Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Kraftmaschinen

Grashof, Franz

Leipzig, 1890

C. Windmotoren

urn:nbn:de:bsz:31-282943

verlangt dann zwar auch ein anderes Luftvolumen in den genannten Kammern; doch stellt sich dasselbe wenigstens nach einiger Zeit durch die Wirksamkeit der Luftsaugeventile, oder indem überschüssige Luft vom Wasser absorbirt wird, von selbst her.

C. Windmotoren.

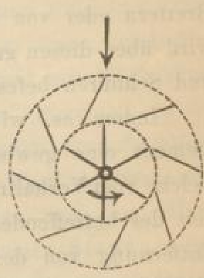
§. 53. Uebersicht der üblichen Arten von Windmotoren und ihrer Eigenthümlichkeiten.

Um die lebendige Kraft der bewegten atmosphärischen Luft zur Gewinnung mechanischer Arbeit von einiger Erheblichkeit zu benutzen, ist bei der kleinen specifischen Masse und durchschnittlich mässigen Geschwindigkeit der Luft die Darbietung grosser Angriffsflächen durch die betreffenden Motoren unerlässlich. Sofern auch die Einzwängung des als Träger freien Arbeitsvermögens fassbaren Luftstroms durch Leitungen ausgeschlossen ist, sind es nur Windräder, welche hier in Betracht kommen und ausschliesslich als Windmotoren technische Verwendung finden. Ihre älteste und noch immer hauptsächlichste Verwendung ist zu Mühlen, insbesondere Mahlmühlen; die Bezeichnung „Windmühle" wird auf das ganze betreffende Gebäude mit dem durch das Windrad bewegten Triebwerke und den angeschlossenen Arbeitsmaschinen zuweilen selbst unabhängig von der Art dieser letzteren bezogen.

Indem der Wind jede beliebige nahe horizontale Richtung annehmen kann, wird von ihm ein Windrad mit fest gelagerter Axe nur dann in stets gleicher Weise getroffen, wenn die Axe vertical ist. Damit freilich ein solches, mit Rücksicht auf die horizontalen Bahnen aller Punkte sogenanntes horizontales Windrad z. B. bei einfachster Construction mit ebenen radialen Schaufeln vom Winde umgetrieben werden könne, muss derselbe auf einer Seite der mit der Windrichtung parallelen Axialebene vom Rade abgehalten werden. Geschähe das durch einen diese Radhälfte umgebenden Mantel, so müsste derselbe mit der sich drehenden Windrichtung drehbar, seine Anordnung somit derselben Erschwerung unterworfen sein, welche bezüglich des Windrades selbst durch die verticale Lage der Axe vermieden wird. Einfacher und praktischer wird der Zweck durch feste verticale Wände erreicht, welche in geneigter Stellung gegen die radiale Richtung ringsum das horizontale Windrad wie ein Leitrad umgeben, dessen Canäle, indem sie stets nur auf einer Seite mit ihren äusseren Oeffnungen gegen den Wind gerichtet sind, die

Luft daselbst fangen und etwas verdichtet, also mit einer gewissen Concentration des disponiblen Arbeitsvermögens in vortheilhafter Richtung gegen die Schaufeln des Laufrades leiten, wie es im Princip durch Fig. 59 angedeutet wird. Mit Vermeidung eines drehbaren Mantels oder festen Leitrades entsprechen der Aufgabe mehr oder weniger vollkommen auch ebene und radial gerichtete Schaufeln, welche um radiale Axen drehbar gemacht sind, bis bei verticaler Stellung durch Anschläge die weitere Drehung verhindert wird, so dass sie nur auf der einen Seite des Rades, durch den Winddruck in diese verticale Stellung gebracht, normal, auf der anderen Seite aber schräg vom Winde getroffen werden; oder auch krumme Schaufeln, welche einerseits die concave, andrerseits die convexe Seite gegen den Wind kehren, hier somit einen erheblich kleineren Druck, als dort erfahren. Wenn übrigens auch solche horizontalen Windräder, besonders sogenannte Windturbinen gemäss Fig. 59 und mit passend gekrümmten Schaufeln nicht ganz ohne Erfolg geblieben sind, so fallen sie doch bei gleichem Effect oder bei gleicher Grösse der wirksamen Fläche (der Gesammtprojection der vom Winde im Drehungssinne des Rades getroffenen Schaufelfläche auf eine zur Windrichtung senkrechte Ebene) schwerer, weniger einfach und dauerhaft aus, so dass sie die von Alters her üblichen verticalen Windräder nicht zu verdrängen vermochten. Diese mit Rücksicht auf die längliche Gestalt ihrer radial gerichteten Schaufeln (Flügel) sogenannten Flügelräder, deren Axen in der Windrichtung liegen, sollen im Folgenden allein weiter berücksichtigt werden; während der Drehung des Rades behält bei ihnen jedes Flügelelement immer dieselbe, möglicher Weise also vortheilhafteste Lage gegen die Windrichtung.

Fig. 59.



Die hölzerne oder besser eiserne Welle des Flügelrades (Ruthenwelle) wird unter einem kleinen Winkel von etwa 10^0 im Sinne der Windrichtung abwärts geneigt, wodurch ihre Lagerung mehr gesichert und die Entfernung vergrössert wird, in welcher die Flügel sich am unteren, möglichst zugänglich zu haltenden Theile des Mühlengebäudes vorbeibewegen; die Lagerung der Welle geschieht durch ein Spurlager am inneren und tiefer liegenden, sowie durch ein Halslager nahe dem äusseren Ende. In dem aus letzterem hervorragenden Kopfe der Welle pflegen die meistens 4 Ruthen befestigt zu sein, jede einem Flügel als Träger desselben entsprechend. Durch sie sind die Sprossen (Scheiden) rechtwinklig hindurch gesteckt, so dass sie auf der einen Seite mehr, als auf der anderen hervorragen; diese bilden mit den Saumlatten, durch welche sie an den Enden verbunden sind, das Flügelgerippe, von der Ruthe in einen durch das sogenannte Windbrett bedeckten, bei der Drehung vorausgehenden schmaleren, und in einen breiteren Theil geschieden. Der letztere wird zur Bedeckung mit Klappen von dünnen Brettern oder von Draht mit gefirnisstem Segeltuch ausgerüstet, oder es wird über diesen ganzen Hauptheil des Flügelgerippes eine mit Schlingen und Schnüren befestigte Segeltuchdecke gespannt.

Indem es, wie weiterhin erörtert werden wird, für jedes Flügelelement eine gewisse günstigste Neigung gegen die Windrichtung giebt, welche vom Verhältnisse der Windgeschwindigkeit zur Umfangsgeschwindigkeit des betreffenden Flügelelementes abhängt und deshalb je nach seiner Entfernung von der Axe verschieden ist, sind vortheilhafter Weise die Flügelflächen nicht eben, sondern windschief, und zwar in der Weise, dass die Neigungswinkel der Sprossen gegen eine zur Radaxe senkrechte Ebene mit ihren Entfernungen von der Axe abnehmen. Die Längen der Sprossen pflegen bei solchen besonders zum eigentlichen Mühlenbetriebe verwendeten Flügelrädern nicht wesentlich verschieden zu sein, so dass die Flügelflächen (abgesehen von ihrer windschiefen Krümmung) Rechtecke bilden, und zwar von nahe 2 Mtr. Breite bei einer radialen Länge bis zu 10 Mtr.

Flügelräder, welche in neuerer Zeit als Motoren zu manchen anderen Zwecken, insbesondere zur Wasserförderung dienen, wie z. B. die von Kirchweger für Wasserstationen der hannoverschen Eisenbahnen construirten, pflegen bei kleinerem Durchmesser 4 bis 6 ebene und zwar trapezförmig nach aussen verbreiterte Blechflügel zu erhalten, welche zur Aenderung ihrer Neigung um eiserne, den Mittellinien der Trapeze parallele, die Ruthen vertretende radiale Arme drehbar sind. Durch die Trapezform der Flügel wird unter sonst gleichen Umständen der Querschnitt des bezüglich seiner lebendigen Kraft benutzbaren Luftstroms vergrössert. Noch mehr ist das der Fall bei amerikanischen Windrädern, bei welchen entsprechend schmale trapezförmige radiale Flügel (aus Holz) in grosser Zahl (etwa 60) die ganze Kreisfläche in kleinen Abständen erfüllen, im Wesentlichen nur eine mässig grosse centrale Oeffnung frei lassend, so dass sie bei höchstens 12 Mtr. Raddurchmesser Leistungen bis zu 18 Pferdestärken ergeben.

Die Art und Weise, wie das Flügelrad der jeweiligen Windrichtung entsprechend eingestellt wird, nämlich so, dass seine verticale Axialebene mit der Windrichtung parallel ist, hängt theilweise ab von der Art des Mühlengebäudes. In dieser Beziehung sind die älteren Mühlen mit grossen vierflügeligen Windrädern insbesondere als Bockmühlen (deutsche Mühlen) und als Thurmmühlen (holländische Mühlen) zu unterscheiden. Erstere, wie die Windmühlen überhaupt, wahrscheinlich deutschen Ursprunges (mit Sicherheit seit ungefähr dem Jahre 1100 nachweisbar) und mit ursprünglich ebenen Flügeln, haben ein hölzernes Gebäude, welches als Ganzes um einen festen verticalen Ständer (Hausbaum) drehbar ist, und zwar von Hand mit Hülfe eines langen Balkens (des Sterts). Bei den Thurmmühlen (angeblich in der Mitte des 16 Jahrhunderts von einem Flanderer erfunden) sind die Flügel schon durchweg windschief, und ist nur der obere Theil des Gebäudes (die Haube) mit dem Flügelrade drehbar, entweder auch von Hand mit Hülfe des Sterts, oder selbstthätig mit Hülfe eines Steuerrades, d. i. eines kleinen Flügelrades, welches hinten senkrecht gegen das als Motor dienende grosse Flügelrad auf einem mit der Haube verbundenen Träger gelagert ist und welches durch den Wind so lange in Drehung gesetzt wird, bis seine Axe zur Windrichtung senkrecht ist. Bei neueren Mühlen zu verschiedenen Zwecken pflegt der möglichst leicht gebaute drehbare Obertheil mit dem Windrade durch einen ebenen, mit der Windrichtung parallel bleibenden Steuerflügel selbstthätig entsprechend gestellt zu werden.

Ebenso wie die Richtung, ist die Geschwindigkeit des Windes, somit das disponible Arbeitsvermögen veränderlich, und es sind verschiedene Arten der Kraftregulirung angegeben und angewendet worden, nämlich Vorrichtungen, um entweder die Flügelfläche selbst, oder wenigstens den Winddruck auf dieselbe entsprechend zu vergrössern oder zu verkleinern, namentlich letzteres, um bei sehr starkem Winde Beschädigungen des Flügelrades und des ganzen Gebäudes zu verhüten, während die Verlangsamung der Drehung des ersteren durch Bremsen geschehen kann mit geringerem Nachtheil, als in anderen Fällen, da die Möglichkeit der Aufspeicherung des überschüssigen Arbeitsvermögens hier nicht in Frage kommt. In der Regel ist der Zweck durch Drehung, sei es der ganzen ebenen Flügel um radiale Axen (z. B. bei den Kirchweger'schen Windrädern), sei es einzelner Bestandtheile derselben um zur Drehungsaxe des Rades windschief nahe senkrechte Axen (z. B. bei den Cubit'schen Flügelrädern) erreicht worden; bei amerikanischen Windrädern wird auch wohl die Axe derselben gegen die Windrichtung entsprechend geneigt durch Richtungsänderung des um eine verticale Axe für sich drehbar gemachten Steuerflügels, oder es sind die oben erwähnten vielen schmalen

Flügelbrettchen zu sectorenförmigen Gruppen vereinigt und diese um je eine zur Radaxe windschief senkrechte Axe drehbar gemacht worden, um regenschirmartig das ganze Rad mehr oder weniger zusammenklappen zu können. In allen Fällen kann diese Kraftregulirung auch automatisch wirkend eingerichtet werden mit Hülfe des Gleichgewichtes zwischen einer auf Vergrösserung der wirksamen Fläche hinwirkenden constanten Kraft und dem auf Verkleinerung hinwirkenden veränderlichen Winddruck. Bei Wasserstationen ist auch, abgesehen von der Windgeschwindigkeit, die Regulirung durch einen Schwimmer bewirkt worden, um die Bewegung um so mehr zu verlangsamen, je mehr die beabsichtigte Füllung des betreffenden Behälters erreicht ist.

§. 54. Druck der bewegten Luft auf die Flügel eines Windrades.

Die theoretische Bestimmung der mechanischen Arbeit, welche durch ein Windrad unter gewissen Umständen gewonnen werden kann, setzt die Kenntniss des Winddruckes auf die verschiedenen Theile der Flügel oder wenigstens eine der Wirklichkeit genügend entsprechende Annahme in dieser Hinsicht voraus. Im Princip ist dieser Luftdruck an der Oberfläche irgend eines gegebenen Körpers nur von der relativen Geschwindigkeit von Luft und Körper abhängig, ohne dass es z. B. einen Unterschied machen sollte, ob einer von beiden Theilen und welcher von ihnen in Ruhe, während nur der andere in Bewegung ist. Thatsächlich ist freilich ein solcher Unterschied bemerklich, wie insbesondere die Versuche von Dubuat und von Duchemin bezüglich der relativen Bewegung von Wasser und normalen Prismen (Bd. I, §. 154) ergaben; bezüglich der Luft als betreffendem Medium ist man aber fast ganz auf Versuche über den Bewegungswiderstand von Körpern, insbesondere von normal bewegten ebenen Platten, in fast ruhiger Luft angewiesen, indem dieselben vermittels eines Rotationsapparates mit verticaler Axe in horizontalen kreisförmigen Bahnen aller Punkte herumgeführt wurden. Während bei älteren Versuchen von Borda, Hutton und von Thibault, sowie auch bei späteren von Hagen und v. Lössl nur der ganze Luftdruck (auf die normal bewegte ebene Platte) entgegengesetzt ihrem Bewegungssinne aus dem gemessenen Kraftmoment abgeleitet wurde, welches zur Erhaltung einer bestimmten gleichförmigen Rotationsbewegung des Apparates erforderlich war, wobei ausserdem bezüglich des Druckmittelpunktes eine unsichere Annahme gemacht werden musste, hat in neuerer Zeit Recknagel diese Versuche besonders dadurch wesentlich ergänzt, dass er durch ein eigenthümliches Verfahren jenen Druck analysirte, nämlich für die verschiedenen Stellen der Plattenoberfläche ermittelte, und dass er zugleich den von ihm so genannten Mitwind (Bd. II, §. 163 unter 1) sorgfältig veranschlagte, d. h. die eigene Bewegung, in welche die Luft des Versuchsraumes durch den Apparat nach und nach versetzt wurde. Indem diese Untersuchungen Recknagel's in mancher Hinsicht bemerkenswerth sind und zu unerwarteten Ergebnissen geführt haben, mag hier zur Ergänzung, bezw. Berichtigung betreffender Angaben in Bd. I, §. 156 dieses Werkes einigermaassen eingehend darüber berichtet werden.*)

Bei den Versuchen wurde die kreisrunde Platte (nur solche wurden und zwar in radialer verticaler Stellung benutzt) auf dem horizontalen radialen Arme eines Rotationsapparates vermittels eines verticalen Stieles befestigt; an derjenigen Stelle der vorderen oder hinteren Fläche, für welche der Druck bestimmt werden sollte, war ein rundes Loch von etwa 0,4 Millimeter Durchmesser durch die Platte hindurch gebohrt und vom anderen Ende der Bohrung aus eine Röhre längs dem Arm des Apparates zu seiner Drehungsaxe geführt. Mit einer Biegung nach oben mündete dieselbe hier von unten in ein oben offenes mitrotirendes, Wasser enthaltendes Gefäss, und zwar über dem Wasserspiegel; in das Wasser tauchte von oben der Rand eines unten offenen befestigten Gefässes, dessen somit durch Wasserverschluss abgesperrter mit der Plattenbohrung durch das erwähnte Rohr communicirender Luftraum durch einen Kautschukschlauch mit einem Differentialmanometer**) verbunden war zur Messung des Unterschiedes zwischen dem specifischen Drucke p_0 in fraglichem Luftraume und dem Drucke p der äusseren atmosphärischen Luft. Die Gleichförmigkeit der Rotation des mittels Kurbel und Riemengetriebe von Hand bewegten Apparates wurde durch Erhaltung der Gleichzeitigkeit von periodisch wiederkehrenden bezüglichen Anschlägen desselben an eine Feder mit den Ausschlägen eines Mälzel'schen Metronoms sichergestellt.

