

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Theoretische Maschinenlehre**

in 4 Bänden

Theorie der Kraftmaschinen

**Grashof, Franz**

**Leipzig, 1890**

b. Die einzelnen Arten von Wasserrädern

[urn:nbn:de:bsz:31-282943](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-282943)

natürlich eine gewisse vortheilhafteste Lage gegen den einflussenden Wasserstrahl, und muss es schon deswegen vortheilhaft sein, dass, wenn eine Schaufel jene Lage überschritten hat, möglichst bald die nachfolgende an ihre Stelle tritt. Indessen wird durch constructive und ökonomische Rücksichten, sowie auch durch die Rücksicht auf  $\varepsilon$  der Vergrößerung von  $z$  eine Grenze gesetzt, bei überschlächtigen Rädern auch durch die Forderung, dass der Einlaufbogen  $i$  wesentlich  $< e$  sein soll.

Im Allgemeinen wird  $e =$  der Kranzbreite oder wenigstens das Verhältniss  $\frac{e}{a}$  nur wenig von 1 verschieden gemacht, nämlich um so grösser, je kleiner  $a$ , etwa entsprechend der Formel:

$$e = 0,75 a + 0,1.$$

#### b. Die einzelnen Arten von Wasserrädern.

Die im vorigen Paragraph besprochenen Regeln für die Wahl einiger der wesentlichsten Radelemente setzten  $H$  und  $Q$ , sowie die Art des Rades als gegeben voraus. Statt  $Q$  ist aber oft ein verlangter Nutzeffect  $E$ , bezw.  $N = \frac{E}{75}$  gegeben, vermittels dessen und des Gefälles  $H$  zur Anwendung jener Regeln und vielleicht auch behufs passender Wahl in Betreff der Art des Rades die nöthige Aufschlagwassermenge  $Q$  erst ermittelt werden muss gemäss der Gleichung:

$$N = \frac{1}{75} \cdot \eta \cdot 1000 QH,$$

woraus

$$Q = \frac{0,075 N}{\eta H}$$

folgt, jedoch erst gefunden werden kann, wenn ausserdem  $\eta$  genügend bekannt ist. Zur Vermittlung dieser vorläufig genügenden Kenntniss ist es hier hauptsächlich die Aufgabe, den Wirkungsgrad  $\eta$  für die verschiedenen Arten von Rädern näherungsweise als Function einiger Radelemente auszudrücken, von denen er ausser von der Art des Rades hauptsächlich abhängt, nämlich besonders als Function von  $H$  und von  $v$ .

Erst wenn  $Q$  bekannt ist, kann der Entwurf im Einzelnen durchgeführt und darauf endlich der Wirkungsgrad genauer berechnet werden auf Grund der in den Paragraphen 13—16 ermittelten Wirkungsgesetze der verschiedenen Effectverluste. Eine erhebliche Abweichung dieser

genauer bestimmten von dem vorläufig der betreffenden Näherungsformel gemäss angenommenen Werthe von  $\eta$  würde zu einer Modification des Entwurfes Veranlassung geben, besonders wenn sich zeigen sollte, dass  $\eta$  zu gross angenommen worden war. Bei der Ableitung fraglicher Näherungsformeln von  $\eta$  werden deshalb besonders zu günstige Annahmen möglichst zu vermeiden sein.

Diese Ableitungen bieten zugleich Gelegenheit, die im vorigen Paragraph unvollständig gebliebene Besprechung der Radelemente für die einzelnen Arten von Rädern zu ergänzen, insbesondere z. B. was die Form und Stellung der Schaufeln, sowie die Einrichtung des Wassereinlaufs betrifft, immer aber nur dem Zweck dieses Buches entsprechend insoweit, als theoretische Erwägungen dabei in Betracht kommen. Nachdem übrigens schon bisher bei verschiedenen Anlässen die unterschlächtigen Räder ausgenommen und einer gesonderten Untersuchung vorbehalten werden mussten, wird hier ausdrücklich unterschieden zwischen

1. Wasserrädern mit theilweise unmittelbarer Druckwirkung der Schwere des niedersinkenden Wassers und
2. unterschlächtigen, nämlich Wasserrädern mit bloss mittelbarer Wirkung des vorher ganz in lebendige Kraft umgesetzten Arbeitsvermögens des Wassers.

1. Wasserräder mit theilweise unmittelbarer Druckwirkung der Schwere des niedersinkenden Wassers.

§. 19. Das obereschlächtige Rad.

Oberschlächtige Räder werden gewöhnlich bei Gefällen  $H$  zwischen 4 und 12 Mtr., sowie bei Aufschlagwassermengen  $Q$  zwischen 0,1 und 1 Cubikmtr. pro Sec. angewendet, so jedoch, dass das Product  $QH$  höchstens etwa = 6, entsprechend  $N_0 = 80$  Pferdestärken ist.

Der Winkel  $\alpha$  zwischen den Richtungen von  $u$  und  $v$  ist bei diesen Rädern immer so klein, dass ohne erheblichen Fehler  $w = u - v$  gesetzt werden kann, oder

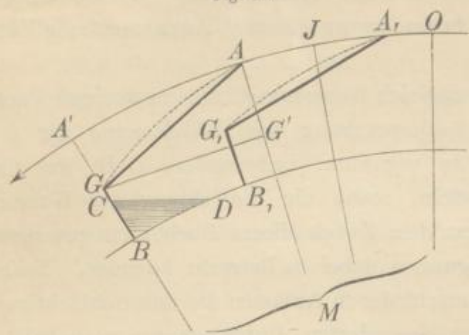
$$w = v, \text{ da } u = 2v \dots \dots \dots (1)$$

ein hier durchschnittlich passendes und übliches Verhältniss zwischen  $u$  und  $v$  ist, wie schon im §. 18 bemerkt wurde. Nach den Gleichungen (7) und (8), §. 13, ist dann

$$\sin \alpha = \frac{1}{2} \sin \beta \text{ und } i = \frac{\varepsilon a}{\sin \beta} \dots \dots \dots (2).$$

Die Grundform der üblichen Schaufeln ist die, wie Fig. 16 andeutet, aus der ebenen Stossschaufel  $AG$  und aus der radial bis zur Mitte der Kranzbreite sich erstreckenden gleichfalls ebenen Riegelschaufel  $BG$  bestehende einfach gebrochene Schaufel  $AGB$ . Bezeichnet  $e_1$  die Bogenlänge ihrer Centralprojection auf den Umfang des Rades (den Bogen  $AA'$  in Fig. 16 zum Unterschiede vom Theilungsbogen  $AA_1 = e$ ), und ist  $G'$  der Fusspunkt des Perpendikels vom Punkte  $G$  auf den Halbmesser  $AM$ , so kann für den Winkel  $\beta = AGG'$ ,

Fig. 16.



unter welchem die Stossschaufel den Radumfang schneidet, mit Rücksicht darauf, dass  $AG' \text{ wenig } > \frac{a}{2}$ ,  $AG \text{ wenig } > e_1$  ist, sehr nahe gesetzt werden:

$$\sin \beta = \frac{a}{2e_1} \dots \dots \dots (3).$$

(Beispielsweise wäre danach für den im §. 13 besprochenen Fall, in welchem  $a = 0,32$  und  $e_1 = e = 0,377$  war,  $\beta = 25^\circ 7'$ , während daselbst genauer fast derselbe Werth  $\beta = 25^\circ 8'$  gefunden wurde.) Wenigstens ist  $e_1 = e$ , also höchstens

$$\sin \beta = \frac{a}{2e} = \frac{5}{12}, \text{ da } \frac{e}{a} = 1,2 \dots \dots \dots (4)$$

im Durchschnitt hier zu sein pflegt. Nach (2) ist damit

$$\sin \alpha = \frac{5}{24}, \text{ entsprechend } \alpha = 12^\circ \dots \dots \dots (5),$$

und zwar ist auch  $\alpha$  ebenso wie  $\beta$  eher kleiner, als grösser. Dieser Winkel  $\alpha$  entspricht der Bedingung, dass im Mittelpunkte des Einlaufbogens  $i$  die relative Geschwindigkeit  $w$  längs der gerade vorbeigehenden Stossschaufel gerichtet sei; damit sie in keinem Punkte des Einlaufbogens die Stossschaufel etwas von vorn treffen könne, ist thatsächlich ein Winkel  $\alpha$  passend, der um 1 bis  $2^\circ$  noch kleiner ist. Die obige Voraussetzung bezüglich der Kleinheit von  $\alpha$  und ihrer Konsequenzen wird hierdurch genügend bewahrheitet.

Genauer können der Winkel  $\alpha$  und die relative Geschwindigkeit  $w$  gefunden werden, nachdem die Geschwindigkeiten  $u$  und  $v$  angenommen

sind und während  $\beta$  durch die gewählte Schaufelform gegeben ist, indem mit den Seiten  $u$  und  $v$  das Dreieck construirt wird, in welchem der Seite  $u$  der Winkel  $180^\circ - \beta$ , bezw. mit  $\beta'$  etwas  $< \beta$  der Winkel  $180^\circ - \beta'$  gegenüberliegt. Die dritte Seite ist dann  $= w$ , der ihr gegenüberliegende Winkel  $= \alpha$ . Behufs der Rechnung hat man

$$u : v : w = \sin \beta' : \sin (\beta' - \alpha) : \sin \alpha.$$

Obiger Ausdruck (2) von  $i$  ergibt mit Gl. (3) das Verhältniss

$$\frac{i}{e} = \frac{1}{e} \cdot \varepsilon a \cdot \frac{2e_1}{a} = 2\varepsilon \frac{e_1}{e} = \frac{1}{2} \frac{e_1}{e} \dots \dots \dots (6)$$

mit durchschnittlich  $\varepsilon = \frac{1}{4}$ . Dass dieses Verhältniss innerhalb der üblichen

Grenzen  $e_1 = e$  und  $e_1 = \frac{5}{4} e$  wesentlich  $< 1$  ist, sichert allein noch nicht beim Einfließen des Wassers den ungehinderten Austritt der Luft aus den Zellen, weil diese gegen ihre Mitte hin erheblich enger werden können, wie es namentlich bei der in Figur 16 ausgezogenen üblichen Grundform  $AGB$ ,  $A_1G_1B_1$  der Schaufeln der Fall ist. Mit Rücksicht darauf ist vielmehr zu verlangen, dass die kleinste Weite  $= w =$  dem Abstände des Eckpunktes  $G_1$  von der benachbarten Stossschaufel  $AG$ , die sogenannte Schluckweite, wesentlich grösser sei, als die Dicke des einfließenden Wasserstrahls. Bezeichnet aber  $D$  den Durchschnittspunkt der nach aussen verlängerten Geraden  $B_1G_1$ , Fig. 16, mit  $AG$ , so erkennt man leicht, dass sehr nahe

$$w = G_1 D \cos \beta = \left[ \frac{a}{2} - (e_1 - e) \operatorname{tg} \beta \right] \cos \beta = \frac{a}{2} \cos \beta - (e_1 - e) \sin \beta \quad (7)$$

ist. Insbesondere für  $e_1 = e = 1,2a$ , also  $\sin \beta = \frac{5}{12}$  nach Gl. (4), findet man

$$w = 0,454 a,$$

für  $e_1 = 1,25e = 1,5a$ , also  $\sin \beta = \frac{1}{3}$  nach Gl. (3):

$$w = 0,371 a.$$

Der Austritt der Luft erscheint hiernach zwar in allen Fällen gesichert, weil die Dicke des einfließenden Strahls am Umfange des Rades nach Gl. (2) nur  $i \sin \beta = \varepsilon a = 0,25 a$  ist mit  $\varepsilon = \frac{1}{4}$  und dieselbe mit zunehmender Geschwindigkeit durch die Wirkung der Schwere noch etwas kleiner geworden ist, wo er die Verengung bei  $G_1$  erreicht hat. Um aber diesen Luftaustritt besonders im Falle  $e_1 > e$  noch mehr zu sichern,

werden die Stosschaufeln wohl etwas gekrümmt, wie durch Strichelung in Fig. 16 angedeutet ist. Mit der entsprechenden Verkleinerung von  $\beta$  ist dann zwar eine Vergrößerung von  $i$  verbunden, aber  $i \sin \beta = \varepsilon a$  bleibt unverändert, während die Schluckweite  $w$  offenbar grösser geworden ist. Jene Verkleinerung von  $\beta$  ist ausserdem von Vortheil mit Rücksicht auf den Gefällverlust  $h_2$ .

