Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Getriebe und der mechanischen Messinstrumente

Grashof, Franz

Leipzig, 1883

[Einleitung]

urn:nbn:de:bsz:31-282938

ERSTER ABSCHNITT.

Theorie der Getriebe.

A. Kinematik.*

§. 1. Einleitende Erklärungen.

Während unter Kinematik im Allgemeinen die Lehre von der Bewegung eines Punktes, Körpers oder Körpersystems ohne Rücksicht auf die bewegenden Kräfte und bewegten Massen verstanden wird, beschränken sich einerseits die folgenden Untersuchungen auf die gegenseitigen Bewegungen der Bestandtheile solcher besonderen Körpersysteme, wie sie den Maschinen eigenthümlich sind, erweitern aber andererseits die Aufgabe durch das vorgesetzte Ziel einer systematischen Entwicklung und Uebersicht der zur Vermittlung bestimmter Bewegungen geeigneten Körperverbindungen. Im ersteren Sinne könnte die hier in Rede stehende Lehre auch als Maschinen-Kinematik (Anwendung der Kinematik auf Maschinen), im letzteren als Kinetrik** bezeichnet werden im Gegensatze

* Den unter dieser Ueberschrift folgenden Entwickelungen liegt zwar in der Hauptsache Reuleaux's „Theoretische Kinematik, 1875" zu Grunde, wodurch dieser Zweig der Maschinenlehre vor Allem (trotz mancher Mängel und Irrthümer) in systematischer Weise ausgebildet wurde; indessen sind die Abweichungen der folgenden Darstellung von derjenigen des genannten Werkes, die sich zum Theil mit der kritischen Besprechung desselben durch Prof. Rittershaus im 21. Bande des „Civilingenieur" in Uebereinstimmung befinden, zu mannigfach, als dass es thunlich war, sie einzeln hervorzuheben und zu begründen, ohne der Darstellung einen derartig polemischen Charakter zu geben, wie er dem Zwecke des vorliegenden Buches nicht entsprechend erachtet wurde. Dem sachverständigen Leser werden die Abweichungen und ihre Gründe aus der Darstellung selbst und ihrer Vergleichung mit dem Reuleaux'schen Werke erkennbar sein.

** κινημα, Bewegung; κινητρον, Hülfsmittel zur Bewegung.

zur allgemeinen oder reinen, kurzweg sogenannten Kinematik, welche als Theil der theoretischen Mechanik behandelt zu werden pflegt, und deren Fundamentalsätze deshalb hier als bekannt vorausgesetzt werden.*

Nun ist eine Maschine als Körpersystem besonderer Art vor Allem dadurch ausgezeichnet, dass jeder dieser Körper, welche einstweilen (vorbehaltlich gewisser später erst zu besprechender Begriffserweiterungen) als *starre* Körper vorausgesetzt werden, durch beständige Berührung mit wenigstens einem anderen derselben in seiner Beweglichkeit beschränkt wird. Je zwei solche sich berührende und dadurch sich gegenseitig stützende Körper heissen *Elemente* und bilden zusammen ein *Elementenpaar*, das übrigens als solches vollständig charakterisirt ist durch die Gestalten der sich berührenden Oberflächentheile beider Elemente und durch die Art dieser Berührung, die ihrerseits vor Allem bedingt ist durch den Sinn, in welchem der fragliche Oberflächentheil jedes Elementes dasselbe begrenzt, d. h. durch die Seite der Fläche, auf der die materielle Substanz des Elementes gelegen ist. So ist z. B. ein Elementenpaar als solches bestimmt, wenn angeführt wird, dass die dasselbe als Elemente bildenden Körper sich mit gewissen Cylinderflächen in einer Geraden berühren, wenn nur ausserdem noch gesagt ist, ob beide Körper Vollcylinder (Convexcylinder) sind, d. h. ihre Substanz innerhalb der Cylinderfläche gelegen, oder der eine ein Hohlcylinder (Concavcylinder), d. h. seine Substanz ausserhalb der Cylinderfläche gelegen ist; es ist aber gleichgültig für den Charakter dieses Körperpaares als Elementenpaar, wie etwa der Hohlcylinder von aussen begrenzt, ob ferner der Vollcylinder innerhalb seiner Cylinderfläche ganz mit Körpersubstanz erfüllt, und wie er anderenfalls etwa innen begrenzt sein mag. — Die speciellen Bezeichnungen gewisser Körper, wie Prisma, Cylinder, Kegel, Kugel, Drehkörper (Rotationskörper) etc. sollen in der Folge stets auf *Vollkörper* bezogen, und nur *Hohlkörper* immer zugleich als solche ausdrücklich bezeichnet werden, z. B. als Hohlprisma, Hohlcylinder etc. Auch soll ein *Cylinder* oder *Kegel* stets als Kreiscylinder resp. Kreiskegel, somit als Drehkörper verstanden werden, wenn er nicht ausdrücklich als *allgemeiner* oder als specieller anderer Cylinder resp. Kegel bezeichnet wird. Ein Vollkörper und ein Hohlkörper sollen einander *entsprechend* heissen, wenn ihre charakteristischen Oberflächen congruent sind. Unter einem *Körperpunkt* endlich wird irgend ein mit dem betreffenden Körper fest verbunden gedachter Punkt verstanden, der weder in der Körpersubstanz, noch auch selbst bei einem Vollkörper inner-

* Siehe: Dr. W. *Schell*, Theorie der Bewegung und der Kräfte.

halb, bei einem Hohlkörper ausserhalb seiner charakteristischen Oberfläche zu liegen braucht.