Aus der gemessenen Druckdifferenz $p - p_0$ kann auf den gesuchten Ueberdruck $p_1 - p$, unter p_1 den Druck an der gelochten Stelle der Körperoberfläche verstanden, von welcher die radiale Röhre ausgeht, mit Hülfe der Beziehung zwischen p_1 und p_0 geschlossen werden. Dieselbe ergiebt sich durch folgende Ueberlegung. Ist

ω die Winkelgeschwindigkeit des Apparates,

y der Luftdruck in der Röhre in der Entfernung x von der Axe,

*) Annalen der Physik und Chemie, neue Folge, Bd. X (1880), S. 677 und Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, Bd. XXX (1886), S. 489.

**) Dasselbe ist in Wiedemann's Annalen, 2 (1877), S. 296 beschrieben.

m die specifische Masse (Masse pro Volumeneinheit) der Luft, welche dem Drucke p, also

$m\frac{y}{p}$ diejenige, welche bei hier überall gleich anzunehmender Temperatur dem Drucke y entspricht, so ist mit Rücksicht auf das im Beharrungszustande vorhandene Gleichgewicht zwischen der von innen nach aussen stattfindenden Druckzunahme der Luftschichten in der Röhre und ihren Centrifugalkräften:

$$dy = \omega^2 x . m\frac{y}{p} . dx \text{ oder } \frac{dy}{y} = \omega^2 \frac{m}{p} x\,dx$$

und ergiebt sich daraus durch Integration, wenn r die Entfernung der Plattenbohrung von der Apparataxe, $v = r\,\omega$ die lineare Geschwindigkeit jener Bohrungsstelle bedeutet,

$$ln\frac{p_1}{p_0} = \omega^2 \frac{m}{p}\frac{r^2}{2} = \frac{mv^2}{2p}$$

$$p_1 = p_0 . e^{\frac{m v^2}{2p}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

Bei mässigen Geschwindigkeiten kann hierfür gesetzt werden:

$$p_1 = p_0\left(1 + \frac{mv^2}{2p}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Es wird dadurch p_1 mit einem Fehler von höchstens ungefähr 0,01 Kgr. pro Quadratmtr. = 0,01 Millim. Wassersäule gefunden, entsprechend der Genauigkeit, welche die Ablesung des Manometers zur Messung von $p - p_0$ gestattete, wenn

$$\frac{p_0}{2}\left(\frac{mv^2}{2p}\right)^2 < 0{,}01$$

oder, sofern p_0 sehr nahe $= p$, wenn

$$v < \sqrt{\frac{1}{m}\sqrt{0{,}08\,p}}$$

ist, insbesondere mit $p = 10333$ und $m = \frac{1{,}293}{9{,}81}$ für

$$v < 14{,}8 \text{ Mtr.},$$

während thatsächlich eine Geschwindigkeit von 10 Mtr. bei den Versuchen nicht überschritten wurde. Der gesuchte Ueberdruck ist dann nach (2):

$$p_1 - p = \frac{p_0}{p}\frac{m\,v^2}{2} - (p - p_0)$$

oder auch, indem das Verhältniss $\frac{p_0}{p}$ stets um weniger als 0,001 von 1 verschieden gefunden wurde,

$$p_1 - p = \frac{mv^2}{2} - (p - p_0) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

mit einem verhältnissmässigen Fehler von weniger als 0,001 bei Geschwindigkeiten $v < 15$ Mtr.

Die Erkenntniss einer von der Grösse $p - p_0$, also vom Versuchsverfahren, überhaupt von Nebenumständen unabhängigen Gesetzmässigkeit des auf solche Weise für jede Stelle (ausser ganz dicht an den Rändern) der Körperoberfläche zu ermittelnden Druckes $p_1 - p$ ist nur zu erwarten und ist auch nur dann von Interesse, wenn derselbe zur relativen Geschwindigkeit w von Luft und Körper in Beziehung gesetzt wird. Diese relative Geschwindigkeit ist hier mit Rücksicht auf die Recknagel'schen Versuche im Sinne von v verstanden, abgesehen von transversalen Luftströmungen längs den Platten, welche zwar in erheblichem Masse stattfinden, doch auf den in Rede stehenden Druck ohne unmittelbaren Einfluss sind. Der Unterschied $v - w$ ist die Geschwindigkeit des Mitwindes an der betreffenden Stelle. Sie muss in Anschlag gebracht werden, um aus v auf w zu schliessen, ist aber so sehr von Zufälligkeiten abhängig (von der Anordnung des Rotationsapparats und von den Verhältnissen des Versuchsraums), dass sie in jedem Falle besonders ermittelt werden muss. Die umständliche Anwendung entsprechender Anemometer zu diesem Zwecke konnte aber im vorliegenden Falle vermieden werden durch Verwerthung eines von Recknagel festgestellten, auch an und für sich bemerkenswerthen einfachen Gesetzes bezüglich des Widerstandes, welchen Rotationsflächen, die gegen Luft eine constante relative Geschwindigkeit von mässiger Grösse in der Richtung ihrer Rotationsaxe besitzen, gegen ihren Scheitel erfahren.

Theoretisch ergiebt sich dieses Gesetz durch folgende Betrachtung. Auf ein fadenförmiges Element des gegen die Umdrehungsfläche gerichteten Luftstroms können bei Abstraction von transversalen Mischungsbewegungen die allgemeinen Gleichungen für die permanente strömende Bewegung von Luft in Röhren angewendet werden, insbesondere die Gleichung (2), §. 75, Bd. I (Gleichung der lebendigen Kraft):

$$\frac{u\,du}{g} + \frac{dy}{\gamma} = dM - dB \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4),$$

unter u die relative Strömungsgeschwindigkeit in irgend einem Querschnitte, y den specifischen Druck und γ das specifische Gewicht ($\frac{1}{\gamma}$ das specifische Volumen) in demselben verstanden, während dM die Arbeit der Massenkräfte, dB die durch die Bewegungswiderstände verbrauchte Arbeit pro Gewichtseinheit und für ein Längenelement der Mittellinie des Luftfadens bedeuten. Von der Schwerewirkung der Luft kann als ganz untergeordnet abgesehen werden, während auch sonstige Massenkräfte bei dem centralen Luftfaden mit gerader Mittellinie nicht in Betracht kommen, also $dM = 0$ zu setzen ist; wird mit der Annahme $dB = 0$ auch von Bewegungswiderständen abgesehen und die specifische Masse $\mu = \frac{\gamma}{g}$ eingeführt, so ist dann nach (4):

$$u\,du + \frac{dy}{\mu} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Während sich die Luft der Umdrehungsfläche nähert, ihre relative Geschwindigkeit u abnimmt, der Querschnitt des Luftfadens zunimmt, wachsen auch der Druck y und die specifische Masse μ, und zwar besteht zwischen ihnen, sofern die Zustandsänderung als adiabatisch zu betrachten ist, die Beziehung (Bd. I, §. 20):

$$y = C\mu^n;\quad dy = nC\mu^{n-1}d\mu \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

unter C eine Constante und unter n (= 1,41) das gleichfalls constante Verhältniss der specifischen Wärmen von Luft bei constantem Druck und bei constantem Volumen verstanden. Die Einsetzung dieses Ausdruckes von dy lässt Gl. (5) übergehen in:

$$u\,du + nC\mu^{n-2}d\mu = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7).$$

Indem die Zunahme des Luftdrucks bei der Annäherung an die Fläche vom atmosphärischen Drucke p bis p_1, die Zunahme der specifischen Masse entsprechend von m bis m_1 stattfindet, kann vom centralen, gegen die Mitte der Umdrehungsfläche gerichteten Luftfaden (nur von ihm) behauptet werden, dass die relative Geschwindigkeit von ihrer anfänglichen Grösse w bis zu verschwindend kleiner Grösse abnehme; oder es werde wenigstens die fragliche Annahme gemacht, vorbehaltlich ihrer Prüfung auf Grund daraus hervorgehender Folgerungen. Zwischen den entsprechenden Grenzen

$$u = w \text{ und } u = 0,\quad \mu = m \text{ und } \mu = m_1$$

ergiebt die Integration von Gl. (7):

$$-\frac{w^2}{2} + nC\frac{m_1^{\,n-1} - m^{n-1}}{n-1} = 0$$

$$m_1^{\,n-1} = m^{n-1} + \frac{n-1}{n}\,\frac{w^2}{2C} = m^{n-1}\left(1 + \frac{n-1}{n}\,\frac{mw^2}{2Cm^n}\right)$$

oder, wenn beide Seiten der letzten Gleichung zur $\frac{n}{n-1}$ten Potenz erhoben und mit C multiplicirt werden, wegen

$Cm_1^{\,n} = p_1$ und $Cm^n = p$ nach (6):

$$p_1 = p\left(1 + \frac{n-1}{n}\,\frac{m w^2}{2p}\right)^{\frac{n}{n-1}} \ldots\ldots\ldots (8).$$

Die Reihenentwicklung ergiebt:

$$p_1 = p\left[1 + \frac{m w^2}{2p} + \frac{1}{2}\,\frac{n}{n-1}\left(\frac{n}{n-1} - 1\right)\left(\frac{n-1}{n}\,\frac{m w^2}{2p}\right)^2 + \ldots\right]$$

$$p_1 - p = \frac{m w^2}{2} + \frac{1}{2np}\left(\frac{m w^2}{2}\right)^2 + \ldots\ldots\ldots (9).$$

Für mässig grosse relative Geschwindigkeiten kann somit

$$p_1 - p = \frac{m w^2}{2} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

gesetzt werden mit einem Fehler von weniger, als ungefähr 0,01 (Kgr. pro Quadratmtr. oder Millim. Wassersäule), so lange

$$\frac{1}{2np}\left(\frac{m w^2}{2}\right)^2 < 0{,}01$$

$$w < \sqrt{\frac{1}{m}\sqrt{0{,}08\,np}}$$

d. h. mit Rücksicht auf obige Prüfung der Gültigkeitsgrenze von Gl. (2) und mit $n = 1{,}41$ so lange

$$w < 14{,}8\sqrt[4]{n}, \text{ d. i. } w < 16{,}1 \text{ Mtr.}$$

ist. Die Gleichung (10) drückt das fragliche Gesetz aus, dass nämlich der Ueberdruck der Luft gegen den Scheitel einer Umdrehungsfläche bei mässigen relativen Geschwindigkeiten im Sinne der Umdrehungsaxe derjenigen lebendigen Kraft der Volumeneinheit noch unverdichteter Luft gleich ist, welche jener relativen Geschwindigkeit entspricht. Bei grösseren Geschwindigkeiten wächst dagegen dieser Ueberdruck nach (8) und (9) proportional einer höheren als der zweiten Potenz von w, wie ja auch aus Erfahrungen in Betreff des Widerstandes von Geschossen zu schliessen ist. (Bd. I, §. 156.)

Fragliches Gesetz wurde auf zweierlei Weise durch Versuche geprüft und bei Geschwindigkeiten bis 10 Mtr. vollkommen genügend bestätigt gefunden. Zunächst ist nämlich zu bemerken, dass, wenn Mitwind nicht vorhanden, also $w = v$ wäre, gemäss (3) und (10)

$$p - p_0 = 0$$

gefunden werden müsste. Diese Voraussetzung konnte aber insofern verwirklicht werden, als der Mitwind erst mit der zweiten Umdrehung des Apparates beginnt und schon eine Viertelumdrehung bei einiger Uebung die hinlänglich gleichförmige Winkelbewegung erzielen liess, so dass die übrigen 3 Viertel der ersten Umdrehung zu einer Beobachtung bei gleichförmiger Geschwindigkeit ohne Mitwind verwendbar waren. Dabei ergaben sich niemals positive, höchstens sehr kleine negative Werthe von $p - p_0$ bis $= -0{,}02$, welche nach Recknagel's Meinung dadurch zu erklären sein mögen, dass bei Beginn der Drehung Compression der Luft in der von der Plattenbohrung zur Drehungsaxe führenden Röhre mit entsprechender Temperaturerhöhung stattfindet, welche letztere zur Ausgleichung einige Zeit erfordert. — Im Falle von Mitwind folgt aus der Gleichsetzung der Ausdrücke (3) und (10) von $p_1 - p$:

$$\frac{m v^2}{2} - \frac{m w^2}{2} = p - p_0; \quad v^2 - w^2 = \frac{2(p - p_0)}{m},$$

wonach sich auf Grund des Gesetzes (10) die Geschwindigkeit des Mitwindes

$$v - w = \frac{2(p - p_0)}{m(v + w)} \text{ nahe } = \frac{p - p_0}{m v} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

mit den durch Beobachtung bekannten Werthen von $p - p_0$, m und v berechnen liess. Indem nun dieser Mitwind auch anderweitig anemometrisch ermittelt wurde (durch das im Bd. II, §. 163 unter 1. besprochene Verfahren), lag in der nahen Uebereinstimmung beider Werthe von $v - w$ eine weitere Bestätigung des fraglichen Gesetzes. Einige Versuche mit Kugelschalen, sowohl bei vorausgerichteter convexer als concaver Seite, bewahrheiteten ausserdem seine allgemeine Gültigkeit auch für nicht ebene Umdrehungsflächen bei relativen Geschwindigkeiten bis zu etwa 10 Mtr. —

Nachdem nun auf solche Weise der Druck an den verschiedenen Stellen der Vorder- und Hinterfläche von normal im Kreise herum gleichförmig bewegten kreisförmigen ebenen Platten in seiner Beziehung zur relativen Geschwindigkeit w ermittelt war, konnte daraus der ganze Druck auf jede dieser Flächen rechnungsmässig durch mechanische Quadratur gefunden werden. Indem dann die Gesetzmässigkeiten der Ergebnisse durch empirische Formeln ausgedrückt wurden, ergaben sich für Plattendurchmesser

$$d = 0{,}01 \text{ bis } 0{,}5 \text{ Mtr.},$$

Mittelpunktsentfernungen der Platten von der Drehungsaxe

$$r = 1 \text{ bis } 5 \text{ Mtr.}$$

und Mittelpunktsgeschwindigkeiten

$$v = 2 \text{ bis } 10 \text{ Mtr.}$$

in der Hauptsache die folgenden Gesetze, wobei mit

$$F = \frac{\pi d^2}{4} \text{ und } h = \frac{m w^2}{2}$$

bezw. die Grösse der Plattenfläche und der specifische Ueberdruck im Mittelpunkte der vorderen Fläche bezeichnet sind, letzterer in Kgr. pro Quadratmtr. oder Millim. Wassersäule ausgedrückt; die relative Geschwindigkeit w bezieht sich ebenso wie v auf den Mittelpunkt der Platte, so dass auch sie bei den Versuchen nahe zwischen den für v angeführten Grenzwerthen veränderlich war.

1. Der Gesammtwiderstand W, welchen die Platte erfährt, besteht aus einem Ueberdrucke H_1 gegen die Vorderfläche und einem Minderdrucke H_2 an der Hinterfläche (abgesehen von Reibung am Rande); entsprechend findet an der Vorderseite im Allgemeinen Verdichtung, an der Rückseite Verdünnung der Luft statt.