Um das Wasser an der bestimmten Stelle in der bestimmten Richtung in das Rad einfließen zu lassen, kann es entweder durch eine Schussrinne bis dicht an das Rad heran geleitet werden, oder man kann es in einem parabolischen Strahl frei fallend einfließen lassen. Im ersten Falle<sup>a</sup> muss der Boden der Schussrinne neben  $J$  im Abstände  $0,5 i$  von diesem Punkte gegen den Punkt  $O$  (den höchsten Punkt des Radumfangs) hin endigen und gegen die Tangente des Radumfangs im Punkte  $J$  unter dem Winkel  $\alpha$ , gegen den Horizont folglich unter dem Winkel  $\alpha + \delta$  geneigt sein, wenn  $\delta$  den im §. 18 unter 1) ebenso bezeichneten Winkel  $OMJ$  bedeutet. Im zweiten Falle ist der Schutzöffnung, deren Mittelpunkt mit  $S$  bezeichnet sei, eine solche Lage zu geben, dass die Mittellinie des Strahls durch den Punkt  $J$  unter dem Winkel  $\alpha + \delta = \varphi$  gegen den Horizont geneigt hindurch geht. Wenn also mit  $x$  und mit  $y$  bezw. der verticale und der horizontale Abstand der Punkte  $S$  und  $J$  bezeichnet werden, so muss, wenn z. B. der Strahl in horizontaler Richtung aus der Mündung fließen soll,  $S$  im Scheitelpunkte fraglicher Parabel liegen und

$$x = x_0 = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \varphi \dots \dots \dots (8)$$

= der Geschwindigkeitshöhe sein, welche der Verticalgeschwindigkeit  $u \sin \varphi$  entspricht,

$$y = y_0 = 2x_0 \cot \varphi = \frac{u^2}{2g} \sin 2\varphi \dots \dots \dots (9)$$

Sollte aber der Strahl unter dem Winkel  $\psi (< \varphi)$  gegen den Horizont abwärts geneigt aus der Mündung kommen (die Mündungsebene bei gleicher Contraction von oben und unten den Winkel  $\psi$  mit der Verticalen bilden), so wäre erforderlich:

$$\begin{aligned} x &= \frac{u^2}{2g} \sin^2 \varphi - \left( \frac{u^2}{2g} - x \right) \sin^2 \psi = \frac{u^2 \sin^2 \varphi - \sin^2 \psi}{2g \cos^2 \psi} \\ &= \frac{u^2 \sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)}{g (1 + \cos 2\psi)} \quad (10) \end{aligned}$$

$$y = \frac{u^2}{2g} \sin 2\varphi - \left( \frac{u^2}{2g} - x \right) \sin 2\psi \dots \dots \dots (11)$$

Um nun den Wirkungsgrad eines oberflächigen Wasserrades näherungsweise als Function von  $H$  und  $v$  auszudrücken, mögen im Uebrigen durchschnittliche Verhältnisse angenommen werden, und zwar einfach gebrochene ebene Schaufeln mit

$$e_1 = e = 1,2 a, \text{ dabei } a = 0,3 \text{ Mtr.},$$

$$\text{Länge der Riegelschaukel} = \frac{a}{2} = 0,15 \text{ Mtr.},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4}, u = 2v, w = v, \delta = 10^\circ.$$

Für den ganzen Gefällverlust  $H_1$  gilt der Ausdruck (2) im §. 17 ohne den Summand  $h_3$ . Mit  $\zeta = 0,1$  ist dabei

$$\zeta \frac{w^2}{2g} = 0,4 \frac{v^2}{2g}$$

und ferner ist 
$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} + k = \frac{v^2}{2g} + k.$$

Was hier  $k$  betrifft, so sei  $AGBB_1G_1A_1$  (Fig. 16, worin jedoch  $A$  in der Geraden  $B_1G_1$  liegend zu denken ist) der Querschnitt einer Zelle von solcher Lage, dass der Mittelpunkt des Theilungsbogens  $AA_1$  mit dem mittleren Einflusspunkte  $J$  zusammenfällt, und der Winkel  $OMB = \chi$ :

$$\chi = \delta + \frac{1,5e180}{R} \frac{\pi}{\pi} \text{ Grad.}$$

Eine horizontale Gerade, welche vom Querschnitt der Zelle unterhalb die Fläche  $\frac{1}{2}F = \frac{1}{2} \varepsilon a e$  abschneidet, treffe  $BG$  in  $C$  unterhalb  $G$ , das Bogenstück  $BB_1$  in  $D$  unterhalb  $B_1$ . Es ist dann  $k =$  der Höhe von  $J$  über  $CD$ , also

$$k = p - q,$$

unter  $p$  die Höhe von  $J$  über  $B$ , unter  $q$  die Tiefe von  $B$  unter  $CD$  verstanden; dabei ist (siehe §. 13):

$$p = R \cos \delta - (R - a) \cos \chi \text{ und } q = \sqrt{\frac{\varepsilon a e}{2} \sin 2 \chi}.$$

Mit den obigen Annahmen findet man

für $R = 2$	4	6	Mtr.
$k = 0,332$	0,327	0,325	„

und als Bestätigung der dem Ausdrucke von  $q$  zu Grunde liegenden Voraussetzung in Betreff der Lage von  $CD$  ergibt sich

$$BC < BG, \quad BD < BB_1,$$

$$\text{nämlich } \frac{q}{\cos \chi} < 0,15 \text{ und } \frac{q}{\sin \chi} < e \frac{R-a}{R} = 0,36 \frac{R-0,3}{R}.$$

Die drei Werthe von  $k$  sind so wenig verschieden, dass für vorliegenden Zweck genau genug in allen Fällen  $k = 0,33$ , also

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{v^2}{2g} + 0,33$$

gesetzt werden kann. Die folgenden Summanden von  $H_1$  sind

$$\frac{v^2}{2g} \text{ und } h_1, \text{ wofür im Mittel } h_1 = 0,15 \text{ Mtr.}$$

angenommen werde. Hiernach ist nun

$$\begin{aligned} H_1 - h_2 &= \zeta \frac{u^2}{2g} + \frac{w_1^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + h_1 \\ &= 2,4 \frac{v^2}{2g} + 0,48 = 0,122 v^2 + 0,48 \dots \dots \dots (12). \end{aligned}$$

Von besonderer Bedeutung ist der Gefällverlust  $h_2$ . Seine graphische Bestimmung nach §. 17

z. B. für $R = 2$	4	6
und $v = 1,5$	2	2,5
ergibt $h_2 = 0,56$	0,95	1,26

näherungsweise entsprechend der empirischen Formel:

$$h_2 = (0,32 - 0,05 R + 0,03 v^2) R \dots \dots \dots (13),$$

welche  $h_2 = 0,575 \quad 0,96 \quad 1,245$

für die obigen Werthe von  $R$  und  $v$  liefert. Nach §. 18, Gl. (1) ist aber

$$R(1 + \cos \delta) = H - 1,1 \frac{u^2}{2g} - h_1$$

oder, wenn mit  $\cos \delta = 1$  und  $h_1 = 0$  beide Seiten der Gleichung sehr wenig zu gross gesetzt werden,

$$R = \frac{1}{2} (H - 4,4 \cdot 0,051 v^2) = \frac{H}{2} - 0,112 v^2 \dots \dots \dots (14).$$

Die Substitution in Gl. (13) ergibt sehr nahe mit Rücksicht auf den Mittelwerth 0,25 von  $\frac{h_2}{R}$ :

$$\begin{aligned} h_2 &= \left[ 0,32 - 0,05 \left( \frac{H}{2} - 0,112 v^2 \right) + 0,03 v^2 \right] \frac{H}{2} - 0,25 \cdot 0,112 v^2 \\ &= \left( 0,16 - \frac{H}{80} + 0,018 v^2 \right) H - 0,028 v^2 \dots \dots \dots (15). \end{aligned}$$



Aus (12) und (15) folgt:

$$H_1 = 0,094v^2 + 0,48 + \left(0,16 - \frac{H}{80} + 0,018v^2\right)H \dots (16).$$

Wenn endlich die Effectverluste durch Zapfenreibung, Luftwiderstand und unberechenbare Umstände zusammen mit durchschnittlich 4<sup>o</sup>/<sub>o</sub> des absoluten Effects veranschlagt werden, d. h.  $E_1 = 0,04 E_0$  gesetzt wird, folgt der Wirkungsgrad

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0} \\ &= 0,8 + \frac{H}{80} - 0,018v^2 - \frac{0,094v^2 + 0,48}{H} \dots \dots \dots (17). \end{aligned}$$

Er ist um so grösser, je grösser  $H$  und je kleiner  $v$ . Beispielsweise

für $H = 4$	8	12
und $v = 1,5$	2	2,5
ist nach (17): $\eta = 0,64$ 0,72    0,75.		

Erfahrungsmässig kann übrigens der Wirkungsgrad hoher ober-  
schlächtiger Räder bis erheblich über 0,75 gesteigert werden, falls nur  
die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  in mässigen Grenzen gehalten wird. Selbst  
aus der Gleichung (17), welche absichtlich nicht unter den günstigsten  
Voraussetzungen abgeleitet ist, folgt z. B.

$$\text{für } H = 12 \text{ und } v = 2 : \eta = 0,81.$$

Freilich hat dann ein solches Rad einen für manche Zwecke übermässig  
langsamen Gang; nach (14) ist

$$R = 5,55 \text{ für } H = 12 \text{ und } v = 2,$$

folglich die Umdrehungszahl pro Minute nur

$$n = 9,55 \frac{v}{R} = 3,44.$$

Zuweilen, insbesondere z. B. zum Betriebe leichter und schnell gehen-  
der Hämmer (Schwanzhämmer) erscheint der Vortheil grösstmöglicher  
Einfachheit der Transmission so überwiegend über den Werth eines grossen  
Wirkungsgrades, dass man selbst kleine ober-  
schlächtige Räder von etwa  $R = 2$  Mtr. Halbmesser mit Umfangsgeschwindigkeiten von  $v = 3$  bis 4 Mtr.  
umlaufen lässt, entsprechend  $n = 15$  bis 20, wobei dann freilich  $\eta$  bis 0,30  
und darunter abnehmen kann. Die Verhältnisse solcher Räder sind übri-  
gens von den der Gleichung (17) zu Grunde liegenden zu sehr verschieden,  
als dass von derselben hier noch genügende Brauchbarkeit als Näherungs-  
formel erwartet werden könnte.