In Betreff des Grades gegenseitiger Beweglichkeit der Elemente eines Paares können 3 Fälle unterschieden werden:

1) Elementenpaare von dreifacher Beweglichkeit. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind wenigstens theilweise begrenzte Räume, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere beliebig je in einem solchen Raume bewegen. Ein Elementenpaar dieses Charakters wird z. B. von einer Kugel mit einem dieselbe in einem grössten Kreise berührenden Hohlcylinder gebildet: ein Punkt der Kugel in der Entfernung r von ihrem Mittelpunkte ist gegen den Hohlcylinder beliebig innerhalb der mit letzterem conaxialen Cylinderfläche, deren Halbmesser $= r$ ist, beweglich; ein Punkt des Hohlcylinders in der Entfernung r von seiner Axe aber gegen die Kugel beliebig ausserhalb der mit dieser concentrischen Kugelfläche mit dem Halbmesser r.

2) Elementenpaare von zweifacher Beweglichkeit. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind Flächen, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere nur in je einer gewissen Fläche bewegen. Ein solches Paar wird z. B. von einem Cylinder mit entsprechendem Hohlcylinder gebildet, und zwar ist das Bewegungsgebiet eines Punktes irgend eines der beiden Elemente gegen das andere die mit beiden conaxiale Cylinderfläche, deren Halbmesser der Entfernung des Punktes von der Axe gleich ist.

3) Elementenpaare von einfacher Beweglichkeit oder zwangläufige Elementenpaare. Die gegenseitigen Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind Linien, d. h. die Punkte jedes Elementes können sich gegen das andere nur in je einer gewissen Linie bewegen. Bei einer Schraube mit entsprechender Mutter (Hohlschraube) z. B. ist jeder Punkt eines Elementes gegen das andere in einer bestimmten Schraubenlinie beweglich.

Mit Rücksicht darauf, dass jede elementare, d. i. unendlich kleine Bewegung eines starren Körpers in einem gewissen Raume in 3 Schiebungen längs 3 sich schneidenden, nicht in einer Ebene liegenden Axen und in 3 Drehungen um diese zerlegt werden kann, und dass diese 6 einfachen Elementarbewegungen bei einem frei beweglichen Körper unabhängig von einander sind, können dem letzteren nach einem von W. Thomson gebrauchten Ausdrucke 6 Freiheitsgrade der Bewegung zugeschrieben werden, einem Körper von beschränkter Beweglichkeit aber so viele Freiheitsgrade der Bewegung, wie von jenen einfachen Elementarbewegungen mit Rücksicht auf die der Beschränkungsart entsprechenden Beziehungen zwischen ihnen unabhängig bleiben. Hiernach ist offenbar die Zwangläufigkeit oder einfache Beweglichkeit eines Elementenpaares mit nur einem Freiheitsgrade, die dreifache Beweglichkeit mit höchstens 5 Freiheitsgraden verbunden. Die zweifache Beweglichkeit eines Elementenpaares kann, wie in dem angeführten Beispiele eines Cylinders mit entsprechendem Hohlcylinder, 2 oder auch, wie im Falle einer von entsprechender Hohlkugel umschlossenen Kugel oder einer in entsprechendem Schlitz beweglichen gleichförmig dicken Platte, 3 Freiheitsgraden entsprechen.

Diese und ebenso auch die folgenden Erklärungen setzen einstweilen (vorbehaltlich späterer Ergänzungen) selbständig geschlossene Elementenpaare voraus, d. h. solche, bei denen die beständige gegenseitige Berührung und zwar bei unveränderter Art der entsprechenden gegenseitigen Stützung der Elemente blos in Folge ihrer Gestalt und Begrenzung ohne anderweitige Hülfsmittel bei jeder möglichen relativen Bewegung erhalten bleibt. Wenn z. B. bei dem oben unter 2) genannten Paare (Cylinder mit entsprechendem Hohlcylinder) der Hohlcylinder nur unvollständig als ein zwischen zwei Meridianebenen enthaltener Ausschnitt ausgeführt würde, so wäre die Geschlossenheit des Paares im erklärten Sinne an die Bedingung geknüpft, dass der Winkel jenes Ausschnitts $> 180^0$ ist.