2. Ist h_1 der specifische Ueberdruck in einem Punkte der Vorderfläche, $\alpha \frac{d}{2}$ die Entfernung desselben vom Mittelpunkte der Fläche, so ist das Verhältniss von h_1 zu h um so mehr nur von α abhängig, je grösser der Halbmesser r der Kreisbahn ist, und zwar nähert es sich der Grenze:

$$\frac{h_1}{h} = 1 - 0{,}39\,\alpha^2 + 0{,}734\,\alpha^4 - 1{,}19\,\alpha^6 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (12),$$

wie wenigstens bis nahe am Rande (bis $\alpha = 0{,}95$) aus den Ergebnissen der Versuche gefolgert werden konnte. Gemäss dieser empirischen Formel, welche somit bei geradliniger Normalbewegung als zutreffend zu betrachten wäre, ist z. B. für

$\alpha = 0$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95
$\frac{h_1}{h} = 1$	0,996	0,985	0,970	0,951	0,930	0,899	0,845	0,739	0,535	0,383
Differenz	0,004	0,011	0,015	0,019	0,021	0,031	0,054	0,106	0,204	0,152

entsprechend einer vom Mittelpunkte bis nahe am Rande wachsenden Schnelligkeit der Druckabnahme.

Bei der Bewegung im Kreise und $r > 2$ Mtr. zeigen kleine Platten von $d < 0{,}1$ Mtr. im verticalen Durchmesser sehr nahe dieselbe Druckvertheilung, während im horizontalen Durchmesser wenigstens das arithmetische Mittel der Drucke an den beiderseits gleich weit vom Mittelpunkte entfernten Stellen dem Gesetze nahe entspricht. Bei grösseren Platten wird zwar auch dieses Mittel dem Drucke im verticalen Durchmesser bei gleicher Entfernung vom Mittelpunkte nahe gleich gefunden, aber der Werth von $\frac{h_1}{h}$ ist selbst bis zu $r = 5$ Mtr. kleiner, als obiger Tabelle gemäss Gl. (12) entsprechen würde, in gegen den Rand hin zunehmendem Grade; für $d = 0,5$ Mtr. und $\alpha = 0,95$ ergab sich h_1 nur $= 0,32\,h$ statt $= 0,38\,h$. Im horizontalen Durchmesser nimmt zwar h_1 mit der Entfernung x von der Drehungsaxe zu, aber durchaus nicht etwa proportional x^2 oder dem Quadrate der Geschwindigkeit; am inneren Rande kann sogar Minderdruck und Luftverdünnung stattfinden, einem negativen h_1 entsprechend. Grössere Unregelmässigkeiten zeigen sich bei grossen Platten in kleinen Entfernungen von der Drehungsaxe.

3. Der Gesammtüberdruck H_1 auf die Vorderfläche liess sich mit hinreichender Genauigkeit ausdrücken durch

$$H_1 = Fh\left(0,75 - 0,63\frac{d^2}{r}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (13);$$

der grösste Fehler des Coefficienten von Fh, nur zweimal in 62 Fällen vorkommend, ist dabei $= 0,02$. Mit wachsendem Halbmesser r nähert sich H_1 wachsend dem Grenzwerthe

$$H_1 = 0,75\,Fh \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14),$$

welcher somit der geradlinigen Normalbewegung entspricht.

4. Der specifische Minderdruck h_2 in einem Punkte der Hinterfläche nimmt so wenig nach dem Rande hin ab, dass er zunächst wenigstens bei geradliniger Normalbewegung der Platte (bezw. bei sehr grossen Werthen von r) in allen Punkten als gleich gross zu betrachten ist und zwar $= 0,37\,h$.

Bei der Bewegung im Kreise zeigte sich bei kleinen Platten bis $d = 0,1$ Mtr. stets, bei der grössten ($d = 0,5$ Mtr.) wenigstens von $r = 2$ Mtr. an der Minderdruck h_2 in allen Punkten des senkrechten Durchmessers merklich gleich gross und im horizontalen Durchmesser so vertheilt, dass das arithmetische Mittel der beiderseits in allen gleich grossen Entfernungen vom Mittelpunkte gefundenen Grössen von h_2 dem Minderdrucke im senkrechten Durchmesser gleich ist. Mit der Entfernung x von der Umdrehungsaxe nimmt dabei h_2 nicht zu (wie h_1), sondern ab und kann am äusseren Rande (in grösstem Abstande x) selbst negativ werden, einer Luftverdichtung entsprechend. Erheblichere Unregelmässigkeiten zeigen sich übrigens auch hier bei grossen Platten in kleinen Entfernungen von der Axe.

Der in den concentrischen ringförmigen Elementen der Hinterfläche hier nahe gleich grosse mittlere Minderdruck h_2 ist übrigens viel mehr und zwar im entgegengesetzten Sinne von d und r abhängig, als h_1 im Mittel gemäss Gl. (13). Hier konnte nämlich

5. der ganze Minderdruck H_2 an der Hinterfläche im Anschlusse an 181 Bestimmungen:

$$H_2 = F h \left(0{,}37 + 3{,}21 \frac{d}{r}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (15)$$

gesetzt werden, so dass die zweiten Glieder der Coefficienten von Fh in (15) und (13) entgegengesetzte Vorzeichen haben bei dem absoluten Grössenverhältnisse

$$\frac{3{,}21}{0{,}63} \frac{1}{d} = \frac{5{,}1}{d} > 10 \text{ für } d \lesseqqgtr 0{,}5.$$

6. Aus (13) und (15) folgt der Gesammtwiderstand:

$$W = H_1 + H_2 = F h \left(1{,}12 + \frac{3{,}21\, d - 0{,}63\, d^2}{r}\right)$$

und wenn
$$W = \vartheta F h = \vartheta F \frac{m w^2}{2} = \vartheta \gamma F \frac{w^2}{2 g} \quad \ldots \ldots \ldots (16)$$

gesetzt wird, unter $\gamma = m g$ das specifische Gewicht der Luft verstanden, ergiebt sich der Widerstandscoefficient

$$\vartheta = 1{,}12 + \frac{3{,}21\, d - 0{,}63\, d^2}{r} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (17)$$

für $w < 10$ Mtr., d höchstens $= 0{,}5$ Mtr. und $r > 1$ Mtr. mit einem wahrscheinlichen Fehler von kaum mehr, als 0,03; innerhalb dieser Grenzen ist ϑ um so grösser, je grösser d und je kleiner r.

Insoweit eine Vergleichung mit den Ergebnissen anderer Versuche möglich war, findet Recknagel die Unterschiede hinlänglich begründet durch die Verschiedenheiten der Versuchsmethoden und besonders durch die bei jenen Versuchen übersehene oder nicht genügend in Anschlag gebrachte Geschwindigkeit des Mitwindes. Die Vergleichung mit Thibault's Versuchen bezüglich des Widerstandes quadratischer Platten von 0,16 bis 0,32 Mtr. Seitenlänge lässt zudem denselben als nahe ebenso gross erkennen wie denjenigen kreisförmiger Platten von gleicher Flächengrösse unter sonst gleichen Umständen.

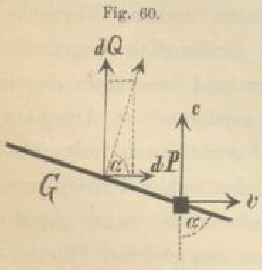
Was freilich die Verwerthbarkeit solcher Ergebnisse für die Beurtheilung des Luftdrucks auf die Flügel eines Windrades betrifft, so bleibt sie in mancher Hinsicht zweifelhaft. Weiterer Prüfung bedürftig ist der Einfluss von Grösse und Form der Fläche auf den Coefficienten ϑ besonders auch bezüglich grosser rechteckiger Flächen bei geradliniger Bewegung (bezw. bei grossen Halbmessern r der kreisförmigen Bahnen), das Gesetz der Abhängigkeit des Widerstandes von dem Winkel, unter welchem etwa die Richtung der relativen Geschwindigkeit gegen die Normale der Fläche geneigt ist, endlich die Grösse des Unterschiedes zwischen dem Widerstande einer in ruhiger Luft bewegten Platte und dem Drucke bewegter Luft gegen die ruhende oder wenigstens im Sinne des Windes unbewegte Platte, welcher letztere und für die hier fragliche Anwendung gerade in Betracht kommende Druck merklich grösser zu sein scheint, als jener Widerstand unter sonst gleichen Umständen, ohne dass jedoch das Wesen und die Grösse dieser Verschiedenheit genügend erforscht wären.

Unter solchen Umständen ist man bei der Benutzung von Gl. (16) zur Berechnung des Winddruckes auf die Flügel von Windrädern in Betreff des Coefficienten ϑ vorzugsweise auf Erfahrungen über die Leistung solcher Motoren angewiesen. Dabei wird in jener Gleichung, sofern die Richtung der relativen Geschwindigkeit gegen die Normale der ebenen Fläche F geneigt ist, unter W nach wie vor der Normaldruck auf dieselbe, unter w aber dann die relative Normalgeschwindigkeit verstanden.

§. 55. Vortheilhafteste Neigung eines Flügelelementes gegen die Richtung seiner Bewegung und gegen die Windrichtung.

Sofern die Windgeschwindigkeit c parallel der Umdrehungsaxe des Windrades gerichtet ist, bildet sie mit der Geschwindigkeit v irgend eines Flügelpunktes einen rechten Winkel. Wenn also ein unendlich kleines, als eben zu betrachtendes Flügelelement dF, dessen sämmtlichen Punkten dieselbe Geschwindigkeit v zugeschrieben werden kann, die Ebene cv in der Geraden G schneidet, welche gegen die Richtung von c unter dem spitzen Winkel α geneigt ist, so bildet G mit der Richtung von v den spitzen Winkel $90^0 - \alpha$ (Fig. 60). Eine Normale N von dF projicirt sich auf die Ebene cv in einer Normalen zu G und bilde damit den Winkel β. Die relative Normalgeschwindigkeit des Windes gegen das Flügelelement ist dann:

Fig. 60.



$$w = c \cos(N, c) - v \cos(N, v)$$
$$= c \sin\alpha \cos\beta - v \cos\alpha \cos\beta$$

und somit gemäss der angenommenen erweiterten Bedeutung von Gl. (16) im vorigen Paragraph der normale Winddruck auf das Flügelelement:

$$d R = \vartheta \gamma . d F \frac{(c \sin \alpha - v \cos \alpha)^2}{2 g} \cos^2 \beta \quad \ldots \ldots \ldots (1),$$

seine Seitenkraft im Sinne von v:

$$d P = d R . \cos (N, v) = d R . \cos \alpha \cos \beta$$

und somit seine Arbeit pro Sekunde:

$$d A = d P . v = \vartheta \gamma . d F \frac{(c \sin \alpha - v \cos \alpha)^2}{2 g} v \cos \alpha \cos^3 \beta \quad \ldots (2).$$

Letztere, proportional $\cos^3 \beta$, ist, wie sich erwarten liess, am grössten für $\beta = 0$, d. h. wenn das Flügelelement zur Ebene $c v$ senkrecht ist, wie es bei einer windschiefen Flügelfläche zutrifft, deren erzeugende Gerade die Mittellinie der betreffenden Ruthe senkrecht schneidet. Wenn dann freilich die Gleichungen

$$d R = \vartheta \gamma . d F \frac{(c \sin \alpha - v \cos \alpha)^2}{2 g} \quad \ldots \ldots \ldots (3)$$

$$d A = \vartheta \gamma . d F \frac{(c \sin \alpha - v \cos \alpha)^2}{2 g} . v \cos \alpha \quad \ldots \ldots \ldots (4)$$

auf ein Flügelelement $d F$ zwischen zwei unendlich nahe benachbarten Lagen dieser Erzeugenden bezogen werden, so wird dabei von der Verschiedenheit der Umfangsgeschwindigkeit v in den verschiedenen Punkten des Elementes abgesehen.

Nach Gl. (4) ist die als Function nur von α betrachtete Arbeit

$$d A = 0 \text{ für } tg\, \alpha = \frac{v}{c} \text{ und für } \alpha = 90^0$$

bei Voraussetzung eines endlichen Werthes von v. Zwischen diesen Grenzen von α ist sie am grössten, wenn

$$\frac{d}{d \alpha} \left[(c \sin \alpha - v \cos \alpha)^2 \cos \alpha \right] = 0$$

$$- (c \sin \alpha - v \cos \alpha)^2 \sin \alpha + 2 (c \sin \alpha - v \cos \alpha)(c \cos \alpha + v \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

ist, oder sofern $c \sin \alpha - v \cos \alpha$ nicht $= 0$, wenn

$$- (c \sin \alpha - v \cos \alpha) \sin \alpha + 2 (c \cos \alpha + v \sin \alpha) \cos \alpha = 0$$

$$c (- \sin^2 \alpha + 2 \cos^2 \alpha) + 3 v \sin \alpha \cos \alpha = 0$$

$$tg^2 \alpha - 3 \frac{v}{c} tg\, \alpha - 2 = 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).$$

Daraus folgt der zwischen obigen Grenzen liegende Wurzelwerth:

$$tg\,\alpha = \frac{3\,v}{2\,c} + \sqrt{\left(\frac{3\,v}{2\,c}\right)^2 + 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Er stellt eine zuerst von Maclaurin (im Jahre 1742) entwickelte Regel für die besten Sprossenrichtungen dar.

Wird dA nach Gl. (4) als Function nur von v betrachtet, so ist

$$dA = 0 \text{ für } v = c\,tg\,\alpha \text{ und für } v = 0,$$

zwischen diesen Grenzen am grössten für

$$\frac{d}{dv}\left[(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2 v\right] = 0$$

$$(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2 - 2\,(c\sin\alpha - v\cos\alpha)\,v\cos\alpha = 0$$

oder, sofern $c\sin\alpha - v\cos\alpha$ nicht $= 0$ ist, für

$$c\sin\alpha - v\cos\alpha - 2\,v\cos\alpha = 0;\quad v = \frac{c\,tg\,\alpha}{3} \quad \ldots\ldots (7).$$

Das Maximum von dA bezüglich auf α und v als gleichzeitige unabhängig Veränderliche kann dagegen nicht realisirt werden, weil die Gleichungen (5) und (7) sich nur dann nicht widersprechen, wenn

$$\alpha = 90^0 \text{ und } v = \infty$$

ist.

Um gemäss Gleichung (6), welche, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Flügelrades und x die Entfernung einer Sprosse bezw. eines Flügelelementes von der Axe bedeutet, mit $v = x\,\omega$ auch geschrieben werden kann:

$$tg\,\alpha = \frac{3\,\omega}{2\,c}\,x + \sqrt{\left(\frac{3\,\omega}{2\,c}\,x\right)^2 + 2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

die vortheilhaftesten Sprossenrichtungen zu bestimmen, ist eine mittlere und für den Betrieb besonders günstige Windgeschwindigkeit (erfahrungsmässig etwa $c = 6$ bis 7 Mtr.) und ausserdem ein möglichst vortheilhafter Werth von ω (bezw. der Umlaufzahl n pro Minute $= 9{,}55\,\omega$) vorauszusetzen. In letzterer Beziehung ist der Effect des ganzen Rades zugleich mit Rücksicht auf die von ω möglicher Weise abhängigen Effectverluste massgebend.

§. 56. Effect eines Windrades.

Bezeichnet z die Anzahl der Flügel, y die Breite eines jeden derselben in der Entfernung x von der Axe, a_0 den kleinsten, a_1 den grössten Werth von x, also $a_1 - a_0$ die radiale Länge der wirksamen Flügelfläche, so ist mit Rücksicht auf Gl. (4) im vorigen Paragraph und mit $dF = y\,dx$

die Arbeit des Winddrucks auf das rotirende Flügelrad pro Sekunde:

$$A = \frac{z\,\vartheta\,\gamma}{2\,g}\int_{a_0}^{a_1} y\,d\,x\,(c\,sin\,\alpha - v\,cos\,\alpha)^2\,v\,cos\,\alpha \;\ldots\ldots\ldots\; (1).$$

Dabei ist $v = x\,\omega$, während y und α verschiedene Functionen von x sein können.