## §. 20. Das rückenschlächtige Rad.

Rückenschlächtige Räder können unter ähnlichen Umständen wie überschlächtige angewendet werden, finden sich aber vorzugsweise mit Halbmessern  $R = 3$  bis 5 Mtr. ausgeführt, entsprechend Gefällen

$$H \text{ nahe} = R(1 + \cos 45^\circ) + 0,5 = 5,6 \text{ bis } 9 \text{ Mtr.},$$

sofern der mittlere Eintrittspunkt des Wassers um ungefähr  $\delta = 45^\circ$  vom Scheitelpunkte  $O$  entfernt und der Oberwasserspiegel um ungefähr 0,5 Mtr. höher liegt, während der Unterwasserspiegel gewöhnlich das Rad an seiner tiefsten Stelle  $U$  berührt. Indem ihnen das Wasser durch eine Couliissenschütze zugeführt wird, welche gestattet, die Einlaufstelle dem jeweiligen Oberwasserstande anzupassen, und indem die Ablaufrichtung unten mit der Bewegungsrichtung des Rades übereinstimmt, so dass dessen Waten weniger nachtheilig ist, können sie besonders bei sehr veränderlichem Ober- und Unterwasserstande einem überschlächtigen Rade vorzuziehen sein.

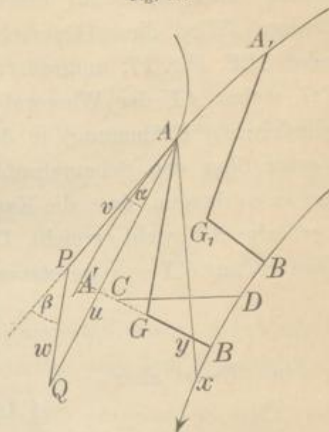
Die Leitschaufeln, welche zwischen die Gleitbahn der Schütze (bezw. beider Theile der Schütze) und dem Radumfang eingefügt werden, sind so anzuordnen, dass sie letzteren überall unter solchen Winkeln  $\alpha$  schneiden, welche zur Folge haben, dass von der relativen Einlaufgeschwindigkeit  $w$  der Radumfang unter demselben Winkel  $\beta$  geschnitten wird wie von den Schaufeln. Dass diese an ihren Hinterflächen vom einfließenden Wasser gestossen werden, hat hier zwar nicht denselben Nachtheil wie bei überschlächtigen Rädern mit unventilirten Zellen, bei welchen der Luftaustritt dadurch beeinträchtigt werden kann; indessen könnte solcher Stoss nur durch überflüssige Verkleinerung von  $\alpha$  bewirkt werden, welche aber mit Rücksicht auf die passende Anordnung der Leitschaufeln (um die Leiteanäle an ihrer Ausmündung nicht übermässig zu verengen oder ihre Anzahl nicht allzu sehr zu beschränken) vermieden werden muss. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass bei der gegen den Horizont stark geneigten Lage des Einlaufbogens dessen Punkte in merklich verschiedenen Tiefen  $h$  unter dem Oberwasserspiegel liegen, und dass ihnen also auch merklich verschiedene Einlaufgeschwindigkeiten

$$u = \sqrt{\frac{2gh}{1 + \zeta}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 2gh} = \sqrt{14,7h}$$

entsprechen. Die Bestimmung der Leitschaufelrichtungen ist deshalb für jede besonders auszuführen, indem man in jedem Punkte  $A$ , Fig. 17, in welchem eine Leitschaufel endigen soll, die Peripheriegeschwin-

digkeit  $v = AP$  anträgt, an dieselbe unter dem durch die Radschaufelform bestimmten Winkel  $\beta$  die Gerade  $PQ$ , und diese aus  $A$  mit der Zirkelöffnung  $AQ =$  der betreffenden Grösse von  $u$  einschneidet; dann ist  $PQ = w$ , Winkel  $PAQ = \alpha$  und  $AQ$  die Tangente der fraglichen Leitschaukel in ihrem Endpunkte  $A$ .

Fig. 17.



Wenn der Oberwasserspiegel sinkt, also  $u = AQ$  kleiner wird, trifft  $w$  den Radumfang unter einem Winkel  $> \beta$ , stösst also das Wasser von vorn gegen die Schaufeln. Damit dies bei veränderlichem Oberwasserstande niemals der Fall sei, muss obige Construction unter Voraussetzung eines so niedrigen Standes ausgeführt werden, dass der betreffende Punkt  $A$  durch die entsprechende Regulirung der Schütze zum höchsten Punkte des Einlaufbogens

wird. Je kleiner aber dann  $u$  bei gegebener Umfangsgeschwindigkeit  $v$  (je kleiner  $AQ:AP$ , Fig. 17) und bei gegebenem Winkel  $\beta$  ist, desto kleiner wird  $\alpha$ . Es ist deshalb angemessen, bei mittlerem Wasserstande und für den Mittelpunkt des Einlaufbogens hier ebenso wie bei ober-schlächtigen Rädern  $u = 2v$  anzunehmen, obschon nach §. 18, 2) aus anderen Gründen ein kleineres Verhältniss  $u:v$  besser sein würde.

Die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  wird passend = 1,5 bis 1,8 Mtr. pro Secunde angenommen. Ihre Steigerung über 1,8 hinaus ist wenigstens bei frei hängenden Rädern, wie sie hier vorausgesetzt sind, nicht rathsam mit Rücksicht auf den Gefällverlust  $h_2$  und auf das grossentheils verloren zu gebende, mit  $v$  entsprechend zu vergrössernde Stossgefälle, sofern solche Räder besonders in Fällen zur Anwendung kommen, in welchen mehr Werth auf Vergrösserung von  $\eta$ , als auf Vereinfachung der Transmission zu legen ist.

Den Schaufeln kann dieselbe Grundform gegeben werden wie bei ober-schlächtigen Rädern: siehe  $AGB$ , Figur 17, mit durchschnittlich  $BG = 0,5 a$  und  $AA' = e_1 = 1,2 a$ , abgesehen von der hier nicht dargestellten Complication, welche, wie früher in Fig. 9 angedeutet wurde, durch die Ventilation der Zellen bedingt wird. Nach Gl. (3) im vorigen Paragraph ist dann auch

$$\sin \beta = \frac{a}{2e_1} = \frac{5}{12}; \quad \beta = 24^\circ 38'.$$

Weil aber hier die Rücksicht auf eine ausreichende Schluckweite der Zellen bedeutungslos ist, wird eine engere Schaufelung zulässig, und kann dadurch derselbe hinlänglich kleine Querschnitt  $F = \varepsilon a e$  der Wasserfüllung einer Zelle mit einem grösseren Füllungscoefficienten  $\varepsilon$  erzielt werden. Wird dieser Querschnitt vom Schaufelprofil  $AGB$  mit der Geraden  $AX$ , Fig. 17, umgrenzt, und ist  $Y$  der Schnittpunkt von  $AX$  mit  $BG$ , wobei  $AY$  der Wasseroberfläche in der Zelle (abgesehen von ihrer cylindrischen Krümmung) in der tieferen Lage entspricht, in welcher das Wasser über den Schaufelrand  $A$  hinüber auszufließen anfängt, so ist nur zu verlangen, dass die Kante  $G_1$  der folgenden Schaufel diese Wasseroberfläche  $AY$  nicht erreicht. Dieser Forderung gemäss braucht näherungsweise, wenn  $BX = x$  gesetzt wird, nur

$$e > e_1 - \frac{e_1 + x}{2}, \text{ d. i. } e > \frac{e_1 - x}{2} \dots \dots \dots (1)$$

zu sein. Es ist aber

$$\begin{aligned} \Delta AGY &= F = \varepsilon a e \\ \left(\frac{a}{2} - BY\right) \frac{e_1}{2} &= \left(\frac{a}{2} - \frac{ax}{e_1 + x}\right) \frac{e_1}{2} = \varepsilon a e \\ \frac{e_1 - x}{e_1 + x} &= \frac{4\varepsilon e}{e_1}; \quad \frac{e_1 - x}{2e_1} = \frac{4\varepsilon e}{e_1 + 4\varepsilon e}. \end{aligned}$$

Dadurch geht die Bedingung (1) über in:

$$e > \frac{e_1 \cdot 4\varepsilon e}{e_1 + 4\varepsilon e} \text{ oder } e > \frac{4\varepsilon - 1}{4\varepsilon} e_1 \dots \dots \dots (2).$$

vorausgesetzt, dass sich für

$$x = e_1 - \frac{8\varepsilon e e_1}{e_1 + 4\varepsilon e} = \frac{e_1 - 4\varepsilon e}{e_1 + 4\varepsilon e} e_1 \dots \dots \dots (3)$$

ein positiver Werth ergibt, was im Falle der nach (2) kleinsten zulässigen Grösse von  $e$  so lange zutrifft, als  $\varepsilon$  nicht  $> \frac{1}{2}$  ist.

Wenn aber bei Oberschlächtigen Rädern

$$e = 1,2a = e_1, \text{ mit } \varepsilon = \frac{1}{4} \text{ folglich } F = \varepsilon a e = 0,3a^2$$

gesetzt wurde, so genügt hier mit  $\varepsilon = \frac{1}{3}$ , falls  $F = 0,3a^2$  sein soll, tatsächlich schon

$$e = 0,9a = \frac{3}{4} e_1 \text{ mit } e_1 = 1,2a.$$

Nach (3) ist dann  $x = 0$ , fallen also die Punkte  $X$  und  $Y$  in Fig. 17 mit  $B$  zusammen. —

Zur Herleitung eines angenäherten Ausdruckes von  $\eta$  als Function von  $H$  und  $v$  für ein frei hängendes rückenschlächtiges Rad werde angenommen:

$$e_1 = 1,2a, \quad e = 0,9a, \quad a = 0,3 \text{ Mtr.},$$

Länge der radialen Riegelschaufel =  $0,5a = 0,15$  Mtr. bei Voraussetzung einfach gebrochener Schaufeln;

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad u = 2v, \quad w = v \text{ (sehr nahe)}, \quad h_1 = 0, \quad \delta = \sphericalangle OMB = 45^\circ.$$

Hiernach ist, falls der Mittelpunkt des Theilbogens  $AA_1$ , Fig. 17, mit dem mittleren Eintrittspunkte  $J$  zusammenfällt,

$$\chi = \sphericalangle OMB = \delta + \frac{0,5e + e_1}{R} \frac{180}{\pi} = 45 + \frac{1,65}{R} \frac{180}{\pi} \text{ Grad,}$$

und ergibt sich ebenso wie im vorigen Paragraph unter der Voraussetzung, dass die horizontale Gerade  $CD$ , welche mit dem Schaufelprofil

$AGB$  die Fläche  $\frac{\varepsilon ae}{2}$  umgrenzt, die Gerade  $BG$  unterhalb  $G$  trifft, mit

den dortigen Bedeutungen von  $p, q, k$

$$\begin{aligned} \text{z. B. für } R = 3 & \quad 5 \\ k = p - q = 0,439 & \quad 0,442, \end{aligned}$$

$$\text{wobei jedoch wegen } BC = \frac{q}{\cos \chi} = 0,19 \quad 0,18 > BG$$

thatsächlich  $q$  etwas zu klein, folglich  $k$  etwas zu gross gefunden wurde. Diese Werthe von  $k$  sind unter sich so wenig verschieden, dass in allen