Ausser in Beziehung auf den oben erklärten dreifach verschiedenen Grad der gegenseitigen Beweglichkeit ihrer Elemente können die Paare hinsichtlich der Art dieser Beweglichkeit von verschiedenen Gesichtspunkten aus unterschieden werden, und zwar namentlich in Beziehung darauf, ob die Beweglichkeit des einen Elementes gegen das andere in jeder Hinsicht dieselbe wie die des letzteren gegen das erstere ist oder nicht, wonach man niedere und höhere Elementenpaare unterscheidet. Sind nämlich E und E' die beiden gepaarten Elemente, und ist P ein beliebiger Punkt von E, P' aber ein solcher Punkt von E', der mit P zusammenfallen kann, so soll das Elementenpaar E, E' ein niederes oder höheres heissen, je nachdem das Bewegungsgebiet von P gegen E' mit dem Bewegungsgebiete von P' gegen E zusammenfällt oder nicht. In diesem Sinne ist z. B. das oben unter 1) erwähnte Elementenpaar von dreifacher Beweglichkeit (Kugel und Hohlcylinder von gleichem Durchmesser) ein höheres, sind dagegen die unter 2) und 3) beispielsweise angeführten Paare von zwei- und einfacher Beweglichkeit (Cylinder mit entsprechendem Hohlcylinder, Schraube mit entsprechender Mutter) niedere. — Wenn die relative Bewegung eines Punktes oder Körpers gegen den jeweils als ruhend gedachten Raum (d. h. gegen einen anderen Körper, z. B. gegen die Erde bei der Untersuchung einer auf festem Lande aufgestellten Maschine oder gegen das bewegte Schiff bei der Untersuchung einer Schiffsmaschine etc.) kurzweg die Bewegung jenes Punktes oder Körpers genannt wird, und wenn allgemein, wie es im Folgenden stets der Fall sein soll, irgend ein Körper festgestellt heisst, wenn er in dem als ruhend gedachten Raum unbeweglich ist, wenn endlich die Vertauschung der beiden Elemente eines Paares, von denen das eine festgestellt, also das andere beweglich ist, hinsichtlich dieser Feststellung resp. Beweglichkeit die Umkehrung des Paares genannt wird, so kann man auch sagen, dass die Umkehrung eines niederen Elementenpaares keine Aenderung der Bewegung zur Folge hat, und diesen Satz als Definition des niederen Paares im Gegensatze zum höheren betrachten.

Die beiden Elemente eines Paares können sich übrigens entweder in einer Fläche (resp. einem System getrennter Flächen) oder nur in einzelnen Linien oder Punkten berühren, ohne dass durch diese Unterschiede an und für sich, d. h. vorbehaltlich entsprechender Configuration des Systems von Berührungs-Flächen, Linien oder Punkten, auch der kinematische Charakter des Paares hinsichtlich der Geschlossenheit, des Beweglichkeitsgrades und der Umkehrbarkeit nothwendig bedingt wäre. Wenigstens ist es einer näheren Untersuchung bedürftig, welche Beziehungen etwa zwischen der Gestaltung der Elemente, d. h. ihrer einzig hier in Betracht kommenden charakteristischen Oberflächentheile, und den kinematischen Eigenschaften des betreffenden Paares stattfinden. So könnte z. B. bei dem mehrerwähnten, aus einem Cylinder und entsprechendem Hohlcylinder bestehenden Paare die eine der beiden cylindrischen Elementenflächen (abgesehen von Anforderungen der praktischen Ausführung) offenbar durch zwei Parallelkreise oder durch drei gerade Meridianlinien, von denen auf jeder Seite jeder Meridianebene wenigstens eine gelegen ist, als Berührungslinien ersetzt werden, oder auch nur durch die 6 Schnittpunkte jener 2 Kreise mit diesen 3 Geraden als Berührungspunkte, ohne dass dadurch der kinematische Charakter des fraglichen Elementenpaares als eines selbständig geschlossenen niederen Paares von zweifacher Beweglichkeit aller Punkte in conaxialen Cylinderflächen verändert würde. —

Eine kinematische Kette entsteht durch eine solche Aneinanderreihung von Elementenpaaren, bei welcher die Elemente verschiedener Paare zu starren (wenigstens einstweilen hier als starr vorausgesetzten) Körpern der Art vereinigt werden, dass je zwei dieser Körper und der etwa unvereinigt bleibenden einzelnen Elemente durch mehr oder weniger Elementenpaare zusammenhängen. Eine kinematische Kette ist also eine durch Elementenpaare vermittelte solche Verbindung von Körpern, den sogenannten *Gliedern der Kette*, dass dadurch jedes der letzteren in seiner Beweglichkeit gegen jedes andere Glied der Kette beschränkt wird. Auf die dieser Beschränkung entsprechende gegenseitige Beweglichkeit von je zwei Gliedern können dieselben Begriffe der mit einer gewissen Zahl von *Freiheitsgraden* verbundenen *dreifachen*, *zweifachen* und *einfachen Beweglichkeit* resp. *Zwangläufigkeit*, sowie der *Umkehrbarkeit* ohne Bewegungsänderung übertragen werden, wie sie für die Elemente eines Paares erklärt wurden. Während ein Elementenpaar durch die gepaarten Elemente kinematisch vollständig bestimmt ist, wenn letztere als übrigens beliebige Verkörperungen gewisser Flächen als Stützflächen betrachtet werden, ist ein Kettenglied durch die darin vereinigten Elemente, d. h. durch die denselben charakteristischen Stützflächen, die das Glied als Oberflächentheile an sich trägt, allein noch nicht kinematisch bestimmt, vielmehr gehört zu dieser Bestimmung wesentlich auch die gegenseitige Lage, in welcher das Glied diese Stützflächen als Oberflächentheile enthält oder an sich trägt. Um diesen Umständen durch den sprachlichen Ausdruck einigermaassen zu entsprechen, soll gesagt werden, ein Paar *bestehe* aus gewissen zwei Elementen, dagegen ein Glied *enthalte* gewisse (ein, zwei oder mehr) Elemente, ferner eine kinematische Kette *bestehe* aus gewissen Gliedern und *enthalte* gewisse Elementenpaare.