Der Nutzeffect E, nämlich die Arbeit, welche die Flügelradwelle pro Sekunde nutzbar übertragen kann, ist um den Betrag der Reibungsarbeit dieser Welle in ihren Lagern kleiner, während der Luftwiderstand durch den entsprechend zu bestimmenden Coefficienten ϑ als mitberücksichtigt zu betrachten ist. Unter

$2\,r$ den Wellendurchmesser im Halslager,

G den zur Axe senkrechten Lagerdruck,

$2\,r_1$ den Durchmesser des Spurzapfens am Ende der Welle,

Q den betreffenden Lagerdruck im Sinne der Axe verstanden,

kann dann

$$E = A - (\mu\,G\,r + \mu_1\,Q\,r_1)\,\omega \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

gesetzt werden, wobei μ und μ_1 Zahlencoefficienten sind, welche nach Bd. II, §. 70 und §. 71, unter übrigens gleichen Umständen bei Voraussetzung neuer oder eingelaufener Zapfen bezw. im Verhältnisse

$$\mu : \mu_1 = \frac{\pi}{2} : \frac{2}{3} = 1 : 0{,}42$$

$$\mu : \mu_1 = \frac{4}{\pi} : \frac{1}{2} = 1 : 0{,}39$$

stehen, so dass etwa

$$\mu = 0{,}075 \text{ und } \mu_1 = 0{,}03$$
$$\mu = 0{,}1 \quad \text{ und } \mu_1 = 0{,}04$$

als entsprechende Werthe zu betrachten sind. Ohne erheblichen Fehler kann G dem ganzen Gewichte des Windrades mit Welle, Q dem axialen Winddrucke auf die Flügel gleich gesetzt werden; letzterer ist mit Rücksicht auf Gl. (3) und Fig. 60 im vorigen Paragraph, sowie mit $d\,F = y\,d\,x$:

$$Q = z\int d\,R\,sin\,\alpha = \frac{z\,\vartheta\,\gamma}{2\,g}\int_{a_0}^{a_1} y\,d\,x\,(c\,sin\,\alpha - v\,cos\,\alpha)^2\,sin\,\alpha \;\ldots\; (3).$$

Für windschiefe Flügel mit vortheilhaftesten Sprossenrichtungen ist nach Gl. (5) im vorigen Paragraph:

$$\frac{v}{c} = \frac{tg\,\alpha - 2\,cotg\,\alpha}{3} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (4),$$

also

$$c\sin\alpha - v\cos\alpha = c\left(tg\,\alpha - \frac{v}{c}\right)\cos\alpha$$

$$= \frac{2}{3}c\,(tg\,\alpha + cotg\,\alpha)\cos\alpha = \frac{2}{3}\,\frac{c}{\sin\alpha}\quad\ldots\ (5)$$

$$(c\sin\alpha - v\cos\alpha)^2 v\cos\alpha = \frac{4}{9}\,\frac{c^2}{\sin^2\alpha}\,\frac{c}{3}(tg\,\alpha - 2\,cotg\,\alpha)\cos\alpha$$

$$= \frac{4}{9}\,\frac{c^3}{3}\,\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}.$$

Die Gleichungen (1) und (3) gehen dadurch über in:

$$A = \frac{4}{9}\,\frac{z\vartheta\gamma}{2g}\,\frac{c^3}{3}\int_{a_0}^{a_1} y\,\frac{\sin^2\alpha - 2\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha}\,dx\quad\ldots\ldots\ (6)$$

$$Q = \frac{4}{9}\,\frac{z\vartheta\gamma}{2g}\,c^2\int_{a_1}^{a_1}\frac{y}{\sin\alpha}\,dx\quad\ldots\ldots\ (7).$$

Wenn man, indem v, y und α Functionen von x sind, ein Integral, wie es in den Gleichungen (1), (3), (6), (7) vorkommt, auf die Form:

$$\int_{a_0}^{a_1} f(x)\,dx = (a_1 - a_0)\,M$$

gebracht denkt, so kann der entsprechende Mittelwerth M der betreffenden Function $f(x)$ nach der Simpson'schen Regel mit beliebiger Annäherung bestimmt werden. Wird z. B. der Unterschied $a_1 - a_0$ der Integrationsgrenzen in sechs gleiche Theile getheilt durch die Zwischenwerthe x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, so findet man mit Hülfe der zugehörigen Functionswerthe:

$$18\,M = f(a_0) + f(a_1) + 4\,[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)] + 2\,[f(x_2) + f(x_4)].$$

Von der Winkelgeschwindigkeit ω sind A und Q gemäss (1) und (3) insofern abhängig, als v proportional ω ist, gemäss (6) und (7) insofern, als α — nach Gl. (8) im vorigen Paragraph — u. A. von ω abhängt; in beiden Fällen sind es die Integrale, welche durch ω bedingt sind. Diejenige Winkelgeschwindigkeit des Windrades, welche das Maximum von E gemäss Gl. (2) unter übrigens gegebenen Umständen zur Folge hat, kann deshalb nur durch versuchsweise Annahme verschiedener Werthe von ω mit allmähliger Annäherung gefunden werden, sofern nicht etwa in besonderen Fällen sich jene Integrale als genügend einfache Functionen von ω entwickeln lassen.

§. 57. Windräder mit rechteckigen und auf vortheilhafteste Weise windschiefen Flügeln.

Für solche bei Windmühlen vorzugsweise gebräuchliche Flügelräder gelten die Gleichungen (6) und (7) im vorigen Paragraph, wenn $y =$ der constanten Flügelbreite b gesetzt wird und α der Gleichung (8), §. 55, entspricht. Indem dann nach Gl. (4) im vorigen Paragraph

$$x = \frac{v}{\omega} = \frac{c}{3\,\omega}(tg\,\alpha - 2\,cotg\,\alpha)$$

$$dx = \frac{c}{3\,\omega}\left(\frac{1}{cos^2\alpha} + \frac{2}{sin^2\alpha}\right)d\alpha = \frac{c}{3\,\omega}\,\frac{sin^2\alpha + 2\,cos^2\alpha}{sin^2\alpha\,cos^2\alpha}\,d\alpha \;.\;.\;.\;(1)$$

ist, wird nach jener Gleichung (6) die Arbeit des Winddrucks pro Sekunde:

$$A = \frac{2\,z\,\vartheta\,\gamma}{81\,g}\,\frac{b\,c^4}{\omega}\int_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{sin^4\alpha - 4\,cos^4\alpha}{sin^5\alpha\,cos^2\alpha}\,d\alpha$$

$$= \frac{2\,z\,\vartheta\,\gamma}{81\,g}\,\frac{b\,c^4}{\omega}\left[f(\alpha_1) - f(\alpha_0)\right] \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2),$$

unter α_0 und α_1 die Werthe von α verstanden, welche $x = a_0$ bezw. $x = a_1$ entsprechen. Das mit $f(\alpha)$ bezeichnete unbestimmte Integral lässt sich zunächst in einfachere Integrale zerlegen:

$$f(\alpha) = \int\frac{d\alpha}{sin\,\alpha\,cos^2\alpha} - 4\int\frac{cos^2\alpha}{sin^5\alpha}\,d\alpha$$

$$= \int\frac{d\alpha}{sin\,\alpha\,cos^2\alpha} - 4\int\frac{d\alpha}{sin^5\alpha} + 4\int\frac{d\alpha}{sin^3\alpha}$$

oder wegen

$$\int\frac{d\alpha}{sin^m\alpha\,cos^n\alpha} = \frac{1}{n-1}\,\frac{1}{sin^{m-1}\alpha\,cos^{n-1}\alpha} + \frac{m+n-2}{n-1}\int\frac{d\alpha}{sin^m\alpha\,cos^{n-2}\alpha},$$

also insbesondere mit $m = 1$ und $n = 2$:

$$\int\frac{d\alpha}{sin\,\alpha\,cos^2\alpha} = \frac{1}{cos\,\alpha} + \int\frac{d\alpha}{sin\,\alpha} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{cos\,\alpha} + \int\frac{d\alpha}{sin\,\alpha} + 4\int\frac{d\alpha}{sin^3\alpha} - 4\int\frac{d\alpha}{sin^5\alpha}.$$

Indem nun ferner gemäss der allgemeinen Formel

$$\int\frac{d\alpha}{sin^n\alpha} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{cos\,\alpha}{sin^{n-1}\alpha} + \frac{n-2}{n-1}\int\frac{d\alpha}{sin^{n-2}\alpha}$$

insbesondere für $n = 3$ und für $n = 5$

$$\int \frac{d\,\alpha}{\sin^3\alpha} = -\frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}\int\frac{d\,\alpha}{\sin\alpha} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (4)$$

$$\int \frac{d\,\alpha}{\sin^5\alpha} = -\frac{1}{4}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{2}\int\frac{d\,\alpha}{\sin\alpha}\right)$$

und $\int\frac{d\,\alpha}{\sin\alpha} = \ln tg\frac{\alpha}{2}$ ist, ergiebt sich

$$\begin{aligned}
f(\alpha) &= \frac{1}{\cos\alpha} + \left(-2 + \frac{3}{2}\right)\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^4\alpha} + \left(1 + 2 - \frac{3}{2}\right)\int\frac{d\,\alpha}{\sin\alpha} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{1}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^4\alpha} + \frac{3}{2}\ln tg\frac{\alpha}{2} \\
&= \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin^4\alpha} - \frac{3}{2}\,\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} - \frac{3}{2}\ln cotg\frac{\alpha}{2} \\
&= \frac{\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^4\alpha\cos\alpha} - \frac{3}{2}\left(\frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + \ln cotg\frac{\alpha}{2}\right) \\
&= \frac{1}{\sin^4\alpha\cos\alpha} - \frac{3}{2}\left(\frac{cotg\,\alpha}{\sin\alpha} + \ln cotg\frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (5).
\end{aligned}$$

Der axiale Druck auf das Spurlager ist nach Gl. (7) im vorigen Paragraph mit $y = b$ und mit Rücksicht auf obige Gleichung (1):

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{2z\vartheta\gamma}{27\,g}\,\frac{b\,c^3}{\omega}\int\limits_{\alpha_0}^{\alpha_1}\frac{\sin^2\alpha + 2\cos^2\alpha}{\sin^3\alpha\cos^2\alpha}\,d\,\alpha \\
&= \frac{2z\vartheta\gamma}{27\,g}\,\frac{b\,c^3}{\omega}\left[\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_0)\right] \quad \ldots \ldots \ldots (6).
\end{aligned}$$

Dabei ist

$$\varphi(\alpha) = \int\frac{d\,\alpha}{\sin\alpha\cos^2\alpha} + 2\int\frac{d\,\alpha}{\sin^3\alpha}$$

oder nach obigen Gleichungen (3) und (4):

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= \frac{1}{\cos\alpha} - \frac{\cos\alpha}{\sin^2\alpha} + 2\int\frac{d\,\alpha}{\sin\alpha} \\
&= -\frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha\sin^2\alpha} + 2\ln tg\frac{\alpha}{2} = 2\left(\ln tg\frac{\alpha}{2} - \frac{cotg\,2\alpha}{\sin\alpha}\right) \\
&= 2\left(\frac{cotg\,(180^0 - 2\alpha)}{\sin\alpha} - \ln cotg\frac{\alpha}{2}\right) \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (7).
\end{aligned}$$

Die Ausdrücke (5) und (7) von $f(\alpha)$ und $\varphi(\alpha)$ haben solche Formen, dass alle Glieder positiv sind zwischen den Grenzen

$$\alpha = arctg\sqrt{2} = 54^0\,44' \text{ und } \alpha = 90^0,$$

entsprechend $x = 0$ und $x = \infty$.

Der Ausdruck (2) der Arbeit A lässt sich umformen in:

$$A = \frac{2 z \vartheta \gamma}{81 g} \frac{(a_1 - a_0) b c^3}{(a_1 - a_0)\frac{\omega}{c}} [f(\alpha_1) - f(\alpha_0)]$$

oder, wenn $F = (a_1 - a_0) b$ den Inhalt einer Flügelfläche, $v_1 = a_1 \omega$ ihre Umfangsgeschwindigkeit am äusseren, $v_0 = a_0 \omega$ die Umfangsgeschwindigkeit am inneren Rande bezeichnet, in:

$$A = \frac{2 \vartheta \gamma}{81 g} z F c^3 \frac{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)}{\frac{v_1}{c} - \frac{v_0}{c}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8),$$

wobei α_1 und $\frac{v_1}{c}$, α_0 und $\frac{v_0}{c}$ sich gemäss Gl. (6), §. 55, entsprechen, während die Functionen $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_0)$ durch obige Gleichung (5) bestimmt sind. Bei gegebener Windgeschwindigkeit und gegebener, auf vortheilhafteste Weise windschiefer Flügelfläche ist somit die Arbeit des Winddrucks am grössten, wenn

$$\Omega = \frac{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)}{\frac{v_1}{c} - \frac{v_0}{c}}$$

am grössten ist. Wird z. B., wie es ungefähr der Fall zu sein pflegt,

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{6}$$

angenommen, so findet man die folgenden zusammengehörigen Werthe:

$\frac{v_1}{c}$	$\frac{v_0}{c}$	α_1	α_0	$f(\alpha_1)$	$f(\alpha_0)$	Ω	Diff.
1,8	0,3	80°8'	62°40'	5,670	1,880	2,527	
2,4	0,4	82°22'	64°55'	7,398	2,052	2,673	146
3,0	0,5	83°48'	66°57'	9,153	2,248	2,762	89
3,6	0,6	84°48'	68°47'	10,944	2,465	2,826	64

Wie man sieht, nähert sich die Function Ω und folglich auch A mit wachsender Umdrehungsgeschwindigkeit einem Maximum, welches mit $v_1 = 3{,}6\, c$ noch nicht erreicht ist. Nun kommt es aber nicht sowohl auf das Maximum von A, als vielmehr auf das Maximum des Nutzeffects

$$E = A - (\mu G r + \mu_1 Q r_1)\,\omega$$

an, welches bei kleinerer Umdrehungsgeschwindigkeit stattfindet, weil der Effectverlust durch die Reibungswiderstände schneller mit ω wächst, als

Ω oder A. Indem sich annehmen lässt, dass, wie später nachgewiesen werden wird,

$$\mu_1 Q r_1 \text{ erheblich } < \mu G r$$

ist, kann dieser Effectverlust näherungsweise proportional ω, also für dasselbe Flügelrad bei derselben Windgeschwindigkeit proportional $\frac{v_1}{c}$ gesetzt werden. Wird dann

$$E = \frac{2\vartheta\gamma}{81 g} z F c^3 \Omega' = \frac{\Omega'}{\Omega} A$$

gesetzt, und wird beispielsweise angenommen, dass für $\frac{v_1}{c} = 2{,}4$ der fragliche Effectverlust $20\,^0/_0$ von A beträgt, also

$$\Omega - \Omega' = 0{,}2 \,.\, 2{,}673 = 0{,}535$$

ist, so wäre, da die Winkelgeschwindigkeiten in den angenommenen Fällen sich wie $3:4:5:6$ verhalten,

für $\frac{v_1}{c} =$	1,8	2,4	3	3,6
$\Omega - \Omega' =$	$\frac{3}{4} \,.\, 0{,}535$	$\frac{4}{4} \,.\, 0{,}535$	$\frac{5}{4} \,.\, 0{,}535$	$\frac{6}{4} \,.\, 0{,}535$
$=$	0,401	0,535	0,669	0,802
$\Omega' =$	2,126	2,138	2,093	2,024

Das Maximum von Ω' und somit von E würde schon bei $\frac{v_1}{c}$ etwas $< 2{,}4$ eintreten. Ueberhaupt würde sich die Regel ergeben, v_1 im Verhältniss zu c um so kleiner zu machen, ein je grösserer Theil von A durch die Reibung der Welle verbraucht wird. Uebrigens sind die Werthe von Ω' innerhalb der angenommenen Grenzen jenes Geschwindigkeitsverhältnisses so wenig verschieden, dass seine Annahme zugleich von anderweitigen Rücksichten, überhaupt von Erfahrungen eines durchschnittlich vortheilhaften Betriebes abhängig zu machen ist.

