen, dass die Elemente eines Paares und die Glieder einer Kette durchaus starre Körper seien, sowie dass die Geschlossenheit eines Paares oder einer Kette eine selbständige, d. h. durch die Gestalt der Elemente resp. durch die Verbindungsweise der Glieder allein vermittelte sei.