Wenn kein Glied einer kinematischen Kette Elemente von mehr als zwei Paaren enthält, so heisst sie *einfach*, anderenfalls *zusammengesetzt*; wenn jedes Glied Elemente von wenigstens zwei Paaren enthält, so ist die Kette *geschlossen*, widrigenfalls *offen*. Wenn also die Buchstaben Elemente bedeuten, ein dazwischen gesetztes Komma die Paarung, ein Verbindungsstrich die Verbindung der betreffenden Elemente zu einem Gliede, so bezeichnet z. B.

$$A, A' \;\text{———}\; B, B'$$

eine einfache offene Kette, die aus 3 Gliedern besteht und 2 Elementenpaare enthält;

$$\begin{array}{ccc} A, A' & & B, B' \\ | & & | \\ D, D' & \text{———} & C, C' \end{array}$$

eine einfache geschlossene viergliedrige (aus 4 Gliedern bestehende) und 4 Elementenpaare enthaltende Kette;

$$\begin{array}{ccccc} A, A' & \text{—————} & & & B, B' \\ | & & & & | \\ D, D' & \text{—————} & & & C, C' \\ | & & & & | \\ E, E' & \text{——} & F, F' & \text{——} & G, G' \end{array}$$

eine zusammengesetzte geschlossene sechsgliedrige und 7 Elementenpaare enthaltende Kette, deren Glieder ADE und $B'C'G'$ je 3 Elemente enthalten. Glieder mit 2, 3 . . Elementen mögen zur Abkürzung als binäre, ternäre . . Glieder bezeichnet werden; hiernach besteht z. B. die letztgenannte Kette aus 4 binären und 2 ternären Gliedern.

Eine kinematische Kette soll zwangläufig genannt werden, wenn jedes Glied gegen jedes andere zwangläufig oder von einfacher Beweglichkeit ist, d. h. wenn die Punkte jedes Gliedes gegen jedes andere sich nur in bestimmten Linien bewegen können; zu dem Ende ist es bei einer geschlossenen Kette nicht nöthig, dass jedes ihrer Elementenpaare, dass also jedes Paar benachbarter Glieder für sich, nämlich unabhängig von ihrer Verbindung durch die übrigen, die Kette schliessenden Glieder zwangläufig ist, indem vielmehr gewisse der ihrer gegenseitigen Beweglichkeit an und für sich zukommenden Freiheitsgrade durch ihre fragliche Kettenverbindung bis auf einen aufgehoben oder überhaupt in bestimmter Weise von einander abhängig gemacht werden können. Ein Mechanismus ist eine zwangläufig geschlossene (d. i. zwangläufige und geschlossene) kinematische Kette, von der ein Glied festgestellt ist; so viele Glieder die Kette hat, so viele Mechanismen können aus ihr erhalten werden, die im Allgemeinen verschieden sind, d. h. deren beweglichen Gliedern im Allgemeinen verschiedene oder wenigstens verschieden begrenzte Bewegungen (im ruhend gedachten Raume) zukommen. Der Mechanismus soll insbesondere ein Getriebe heissen, wenn ein bestimmtes seiner beweglichen Glieder als dasjenige vorausgesetzt ist, von dem die Bewegung ausgeht, d. h. welches unmittelbar zur Bewegung in einem gewissen Sinne angetrieben wird; hiernach kann derselbe Mechanismus verschiedene Getriebe umfassen, die, wie sich später zeigen wird, theilweise verschiedene kinematische Eigenschaften haben können.

Dieser den Mechanismus als ein Getriebe charakterisirende unmittelbare Antrieb eines gewissen Gliedes in einem gewissen Sinne lässt es noch unbestimmt, wie, d. h. in welchen Punkten, nach welchen Richtungen und in welchen Intensitätsverhältnissen nicht nur das betreffende, sondern auch die übrigen Glieder von äusseren Kräften angegriffen werden; auch sind die sämmtlichen vorhergehenden Begriffsbestimmungen bis zu der des Getriebes ganz sachliche, der Beschaffenheit und dem Bewegungssinne des betreffenden Gebildes entsprechende, von mechanisch-technischen Zwecken abstrahirende Definitionen gewesen. Zum Begriffe der Maschine dagegen, wie er hier und im Folgenden stets verstanden wird, gehört wesentlich auch der Zweck und die Wirksamkeit der äusseren Kräfte. Der Mechanismus wird zur Maschine dadurch, dass gewisse Glieder desselben auf gewisse Weise von äusseren Kräften angegriffen werden, von denen die einen vermöge ihrer Grössen und der Wege ihrer Angriffspunkte die Arbeit leisten sollen, die zur Ueberwindung der anderen für die entsprechenden Wege ihrer Angriffspunkte aufzuwenden ist: eine Maschine ist ein Mechanismus zum Zwecke einer bestimmten mechanischen Arbeitsleistung.