In dieser Beziehung sind noch immer jene Beobachtungen besonders bemerkenswerth, welche Coulomb vor mehr als 100 Jahren an grossen holländischen Windmühlen in der Umgebung von Lille anstellte.*) Die je 4 Flügel dieser Windräder hatten die durchschnittlichen Dimensionen:

$$b = 2 \text{ Mtr.},\quad a_0 = 2 \text{ Mtr.},\quad a_1 = 12 \text{ Mtr.},$$

*) Observations sur l'effet des moulins à vent. Mémoires de l'Académie des sciences. Paris, 1781.

entsprechend dem auch bei obiger Rechnung angenommenen Verhältnisse $a_0 : a_1 = 1:6$. Die Sprossenwinkel waren verschieden, und zwar

$$\alpha_0 = 60^0 \text{ bis } 68^0, \quad \alpha_1 = 78^0 \text{ bis } 84^0.$$

Der Windgeschwindigkeit c, ermittelt aus der Zeit, in welcher leichte in der Luft schwebende Körper eine abgemessene Bahnstrecke zurücklegten, wurde die Umdrehungszahl n des Flügelrades bei vortheilhaftem Betriebe nahe proportional gefunden, insbesondere z. B.

$$n = 8 \text{ bei } c = 4{,}22 \text{ Mtr. (13 par. Fuss), also } \frac{c}{n} = 0{,}528$$

$$n = 13 \text{ bei } c = 6{,}50 \text{ Mtr. (13 par. Fuss), also } \frac{c}{n} = 0{,}500$$

$$n = 17 \text{ bei } c = 9{,}09 \text{ Mtr. (28 par. Fuss), also } \frac{c}{n} = 0{,}535,$$

im Mittel $\frac{c}{n} = 0{,}52$ oder $\frac{n}{c} = 1{,}92$

$$\text{entsprechend } \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{30}\frac{n}{c} \text{ nahe } = 0{,}2 \text{ und } \frac{v_1}{c} = 2{,}4$$

in Uebereinstimmung mit dem obigen Rechnungsergebnisse bei Voraussetzung eines Effectverlustes

$$A - E \text{ etwas } < 0{,}2\,A.$$

Ein Flügeldurchmesser von 24 Mtr. ist übrigens ungewöhnlich gross. Bei kleinerem Durchmesser sind die einem ebenso vortheilhaften Betriebe entsprechenden Verhältnisse $\frac{n}{c}$ und $\frac{\omega}{c}$ entsprechend grösser anzunehmen, z. B. bei einem Durchmesser von 20 Mtr. und bei Voraussetzung immer desselben Verhältnisses $a_0 : a_1 = 1:6$

$$\frac{n}{c} = \frac{6}{5} \,.\, 1{,}92 = 2{,}30 \text{ und } \frac{\omega}{c} = \frac{6}{5} \,.\, 0{,}2 = 0{,}24,$$

während dann $\frac{v_1}{c}$ immer denselben Werth

$$\frac{v_1}{c} = 2{,}4$$

behält, welchem entsprechend auch die Sprossenwinkel für gleiche verhältnissmässige Axenentfernungen $\frac{x}{a_1}$ immer gleich gross passend gemacht werden, abgesehen von gewissen praktischen Regeln, welche sich theoretischer Beurtheilung entziehen, insbesondere z. B. der Vorschrift, nach aussen hin die Sprossenwinkel selbst etwas über 90^0 hinaus zu vergrössern mit Rücksicht auf den Einfluss des vom Mühlengebäude zurückgeworfenen Windes.

Schon vor Coulomb hatte Smeaton Versuche mit einem Modellrade ($z = 4$, $a_0 = 3$ Zoll, $a_1 = 21$ Zoll, $b = 5{,}6$ Zoll engl.) angestellt, über welche in den Philosophical Transactions seit 1759 berichtet ist. Das Rad wurde in einem Kreise von $5\frac{1}{2}$ Fuss Halbmesser mit verschiedenen Geschwindigkeiten c (auf die Radaxe, nämlich auf die Entfernung derselben von der Umdrehungsaxe des Rotationsapparats bezogen) herumgeführt. Auch Smeaton fand den vortheilhaften Arbeitsgang bedingt durch ein gewisses von dem oben angeführten Werthe wenig verschiedenes Verhältniss $\frac{v_1}{c}$. Genauere Uebereinstimmung ist in dieser Beziehung nicht zu erwarten, weil jenes Verhältniss vom verhältnissmässigen Effectverluste durch die Reibungswiderstände abhängt und der Nutzeffect E sich in der Nähe seines Maximums nur wenig mit v_1 ändert. —

Zur Bestimmung des absoluten Effects A gemäss der Gleichung (8), in welcher bei Voraussetzung des Dimensionsverhältnisses $a_0 : a_1 = 1 : 6$, eines Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{v_1}{c}$ nahe $= 2{,}4$ und bei entsprechend vortheilhaften Sprossenwinkeln nach obiger Rechnung

$$\frac{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)}{\frac{v_1}{c} - \frac{v_0}{c}} = \Omega = 2{,}673$$

und das specifische Gewicht der Luft durchschnittlich

$$\gamma = 1{,}24 \text{ Kgr. pro Cubikmtr.}$$

gesetzt werden kann, mittlerem Barometerstande und einer Temperatur von ungefähr 10^0 C. entsprechend, bleibt nur noch die passende Wahl des Coefficienten ϑ fraglich. Auch bezüglich der zur Beurtheilung desselben verwendbaren Beobachtungen im Grossen ist man noch immer fast ausschliesslich auf die Bestimmungen von Coulomb angewiesen. Es eignete sich dazu besonders eine der erwähnten Mühlen bei Lille, deren Flügelrad ein zum Auspressen von Rübsamenöl dienendes Pochwerk zu betreiben, somit eine leicht und sicher bestimmbare Nutzarbeit zu verrichten hatte. Die 4 Flügel dieses Windrades hatten bei dem Dimensionsverhältnisse $a_0 : a_1 = 1 : 6$ jeder ungefähr $F = 20$ Quadratmtr. Fläche mit äussersten Sprossenwinkeln

$$\alpha_0 = 63^0\,45', \quad \alpha_1 = 81^0\,15'.$$

Die Beobachtungen wurden angestellt

bei Windgeschwindigkeiten $c = 2{,}27$ bis 9,1 Mtr.
und Umfangsgeschwindigkeiten $v_1 = 7$ bis 22 Mtr.

Bei einem Versuche,*) welchen Coulomb als besonders brauchbar betrachtete, indem alle Umstände günstig waren, wurden 6 Stempel vom Gesammtgewicht 2741 Kgr. auf je 0,4872 Mtr. Höhe gehoben, und zwar 26 mal in der Minute, als die Windgeschwindigkeit $c = 6{,}5$ Mtr. und die Umfangsgeschwindigkeit v_1 nahe $= 2{,}5\,c$ war. Die Nutzarbeit pro Sekunde war also

$$= 2741 \,.\, 0{,}4872 \frac{26}{60} = 578{,}6 \text{ Mtrkgr.}$$

die Reibungsarbeit wurde geschätzt $= 49{,}0$ „
der Arbeitsverlust durch den Stoss der Welldaumen gegen die Stempelheblinge $= 43{,}7$ „

so dass die Gesammtarbeit des Winddrucks sich ergab $= 671{,}3$ Mtrkgr.

Bei der Vergleichung dieses Werthes von A mit dem Ausdrucke (8) werde $\Omega = 2{,}673$ gesetzt, indem es keinen hier in Betracht kommenden Unterschied zur Folge haben kann, dass $\frac{v_1}{c}$ nahe $= 2{,}5$ statt $= 2{,}4$ war und dass die Sprossenwinkel α_0 und α_1 von $64^0\,55'$ und $82^0\,22'$ um ungefähr 1^0 in gleichem Sinne abwichen. Mit

$$\gamma = 1{,}24;\ \frac{2\,\gamma}{81\,g} = \frac{2{,}48}{81 \,.\, 9{,}81} = \frac{1}{320}$$

ist dann gemäss Gl. (8) hier

$$A = \frac{2{,}673}{320}\,\vartheta\, z\, F\, c^3 = \frac{\vartheta}{120}\, z\, F\, c^3 \qquad (9)$$

oder, weil $c = 6{,}5$ und die ganze Flügelfläche $z\,F$ genauer $= 81{,}12$ Quadratmtr. war,

$$A = \vartheta\, \frac{81{,}12\ \ (6{,}5)^3}{120} = 185{,}6\,\vartheta,$$

so dass sich ergiebt:

$$\vartheta = \frac{671{,}3}{185{,}6} = 3{,}6$$

als ein im Vergleich mit Erfahrungen bezüglich des analogen Luftwiderstandes (§. 54) auffallend grosser Werth, obgleich die Reibungsarbeit mit

$$\frac{49}{671{,}3}\,100 = 7{,}3 \text{ Procent}$$

*) Rühlmann's allgemeine Maschinenlehre, Bd. I, §. 87.

der Gesammtarbeit für eine Ruthenwelle aus Holz nur klein, somit auch diese Gesammtarbeit selbst gewiss nicht zu gross geschätzt wurde.

Nach Gl. (9) wäre also auch in anderen Fällen, wenn

$$\frac{v_1}{c} \text{ nahe } = 2{,}4 \text{ und } \frac{a_0}{a_1} \text{ nahe } = \frac{1}{6}$$

ist, sowie die Sprossenwinkel entsprechend vortheilhafte Grössen haben,

$$\left.\begin{aligned} A = \frac{3{,}6}{120} z F c^3 &= 0{,}03\, z F c^3 \text{ Mtrkgr.} \\ &= \frac{z F c^3}{2500} \text{ Pferdestärken} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (10)$$

zu setzen.

Was schliesslich die Effectverluste durch die Lagerreibung betrifft, so kann zunächst das Gewicht eines grösseren Flügelrades mit Welle, insbesondere bei der üblichen Zahl von 4 Flügeln, zu etwa

$$G = 50\, z F \text{ Kgr.}$$

veranschlagt werden, also mit

$$\omega = \frac{v_1}{a_1} = 2{,}4 \frac{c}{a_1}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (10) der Effectverlust durch die Halslagerreibung zu:

$$\mu G r \omega = \mu r \frac{50 \,.\, 2{,}4}{0{,}03} \frac{A}{a_1 c^2} = 4000 \frac{\mu r}{a_1 c^2} A$$

und insbesondere mit $\mu = 0{,}075$ zu:

$$\mu G r \omega = 300 \frac{r}{a_1 c^2} A \ldots\ldots\ldots\ldots (11).$$

Der Ausdruck (6) für den axialen Druck Q auf das Spurlager lässt sich umformen in:

$$Q = \frac{2 z \vartheta \gamma}{27 g} \frac{(a_1 - a_0) b c^2}{(a_1 - a_0) \frac{\omega}{c}} [\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_0)]$$

$$= \frac{2 \vartheta \gamma}{27 g} z F c^2 \frac{\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_0)}{\frac{v_1}{c} - \frac{v_0}{c}}$$

oder mit der Bezeichnung

$$\Phi = \frac{\varphi(\alpha_1) - \varphi(\alpha_0)}{\frac{v_1}{c} - \frac{v_0}{c}}$$

und mit Rücksicht auf Gl. (8) in:

$$Q = \frac{3}{c}\frac{\Phi}{\Omega}A.$$

Nun findet man nach (7) bei Voraussetzung der den Verhältnissen

$$\frac{v_1}{c} = 2,4 \text{ und } \frac{v_0}{v_1} = \frac{1}{6}$$

entsprechenden Sprossenwinkel, insbesondere der Grenzwinkel

$$\alpha_1 = 82^0\,22' \quad \text{und} \quad \alpha_0 = 64^0\,55'$$

$$\varphi(\alpha_1) = 7,126 \text{ und } \varphi(\alpha_0) = 0,937.$$

Damit wird $\Phi = 3,095$ und mit Rücksicht auf obige Bestimmung von Ω:

$$Q = \frac{3}{c}\frac{3,095}{2,673}A = 3,47\frac{A}{c}.$$

Wieder mit $\omega = 2,4\frac{c}{a_1}$ ergiebt sich also der Effectverlust durch die Spurlagerreibung:

$$\mu_1 Q r_1 \omega = \mu_1 r_1 \,.\, 3,47 \,.\, 2,4\frac{A}{a_1} = \frac{25}{3}\frac{\mu_1 r_1}{a_1}A$$

und insbesondere mit $\mu_1 = 0,03$ (§. 56):

$$\mu_1 Q r_1 \omega = \frac{1}{4}\frac{r_1}{a_1}A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Aus (11) und (12) folgt der **Nutzeffect**:

$$E = A - (\mu G r + \mu_1 Q r_1)\,\omega$$
$$= \left(1 - 300\frac{r}{a_1 c^2} - \frac{1}{4}\frac{r_1}{a_1}\right)A \quad \ldots\ldots\ldots \quad (13).$$

Sofern übrigens $r_1 < 0,01\,a_1$ ist, der verhältnissmässige Effectverlust durch die Spurzapfenreibung somit weniger als $^1/_4$ Procent beträgt (wodurch die schon oben gemachte Annahme — $\mu_1 Q r_1$ erheblich $< \mu G r$ — gerechtfertigt wird), kann ohne in Betracht kommenden Fehler das als ein gewisser **Wirkungsgrad** zu betrachtende Verhältniss

$$\eta = \frac{E}{A} = 1 - 300\frac{r}{a_1 c^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14)$$

gesetzt werden. Es ist besonders von der Windgeschwindigkeit abhängig, und zwar um so grösser, je grösser c; es nimmt bis Null ab, wenn c bis

$$c_0 = \sqrt{300\frac{r}{a_1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

abnimmt. Bei dieser und bei kleineren Windgeschwindigkeiten ist auf die Gewinnung nützlicher Arbeit zu verzichten.

Aus (14) folgt beispielsweise mit $a_1 = 10$ Mtr.

	für $c = 5$	6	8 Mtr.
und $r = 0{,}25$ Mtr.:	$\eta = 0{,}7$	0,79	0,88
$r = 0{,}1$ Mtr.:	$\eta = 0{,}88$	0,92	0,95

im ersten Falle ($r = 0{,}25$) etwa einer hölzernen, im zweiten Falle ($r = 0{,}1$) einer eisernen Welle, dabei einer benutzbaren Windgeschwindigkeit entsprechend von wenigstens

$$c_0 = \sqrt{7{,}5} = 2{,}7 \text{ Mtr. bezw. } \sqrt{3} = 1{,}7 \text{ Mtr.}$$

Schliesslich kann man bemerken, dass, da das Maximum von E einem um so kleineren Verhältnisse $\frac{v_1}{c}$ entspricht, ein je grösserer Theil von A durch die Reibung der Welle verbraucht wird, je kleiner also η, nach (14) aber η um so kleiner ist, je kleiner c, auch $\frac{v_1}{c}$ um so kleiner sein sollte, je kleiner c ist, so dass v_1 noch mehr veränderlich wäre, als c. Das würde aber einem vortheilhaften Betriebe meistens widersprechen, welcher vielmehr in der Regel eine möglichst wenig veränderliche Umdrehungsgeschwindigkeit erfordert oder wünschenswerth macht. In dieser Beziehung muss deshalb auf die vortheilhaftesten Verhältnisse verzichtet werden. Durch ein in allen Fällen nahe gleich gross angenommenes Verhältniss $\frac{v_1}{c}$ wird den Anforderungen des Betriebes wenigstens einigermassen Rechnung getragen, ohne den Nutzeffect erheblich zu beeinträchtigen, weil dieser in der Nähe seines Maximums nur wenig mit jenem Verhältnisse $\frac{v_1}{c}$ sich ändert.