Fällen  $k = 0,44$  Mtr. gesetzt werden mag. Dann ist mit  $\zeta = \frac{1}{3}$ :

$$\begin{aligned} H_1 - h_2 &= \frac{1}{3} \frac{u^2}{2g} + \frac{w^2}{2g} + 0,44 + \frac{v^2}{2g} \\ &= \frac{10}{3} \frac{v^2}{2g} + 0,44 = 0,17v^2 + 0,44 \dots \dots (4). \end{aligned}$$

Da hier dieselbe Schaufelform und derselbe Werth von  $\varepsilon ae$  vorausgesetzt sind, wie im vorigen Paragraph, kann auch nach Gl. (13) daselbst

$$h_2 = (0,32 - 0,05R + 0,03v^2)R$$

gesetzt werden, im Durchschnitt ( $R = 4, v = 1,6$ ):  $h_2 = 0,2R$ . Weil ferner hier

$$R(1 + \cos 45^\circ) = H - \frac{4}{3} \frac{u^2}{2g} = H - \frac{16}{3} \frac{v^2}{2g} = H - 0,272v^2,$$

also

$$R = 0,586H - 0,159v^2 \dots \dots (5)$$

ist, folgt auch mit genügender Annäherung:

$$h_2 = [0,32 - 0,05 (0,586 H - 0,159 v^2) + 0,03 v^2] \cdot 0,586 H - 0,2 \cdot 0,159 v^2 \\ = (0,188 - 0,017 H + 0,022 v^2) H - 0,032 v^2 \dots \dots \dots (6),$$

ferner aus (4) und (6):

$$H_1 = 0,138 v^2 + 0,44 + (0,188 - 0,017 H + 0,022 v^2) H \dots (7).$$

Mit  $E_1 = 0,042 E_0$  nach Schätzung ergibt sich endlich

$$\eta = 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0} \\ = 0,77 + 0,017 H - 0,022 v^2 - \frac{0,138 v^2 + 0,44}{H} \dots \dots (8),$$

z. B. für $H = 6$	9
und $v = 1,5$	1,8
$\eta = 0,70$	0,75.

Den kleiner angenommenen Umfangsgeschwindigkeiten  $v$  ist es hauptsächlich zuzuschreiben, dass  $\eta$  noch etwas grösser gefunden wird, als für überschlächtige Räder bei gleichen Werthen von  $H$  nach Gl. (17) im vorigen Paragraph. Würde das rückenschlächtige Rad mit einem Kropf umgeben, so dass  $h_3$  an die Stelle von  $h_2$  träte, so liessen sich noch grössere Wirkungsgrade erwarten trotz grösseren Werthes von  $\epsilon$  und kleineren Verhältnisses  $e_1 : a$ , wie solche in diesem Falle zulässig wären. —

Auch lässt sich  $\eta$  dadurch vergrössern, dass man das Stossgefälle vermeidet oder wenigstens erheblich vermindert, indem man das Aufschlagwasser mit derselben (oder nur wenig grösseren) Geschwindigkeit in das Rad einfliessen lässt, mit welcher es im Gerinne zufliesst, und welche dann im Allgemeinen erst im Rade, indem von diesem das Wasser mitgenommen wird, in eine mittlere Geschwindigkeit etwas  $< v$  übergeht. Das lässt sich erreichen durch Ausdehnung der Seitenwände jenes Gerinnes zu zwei mit sehr kleinem Spielraum das Rad zwischen sich fassenden verticalen Wänden, während an den Gerinneboden sich unmittelbar ein Kropfgerinneboden zwischen jenen Wänden anschliesst. Der zwischen diesem und dem Radboden liegende Raum (der Wasser haltende Theil des Radkranzes) wird, abgesehen von den Schaufeldicken, vollständig vom Wasser erfüllt. Falls das Rad nur etwas über den Wasserspiegel im Zuflussgerinne hinausragt, rühren die Effectverluste unter solchen Umständen fast allein vom Gefällverluste  $\frac{v^2}{2g}$  und von dem Wasserdurchfluss durch die Spielräume her, deren Verkleinerung nur Sache einer sorgfältigen Ausführung ist. Auf diesem Gedanken beruhen Wasserräder von

Mary und von Zuppinger, welche hinsichtlich der Einflussstelle des Wassers als rückenschlächtige Räder besonderer Art zu bezeichnen sind, mit welchen sie auch bezüglich der relativen Bewegungsrichtungen des zu- und des abfließenden Wassers gegen das Rad übereinstimmen. Sie sind auch für kleine Gefälle geeignet, für welche sie noch Wirkungsgrade von ungefähr 0,80 ergeben haben. Wesentlich bei der Disposition solcher Räder ist die passende Annahme der Dicke (Tiefe)  $a_1$  des dem Rade unmittelbar zufließenden Wasserstroms. Ist  $u$  dessen mittlere Geschwindigkeit an fraglicher Stelle unmittelbar vor dem Eintritt in das Rad, und  $V = Fb$  das vom Querschnitte  $= ab$  des Radkranzes pro Sekunde durchlaufene Volumen mit Zurechnung der Spielräume und Abrechnung der von den Constructionstheilen des Rades erfüllten Räume, so folgt entsprechend der Förderung, dass der so resultirende Raum ganz von Wasser erfüllt sein soll,  $a_1$  aus der Gleichung:

$$\frac{Q}{b} = a_1 u = F$$

bei der Annahme von  $u < v$ .

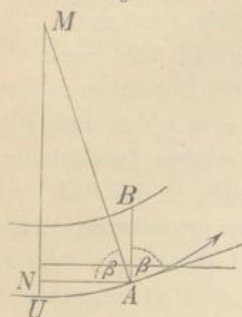
#### §. 21. Das mittelschlächtige Rad.

Solche Räder werden gewöhnlich bei Gefällen  $H = 3$  bis 6 Mtr. und bei Aufschlagwassermengen  $Q = 0,2$  bis 2 Cubikmtr. pro Sek. angewendet. Bei den grösseren Gefällen kommen sie zwar auch als frei hängende Zellenräder vor, in welchem Falle vor Allem zur Verkleinerung des Gefällverlustes  $h_2$  möglichst viele und lang gestreckte Schaufeln (kleinen Werthen von  $e:a$  und grossen von  $e_1:a$  entsprechend) bei kleiner Füllung  $\varepsilon$  und mässiger Umfangsgeschwindigkeit  $v$  rathsam sind; meistens vorzuziehen ist jedoch der Bau dieser Räder als Kropfräder, wobei der Gefällverlust  $h_3$  anstatt  $h_2$  besonders massgebend für den Wirkungsgrad wird und mit Rücksicht darauf zwar eine enge Schaufelung vortheilhaft in Hinsicht auf  $\eta$  bleibt, dagegen grössere Werthe von  $\varepsilon$  ( $= 0,5 - 0,6$ ) und von  $v$  ( $= 1,8 - 2,4$  Sek. Mtr.) zulässig oder selbst vortheilhaft werden bei vorwiegend radialer Stellung ebener Schaufeln.

Wenn es auch meistens passend ist, das Rad so zu lagern, dass es bei mittlerer oder tiefer Lage des Unterwasserspiegels von diesem berührt wird, so bleibt es doch zweckmässig, den Widerstand der bei höherer Lage desselben eintauchenden Schaufeln, bezw. das Empordrücken von Wasser durch dieselben dadurch zu vermindern, dass man sie in möglichst

verticaler Lage aus dem Wasser sich erheben lässt, indem ihnen eine etwas gegen den Radius geneigte Stellung gegeben wird, oder wenigstens

Fig. 18.



den äusseren Theilen der zu dem Ende unter stumpfem Winkel gebrochenen, nach innen zu radialen Schaufeln. Die ganze und ungebrochene Schaufel geneigt zu stellen, ist übrigens einfacher und zugleich wirksamer behufs Verkleinerung auch von  $h_3$ . Wird etwa verlangt, dass eine Schaufel  $AB$ , Fig. 18, vertical ist, wenn ihr äusserer

Rand  $A$  sich um  $UN = \frac{a}{4}$  über die tiefste Stelle des Rades erhoben hat, so muss sie den Radumfang unter einem solchen Winkel  $\beta$  schneiden, dass

$$\cos \beta = \frac{AN}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{a}{4} (2R - \frac{a}{4})} \dots \dots \dots (1),$$

z. B. für  $a = 0,4$  und  $R = 2$  5 Mtr.

$$\beta = 71^{\circ}48' \quad 78^{\circ}31'$$

ist. Im Durchschnitt mag

$$\beta = \arctg 4 = 75^{\circ}58'$$

genommen werden, entsprechend der Centralprojection  $e_1 = \frac{a}{4}$  der ganzen Schaufel auf den Umfang des Rades.

Dem grossen Werthe von  $\beta$  entsprechend kann auch der Winkel  $\alpha$  hier viel grösser gemacht werden, als es bei frei hängenden Zellenrädern geschehen darf. Aus

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \quad (\text{siehe Fig. 17, §. 20})$$

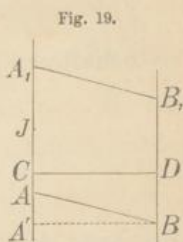
folgt mit  $\frac{u}{v} = 1,75$  und  $\beta = 75^{\circ}58' : \alpha = 42^{\circ}18'$ .

Hiernach macht die Annahme  $\alpha = 30^{\circ}$  bei diesem Werthe von  $\beta$  jedenfalls einen Stoss des Wassers gegen die Vorderflächen der Schaufeln unmöglich selbst im höchsten Punkte des Einlaufbogens, falls die Annahme  $u = 1,75v$  auf den Mittelpunkt desselben bezogen wird. In letzterem ist dann

$$\begin{aligned} w^2 &= u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha \\ &= \left( \frac{49}{16} + 1 - 2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \cos 30^{\circ} \right) v^2 = 1,03 v^2. \end{aligned}$$



Wenn  $ABB_1A_1$ , Fig. 19, den Querschnitt eines Schaufelraums in solcher Lage bedeutet, dass der Mittelpunkt des Theilbogens  $AA_1 = e$  mit dem mittleren Eintrittspunkte  $J$  zusammenfällt, wenn ferner letzterer in gleicher Höhe mit der Radaxe liegt, so dass die concentrischen Kreisbögen  $AA_1$  und  $BB_1$  näherungsweise als verticale gerade Linien betrachtet werden können, und wenn die Centralprojection  $AA'$  eines Schaufelprofils wieder mit  $e_1$  bezeichnet wird, so entspricht die Tiefe  $AC = x$  des Punktes  $A$  unter der horizontalen Geraden  $CD$ , durch welche die Fläche



$$ACDB = \frac{1}{2} F = \frac{\epsilon a e}{2}$$

abgeschnitten wird, der Gleichung:

$$ax + \frac{ae_1}{2} = \frac{\epsilon a e}{2}, \text{ also } x = \frac{\epsilon e - e_1}{2}.$$

Der Summand  $k$  im Ausdrücke von  $\frac{w_1^2}{2g}$ , §. 17, ist also:

$$k = JC = \frac{e}{2} - x = \frac{(1 - \epsilon)e + e_1}{2} \dots \dots \dots (2),$$

insbesondere mit  $e = a$  und  $\epsilon = \frac{1}{2}$ , wie hier durchschnittlich passend ist,

$$k = \frac{a + 2e_1}{4} \dots \dots \dots (3).$$

Dadurch, dass  $k$  mit  $e_1$  zunimmt, wird der Vortheil der gegen die radiale Richtung geneigten Schaufelstellung eingeschränkt. —