Im Allgemeinen kann der Mechanismus einer Maschine eine so zusammengesetzte kinematische Kette sein, dass er in mehrere elementare Mechanismen, d. h. in solche zerlegbar ist, deren kinematische Ketten einer weiteren Zerlegung in nur zwangläufig geschlossene Ketten nicht mehr fähig sind. Die kinematische Kette eines solchen elementaren Mechanismus ist übrigens einfach oder zusammengesetzt. So kann es z. B. der Fall sein, dass, wenn die durch das obige Schema beispielsweise dargestellte zusammengesetzte sechsgliedrige geschlossene Kette zwangläufig ist, doch nicht auch von den beiden einfachen geschlossenen Ketten $A, A' — B, B' — C, C' — D, D'$ und $C, C' — D, D' — E, E' — F, F' — G, G'$, worin sie zerlegt werden kann, jede für sich zwangläufig ist, dass vielmehr die Zwangläufigkeit der letzteren dieser beiden einfachen Ketten nur durch die feste Verbindung ihrer Glieder DE und $C'G'$ mit den Gliedern AD und $B'C'$ der ersteren zu den ternären Gliedern ADE resp. $B'C'G'$ vermittelt wird. In solchem Falle ist dann der Mechanismus, der durch Feststellung eines Gliedes der ursprünglichen sechsgliedrigen Kette entsteht, trotz der Zusammengesetztheit dieser Kette doch ein elementarer Mechanismus.

Dergleichen elementare Mechanismen oder Getriebe (mit Rücksicht nämlich zugleich auf den Sinn der Bewegungsübertragung von Glied zu Glied) sind die näheren Bestandtheile aller Maschinen, und man könnte einfache und zusammengesetzte Maschinen besser, als nach dem seither üblichen Sprachgebrauch (wenn überhaupt ein Bedürfniss dazu vorhanden wäre) mit Rücksicht darauf unterscheiden, ob ihr Mechanismus elementar oder eine Verbindung von elementaren Mechanismen ist. Auf die kinematische und mechanische Untersuchung nur solcher elementarer Mechanismen bezieht sich dieser von der „Theorie der Getriebe" handelnde Abschnitt vorliegenden Werkes, und zwar hat die hier einstweilen allein in Rede stehende kinematische Untersuchung derselben sich zunächst mit den Elementenpaaren als den kinematischen Fundamentalgebilden zu beschäftigen, nachdem vorher noch darauf hingewiesen sein wird, wie die beschränkte gegenseitige Beweglichkeit von irgend zwei starren Körpern überhaupt, die auch beliebige Glieder einer kinematischen Kette sein können, vermittels gewisser Hülfsgebilde veranschaulicht werden kann, und wie die letzteren insbesondere auch zur Uebersicht der Bedingungen für die wichtige Eigenschaft der Umkehrbarkeit einer gegenseitigen Bewegung von zwei Körpern ohne Aenderung der Bewegungsgebiete ihrer Punkte dienen können.

§. 2. Polaxen, Axoide und Axoidensysteme.

Die allgemeine Kinematik lehrt bekanntlich, dass jede Bewegung eines starren Körpers in einem ruhend gedachten Raume als eine bestimmte Folge von elementaren Schraubenbewegungen betrachtet werden kann um und längs gewissen Geraden, den sogenannten Momentanaxen oder Polaxen, deren aufeinander folgende Lagen A gegen den Körper und A' im ruhenden Raume im Allgemeinen stetig veränderlich sind ebenso wie die Steigungsverhältnisse der elementaren Schraubenbewegungen, d. h. die Verhältnisse der ihnen entsprechenden elementaren Schiebungen längs der Axe und Drehungen um dieselbe. Der Ort aller Geraden A ist eine mit dem Körper fest verbundene Regelfläche, der Ort aller Geraden A' eine im ruhend gedachten Raume feste Regelfläche, und die Bewegung des Körpers erscheint als eine gleitend-rollende (zugleich gleitende und rollende) Bewegung der ersten Fläche an der zweiten bei beständiger Berührung beider in einer wechselnden Geraden, der Polaxe. So kann nun auch die gegenseitige Bewegung der Elemente eines Paares oder der Glieder einer kinematischen Kette immer als eine gegenseitige gleitend-rollende Bewegung zweier mit ihnen verbundener Regelflächen oder Axoide bei beständiger Berührung derselben längs einer im Allgemeinen wechselnden Geraden, der Polaxe, betrachtet werden. Einer nur drehenden gegenseitigen Bewegung entsprechen Axoide, die aufeinander rollen ohne zu gleiten, also abwickelbare Flächen sind, insbesondere z. B. allgemeine Kegelflächen, Cylinderflächen oder zwei zusammenfallende Gerade, je nachdem die aufeinander folgenden elementaren Drehungen um Axen stattfinden, die sich in demselben Punkte schneiden, parallel sind oder zusammenfallen.