§. 58. **Windräder mit trapezförmigen ebenen Flügeln.**

Ist b_0 die kleinste, b_1 die grösste Flügelbreite bezw. in den Entfernungen a_0 und a_1 von der Axe, also

$$F = (a_1 - a_0)\frac{b_1 + b_0}{2}$$

die Grösse einer Flügelfläche, so ist die Breite im Abstande x von der Axe:

$$y = b_0 + (b_1 - b_0)\frac{x - a_0}{a_1 - a_0}$$
$$= \frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1 - a_0} + \frac{b_1 - b_0}{a_1 - a_0} x = e + \varepsilon x \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Hiermit und mit $v = \omega x$ folgt aus §. 56, Gl. (1) die **Arbeit des Winddrucks pro Sekunde** (der **absolute Effect**):

$$A = \frac{z\vartheta\gamma}{2g}\int_{a_0}^{a_1}(e+\varepsilon x)(c\sin\alpha - \omega x\cos\alpha)^2\,\omega x\cos\alpha\,dx$$

$$= \frac{z\vartheta\gamma}{2g}\,\omega\cos\alpha\int_{a_0}^{a_1}f(x)\,dx \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;(2).$$

Dabei ist

$$f(x) = (e x + \varepsilon x^2)(c^2\sin^2\alpha - 2c\omega\sin\alpha\cos\alpha\,.\,x + \omega^2\cos^2\alpha\,.\,x^2)$$

$$= \begin{cases} e c^2\sin^2\alpha\,.\,x - 2ec\omega\sin\alpha\cos\alpha\,.\,x^2 + e\omega^2\cos^2\alpha\,.\,x^3 \\ \qquad + \varepsilon c^2\sin^2\alpha\,.\,x^2 - 2\varepsilon c\omega\sin\alpha\cos\alpha\,.\,x^3 \\ \qquad\qquad + \varepsilon\omega^2\cos^2\alpha\,.\,x^4 \end{cases}$$

und folglich mit den Bezeichnungen

$$D_2 = \frac{a_1^2 - a_0^2}{2},\quad D_3 = \frac{a_1^3 - a_0^3}{3},\quad D_4 = \frac{a_1^4 - a_0^4}{4},\quad D_5 = \frac{a_1^5 - a_0^5}{5}\;.\;(3)$$

$$\int_{a_0}^{a_1}f(x)\,dx = e c^2\sin^2\alpha\,D_2 + (\varepsilon c\sin\alpha - 2e\omega\cos\alpha)\,c\sin\alpha\,D_3$$
$$+ (e\omega\cos\alpha - 2\varepsilon c\sin\alpha)\,\omega\cos\alpha\,D_4 + \varepsilon\omega^2\cos^2\alpha\,D_5$$
$$= (e D_2 + \varepsilon D_3)\,c^2\sin^2\alpha - 2(e D_3 + \varepsilon D_4)\,c\omega\sin\alpha\cos\alpha$$
$$+ (e D_4 + \varepsilon D_5)\,\omega^2\cos^2\alpha,$$

so dass mit den weiteren Bezeichnungen

$$C_2 = e D_2 + \varepsilon D_3,\quad C_3 = e D_3 + \varepsilon D_4,\quad C_4 = e D_4 + \varepsilon D_5 \;.\;.\;(4)$$

mit Rücksicht auf (2) sich ergiebt:

$$A = \frac{z\vartheta\gamma}{2g}(C_2 c^2\sin^2\alpha - 2C_3 c\omega\sin\alpha\cos\alpha + C_4\omega^2\cos^2\alpha)\,\omega\cos\alpha\;.\;(5).$$

In diesem Ausdrucke sind C_2, C_3, C_4 Functionen von a_0, a_1, b_0, b_1, und zwar sind sie bezw. von der zweiten, dritten, vierten Dimension in Beziehung auf a_0 und a_1, von der ersten Dimension in Beziehung auf b_0 und b_1. Wegen $\omega = \frac{v_1}{a_1}$ kann deshalb der Ausdruck auf die Form gebracht werden:

$$A = \frac{\vartheta\gamma}{2g}zFc^3.f\left(\alpha, \frac{v_1}{c}\right) \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(6),$$

unter f hier das Zeichen einer Function von α und $\frac{v_1}{c}$ verstanden, welche ausserdem nur die Verhältnisse $\frac{a_0}{a_1}$ und $\frac{b_0}{b_1}$ enthält. Dem Maximum von A bei gegebener Flügelfläche und gegebener Windgeschwindigkeit entsprechen folglich ein gewisser Neigungswinkel α der ersteren gegen die letztere und ein gewisses Verhältniss der Umfangsgeschwindigkeit v_1 zur Windgeschwindigkeit c, welche nur von den Verhältnissen $a_0 : a_1$ und $b_0 : b_1$ abhängen, während das Verhältniss $\frac{\omega}{c}$ ausserdem den Absolutwerthen von a_0 und a_1 umgekehrt proportional ist. In dem analogen Ausdrucke (8) des vorigen Paragraph handelte es sich um eine Function nur von $\frac{v_1}{c}$, welche ausserdem das Verhältniss $\frac{a_0}{a_1}$ enthielt, da die dort mit x veränderlichen Winkel α Functionen der betreffenden Geschwindigkeitsverhältnisse $\frac{v}{c}$ und die Flügelbreiten überall gleich waren.

Die vortheilhafteste Umdrehungsgeschwindigkeit ist übrigens zugleich von den Reibungswiderständen abhängig, indem es auf das Maximum nicht sowohl von A, als von E ankommt. Was die Abhängigkeit von α betrifft, so entspricht aber das Maximum von A zugleich dem Maximum von E, wenigstens sofern mit Abstraction von der verhältnissmässig sehr kleinen Spurzapfenreibung

$$E = A - \mu G r \omega \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots (7)$$

gesetzt wird. Es erfordert die Erfüllung der Gleichung

$$\frac{dE}{d\alpha} = \frac{dA}{d\alpha} = 0,$$

welche nach (5) und mit Rücksicht darauf, dass

$$\frac{d}{d\alpha}(\sin^2\alpha \cos\alpha) = 2 \sin\alpha \cos^2\alpha - \sin^3\alpha$$

$$\frac{d}{d\alpha}(\sin\alpha \cos^2\alpha) = -2 \sin^2\alpha \cos\alpha + \cos^3\alpha$$

$$\frac{d \cos^3\alpha}{d\alpha} = -3 \sin\alpha \cos^2\alpha$$

ist, zu einer Gleichung führt, welche durch Division mit $c^2 \cos^3\alpha$ auf die Form gebracht werden kann:

$$C_2 tg^3\alpha - 4 C_3 \frac{\omega}{c} tg^2\alpha + \left(3 C_4 \frac{\omega^2}{c^2} - 2 C_2\right) tg\alpha + 2 C_3 \frac{\omega}{c} = 0 \; . \; . \; (8).$$

Ist z. B. $a_0 = 1$, $a_1 = 6$, $b_0 = 1{,}5$ und $b_1 = 3$, also

$$e = 1{,}2 \text{ und } \varepsilon = 0{,}3$$

$$D_2 = \frac{35}{2} \quad D_3 = \frac{215}{3} \quad D_4 = \frac{1295}{4} \quad D_5 = 1555$$

$$C_2 = 42{,}5 \qquad C_3 = 183{,}125 \qquad C_4 = 855$$

so ist nach (8) mit

$$\frac{\omega}{c} = 0{,}4 \text{ entsprechend } \frac{v_1}{c} = 2{,}4$$

als einem gemäss den Erörterungen im vorigen Paragraph voraussichtlich auch hier nahe vortheilhaftesten betreffenden Geschwindigkeitsverhältnisse, der günstigste Winkel α durch die Gleichung bestimmt:

$$1{,}7\, tg^3 \alpha - 11{,}72\, tg^2 \alpha + 13{,}016\, tg\, \alpha + 5{,}86 = 0.$$

Ihr entspricht

$$tg\, \alpha = 5{,}339; \; \alpha = 79^0\, 24'.$$

Um zu untersuchen, ob das angenommene Verhältniss $\frac{\omega}{c} = 0{,}4$ in der That dem Maximum des Nutzeffects E durchschnittlich entspricht, werde bei Voraussetzung von $z = 5$ Flügeln aus Blech hier

$$G = 60\, z\, F$$

geschätzt, so dass nach (5) und (7) sich

$$E = \left[\frac{\vartheta \gamma}{2 g F}\left(C_2\, tg^2 \alpha - 2 C_3\, tg\, \alpha . \frac{\omega}{c} + C_4 \frac{\omega^2}{c^2}\right) \frac{\omega}{c} \cos^3 \alpha - \frac{60\, \mu r}{c^2} \frac{\omega}{c}\right] z F c^3$$

ergiebt, und wenn auch hier der im vorigen Paragraph gefundene Coefficient

$$\vartheta = 3{,}6 \text{ und } \gamma = 1{,}24$$

gesetzt, ferner

$$\mu = 0{,}08 \text{ und } r = 0{,}1$$

angenommen wird, bei Einsetzung der obigen Zahlenwerthe von C_2, C_3, C_4 und α sowie von

$$F = 5\, \frac{4{,}5}{2} = \frac{45}{4}$$

$$E = \left(0{,}1525 \frac{\omega}{c} - 0{,}2462 \frac{\omega^2}{c^2} + 0{,}1076 \frac{\omega^3}{c^3} - \frac{0{,}48}{c^2} \frac{\omega}{c}\right) z F c^3 \;.\;. \; (9).$$

Für verschiedene Werthe von $\frac{\omega}{c}$ und von c werden daraus die in die folgende Tabelle eingetragenen Werthe von $\frac{E}{z F c^3}$ gefunden:

	$\frac{\omega}{c} = 0{,}3$	$\frac{\omega}{c} = 0{,}4$	$\frac{\omega}{c} = 0{,}5$	$\frac{\omega}{c} = 0{,}6$
$c = 5$	0,0207	0,0208	0,0186	0,0159
$c = 6$	0,0225	0,0232	0,0215	0,0194
$c = 8$	0,0243	0,0255	0,0245	0,0229
$c = \infty$	0,0265	0,0285	0,0282	0,0274

Die Substitution $c = \infty$ entspricht hier der Abstraction von Reibungswiderständen, liefert also die Werthe von $\frac{A}{zFc^3}$. Wie man sieht, entspricht das Maximum von E

für $c = 5$ dem Verhältnisse $\frac{\omega}{c}$ nahe $= 0,35$

„ $c = 6$ „ „ $\frac{\omega}{c}$ etwas $< 0,4$

„ $c = 8$ „ „ $\frac{\omega}{c}$ „ $> 0,4$

„ $c = \infty$ „ „ $\frac{\omega}{c}$ nahe $= 0,45$.

Die obige Annahme $\frac{\omega}{c} = 0,4$ entsprechend $\frac{v_1}{c} = 2,4$ findet sich dadurch als durchschnittlich angemessen bestätigt; die ihr entsprechenden Werthe von $\frac{E}{zFc^3}$ sind von den bezüglichen Maximalwerthen in allen Fällen offenbar so wenig verschieden, dass die Unterschiede nicht in Betracht kommen können im Vergleich mit der Unsicherheit, welche der Schätzung der Reibungswiderstände anhaftet.

Wird somit in allen Fällen $\frac{\omega}{c} = 0,4$ angenommen, so geht Gl. (9) über in:

$$E = \left(0,0285 - \frac{0,192}{c^2}\right) zFc^3$$

$$= \left(1 - \frac{6,74}{c^2}\right) 0,0285\, zFc^3 \ldots\ldots\ldots\ldots (10),$$

entsprechend einem Wirkungsgrade:

$$\eta = 1 - \frac{6,74}{c^2} = 0,73 \qquad 0,81 \qquad 0,89$$

$$\text{für } c = 5 \qquad 6 \qquad 8.$$

Der Zahlencoefficient 0,0285 ist hier an die Stelle von 0,03 in der Gleichung (10) des vorigen Paragraph getreten. Benutzbar sind nur Windgeschwindigkeiten $> \sqrt{6,74} = 2,6$ Mtr. —

In dem besonderen Falle **rechteckiger Flügelflächen** ist

$$b_0 = b_1 = b, \text{ also } e = b, \ \varepsilon = 0$$

sowie mit $a_0 = \lambda a_1$ und wegen

$$F = (a_1 - a_0) b = a_1 b (1 - \lambda)$$

$$C_2 = b\,D_2 = a_1^{\,2} b \frac{1-\lambda^2}{2} = F a_1 \frac{1+\lambda}{2}$$

$$C_3 = b\,D_3 = a_1^{\,3} b \frac{1-\lambda^3}{3} = F a_1^{\,2} \frac{1+\lambda+\lambda^2}{3}$$

$$C_4 = b\,D_4 = a_1^{\,4} b \frac{1-\lambda^4}{4} = F a_1^{\,3} \frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)}{4}.$$

Dadurch und wegen $v_1 = a_1\,\omega$ nimmt die Gleichung (8) nach ihrer Division durch $F a_1$ die Form an:

$$\frac{1+\lambda}{2}\,tg^3\alpha - \frac{4}{3}(1+\lambda+\lambda^2)\frac{v_1}{c}\,tg^2\alpha +$$
$$+\left[\frac{3}{4}(1+\lambda)(1+\lambda^2)\frac{v_1^{\,2}}{c^2} - (1+\lambda)\right] tg\,\alpha + \frac{2}{3}(1+\lambda+\lambda^2)\frac{v_1}{c} = 0 \,.\,.\, (11),$$

insbesondere mit $\frac{v_1}{c} = 2{,}4$:

$$tg^3\alpha - 6{,}4\,\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}\,tg^2\alpha + 2\left[4{,}32\,(1+\lambda^2) - 1\right] tg\,\alpha + 3{,}2\,\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda} = 0 \quad (12)$$

und mit $\lambda = \frac{1}{6}$:

$$tg^3\alpha - 6{,}552\,tg^2\alpha + 6{,}88\,tg\,\alpha + 3{,}276 = 0,$$

entsprechend $tg\,\alpha = 5{,}066$ oder $\alpha = 78^0\,50'$.