Zur angenäherten Berechnung von  $\eta$  für ein mittelschlächtiges Kropfrad mögen radiale ebene Schaufeln vorausgesetzt werden, der mittlere Eintrittspunkt  $J$  als in gleicher Höhe mit der Radaxe liegend. Ferner sei

$$e = a = 0,4 \text{ und } \epsilon = 0,5 \\ u = 1,75v \text{ und } w^2 = 1,03v^2, \text{ entsprechend } \alpha = 30^\circ.$$

Nach §. 17 ist dann mit  $\zeta = \frac{1}{3}$  (bei Voraussetzung einer Coulissenschütze)

und mit  $h_1 = \frac{a}{4} = 0,1$  Mtr., während  $h_2$  ohne Bedeutung ist:

$$H_1 - h_3 = \frac{1}{3} \frac{(1,75v)^2}{2g} + 1,03 \frac{v^2}{2g} + k + \frac{v^2}{2g} + 0,1$$

oder mit  $k = \frac{a}{4} = 0,1$  nach Gl. (3):

$$H_1 - h_3 = 3,051 \frac{v^2}{2g} + 0,2 = 0,156 v^2 + 0,2 \dots \dots \dots (4)$$

Mit Rücksicht auf  $Q = \varepsilon a b v$ , also  $\frac{b}{Q} = \frac{1}{\varepsilon a v} = \frac{5}{v}$  ist ferner nach §. 17:

$$h_3 = 3,4 \frac{R s}{0,4} \left( \frac{5}{v} \int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sqrt{z} d\varphi + \frac{4}{3} \frac{1}{Q} \int_0^{\frac{\pi}{2}} x D d\varphi \right) \dots \dots \dots (5)$$

Das erste der beiden Integrale kann von  $R$  kaum merklich abhängig sein, während das zweite wegen des Factors  $x$  nahe proportional  $R$  ist. Es genügt deshalb ihre Berechnung auf Grund der Dimensionen, welche sich aus der Zeichnung für irgend einen mittleren Werth von  $R$ , etwa  $R = 3$  Mtr., abgreifen lassen. Man findet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} y \sqrt{z} d\varphi = 0,1493 \text{ und } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x D d\varphi = 0,2966 = 0,0989 R$$

und hiermit nach (5):

$$h_3 = \left( \frac{6,35}{v} + 1,12 \frac{R}{Q} \right) R s \dots \dots \dots (6)$$

Im Mittel, insbesondere z. B. mit  $v = 2$ ,  $\frac{R}{Q} = 5$ ,  $s = 0,015$  ist  $h_3$  etwa  $= 0,13 R$ , so dass wegen

$$R = H - \frac{4 (1,75 v)^2}{3 \cdot 2g} = H - 0,208 v^2 \dots \dots \dots (7)$$

und mit Rücksicht darauf, dass hier das Glied mit  $v^2$  von untergeordneter Grösse im Vergleich mit  $H$  ist, nach Gl. (6) und (7) auch näherungsweise gesetzt werden kann:

$$h_3 = \left( \frac{6,35}{v} + 1,12 \frac{H - 0,208 v^2}{Q} \right) s H - 0,027 v^2 \dots \dots \dots (8)$$

wo nämlich  $0,027 = 0,13 \cdot 0,208$  ist. Hieraus und aus (4) folgt:

$$H_1 = 0,129 v^2 + 0,2 + \left( \frac{6,35}{v} + 1,12 \frac{H - 0,208 v^2}{Q} \right) s H \dots \dots (9)$$

Der mit  $E_1$  bisher bezeichnete Effectverlust durch Nebenwiderstände, welcher für das überschlächtige und für das rückschlächtige Rad  $= 0,04 E_0$  geschätzt wurde, begreift hier auch die Arbeit der Wasserreibung am Kropfgerinne in sich, welche nach §. 17:

$$E_w = 0,4 l b v^3$$

gesetzt werden kann. Aus diesem Ausdrucke und aus  $E_0 = 1000 QH$  folgt mit  $Q = \varepsilon abv = 0,2 bv$ :

$$\frac{E_w}{E_0} = 0,002 \frac{lv^2}{H}$$

Die Bogenlänge  $l$  der Reibungsfläche am Gerinne besteht von  $\varphi = 0$  bis  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  in einem zusammenhängenden Bogen, von da bis  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  aus getrennten Bogenstücken von abnehmender Grösse, so dass ungefähr

$$l = R \left( \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8} \right) = 1,18 R,$$

somit  $l$  wenig von  $H$  verschieden ist. Mit entsprechender Näherung ist

$$\begin{aligned} E_w : E_0 &= 0,002 v^2 \dots \dots \dots (10) \\ &= 0,0065 \text{ bis } 0,0115 \\ &\text{für } v = 1,8 \quad \quad \quad \text{„ } 2,4. \end{aligned}$$

Indem auch abgesehen von  $E_w$  die unter  $E_1$  begriffenen Effectverluste besonders mit der Grösse des Radius zunehmen, im Verhältniss zu  $E_0$  oder zu  $H$  folglich um so grösser sind, je grösser  $R:H$ , mag hier  $E_1 = 0,06 E_0$  gesetzt werden, mit Rücksicht auf (9) also

$$\begin{aligned} \eta &= 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0} \\ &= 0,94 - \frac{0,129 v^2 + 0,2}{H} - \left( \frac{6,35}{v} + 1,12 \frac{H - 0,208 v^2}{Q} \right) s \dots (11). \end{aligned}$$

Wäre z. B.  $Q = 0,75$  und  $s = 0,015$ , so ergäbe sich

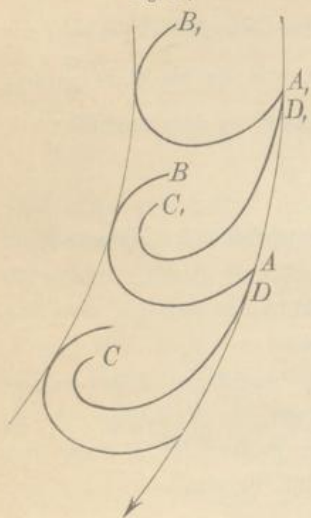
$$\begin{aligned} \text{für } H &= 3 && 6 \\ \text{und } v &= 1,8 && 2,4 \\ \eta &= 0,63 && 0,64. \end{aligned}$$

Dass hier der Wirkungsgrad nicht wesentlich mit dem Gefälle, also mit der Höhe des Rades zunimmt, rührt besonders vom Wasserdurchfluss durch die Seitenspalten her, dessen schädlicher Einfluss mit  $R$ , also mit  $H$  wächst. Da man bei grösseren Rädern im Allgemeinen auf eine grössere Weite  $s$  der Spielräume wird rechnen müssen, könnte sogar  $\eta$  unter Umständen bei grossen Rädern etwas kleiner ausfallen, als bei kleineren, falls nicht etwa darauf verzichtet wird, ihre Umfangsgeschwindigkeit  $v$  etwas grösser anzunehmen, wie es bei obigen Beispielen geschehen und wie es im Allgemeinen zulässig und angemessen ist. —

Wenn das mittelschlächtige Rad als frei hängendes Zellenrad gebaut wird, lässt sich besonders mit Rücksicht auf  $h_2$  nur ein kleinerer Wirkungsgrad, als bei ober- und rückenschlächtigen Rädern erwarten; denn dieser

Gefällverlust, bei gegebener Schaufelform und bei gegebenen Werthen von  $\varepsilon$ ,  $v$  und  $R$  von bestimmter Grösse, ist ein um so grösserer Theil von  $H$ , je kleiner  $H$ . Eine erhebliche Vergrösserung von  $\eta$  lässt sich

Fig. 20.



aber von einer eigenthümlichen Form und Anordnung der Schaufeln erwarten, welche von K. Pfister angegeben wurde und ihm patentirt ist (D. R.-P. Nr. 29 199, siehe Ztschr. des Vereins deutsch. Ingenieure, 1884, S. 1000). Der Radkranz, Fig. 20, ist hier mit zweierlei Schaufeln ausgerüstet, mit den Stossschaufeln  $AB$  und den Sammelschaufeln  $CD$ , beide stetig gekrümmt. Das Wasser, welches gegen  $AB$  stossend eingeflossen ist, ergiesst sich theils, längs  $AB$  hinflussend, in die darüber befindliche Sammelschaufel  $C_1D_1$ , theils durch schmale Spalten oder sonst kleine Durchbrechungen von  $AB$  in die darunter befindliche Sammelschaufel  $CD$ . Letztere bildet mit der Stossschaufel  $AB$  einen Sammelraum,

der nach aussen eine nur schmale und so zu bemessende spaltartige Oeffnung  $AD$  hat, dass der Ausfluss des Wassers aus ihr erst dann vollendet ist, wenn sie die tiefste Stelle des Rades erreicht hat.

### §. 22. Die gewöhnlichen tiefschlächtigen Räder.

Tiefschlächtige Räder finden in der Regel bei Gefällen  $H < 3$  Mtr. Anwendung und sind angemessener Weise stets Kropfräder. Der mittlere Eintrittspunkt  $J$  des Aufschlagwassers hat bei ihnen eine weniger bestimmte Lage, als bei den übrigen Arten von Rädern, indem der Winkel  $JMU = \vartheta$ , welchen der nach  $J$  gezogene Halbmesser mit der Verticalen bildet, irgend ein spitzer Winkel sein kann, der nur  $< 75^\circ$  zu sein pflegt; anderenfalls könnte das Rad noch als mittelschlächtigt betrachtet werden.

Von der Schaufelform gilt das beim mittelschlächtigen Kropfrade Gesagte, auch von der Höhenlage gegen den Unterwasserspiegel. Letzterer soll bei mittlerem Wasserstande nicht tiefer liegen, als der tiefste Punkt  $U$  des Rades, und nicht höher, als die Wasseroberfläche im untersten Schaufelraume; zwischen diesen Grenzen ist seine Höhenlage bezüglich des Effectverlustes ziemlich einerlei, wie im §. 14 näher erörtert wurde,

und kann der betreffende Gefällverlust  $h_1$  durchweg =  $0,25a$  bis  $0,3a$  gesetzt werden, sofern  $\varepsilon = 0,5 - 0,6$  zu sein pflegt. Trotz des etwas grösseren Werthes von  $\varepsilon$  ist hier ein Ueberfließen von Wasser durch die Luftspalten im Radboden um so weniger zu befürchten, je kleiner  $\vartheta$  ist.