Einer bestimmten gegenseitigen Bewegung von zwei Körpern entsprechen bestimmte Axoide derselben, aber nicht umgekehrt bedingen bestimmte Axoide auch immer eine bestimmte gegenseitige Bewegung. Insbesondere können zwei sich berührende allgemein-cylindrische Axoide sich gleitend-rollend oder nur rollend oder nur gleitend aneinander bewegen; zwei im Endlichen zusammenfallende Gerade können als Axoide sowohl einer Schraubenbewegung mit beliebigem gleich- oder ungleichförmigem Steigungsverhältnisse, wie auch einer blossen Drehung oder Schiebung für jene Gerade als Drehungsaxe resp. als Schubrichtung entsprechen, zwei im Unendlichen als Axoide zusammenfallende Gerade einer Schiebung nach jeder Richtung in einer damit parallelen Ebene. Im Allgemeinen indessen, nämlich abgesehen von solchen besonderen Fällen, entspricht bestimmten Axoiden nur eine bestimmte gegenseitige Bewegung der mit ihnen verbundenen Körper, so dass auch im Allgemeinen nur dann kurzweg von den Axoiden eines Elementenpaares resp. eines Paares von Gliedern einer kinematischen Kette als von bestimmten, event. zu geraden Linien zusammenschrumpfenden, geradlinigen Flächen gesprochen werden kann, wenn das betreffende Paar zwangläufig ist. Bei der zwangläufig geschlossenen Kette irgend eines Mechanismus ist das nun zwar bezüglich auf jedes Paar von Gliedern der Fall, doch können dabei die vereinzelten Elementenpaare auch von mehrfacher Beweglichkeit sein, und ist es dann im Allgemeinen ein System von unendlich vielen Axoidenpaaren, das den unendlich vielen möglichen gegenseitigen Bewegungen der Elemente entspricht. Das Axoidensystem jedes Elementes eines solchen mehrfach beweglichen Paares ist im Allgemeinen keine Fläche, sondern ein räumliches System von Geraden, die als Polaxen mit den Geraden des dem anderen Elemente zugehörigen Axoidensystems zusammenfallen können. Beide Axoidensysteme zusammen veranschaulichen zwar nicht mehr die wirkliche Bewegung, wohl aber nach wie vor die gegenseitige Beweglichkeit. Z. B. bei dem im vorigen §. beispielsweise erwähnten Elementenpaare von dreifacher Beweglichkeit (Kugel und Hohlcylinder von gleichem Durchmesser) kann jede durch ihren Mittelpunkt gehende Gerade der Kugel mit jeder durch irgend einen Punkt ihrer geometrischen Axe gehenden Geraden des Hohlcylinders als Polaxe zusammenfallen; das Axoidensystem der Kugel ist deshalb ein räumlicher Strahlenbüschel, dessen Mittelpunkt im Kugelmittelpunkte liegt, das des Hohlcylinders ist eine Schaar von unendlich vielen räumlichen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte in der Cylinderaxe liegen.

§. 3. Umkehrbare Körperpaare.

Wenn ein Paar von Körpern bezüglich auf ihre irgendwie beschränkte gegenseitige Beweglichkeit umkehrbar sein soll, d. h. wenn das Bewegungsgebiet irgend eines Punktes P dasselbe sein soll, einerlei ob der eine

Körper festgestellt und P als ein Punkt des anderen betrachtet, oder ob letzterer festgestellt und P als ein Punkt des ersteren Körpers betrachtet wird, so müssen offenbar die Axoide resp. Axoidensysteme beider Körper beständig zusammenfallen, und umgekehrt hat dieser Umstand offenbar jene Eigenschaft der Umkehrbarkeit des Körperpaares zur Folge. Es ist daher von Interesse, die Fälle übersichtlich kennen zu lernen, in denen das beständige Zusammenfallen der Axoide oder Axoidensysteme zweier Körper von beschränkter gegenseitiger Beweglichkeit möglich ist, trotz einzeln oder zusammen stattfindender Rollung und Gleitung irgend einer Geraden des einen um resp. längs der mit ihr zusammenfallenden Geraden des anderen der beiden geradlinigen Gebilde. Der einfachste Fall ist der, dass die Axoide sich auf

1) zwei im Endlichen zusammenfallende Gerade reduciren, die dann entweder

a) nur um einander rollen, oder

b) nur längs einander gleiten,

oder zugleich rollen und gleiten können so, dass das Verhältniss der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen

c) unveränderlich, oder

d) in bestimmter Weise veränderlich, oder

e) beliebig (unbestimmt) ist.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind in diesen Fällen: a) conaxiale Kreise, b) parallele Gerade, c) conaxiale sogenannte Normalschraubenlinien von gleicher Steigung, d) andere bestimmte Linien in conaxialen Cylinderflächen, von denen je zwei in derselben Cylinderfläche gelegene congruent sind, je zwei in verschiedenen Cylinderflächen gelegene aber in der Beziehung stehen, dass in entsprechenden Punkten die Tangenten ihrer Neigungswinkel gegen die Axe den Radien der betreffenden Cylinderflächen proportional sind; im Falle e) sind die Bewegungsgebiete der Körperpunkte jene conaxialen Cylinderflächen selbst, entsprechend einer mit 2 Freiheitsgraden verbundenen zweifachen Beweglichkeit des Körperpaares.