Mit diesen Werthen von C_2, C_3, C_4, $\frac{v_1}{c}$, λ und α, ferner mit

$$\vartheta = 3{,}6 \text{ und } \gamma = 1{,}24$$

geht Gl. (5) über in:

$$A = 0{,}0278\,z\,F c^3 \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (13).$$

Die Vergleichung mit der auf übrigens denselben Annahmen beruhenden Gleichung (10) im vorigen Paragraph lässt erkennen, dass im Falle $\lambda = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{6}$ und unter übrigens vortheilhaftesten Umständen in beiden Fällen den windschiefen rechteckigen Flügeln ein absoluter Effect zukommt, welcher um

$$\frac{0{,}03 - 0{,}0278}{0{,}0278}\,.\,100 = 7{,}9\,\%$$

des absoluten Effects ebener Flügel diesen übertrifft. —

Bemerkenswerth ist ferner der besondere Fall, dass die Seitenränder der Flügelflächen gegen die Axe des Flügelrades convergiren, dass nämlich

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \lambda, \text{ also } F = a_1 b_1 \frac{1-\lambda^2}{2}$$

ist, wie es bei den im §. 53 erwähnten amerikanischen Windrädern ungefähr zutrifft. Dann ist

$$e = 0 \text{ und } \varepsilon = \frac{b_1}{a_1}$$

$$C_2 = \varepsilon D_3 = \frac{b_1}{a_1} a_1^3 \frac{1-\lambda^3}{3} = \frac{2}{3} F a_1 \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}$$

$$C_3 = \varepsilon D_4 = \frac{b_1}{a_1} a_1^4 \frac{1-\lambda^4}{4} = \frac{1}{2} F a_1^2 (1+\lambda^2)$$

$$C_4 = \varepsilon D_5 = \frac{b_1}{a_1} a_1^5 \frac{1-\lambda^5}{5} = \frac{2}{5} F a_1^3 \frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)+\lambda^4}{1+\lambda}.$$

Dadurch und mit $v_1 = a_1 \omega$ geht die Gleichung (8) über in:

$$\frac{2}{3} \frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda} tg^3\alpha - 2(1+\lambda^2)\frac{v_1}{c} tg^2\alpha +$$
$$+ \left[\frac{6}{5}\frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)+\lambda^4}{1+\lambda}\frac{v_1^2}{c^2} - \frac{4}{3}\frac{1+\lambda+\lambda^2}{1+\lambda}\right] tg\alpha + (1+\lambda^2)\frac{v_1}{c} = 0 \quad . . (14)$$

oder insbesondere mit $\frac{v_1}{c} = 2{,}4$ in:

$$tg^3\alpha - 7{,}2\frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)}{1+\lambda+\lambda^2} tg^2\alpha + 2\left[5{,}184\frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)+\lambda^4}{1+\lambda+\lambda^2} - 1\right] tg\alpha +$$
$$+ 3{,}6\frac{(1+\lambda)(1+\lambda^2)}{1+\lambda+\lambda^2} = 0 \quad . . (15).$$

Bei amerikanischen Windrädern ist ungefähr $\lambda = \frac{1}{3}$; die Gleichung wird dann:

$$tg^3\alpha - 7{,}385\, tg^2\alpha + 10{,}722\, tg\alpha + 3{,}692 = 0$$

und es entspricht ihr:

$$tg\alpha = 5{,}175 \text{ oder } \alpha = 79^0 4'.$$

Die Einsetzung der Werthe von C_2, C_3, C_4, $\frac{v_1}{c}$, λ und α, sowie von

$$\vartheta = 3{,}6 \text{ und } \gamma = 1{,}24$$

in Gl. (5) giebt

$$A = 0{,}0303\, z F c^3$$

und wenn, was den Effectverlust durch die Reibungswiderstände betrifft,

$$u = 0{,}08 \text{ und } G = 50\, z F$$

gesetzt wird, ferner $\omega = \frac{v_1}{a_1} = 2{,}4\frac{c}{a_1}$, so ist

$$\mu\, G r \omega = 9{,}6\,\frac{c r}{a_1}\, z F,$$

mit etwas abgerundeten Zahlencoefficienten folglich der Nutzeffect:

$$E = 0{,}03\, z F c^3 - 10\,\frac{c r}{a_1}\, z F \;\ldots\ldots\ldots\ldots (16).$$

Bei der Anwendung auf amerikanische Windräder mit ihren vielen schmalen Flügeln ist übrigens der Coefficient ϑ mit 3,6 wahrscheinlich zu gross geschätzt. Wenn man ihn nur $^2/_3$ so gross $= 2{,}4$ hier annimmt, so ist in demselben Verhältnisse der Zahlencoefficient des Ausdruckes von A zu verkleinern, also

$$E = \left(0{,}02\, c^3 + 10\,\frac{c r}{a_1}\right) z F \;\ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

zu setzen. Die gesammte Flügelfläche ist dabei nur wenig $< \pi (a_1^2 - a_0^2)$. Nimmt man etwa

$$z F = 2{,}5\, a_1^2$$

an, entsprechend

$$\frac{z F}{\pi (a_1^2 - a_0^2)} = \frac{2{,}5}{\pi (1 - \lambda^2)} = \frac{2{,}5}{\frac{8}{9}\pi} = 0{,}895,$$

so wird

$$E = 0{,}05\, a_1^2 c^3 - 25\, r\, a_1 c \;\ldots\ldots\ldots\ldots (18),$$

z. B. mit $a_1 = 6$ und $r = 0{,}1$:

$$E = 1{,}8\, c^3 - 15\, c.$$

Der Angabe im §. 53, dass solche amerikanische Windräder bei 12 Mtr. Durchmesser Leistungen bis 18 Pferdestärken ergeben, würde diese letztere Gleichung bei Windgeschwindigkeiten bis $c = 9{,}4$ Mtr. entsprechen.

§. 59. Regulirung der Windräder.

Wenn ein Flügelrad Nutzarbeiten zu leisten hat, für welche gewisse Geschwindigkeiten vorgeschrieben sind, so ist bei unveränderlicher Bewegungsübertragung eine gewisse constante Winkelgeschwindigkeit ω des Flügelrades zu verlangen, wobei es wünschenswerth ist, dass auch sein Nutzeffect E so wenig veränderlich sei, als mit dieser Forderung und mit sonstigen berechtigten Rücksichten sich verträgt, damit dasselbe auch vom Nutzwiderstande gelte, bezw. von seinem Momente M in Bezug auf die Flügelradwelle. Nun ist, unter R die Reibungsarbeit dieser Welle und unter A den absoluten Effect des Flügelrades verstanden,

$$E = A - R = M\omega,$$

wobei R, soweit diese Arbeit nur von der Reibung in den Lagern herrührt, gemäss dem Vorhergehenden ohne wesentlichen Fehler $= \mu G r \omega$ gesetzt werden kann, mit ω folglich selbst constant ist, während A bei gegebener Winkelgeschwindigkeit ω von den Flügeldimensionen, der Flügelstellung (den Neigungswinkeln der Flügelelemente gegen ihre Bewegungsrichtungen und gegen die Windrichtung) sowie von der Windgeschwindigkeit c abhängt, und zwar mit c wächst. Aendert sich c innerhalb der Grenzen c_0 und c_1, zwischen welchen das Windrad als Motor benutzt werden soll, so ändert sich auch E und ist die Unveränderlichkeit zugleich von ω und M unmöglich. Zwar könnte ω allein durch Aenderung von M proportional E constant erhalten werden; um aber solche Aenderungen von M auszuschliessen, sind andere Regulirungsmittel nöthig, welche in Veränderung von R oder der Flügeldimensionen oder der Flügelstellung (im Ganzen oder in einzelnen Theilen) bestehen können.

In allen Fällen bezeichne c' eine gewisse zwischen c_0 und c_1 liegende Windgeschwindigkeit, mit Rücksicht auf welche die Umfangsgeschwindigkeit v_1 oder die Winkelgeschwindigkeit ω vortheilhaft festgesetzt wurde, nach dem Vorhergehenden ungefähr

$$v_1 = 2{,}4\,c' \text{ bezw. } \omega = 2{,}4\,\frac{c'}{a_1},$$

für welche ferner der Nutzeffect E einer angenommenen Grösse der Flügelfläche oder diese einem gegebenen E entsprechend gemäss dem Vorhergehenden bestimmt wurde bei Voraussetzung der dem Verhältnisse $\frac{v_1}{c'} = 2{,}4$ entsprechenden vortheilhaften Flügelstellung.

1) Eine Aenderung von R kann nur Vergrösserung sein, bewirkt durch **Bremsung der Welle**. Bei allen Windgeschwindigkeiten $> c'$ kann dadurch E gleich gross erhalten werden, somit auch ω bei unverändertem Widerstandsmomente M. Sollte es aber für jedes c zwischen c_0 und c_1 der Fall sein, so müsste $c' = c_0$ angenommen werden, wodurch E dieser kleinsten Geschwindigkeit entsprechend klein ausfiele. Zu durchschnittlich besserer Ausnutzung der Leistungsfähigkeit des Flügelrades ist deshalb für c' ein mittlerer Werth zu wählen, und **für Windgeschwindigkeiten $< c'$ die Unveränderlichkeit von ω durch Verkleinerung von M zu erkaufen.** Letztere muss dann freilich in erheblichem Grade stattfinden mit Rücksicht darauf, dass bei der Abnahme von c sich der absolute Effect proportional c^3 selbst dann

vermindern würde, wenn unter auch sonst gleichen Umständen das vortheilhafteste Verhältniss von ω zu c erhalten bliebe, dass er also bei constantem ω in höherem Grade abnimmt (im Falle windschiefer rechteckiger Flügel proportional c^4 nach §. 57, Gl. 2), und in noch höherem Grade der Nutzeffect E, der bei constantem R verhältnissmässig um so mehr $< A$ ist, je kleiner A, je kleiner also c ist.

Aehnlich verhält es sich auch bei den noch zu besprechenden anderen Regulirungsarten für Windgeschwindigkeiten $c < c'$.

2) Die Regulirung durch Aenderung der Flügeldimensionen (der Grösse der wirksamen Flügelfläche) ist besonders bei holländischen Windmühlen angebracht, deren rechteckige oder nahe rechteckige windschiefe Flügel in ihrem Haupttheile mit Segeltuch bedeckt oder mit Klappen ausgerüstet sind (§. 53). Sollte das Segeltuch bei $c > c'$ der ganzen Länge nach mehr oder weniger aufgerollt werden, um die der Windgeschwindigkeit c' entsprechende volle Flügelbreite b' auf b zu reduciren, so müsste nach §. 57, Gl. (2)

$$\frac{b}{b'} = \left(\frac{c'}{c}\right)^4$$

sein, um ω, A und E bei constantem M constant zu erhalten. Sollte das Segeltuch von aussen nach innen eingeholt, oder sollten die Klappen von aussen nach innen theilweise beseitigt werden, um durch Verminderung des der Windgeschwindigkeit c' angepassten ursprünglichen Durchmessers $= 2a_1$ auf den Betrag $= 2a$ bei der grösseren Windgeschwindigkeit c denselben Effect bei derselben Winkelgeschwindigkeit zu behalten, so müsste nach derselben Gleichung (2), §. 57, wenn das unverändert bleibende Windbrett $^1/_4$ der ganzen Breite einnimmt,

$$\frac{3}{4} c^4 [f(\alpha) - f(\alpha_0)] + \frac{1}{4} c^4 [f(\alpha_1) - f(\alpha_0)] = c'^4 [f(\alpha_1) - f(\alpha_0)]$$

$$\frac{c}{c'} = 2\sqrt{\frac{f(\alpha_1) - f(\alpha_0)}{3[f(\alpha) - f(\alpha_0)] + f(\alpha_1) - f(\alpha_0)}} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

sein, wobei $f(\alpha)$ durch §. 57, Gl. (5) bestimmt ist, nachdem α aus §. 55, Gl. (8) mit

$$\frac{\omega}{c} x = \frac{\omega}{c'} a = \frac{v_1}{c'} \frac{a}{a_1} = 2{,}4 \frac{a}{a_1},$$

also durch die Gleichung

$$tg\,\alpha = 3{,}6 \frac{a}{a_1} + \sqrt{\left(3{,}6 \frac{a}{a_1}\right)^2 + 2} \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

gefunden worden, während $f(\alpha_1) = 7{,}398$ ist und im Falle $\frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{6}$: $f(\alpha_0)$

$= 2{,}052$ nach den Ausrechnungen im §. 57. Gemäss (1) und (2) findet man dann beispielsweise die folgenden zusammengehörigen Werthe:

$\frac{a}{a_1} =$	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5
$\alpha =$	$81^0\,36'$	$80^0\,40'$	$79^0\,32'$	$78^0\,5'$	$76^0\,15'$
$f(\alpha) =$	6,702	6,009	5,330	4,646	3,985
$\frac{c}{c'} =$	1,053	1,114	1,187	1,276	1,385

3) Die Regulirung durch Aenderung der Flügelstellung kann auf verschiedene Weise geschehen. Werden die Flügelflächen aus Klappen gebildet, und sind diese um Axen drehbar gemacht, welche die Richtungen der betreffenden Sprossen, bezw. erzeugenden Geraden der im Allgemeinen windschiefen Flügelflächen haben, sind ferner die Verhältnisse so gewählt, dass bei der Windgeschwindigkeit c' und Winkelgeschwindigkeit ω der Nutzeffect E dann erzielt wird, wenn alle jene Klappen desselben Flügels eine zusammenhängende Fläche bilden, so wird dadurch, dass bei der Windgeschwindigkeit c und der unveränderten Winkelgeschwindigkeit ω eine solche in der Entfernung a von der Radaxe befindliche Klappe um den Winkel β aus jener Anfangslage heraus gedreht wird, ihr Effect nach §. 55, Gl. (2) im Verhältnisse

$$\left(c \sin\alpha - \frac{a}{a_1} v_1 \cos\alpha\right)^2 \cos^3\beta : \left(c' \sin\alpha - \frac{a}{a_1} v_1 \cos\alpha\right)^2$$
$$= \left(\frac{c}{c'} tg\,\alpha - 2{,}4\,\frac{a}{a_1}\right)^2 \cos^3\beta : \left(tg\,\alpha - 2{,}4\,\frac{a}{a_1}\right)^2$$

geändert, so dass sie unverändert bleibt, wenn

$$\cos\beta = \left(\frac{tg\,\alpha - 2{,}4\,\frac{a}{a_1}}{\frac{c}{c'}\,tg\,\alpha - 2{,}4\,\frac{a}{a_1}}\right)^{\frac{2}{3}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ist. Im Falle angenähert rechteckiger windschiefer Flügel ist dabei $tg\,\alpha$ durch obige Gleichung (2) bestimmt und für die einzelnen Klappen verschieden; für im Ganzen ebene Flügel ergiebt sich $tg\,\alpha$ aus dem vorigen Paragraph. Wäre z. B. im letzteren Falle

$$tg\,\alpha = 5, \text{ entsprechend } \alpha = 78^0\,41'$$

nahe ebenso gross wie im vorigen Paragraph für rechteckige ebene Flügel mit $\lambda = \frac{a_0}{a_1} = \frac{1}{6}$ gefunden wurde, so würden sich aus (3) beispielsweise die folgenden Werthe von β ergeben, welche verschiedenen Werthen von $\frac{c}{c'}$ und von $\frac{a}{a_1}$ entsprechen.

	$\frac{c}{c'} = 1{,}2$	$\frac{c}{c'} = 1{,}4$	$\frac{c}{c'} = 1{,}6$	$\frac{c}{c'} = 1{,}8$	$\frac{c}{c'} = 2$
$\frac{a}{a_1} = 0{,}2$	$28^0\,56'$	$38^0\,26'$	$44^0\,35'$	$49^0\,3'$	$52^0\,31'$
$\frac{a}{a_1} = 0{,}6$	$32^0\,1'$	$42^0\,1'$	$48^0\,18'$	$52^0\,45'$	$56^0\,8'$
$\frac{a}{a_1} = 1$	$36^0\,24'$	$46^0\,52'$	$53^0\,10'$	$57^0\,30'$	$60^0\,43'$

Sollten die Klappen eines Flügels zusammen von der Welle aus verstellt werden, so könnte die verschiedene Grösse der Winkel β durch ungleich lange mit den Klappen verbundene Hebel vermittelt werden, welche sämmtlich von einer nahe radial längs dem Flügel sich erstreckenden Stange angegriffen werden, die nöthigenfalls (etwa durch Zusammensetzung aus einzelnen mit Scharnieren zusammenhängenden Theilen) etwas biegsam gemacht ist. Letzteres ist nicht nöthig, wenn die der Windgeschwindigkeit c' entsprechende zusammenhängende Flügelfläche eben ist und die Winkel β alle gleich gemacht werden, wie es bei den Cubit'schen Flügelrädern der Fall ist.