Wenn nicht etwa die einfachen ebenen Schaufeln ungewöhnlich stark gegen den Radius geneigt sind, und wenn nicht  $\vartheta$  wesentlich  $> 60^\circ$  ist, pflegt hier der Fall vorzuliegen, dass der mittlere Eintrittspunkt  $J$  unter das Niveau der halben Füllung des Schaufelraums fällt, falls dieser sich in solcher Lage befindet, dass der Mittelpunkt seines Theilbogens mit  $J$  zusammenfällt\*; es verliert dann der mit  $k$  bezeichnete Bestandtheil des Gefällverlustes  $\frac{w_1^2}{2g}$  seine Bedeutung und wird

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}$$

Ebenso ist dann die absolute Geschwindigkeit  $u_1$ , mit welcher im Durchschnitt das einflussende Wasser zum Stoss gelangt, = der mittleren Einlaufgeschwindigkeit  $u$  zu setzen. Sofern sich nun im §. 18 unter 2) ergeben hatte, dass das Stossgefälle  $H'$ , welches hier =  $h = (1 + \zeta) \frac{u^2}{2g}$  gesetzt werden kann, nahezu dann am vollständigsten ausgenutzt wird, wenn  $u_1 = 2v$  ist, würde sich also hier die Regel  $u = 2v$  ergeben, welche bei ober- und rückschlächtigen Rädern (statt  $u < 2v$ ) aus anderen Gründen als thatsächlich meistens passend empfohlen wurde und welche besonders bei unterschlächtigen Stossrädern ( $H' = h = H$ ) durch die Erfahrung bestätigt wird (sogar ergibt sich bei ihnen  $\eta = \max$  im Durchschnitt für  $u$  etwas  $> 2v$ ). Indessen ist hier bei den tiefschlächtigen Rädern, bei welchen  $h$  nur einen Theil, wenn auch einen erheblichen Theil von  $H$  ausmacht, wesentlich zu berücksichtigen, dass dieses Stossgefälle auch im günstigsten Falle nicht in solchem Grade ausgenutzt werden kann, wie das Druckgefälle  $H'' = H - h$ , und dass es insofern

\* Unter  $e_1$  die Centralprojection des Schaufelprofils auf den Umfang des Rades verstanden, findet man als Bedingung dafür:

$$\vartheta < \text{arc cotg} \left[ \frac{(1 - \varepsilon) e + e_1}{a} \right].$$

Sie liefert z. B. für  $a = e$  und

$$\begin{array}{l|l} e_1 = 0, \quad \varepsilon = 0,6: \quad \vartheta < 68^\circ & e_1 = \frac{e}{4}, \quad \varepsilon = 0,6: \quad \vartheta < 57^\circ \\ e_1 = 0, \quad \varepsilon = 0,5: \quad \vartheta < 63^\circ & e_1 = \frac{e}{4}, \quad \varepsilon = 0,5: \quad \vartheta < 53^\circ. \end{array}$$

vorthellhaft ist, wenn  $h$  einen nur kleineren Theil von  $H$  ausmacht, somit  $u$ , bei gegebenem Werthe von  $v$  also auch das Verhältniss  $u : v$ , weniger gross ist.

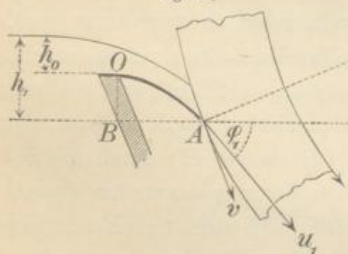
Die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  pflegt = 1,5 bis 2,25 Mtr. zu sein bei einem Halbmesser  $R = 2$  bis 4 Mtr. Letzterer, wenn auch passend mit  $H$  wachsend, wird hier doch nicht wesentlich von  $H$  abhängig gemacht, wodurch die so verschiedenen Werthe von  $\vartheta$  bedingt werden gemäss der Gleichung:

$$R(1 - \cos \vartheta) = H - h + t \dots \dots \dots (1),$$

unter  $t (< \varepsilon a)$  die Tiefe des Eintauchens in das Unterwasser verstanden.

Der Zufluss des Wassers wird bei diesen Rädern meistens durch eine Spansschütze vermittelt und regulirt, bei grösseren Werthen von  $\vartheta$  und bei sehr veränderlicher Höhenlage des Oberwasserspiegels auch durch eine Ueberfallschütze, deren Brett man als Ueberfallschwelle den Veränderungen des Wasserspiegels folgen lassen kann, um  $Q$  und  $u$  constant zu erhalten, während eine Spansschütze, wenn sie im gleichen Falle  $Q$  constant erhält, die Aenderung von  $u$  nicht hindert.

Fig. 21.



1) Bei der Ueberfallschütze wird zur Leitung des Wassers bis dicht an das Rad das Schutzbrett oben mit einer Leitschaufel  $OA$ , Fig. 21, verbunden, die nach der parabolischen Bahn gekrümmt ist, welche von den untersten Wassertheilchen bei freier Bewegung verfolgt werden würde. Diese Parabel ist bestimmt durch die Lage ihres Scheitelpunktes  $O$  gegen den unteren Endpunkt  $A$  des Einlaufbogens, also durch die horizontale und die verticale Entfernung  $AB$  und  $OB$  dieser beiden Punkte, welche wie folgt gefunden werden.

Die Höhe des Oberwasserspiegels über  $O$  sei =  $h_0$ , über  $A = h_1$ , die Geschwindigkeit des Wassers in  $A = u_1$ , ihre Neigung gegen den Horizont =  $\varphi_1$ . Indem die Dicke des Wasserstrahls im Einlaufbogen  $i$

$$= \frac{Q}{bu} = \frac{\varepsilon av}{u} \text{ nahe } = 0,14 \text{ Mtr.}$$

ist, entsprechend z. B.  $u = 1,75v$  und  $\varepsilon a = 0,245$ , ergibt sich

$$i = \frac{0,14}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (2),$$

unter  $\alpha$  wie bisher den Winkel zwischen  $u$  und  $v$  im mittleren Eintrittspunkte verstanden, auf welchen auch  $h$  und  $\mathcal{I}$  sich beziehen, womit dann

$$h_1 = h + \frac{i}{2} \sin \mathcal{I} = h + 0,07 \frac{\sin \mathcal{I}}{\sin \alpha} \dots \dots \dots (3)$$

gefunden wird. Ferner ist:

$$Q = \mu b_1 h_0 \sqrt{2g h_0},$$

wobei die Breite  $b_1$  des Ueberfalles etwas (um etwa 0,1 Mtr.) kleiner, als die Radbreite  $b$  zu sein pflegt. Wird aber  $b_1 = b$  gesetzt, so ist  $\mu$  etwas zu klein, etwa = 0,4 zu nehmen, und folgt

$$h_0 = \left( \frac{Q}{0,4b\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} = \left( \frac{\varepsilon av}{0,4\sqrt{2g}} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,683 (\varepsilon av)^{\frac{2}{3}} \dots \dots \dots (4).$$

Nun sind  $OB$  und  $AB$  die Wurfhöhe und halbe Wurfweite, welche der Wurfgeschwindigkeit  $u_1$  und dem Elevationswinkel  $\varphi_1$  entsprechen, also mit  $\zeta = 0,1$  als Widerstandcoefficient der Schütze:

$$OB = \frac{u_1^2}{2g} \sin^2 \varphi_1 = \frac{h_1}{1,1} \sin^2 \varphi_1, \quad AB = \frac{h_1}{1,1} \sin 2\varphi_1 \dots \dots (5),$$

während  $\varphi_1$  dadurch bestimmt ist, dass  $OB$  auch =  $h_1 - h_0$ , folglich

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{1,1 \frac{h_1 - h_0}{h_1}} \dots \dots \dots (6)$$

ist. Um aber  $h_1$  aus Gl. (3) mit ausreichender Näherung zu finden, während  $h$  durch  $u$  und  $\mathcal{I}$  durch Gl. (1) bestimmt ist, muss ausserdem  $\alpha$  wenigstens näherungsweise bekannt sein. Dieser Winkel ist aber =  $\mathcal{I} - \varphi$ , wo  $\varphi$  dieselbe Bedeutung für die mittleren wie  $\varphi_1$  für die untersten Bahnen der Wassertheilchen hat und analog Gl. (6)

$$\sin \varphi = \sqrt{1,1 \frac{h - x_0}{h}}$$

zu setzen ist, wenn mit  $x_0$  die Höhe des Oberwasserspiegels über den Scheitelpunkten jener mittleren Bahnen bezeichnet wird. Nähme die Geschwindigkeit im Querschnitte über  $O$  proportional der Quadratwurzel aus der Tiefe  $x$  unter der Oberfläche zu, und erstreckte sich letztere auch noch hier bis zur Höhe des Oberwasserspiegels, so würde die Gleichung

$$\int_0^{x_0} \sqrt{x} dx = \int_{x_0}^{h_0} \sqrt{x} dx$$

zur Bestimmung von  $x_0$  dienen können; sie liefert

$$x_0^{\text{alt}} = h_0^{\frac{2}{3}} - x_0^{\text{neu}} = 0,5 h_0^{\frac{2}{3}}$$

$$x_0 = (0,5)^{\frac{3}{2}} h_0 = 0,63 h_0.$$

Wenn aber auch jene Annahme in Betreff der Geschwindigkeitsänderung im Querschnitte über  $O$  nicht beanstandet wird, so hat doch in demselben schon eine Senkung der Wasseroberfläche stattgefunden, wodurch  $x_0$  vergrössert werden muss; hier mag  $x_0 = \frac{2}{3} h_0$  geschätzt und gesetzt werden:

$$\sin \varphi = \sqrt{\frac{h - \frac{2}{3} h_0}{1,1 \frac{h}{h}}}, \quad \alpha = \vartheta - \varphi \dots \dots (7).$$

Mit gegebenen, bezw. angenommenen Werthen von  $H$ ,  $R$ ,  $t$ ,  $\varepsilon$ ,  $a$ ,  $v$ ,  $u$  findet man  $h = 1,1 \frac{u^2}{2g}$ , dann  $h_0$  aus (4),  $\vartheta$  aus (1),  $\varphi$  und  $\alpha$  aus (7),  $h_1$  aus (3),  $\varphi_1$ ,  $OB$  und  $AB$  aus (5) und (6).

Dass die Schaufeln von vorn getroffen werden könnten, ist bei ihrer radialen oder fast radialen Stellung nicht zu befürchten, kann übrigens leicht durch die Zeichnung oder Berechnung des Geschwindigkeitsdreiecks  $u$ ,  $v$ ,  $w$  mittels der Elemente  $u$ ,  $v$ ,  $\alpha$  geprüft werden. Dagegen ist ein kleiner, mit Rücksicht auf  $i$  nach Gl. (2) nur nicht zu kleiner Winkel  $\alpha$  insofern erwünscht, als damit auch die durch den Stoss verloren gehende Geschwindigkeit  $w$  bei gegebenen Werthen von  $u$  und  $v$  abnimmt. Die Annahme von  $\alpha$  statt  $R$  könnte freilich einen unzulässigen Werth von  $R$  zur Folge haben; es genügt die Bemerkung, dass  $R$  und  $\alpha$  unter übrigens gleichen Umständen sich in entgegengesetztem Sinne gleichzeitig ändern.

$$\text{Wäre z. B. } H = 2, \quad R = 3, \quad t = 0, \quad \varepsilon a = 0,24 \\ v = 1,8 \quad \text{und} \quad u = 1,75v = 3,15,$$

$$\text{so ergäbe sich } h = 0,557, \quad h_0 = 0,390, \quad \vartheta = 58^\circ 44', \quad \varphi = 49^\circ 59', \\ \alpha = 8^\circ 45', \quad h_1 = 0,950, \quad OB = 0,56 \quad \text{und} \quad AB = 0,82.$$

Mustergültig für die Ausführung ist dieses Beispiel nicht;  $OB$  und  $AB$  sind übermässig gross, ebenso  $i = 0,92$  Mtr. in Folge des kleinen Werthes von  $\alpha$ . Vergrössert wird  $\alpha$  durch Vergrösserung von  $\vartheta$  (Verkleinerung von  $R$ ) und durch Verkleinerung von  $\varphi$ ; letztere wird bewirkt durch Verkleinerung von  $h$ . Entsprechend werden dann auch  $h_1$  und  $\varphi_1$ , somit  $OB$  und  $AB$  kleiner. Man erkennt, dass solche tiefschlächtigen Räder mit Ueberfalleinlauf mässige Geschwindigkeiten und solche Halbmesser  $R$  erfordern, welche nur wenig  $> H$  sind.