Fallen zwei Gerade als Axoide im Unendlichen zusammen, so ist, wenn sie um einander rollen oder längs einander gleiten, oder zugleich rollen und gleiten mit einem unveränderlichen Verhältnisse der zu einander senkrechten, den zweierlei Bewegungen entsprechenden elementaren Schiebungen, das Ergebniss immer nur eine Schiebung von unveränderlicher Richtung wie im Falle 1, b). Hinzuzufügen bleibt also nur noch der Fall

2) zweier im Unendlichen zusammenfallender Geraden, die zugleich um einander rollen und längs einander gleiten, während die diesen

beiden Bewegungen entsprechenden, zu einander senkrechten elementaren Schiebungen

a) ein in bestimmter Weise veränderliches,

b) jedes beliebige Verhältniss haben.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind: a) parallele congruente ebene Curven, oder b) parallele Ebenen, letzteren Falls einer mit 2 Freiheitsgraden verbundenen zweifachen Beweglichkeit des Körperpaares entsprechend.

Uebrigens können diese Fälle unter 2) auch durch zwei im Endlichen zusammenfallende Ebenen als Axoide dargestellt werden, die man sich im Falle a) von allen Schaaren paralleler Geraden bedeckt zu denken hat, welche den Tangenten einer gewissen Curve in den Ebenen parallel sind und längs denselben mit stetiger Richtungsänderung der elementaren Schiebung gleiten können, im Falle b) aber von allen möglichen solchen Schaaren ohne bestimmte Folge der elementaren Schubrichtungen.

Wenn zu dem einen Paar zusammenfallender Geraden, wovon die Betrachtung ausging, noch andere dergleichen und zwar zunächst parallele als Bestandtheile zusammenfallender Axoide oder Axoidensysteme hinzugenommen werden, so würde ihrem blossen gegenseitigen Gleiten keine andere Beweglichkeit wie im Falle 1, b) entsprechen. Damit aber trotz des Rollens irgend zweier zusammenfallender Geraden um einander doch beständig jede Gerade des einen mit einer solchen des anderen Systems zusammenfalle, muss jedes von beiden unendlich viele, den ganzen Raum stetig erfüllende Gerade enthalten, d. h. es müssen die zwei im Falle 1) als Axoide zusammenfallenden Geraden durch zwei als Axoidensysteme zusammenfallende unbegrenzte Parallelstrahlenbüschel ersetzt werden. Wenn diese freilich neben ihrer Rollbarkeit um je zwei zusammenfallende Strahlen auch noch gleichzeitige Gleitbarkeit längs denselben besässen, so würde jeder Punkt des einen mit jedem Punkt des anderen Systems vereinigt werden können, die gegenseitige Beweglichkeit der betreffenden zwei Körper also ganz unbegrenzt sein. Als zulässig und neu bleibt somit nur übrig der Fall:

3) zweier zusammenfallender Parallelstrahlenbündel mit Rollbarkeit (Drehbarkeit) um je zwei zusammenfallende Strahlen. Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind parallele Ebenen wie im Falle 2, b), von welchem der vorliegende sich aber dadurch unterscheidet, dass die entsprechende zweifache Beweglichkeit des Körperpaares hier mit 3 anstatt 2 Freiheitsgraden verbunden ist: mit Verschiebbarkeit nach zwei sich schneidenden Axrichtungen (den Drehungen um die unendlich fernen Strahlen-

paare entsprechend) und mit Drehbarkeit um eine im Endlichen liegende, zu diesen Schubrichtungen senkrechte Axe.

Wenn zu dem ursprünglichen Paare zusammenfallender Geraden noch andere dergleichen, nicht damit parallele hinzugenommen werden, so ist der einfachste Fall, in welchem die so erhaltenen Axoide oder Axoidensysteme (unbeschadet beständigen Zusammenfallens jeder Geraden des einen mit einer solchen des anderen Systems) längs allen gemeinsamen Strahlen gleiten können, der schon unter 2) besprochene von zwei im Endlichen zusammenfallenden Ebenen (resp. zusammenfallender Systeme von ebenen Parallelstrahlenbündeln), der gleichzeitige Rollbarkeit ausschliesst; der einfachste Fall aber, in dem unter solchen Umständen die Axoidensysteme um alle gemeinsame Strahlen rollbar sind, ist der Fall

4) zweier concentrischer räumlicher Strahlenbüschel, die gleichzeitige Gleitbarkeit längs den Strahlenpaaren ausschliessend. Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind dabei concentrische Kugelflächen, und die Beweglichkeit des betreffenden Körperpaares ist eine mit 3 Freiheitsgraden verbundene zweifache.

Eine von diesem Falle 4) ausgehende noch weitere Verallgemeinerung zusammenfallender Axoidensysteme könnte nur zu unendlich vielen concentrischen räumlichen Strahlenbüscheln führen, deren Mittelpunkte den Raum stetig erfüllen, d. i. zu zwei zusammenfallenden Räumen, die als Axoide nach allen möglichen Richtungen von Parallelstrahlenbündeln durchzogen sind, ein Fall, der auch als letzte Verallgemeinerung des Falles 3) zu betrachten wäre; alle Strahlen könnten dann Polaxen für Gleitung oder für Rollung sein unbeschadet des beständigen allseitigen Zusammenfallens beider Axoidensysteme, aber das Bewegungsgebiet jedes Punktes wäre in beiden Fällen ganz unbegrenzt. Dagegen ist eine beschränkte Verallgemeinerung der Axoidensysteme des Falles 3) möglich, und zwar zu

5) zwei zusammenfallenden Systemen von Parallelstrahlenbündeln, die

a) den Tangenten einer gewissen Raumcurve parallel sind und längs denselben mit stetiger Richtungsänderung der elementaren Schiebung gleiten können,

b) den Tangenten einer gewissen Fläche parallel sind ohne bestimmte Folge der längs ihnen möglichen elementaren Schiebungen.