4) Eine Regulirung durch Drehung der ganzen Flügel, und zwar um radial gerichtete Axen, wird insbesondere bei den Kirchweger'schen Windrädern mit trapezförmigen ebenen Flügeln angewendet. Ist dabei α' die Neigung der Flügel gegen die Windrichtung, wenn die Windgeschwindigkeit $= c'$ ist (dem Maximum von A für das Geschwindigkeitsverhältniss $\frac{\omega}{c'}$ nach §. 58 entsprechend), und soll A denselben Werth auch bei der Windgeschwindigkeit c und derselben Winkelgeschwindigkeit ω haben, so ist dazu ein Neigungswinkel α erforderlich, welcher nach §. 58 (5) durch die Gleichung bestimmt ist:

$$(C_2 c^2 \sin^2\alpha - 2 C_3 c \omega \sin\alpha \cos\alpha + C_4 \omega^2 \cos^2\alpha) \cos\alpha =$$
$$= (C_2 c'^2 \sin^2\alpha' - 2 C_3 c' \omega \sin\alpha' \cos\alpha' + C_4 \omega^2 \cos^2\alpha') \cos\alpha'$$

oder nach ihrer Division durch $C_2 c'^2 \cos^3\alpha$ mit den Bezeichnungen

$$\left.\begin{aligned} p = \frac{C_3}{C_2}\frac{\omega}{c'}; \quad q^2 = \frac{C_4}{C_2}\left(\frac{\omega}{c'}\right)^2 \\ r = (tg^2\alpha' - 2p\, tg\,\alpha' + q^2)\cos^3\alpha' \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ (4)$$

durch die Gleichung:

$$\left(\frac{c}{c'}\,tg\,\alpha\right)^2 - 2\,p\,.\,\frac{c}{c'}\,tg\,\alpha + q^2 = \frac{r}{cos^3\alpha}.$$

Dieselbe kann auch als Bestimmungsgleichung von $\frac{c}{c'}$ als Function von α betrachtet werden, wobei der Aufgabe gemäss den zu Grunde liegenden Voraussetzungen die einzige Wurzel entspricht:

$$\frac{c}{c'} = \left(p + \sqrt{p^2 - q^2 + \frac{r}{cos^3\alpha}}\right) cotg\,\alpha \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Die Gleichung (5) in §. 58 setzt nämlich ebenso wie die zu Grunde liegende Gleichung (1) in §. 56 voraus, dass für alle Flügelelemente

$$c\,sin\,\alpha > v\,cos\,\alpha, \text{ dass also } \frac{c}{c'} > a_1\,\frac{\omega}{c'}\,cotg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

sei, widrigenfalls die Elementarbestandtheile von A, bezüglich auf welche diese Bedingung nicht erfüllt ist, als zur Ueberwindung des Luftwiderstandes aufzuwendende Arbeiten negativ in die Summe A hätten eingeführt werden müssen. Nun ist nach §. 58, Gl. (3) und (4) mit $\lambda_0 = \frac{a_0}{a_1}$:

$$\frac{C_3}{C_2} = \frac{e\,D_3 + \varepsilon\,D_4}{e\,D_2 + \varepsilon\,D_3} = a_1\,\frac{e\,D_2\,.\,\frac{2}{3}\,\frac{1-\lambda^3}{1-\lambda^2} + \varepsilon\,D_3\,.\,\frac{3}{4}\,\frac{1-\lambda^4}{1-\lambda^3}}{e\,D_2 + \varepsilon\,D_3} < a_1 \,..\, (7),$$

weil für alle echten Brüche λ

$$\frac{1-\lambda^3}{1-\lambda^2} < \frac{3}{2} \text{ und } \frac{1-\lambda^4}{1-\lambda^3} < \frac{4}{3}$$

ist; diese beiden Quotienten sind nämlich am kleinsten $= 1$ für $\lambda = 0$, am grössten bezw. $= \frac{3}{2}$ und $= \frac{4}{3}$ für $\lambda = 1$. Die Bedingung (6) setzt deshalb jedenfalls

$$\frac{c}{c'} > \frac{C_3}{C_2}\,\frac{\omega}{c'}\,cotg\,\alpha, \text{ d. i. } \frac{c}{c'} > p\,cotg\,\alpha$$

voraus, erfordert also in der That das positive Vorzeichen der Wurzel in Gl. (5). Aus (5) und (6) folgt:

$$p + \sqrt{p^2 - q^2 + \frac{r}{cos^3\alpha}} > a_1\,\frac{\omega}{c'}$$

$$cos\,\alpha < \sqrt[3]{\frac{r}{\left(a_1\,\frac{\omega}{c'} - p\right)^2 - p^2 + q^2}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Für das Beispiel von §. 58 war

$$C_2 = 42{,}5 \qquad C_3 = 183{,}125 \qquad C_4 = 855$$

$$a_1 = 6 \qquad \frac{\omega}{c'} = 0{,}4 \qquad \alpha' = 79^0\,24'.$$

Damit wird gemäss (4):

$$p = 1{,}723 \qquad q = 3{,}219 \qquad r = 0{,}08294$$

und nach Gl. (5):

$$\frac{c}{c'} = \left(1{,}723 + \sqrt{\frac{0{,}08294}{\cos^3\alpha} - 0{,}249}\right) \operatorname{cotg}\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(9),$$

woraus sich z. B. ergiebt:

$\alpha = 90^0$	89^0	88^0	85^0	$79^0\,24'$	70^0	$60^0\,42'$
$\frac{c}{c'} = \infty$	2,21	1,603	1,129	1	1,119	1,347

Der Neigungswinkel $\alpha = 60^0\,42'$ ist der kleinste, welcher der Ungleichung (8) entspricht. Bei noch kleineren zerfällt die Flügelfläche in zwei Theile, deren innerer, von $x = a_0$ bis $x =$ einem gewissen Werthe a sich erstreckend, den Winddruck von hinten, und deren äusserer, von $x = a$ bis $x = a_1$ sich erstreckend, den Winddruck von vorn empfängt. Für $x = a$ ist dieser Druck $=$ Null, nämlich

$$c \sin\alpha = v \cos\alpha \;\text{ oder }\; \frac{c}{c'} = a\,\frac{\omega}{c'} \operatorname{cotg}\alpha \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \;(10).$$

Führt man in diesem Falle analog den Bezeichnungen in §. 58 die folgenden ein:

$$D_2' = \frac{a^2 - a_0^{\,2}}{2},\;\; D_3' = \frac{a^3 - a_0^{\,3}}{3},\;\; D_4' = \frac{a^4 - a_0^{\,4}}{4},\;\; D_5' = \frac{a^5 - a_0^{\,5}}{5}$$

$$D_2'' = \frac{a_1^{\,2} - a^2}{2},\;\; D_3'' = \frac{a_1^{\,3} - a^3}{3},\;\; D_4'' = \frac{a_1^{\,4} - a^4}{4},\;\; D_5'' = \frac{a_1^{\,5} - a^5}{5}$$

$$C_2' = e\,D_2' + \varepsilon\,D_3',\quad C_3' = e\,D_3' + \varepsilon\,D_4',\quad C_4' = e\,D_4' + \varepsilon\,D_5'$$

$$C_2'' = e\,D_2'' + \varepsilon\,D_3'',\; C_3'' = e\,D_3'' + \varepsilon\,D_4'',\; C_4'' = e\,D_4'' + \varepsilon\,D_5'',$$

wo e und ε dieselben Bedeutungen haben, wie in §. 58, so tritt mit Rücksicht darauf, dass jetzt Gl. (2) daselbst durch die Gleichung:

$$A = \frac{z\,\vartheta\,\gamma}{2g}\,\omega\cos\alpha\left(\int_{a_0}^{a} f(x)\,dx - \int_{a}^{a_1} f(x)\,dx\right)$$

zu ersetzen ist, an die Stelle der aus Gl. (5), §. 58 oben gefolgerten Bedingungsgleichung dafür, dass bei unveränderter Winkelgeschwindigkeit ω der Effect A ebenso gross sei für die Windgeschwindigkeit c und Flächenneigung α, wie für die Windgeschwindigkeit c' und die entsprechende relativ vortheilhafteste Flächenneigung α', jetzt die folgende Gleichung:

$$[(C_2'-C_2'')c^2 sin^2\alpha - 2(C_3'-C_3'')c\,\omega\, sin\,\alpha\, cos\,\alpha + (C_4'-C_4'')\omega^2 cos^2\alpha]\,cos\,\alpha =$$
$$= (C_2 c'^2 sin^2\alpha' - 2\,C_3 c'\,\omega\, sin\,\alpha'\, cos\,\alpha' + C_4\,\omega^2 cos^2\alpha')\,cos\,\alpha',$$

woraus nach ihrer Division durch $(C_2'-C_2'')\,c'^2 cos^3\alpha$ und mit den Bezeichnungen

$$P = \frac{C_3'-C_3''}{C_2'-C_2''}\frac{\omega}{c'},\quad Q^2 = \frac{C_4'-C_4''}{C_2'-C_2''}\left(\frac{\omega}{c'}\right)^2,\quad R = r\frac{C_2}{C_2'-C_2''}\quad \ldots (11)$$

analog dem Obigen folgt:

$$\left(\frac{c}{c'}tg\,\alpha\right)^2 - 2\,P.\frac{c}{c'}tg\,\alpha + Q^2 = \frac{R}{cos^3\alpha}$$

$$\frac{c}{c'} = \left(P + \sqrt{P^2 - Q^2 + \frac{R}{cos^3\alpha}}\right)cotg\,\alpha \quad \ldots\ldots\ldots (12).$$

Die Vergleichung der Ausdrücke (10) und (12) von $\frac{c}{c'}$ giebt:

$$cos\,\alpha = \sqrt[3]{\frac{R}{\left(a\frac{\omega}{c'} - P\right)^2 - P^2 + Q^2}} \quad \ldots\ldots\ldots (13).$$

Für einen angenommenen Werth von a findet man P, Q, R aus (11), dann α aus (13) und $\frac{c}{c'}$ aus (10), z. B. im obigen besonderen Falle

$$\text{für } a = 5 \text{ Mtr.: } \alpha = 48^0\,21',\ \frac{c}{c'} = 1,779.$$

Wie man sieht, könnte einer Vergrösserung der Windgeschwindigkeit über c' hinaus behufs Unveränderlichkeit von A sowohl durch Vergrösserung, als durch Verkleinerung des Neigungswinkels entsprochen werden, wobei jedoch derselben Windgeschwindigkeit c im ersteren Falle eine erheblich kleinere Stellungsänderung der Flügel entspräche, als im zweiten, z. B. der Windgeschwindigkeit $c = 1,78\ c'$ bezw. nahe

$$\alpha - \alpha' = 9^0 \text{ und } \alpha' - \alpha = 31^0,$$

so dass der übliche zweite Fall die feinere Regulirung gestattet, abgesehen davon, dass dabei eine übermässige Vergrösserung des axialen Winddrucks vermieden wird.

5) Während bei den unter 3) und 4) erwähnten Methoden die Regulirung in einer Lagenänderung der einzelnen Flügeltheile oder der ganzen Flügel besteht, kann sie endlich auch dadurch bewirkt werden, dass Gruppen von in unveränderlicher gegenseitiger Lage

befindlichen Flügeln um Axen gedreht werden, oder dass die Neigung des ganzen Windrades bezw. seiner Axe gegen die Windrichtung geändert wird. Beide Methoden finden sich bei amerikanischen Windrädern angewendet, die erstere insofern, als die sectorenförmigen Theile des Rades drehbar gemacht sind um Axen, welche, rechtwinklig und windschief gegen die Radaxe, wie die Seiten eines regulären Polygons gegen einander liegen; die letztere insofern, als ein mit dem Rade verbundener Steuerflügel, welcher sich stets in die Windrichtung einstellt, gegen die Radaxe mehr oder weniger geneigt wird. In beiden Fällen sind übrigens die Beziehungen weniger einfach, welche verschiedenen Stellungen und Windgeschwindigkeiten bei gleichen Grössen von A und von ω entsprechen. —

In allen Fällen kann mit Hülfe entsprechender Mechanismen die Regulirung während der Drehung des Rades ausführbar gemacht werden. Auch ist sie wohl selbstthätig eingerichtet worden, meistens jedoch in unvollkommener Weise. Während sie ihren Hauptzweck der Erhaltung einer bestimmten Winkelgeschwindigkeit ω am besten bei einer Einrichtung nach Art der tachometrischen Regulatoren erreichen lassen würde, hat man häufiger durch eine Art von dynamometrischer Regulirung nicht sowohl ω, bezw. den Effect A bei constantem Widerstandsmoment M des Nutzwiderstandes, als vielmehr den Normaldruck R des Windes auf die Flügel unveränderlich zu erhalten gesucht. Z. B. bei der oben unter 3) besprochenen Regulirungsmethode ist, wenn $\varDelta R$ den normalen Winddruck auf eine der betreffenden Flügelklappen bedeutet, der ihm entsprechende Effect nach §. 55:

$$\varDelta A = \varDelta R \,.\, cos\,\alpha\; cos\,\beta \,.\, v$$

und der ganze Effect des Windrades:

$$A = z \,.\, \Sigma\,(\varDelta R \,.\, cos\,\alpha\; cos\,\beta \,.\, v).$$

Nun ist z. B. bei den Cubit'schen Windrädern, bei welchen α und β für alle Klappen gleich sind, also

$$A = z\, cos\,\alpha\; cos\,\beta\, \Sigma\,(\varDelta R \,.\, v)$$

ist, eine Einrichtung von solcher Art getroffen, dass mit Hülfe des Gleichgewichts zwischen dem Moment eines an unveränderlichem Hebelarm wirkenden Gewichtes G und der Summe der Momente der Windpressungen auf alle Klappen in Bezug auf ihre Drehungsaxen die Grösse $\Sigma\,(\varDelta R)$ nahe unveränderlich ist, was die Unveränderlichkeit von A selbst dann nicht zur Folge hätte, wenn man ausser den Geschwindigkeiten v der einzelnen Klappen (bezw. ihrer Mittelpunkte) auch die bezüglichen Werthe von ΔR einzeln als constant annehmen würde, indem A proportional $\cos\beta$ bliebe. Die Unveränderlichkeit von A könnte dann zwar dadurch erzielt werden, dass der Hebelarm von G proportional $\sec\beta$ veränderlich, dadurch auch ΔR proportional $\sec\beta$ gemacht würde; allein die dadurch bedingte Complication würde um so weniger berechtigt sein, als der Zweck doch nur unvollkommen erreicht würde, weil die Folgerung

$$\Delta R = const. \text{ aus } \Sigma(\Delta R) = const.$$

nur durchschnittlich und die Voraussetzung der Gleichheit von β für alle Klappen nach den obigen Bestimmungen unter 3) kaum angenähert zutrifft.

Mehr geeignet zu einer solchen selbstthätigen dynamometrischen Regulirung sind Windräder mit ebenen trapezförmigen Flügeln, welche um radial gerichtete und mit ihren Mittellinien in einer gewissen Entfernung e parallele Axen drehbar gemacht werden, nämlich durch Constanterhaltung der normalen Winddrucke $= R$ auf dieselben, bezw. der Momentensummen $= zRe$ vermittels eines an entsprechend veränderlichem Hebelarm wirkenden Gewichtes G. Unter α die Neigung jedes Flügels gegen die Windrichtung, und unter v seine Umdrehungsgeschwindigkeit im Mittelpunkte des Drucks R verstanden, ist dann nämlich

$$A = zR\cos\alpha \,.\, v,$$

so dass die Unveränderlichkeit von A durch einen umgekehrt proportional $v\cos\alpha$ veränderlichen Hebelarm von G erreicht wird, indem z. B. das Seil oder die Kette, woran G hängt, um eine entsprechend gestaltete Curvenscheibe geschlungen ist. Zur Construction dieser Scheibe wäre nur zu berücksichtigen, dass die Lage des Druckmittelpunktes in der Mittellinie eines Flügels, dass somit auch v von dem (zur Windgeschwindigkeit c nach Obigem in Beziehung gesetzten) Neigungswinkel α abhängt, und zwar bei constanter Winkelgeschwindigkeit ω mit abnehmender Neigung selbst abnimmt nach einem ohne allzu grosse Schwierigkeit bestimmbaren Gesetze.

D. Wärmemotoren.

§. 60. Wesen und Arten von Wärmemotoren.

Das allgemeine Princip, welches einem Wärmemotor (einer calorischen oder Wärme-Kraftmaschine) zu Grunde liegt, besteht darin, dass eine Flüssigkeit im weiteren Sinne des Wortes einem Kreisprocesse, d. h. einer Zustandsänderung, bei welcher sie in den anfänglichen Zustand zurückkehrt