Wird obiges Beispiel dahin abgeändert, dass unter übrigen denselben Voraussetzungen

$$v = 1,5 \text{ und } u = 1,8v = 2,7, \text{ entsprechend } h = 0,409$$

angenommen wird, so ergibt sich schon wesentlich brauchbarer:

$$h_0 = 0,346, \quad \vartheta = 61^\circ 59', \quad \varphi = 43^\circ 50', \quad \alpha = 18^\circ 9'$$

$$h_1 = 0,607, \quad \varphi_1 = 43^\circ 27', \quad OB = 0,26, \quad AB = 0,55$$

und  $i = 0,45$  Mtr. Wenn auch eine weitere Verkleinerung von  $v$  nicht erwünscht ist, könnte doch  $u$  noch mehr bis etwa  $u = 1,6 \cdot 1,5 = 2,4$  reducirt werden, entsprechend  $h = 0,323$  Mtr.

Mit  $h = 0,4$  und  $\cos \vartheta = 0,5$  bis  $0,4$  (entsprechend  $\vartheta = 60^\circ$  bis  $66^\circ 25'$ ) lässt sich gemäss Gl. (1) für die Beziehung zwischen  $R$  und  $H$  zu ungefährer Anhalt die Regel bilden:

$$\frac{R}{H - 0,4} = \frac{1}{0,5} \text{ bis } \frac{1}{0,6} = 2 \text{ bis } \frac{5}{3} \dots\dots\dots (8).$$

Ihr entspricht  $R = 2$  bis  $4$  Mtr. für

$$H = \frac{1}{2} \cdot 2 + 0,4 \text{ bis } \frac{3}{5} \cdot 4 + 0,4$$

$$= 1,4 \text{ bis } 2,8 = 0,7 R.$$

2) Bei der Anwendung einer Spannschütze, Fig. 22, lässt man den Boden des Kropfgerinnes mit parabolischer Krümmung in den Boden des Zuflussgerinnes übergehen und legt das am unteren Rande passend abgerundete Schutzbrett mit entsprechender Neigung gegen den Horizont möglichst nahe an das Rad,

so dass es, ganz heruntergelassen, die parabolische Krümmung des Einlaufgerinnes in dem vom Scheitel zum Kropfgerinne abfallenden Zweige trifft. Die Verzeichnung dieser Parabel kann hier für die Mittellinie des einflussenden Wasserstrahls ausgeführt werden, und zwar unmittelbar so, dass sie den Umfang des Rades im mittleren Eintrittspunkte  $J$  unter einem angenommenen Winkel  $\alpha$  schneidet; ausser vom Gefälle  $h$  für den Punkt  $J$  (entsprechend  $h_1$  für  $A$  im Falle von Fig. 21) ist nämlich hier die Parabel nicht zugleich von einer anderen Grösse (von  $h_0$  im vorigen Falle) abhängig, durch welche der Elevationswinkel  $\varphi$  in  $J$  (bezw.  $\varphi_1$  in  $A$ , Fig. 21) bedingt wird.

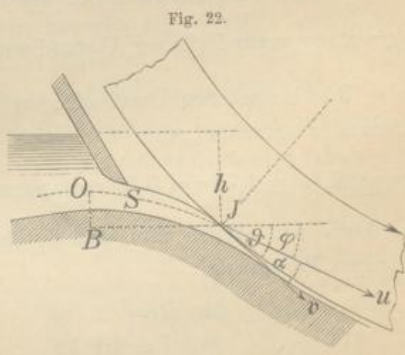


Fig. 22.

Ist  $v$  gegeben und  $u$  entsprechend angenommen, ist ferner  $\beta$  der Winkel, unter welchem die Radperipherie von den Schaufeln geschnitten wird, so muss jedenfalls  $\alpha$  der Bedingung

$$\frac{u}{v} > \frac{\sin \beta}{\sin(\beta - \alpha)} \dots \dots \dots (9)$$

entsprechend genommen werden. Mit  $h = 1,1 \frac{u^2}{2g}$  findet man dann  $\vartheta$  aus Gl. (1) und  $\varphi = \vartheta - \alpha$ , wonach der Scheitelpunkt  $O$  der Parabel bestimmt ist durch

$$OB = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \varphi, \quad JB = \frac{u^2}{2g} \sin 2 \varphi \dots \dots \dots (10).$$

Wird nun der Mittelpunkt der Schutzöffnung in einem Punkte  $S$  der Parabel  $OJ$  angenommen, welcher um  $h'$  unter dem Oberwasserspiegel liegt, so sind die Strahldicken  $= x$  bei  $S$  und  $= y$  bei  $J$  bestimmt durch

$$Q = \mu b x \sqrt{2gh'}, \quad y = x \sqrt{\frac{h'}{h}} \dots \dots \dots (11).$$

Bei gehöriger, die äussere Contraction ausschliessender Abrundung des Schutzbrettes bedeutet hier  $\mu$  einen Geschwindigkeitscoefficienten, der nur wenig  $< 1$ , etwa  $= 0,96$  anzunehmen ist. Das Profil des Gerinnebodens kann endlich nach Augenmass unter der Parabel  $OJ$  so gezeichnet werden, dass sein stetig veränderlicher Abstand von derselben bei  $S = \frac{x}{2}$ , bei  $J = \frac{y}{2}$  ist.

Die besonderen Umstände, welche bei der Ueberfallschütze für ein kleines  $v$  sprachen, sind hier nicht vorhanden. Meistens ist hier  $v = 2$  passend,  $u = 1,75v = 3,5$ , vorausgesetzt, dass  $H$  grösser, als  $h = 1,1 \frac{u^2}{2g} = 0,687$  ist. Wird dann mit durchschnittlich  $\alpha = 0,45$  nach Gl. (1) im vorigen Paragraph

für $R = 2$	3	4	
$\beta = 70^\circ 42'$	$74^\circ 15'$	$76^\circ 23'$	angenommen,
so müsste nach (9): $\alpha < 38^\circ 4'$	$40^\circ 53'$	$42^\circ 39'$	

sein. In der Regel ist  $\alpha$  beträchtlich kleiner anzunehmen um so mehr, je kleiner  $\vartheta$ , theils mit Rücksicht auf die wünschenswerthe Verkleinerung von  $w$ , theils damit nicht  $\varphi = \vartheta - \alpha$  zu klein ausfalle und damit nach (10) der Scheitelpunkt  $O$  zu nahe am Rade zu liegen komme.

Der Winkel  $\vartheta$  kann hier zwischen weiten Grenzen verschieden sein. Wäre z. B.

$R = 2$  und  $4$   
 bei  $H = 1$  „  $2,8 = 0,5 R$  bzw.  $0,7 R$ ,  
 so folgte  $\vartheta = 31^{\circ} 47'$  und  $61^{\circ} 38'$

aus Gl. (1) mit  $t = 0$ . —

Zur Gewinnung einer Näherungsformel für den Wirkungsgrad ist zunächst eine solche für den Gefällverlust  $h_3$  erforderlich. Nach Gl. (6), §. 21, hatte sich für denselben ein Ausdruck von der Form:

$$h_3 = \left( \frac{A}{v} + B \frac{R}{Q} \right) R s \dots \dots \dots (12)$$

ergeben, und zwar wurde unter den Voraussetzungen daselbst, insbesondere also für  $\vartheta = 90^{\circ}$

$$A = 6,35 \quad B = 1,12$$

gefunden. Im Allgemeinen sind diese Coefficienten wesentlich Functionen von  $\vartheta$ ; um sie näherungsweise als solche zu finden, mögen sie noch für  $\vartheta = 60^{\circ}$  und für  $\vartheta = 30^{\circ}$  im Uebrigen unter den am angeführten Orte zu Grunde liegenden, auch hier gewöhnlich nahe zutreffenden Voraussetzungen (radiale ebene Schaufeln,  $e = a = 0,4$  und  $\varepsilon = 0,5$ ) berechnet werden. Auf dieselbe Weise wie dort findet man

für  $\vartheta = 60^{\circ}$ :  $A = 2,93$  und  $B = 0,61$

„  $\vartheta = 30^{\circ}$ :  $A = 0,55$  „  $B = 0,20$ .

Werden  $A$  und  $B$  als Ordinaten zu den betreffenden Werthen von  $\vartheta$  als Abscissen betrachtet und die Curven verzeichnet, welche durch die je drei bestimmten Punkte mit möglichst stetiger Krümmung hindurch gehen, so lassen sich die Werthe von  $A$  und  $B$ , welche anderen Werthen von  $\vartheta$  entsprechen, als Ordinaten dieser Curven zu den betreffenden Abscissen abgreifen. So wurden die folgenden zusammengehörigen Werthe gefunden:

$\vartheta$	$A$	$B$	$\vartheta$	$A$	$B$
20°	0,03	0,11	60°	2,93	0,61
30°	0,55	0,20	70°	3,93	0,77
40°	1,24	0,32	80°	5,06	0,94
50°	2,03	0,46	90°	6,35	1,12

Kleineren Differenzen von  $\vartheta$  können diejenigen von  $A$  und  $B$  einfach proportional gesetzt werden. Sind endlich die thatsächlichen Verhältnisse in Betreff der Schaufelstellung und der Werthe von  $e$ ,  $a$ ,  $\varepsilon$  von den hier vorausgesetzten erheblich verschieden, so kann man bemerken, dass  $A$  und  $B$  etwas verkleinert werden durch Schrägstellung der Schaufeln,

dagegen vergrößert durch Vergrößerung von  $e$ ; durch Vergrößerung von  $\varepsilon a$  wird  $A$  verkleinert,  $B$  etwas vergrößert.

Wird nun hier durchschnittlich

$$u = 1,75 v$$

angenommen, so ist

$$\begin{aligned} w^2 &= u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha = (4,06 - 3,5 \cos \alpha) v^2 \\ &= 0,68 v^2 \text{ bis } 1,03 v^2 \text{ für } \alpha = 15^\circ \text{ bis } 30^\circ, \end{aligned}$$

sei aber im Durchschnitt  $= v^2$  gesetzt, um damit

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} + k = \frac{w^2}{2g}$$

eher etwas zu gross, als zu klein zu veranschlagen. Mit  $\zeta = 0,1$  und  $h_1 = 0,11$  ist dann nach §. 17:

$$H_1 - h_3 = 0,1 \frac{(1,75v)^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + 0,11 = 0,118v^2 + 0,11$$

und mit Rücksicht auf (12):

$$H_1 = 0,118v^2 + 0,11 + \left( \frac{A}{v} + B \frac{R}{Q} \right) R s \dots \dots \dots (13).$$

Wird der Effectverlust durch Nebenwiderstände ebenso wie beim mittelschlächtigen Rade zu 6 % des absoluten Effects veranschlagt, so ist schliesslich

$$\eta = 0,94 - \frac{H_1}{H} \dots \dots \dots (14).$$

Bei einem tiefschlächtigen Rade mit Ueberfallschütze kann

$$v = 1,5 \text{ und } R = \frac{H}{0,7},$$

$$\vartheta = 60^\circ - 66^\circ, \text{ also } A = 3,23 \text{ und } B = 0,66$$

gesetzt werden. Damit ergibt sich:

$$\eta = 0,94 - \left( 3,08 + 0,94 \frac{R}{Q} \right) s - \frac{0,376}{H} \dots \dots \dots (15).$$

z. B. mit  $s = 0,015$  für  $H = 1,5$       2      2,5

$$\text{und } \frac{R}{Q} = 4 \quad \quad \quad 5 \quad \quad 6$$

$$\eta = 0,59 \quad \quad 0,64 \quad \quad 0,66.$$

Ist bei einem Rade mit Spannschütze  $v = 2$ , so ist nach (13) und (14):

$$\eta = 0,94 - \left( \frac{A}{2} + B \frac{R}{Q} \right) \frac{R}{H} s - \frac{0,582}{H} \dots \dots \dots (16).$$

und man findet beispielsweise

für $R = 2$	3	4
und $H = 1$	1,8	2,8 mit $t = 0$
nach (1): $\vartheta = 31^{\circ} 47'$	$51^{\circ} 1'$	$61^{\circ} 38'$ ;
dazu $A = 0,67$	2,12	3,09
$B = 0,22$	0,48	0,64; endlich mit $s = 0,015$
und $\frac{R}{Q} = 4$	5	6
$\eta = 0,32$	0,53	0,62.