Die Bewegungsgebiete der Körperpunkte sind im Falle a) parallele congruente Raumcurven, im Falle b) parallele congruente Flächen, einer zweifachen Beweglichkeit mit 2 Freiheitsgraden des Körperpaares entsprechend.

Analog wie oben der Fall 2) zweier im Unendlichen als Axoide zusammenfallender Geraden auch durch zwei im Endlichen zusammenfallende Ebenen als Axoide ersetzt werden konnte, so könnte man auch umgekehrt die Axoidensysteme des Falles 5) durch zwei im Unendlichen zusammenfallende Ebenen ersetzt denken. Da nämlich bei dem gegenseitigen Gleiten von irgend zwei zusammenfallenden Parallelstrahlenbündeln die unendlich fernen Punkte der Strahlen nicht aufhören zusammenzufallen, und somit auch zwei im Unendlichen zusammenfallende Ebenen trotz einer gegenseitigen endlich grossen Verschiebung in normaler Richtung als nach wie vor zusammenfallend zu betrachten sind, diese Ebenen aber ausserdem längs jeder in ihnen liegenden Geraden verschiebbar sind, so können sie unbeschadet ihres beständigen Zusammenfallens beliebig gerichteten gegenseitigen Verschiebungen von endlicher Grösse unterworfen sein, insbesondere also auch solchen, die den Tangenten einer gewissen Raumcurve oder einer gewissen Fläche parallel sind. Weil ferner die Normalverschiebung der Ebenen auch als Ergebniss einer unendlich kleinen Drehung um eine unendlich ferne gemeinsame Gerade derselben, und weil ein Parallelstrahlenbündel als ein Strahlenbüschel mit unendlich entferntem Mittelpunkte zu betrachten ist, so sind in solchem Sinne schliesslich alle möglichen Fälle, wie Axoide oder Axoidensysteme zweier Körper von beschränkter gegenseitiger Beweglichkeit beständig zusammenfallen können, beschränkt auf die Fälle

1) von zwei im Endlichen oder Unendlichen zusammenfallenden Geraden, die um einander rollen und längs einander gleiten können,

2) von zwei im Endlichen oder Unendlichen zusammenfallenden Ebenen, die längs gemeinsamen Geraden gegenseitig verschiebbar und letzteren Falls (d. h. wenn die Ebenen im Unendlichen liegen) zugleich um unendlich kleine Winkel um gemeinsame Gerade drehbar sind,

3) von zwei concentrischen räumlichen Strahlenbüscheln, deren Mittelpunkte im Endlichen oder Unendlichen liegen und die um gemeinsame Strahlen gegenseitig drehbar sind.

Von diesen 6 Fällen sind die 4 unter 1) und 2) begriffenen, von denen übrigens der zweite unter 1) mit dem ersten unter 2) einerlei ist, durch weitere Specialisirung gemäss den obigen Erörterungen in Unterfälle zerlegbar. —

Mit Rücksicht auf das Folgende seien schliesslich die sämmtlichen 11 Einzelfälle — a, b, c, d, e unter 1); a, b unter 2); ferner 3); 4); und a, b unter 5) —, in denen ein Paar von Körpern bezüglich ihrer beschränkten gegenseitigen Beweglichkeit umkehrbar sein kann, in anderer Ordnung wie folgt zusammengestellt:

I. Die Körper sind gegen einander
   a) um eine gemeinsame Gerade nur drehbar,
   b) längs einer gemeinsamen Geraden nur verschiebbar,
   c) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit unveränderlichem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen.

II. Die Körper sind gegen einander
   a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit beliebigem Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,
   b) um alle zu einer gemeinsamen Ebene senkrechte Axen drehbar,
   c) um alle durch einen gemeinsamen Punkt gehende Axen drehbar.

III. Die Körper sind gegen einander
   a) um und längs einer gemeinsamen Geraden drehbar und verschiebbar mit einem in bestimmter Weise veränderlichen Verhältnisse der zusammengehörigen elementaren Schiebungen und Drehungen,
   b) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer
      α) ebenen Curve,
      β) Raumcurve des anderen bleibt,
   c) ohne Drehung so verschiebbar, dass ein gewisser Punkt des einen in einer
      α) ebenen,
      β) krummen Fläche des anderen bleibt.

I. Elementenpaare.

a. Niedere Elementenpaare.

§. 4. Niedere Elementenpaare im Allgemeinen; Umschlusspaare.

Indem ein niederes Elementenpaar als ein umkehrbares im Sinne des vorigen §. definirt wurde, so ergeben sich aus der dort angestellten Untersuchung die principiell möglichen Fälle niederer Elementenpaare, und ist daraus vor Allem ersichtlich, dass dergleichen nur von höchstens zweifacher Beweglichkeit und mit höchstens 3 Freiheitsgraden verbunden sein können. Es bleibt nur zu ermitteln, ob, welche und wie diese Fälle