Die selbst bei gleich grossen Gefällen kleiner gefundenen Werthe von  $\eta$  sind Folge der grösser angenommenen Geschwindigkeiten. Insbesondere für Gefälle  $H < 1,5$  Mtr. ist es deshalb rathsam,  $v < 2$  und besonders  $u < 3,5$  anzunehmen, um das Stossgefälle zu Gunsten des Druckgefälles zu verkleinern. Uebrigens lässt sich bei kleineren Rädern und kleineren Werthen von  $\vartheta$ , also bei geringerer Ausdehnung des Kropferinnes auf eine kleinere Weite  $s$  der Spielräume und somit auf etwas grössere Wirkungsgrade rechnen, als hier beispielsweise gefunden wurden.

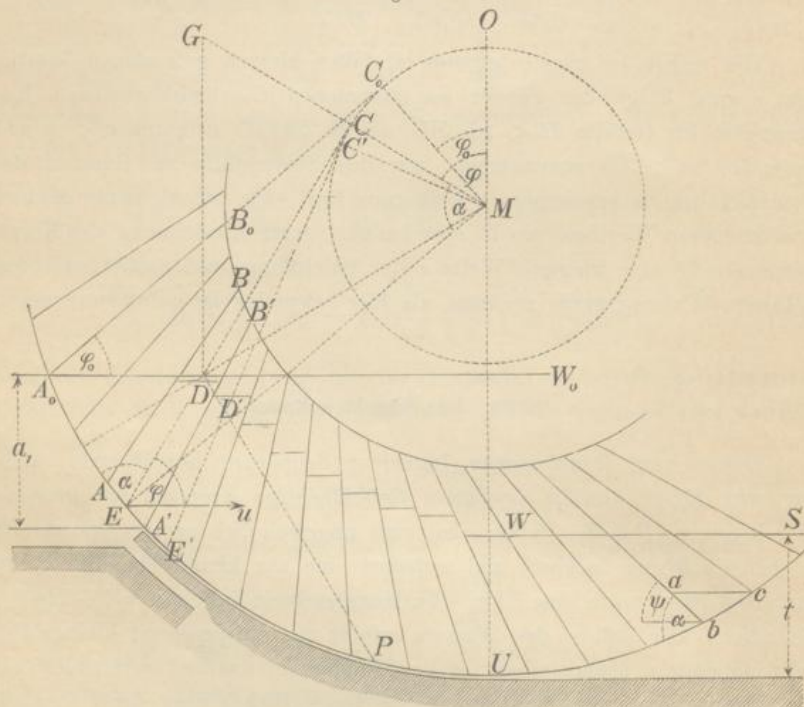
### §. 23. Das Sagebien-Rad.

Dieses vom französischen Ingenieur Sagebien herrührende, auch für sehr kleine Gefälle geeignete tiefschlächlige Kropfrad von grossem Durchmesser ( $R = 3 - 5$  Mtr.) hat eine ungewöhnlich grosse Kranzbreite  $a$  (bis  $0,5 R$  und darüber) und trotzdem eine nur kleine Theilung  $e$  von etwa  $0,3$  Mtr., sowie eine kleine Umfangsgeschwindigkeit  $v = 0,6$  bis  $0,8$  Sek. Mtr. Der Zufluss des Wassers erfolgt mit entsprechend kleiner Geschwindigkeit  $u$  (unmittelbar vor dem Einfluss in das Rad verstanden) als ein Strom von ungewöhnlich grosser Tiefe (Dicke) über der Ueberfall-schütze, durch welche dieser Zufluss regulirt wird. Besonders charakteristisch ist diesem Rade endlich eine Neigung der übrigens ebenen Schaufeln gegen die radiale Richtung entgegengesetzt dem sonst üblichen Sinne solcher Neigung, Fig. 23, wodurch freilich die Lage der aus dem Unterwasser sich erhebenden Schaufeln gegen dieses verschlechtert, aber ein solcher Neigungswinkel  $\varphi_0$  der eintauchenden Schaufel  $A_0 B_0$  gegen den Oberwasserspiegel  $A_0 W_0$  erzielt wird, dass die Schaufeln dort, wo während der Füllung und zu Ende derselben ein Ueberfliessen von Wasser über den inneren Rand am leichtesten stattfinden könnte, eine diesem vorbeugende hinlänglich steile Lage haben. Auch kommen dadurch die Schaufeln

mehr in die Richtung der relativen Zuflussgeschwindigkeit  $w$ , welche hier stark aufwärts gerichtet ist. Der mit dem Halbmesser  $m$  um den Mittelpunkt  $M$  beschriebene Kreis, welcher von den Verlängerungen aller geradlinigen Schaufelprofile berührt wird, heisse der Kreis ( $C$ ).

Bei  $A'$ , Fig. 23, ist ein Schlitz gezeichnet, in welchem das dem Umfange des Rades entsprechend cylindrisch gekrümmte Schutzblech Platz findet. Dasselbe ist in der Zeichnung weggelassen; indessen wird mit  $A'$

Fig. 23.



im Folgenden die jeweilige Lage des oberen Randes dieses Schutzbleches, also mit  $A_0A'$  der Bogen bezeichnet, längs welchem das Wasser in das Rad einfließt als ein Strom von der Stärke (Tiefe)  $a_1$ . Dieses Einfließen findet hier aber in anderer Weise statt, als bei den meist üblichen bisher besprochenen Rädern, und erfordert eine nähere Untersuchung.\*

Während ein Schaufelraum sich aus der Lage, in welcher seine vordere Schaufel, mit  $A_0B_0$  zusammenfallend, einzutauchen anfängt, bis

\* Siehe einen Aufsatz von C. Bach in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1873, S. 202.

zu der Lage bewegt, in welcher seine hintere Schaufel sich in  $A_0B_0$  befindet, ist die Wasseroberfläche in ihm die Fortsetzung der Oberfläche des zufließenden Wassers. Bewegt sich aber der Schaufelraum weiter, so fließt das Wasser schräg aufwärts in ihn ein nach Massgabe der vorhandenen relativen Zuflussgeschwindigkeit, der betreffenden Druckhöhen und Bewegungswiderstände, sowie entgegengesetzt der Centrifugalkraft, und es ist fraglich, ob schliesslich in der Lage, in welcher seine vordere Schaufel mit  $A'B'$  zusammenfällt und seine Einnüdung sich zu verengen anfängt, die Wasseroberfläche im Schaufelraume über oder unter  $A_0W_0$  liegt. Ersteres würde nicht einem Gewinn an Gefälle entsprechen, vielmehr wäre solche Erhebung der Wasseroberfläche die Folge einer auf Kosten des Gefälles zu grossen absoluten Zuflussgeschwindigkeit  $u$ , welche nach der hier zu Grunde liegenden richtigen Idee thatsächlich nicht grösser sein soll, als die Beaufschlagung des Rades erfordert. Blicke die Wasseroberfläche im Schaufelraume unter  $A_0W_0$ , so würde damit die aufzunehmende Wassermenge unerwünschter Weise eingeschränkt. Die Verhältnisse sind also thunlichst so zu wählen, dass für die Lage  $A'B'$  einer Schaufel die Oberfläche des Wassers in dem ihr unmittelbar nachfolgenden Schaufelraume in der Höhe des Oberwasserspiegels oder wenigstens nur sehr wenig tiefer liegt. In dieser Lage des Schaufelraumes ist nun aber der Wassereinfluss in denselben einstweilen erst insoweit zu Ende, als er durch seine volle Oeffnung erfolgt; bewegt er sich weiter bis seine hintere Schaufel in die Lage  $A'B'$  kommt, so verengt sich die Einflussöffnung allmählich bis Null und sinkt der Wasserspiegel in ihm bis zu einer gewissen Tiefe  $y'$  unter  $A_0W_0$ . Bei der Weiterbewegung ohne weiteren Zufluss sinkt der Wasserspiegel im Schaufelraume allmählich bis zum Unterwasserspiegel  $WS$ .

Zur Gewinnung der Grundlagen für eine passende Construction des Sagebien-Rades handelt es sich zunächst um eine nähere Untersuchung jener beiden Perioden des Wassereinflusses in einen Schaufelraum, während nämlich dessen Einnüdung ganz offen und während sie in allmählicher Verkleinerung begriffen ist, sowie um die Beziehung, welche zwischen dem Aufschlagwasserquantum und den übrigen Radelementen stattfindet. Vom Wasserverlust durch die Spielräume wird dabei einstweilen abgesehen.

$ABA'B'$ , Fig. 23, sei ein zwischen den Grenzlagen  $A_0B_0$  seiner hinteren und  $A'B'$  seiner vorderen Schaufel in der ersten Periode seiner Füllung begriffener Schaufelraum (den man sich also in der Figur im Allgemeinen mehr links liegend zu denken hat),  $ED$  seine

Mittellinie, welche den Kreis ( $C$ ) im Punkte  $C$  berührt und von der Wasseroberfläche im Schaufelraum in  $D$  geschnitten wird im Abstände  $x = ED$  von  $E$  und in der Tiefe  $y$  unter  $A_0W_0$ ;  $x$  und  $y$  sind Functionen des Winkels  $\varphi$ , unter welchem  $EC$  gegen den Horizont oder  $MC$  gegen die Verticale  $MO$  geneigt ist. Mit  $ME = R$  und

$$\alpha = \sphericalangle EMC = \arccos \frac{m}{R}$$

sei  $r = CE = R \sin \alpha$ . Ferner sei

$h$  die Höhe des Oberwasserspiegels  $A_0W_0$  über dem Punkte  $E$ ,

$h_0$  die hydraulische Ueberdruckhöhe des Wassers unmittelbar nach seinem Einflusse in den Schaufelraum,

$u$  die horizontale Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zum Rade, verstanden als mittlere, in allen Punkten des Bogens  $A_0A'$  gleiche absolute Geschwindigkeit,

$w$  die relative Zuflussgeschwindigkeit, nämlich die Resultante von  $u$  und der entgegengesetzt genommenen, mit  $ED$  den Winkel  $\alpha$  bildenden Umfangsgeschwindigkeit  $v$  im Punkte  $E$ ,

$w_0$  die (mittlere) relative Geschwindigkeit im Sinne  $ED$  unmittelbar nach dem Einflusse in den Schaufelraum,

$w_1$  die ebenso gerichtete relative Geschwindigkeit an der Oberfläche des einfließenden Wassers bei  $D$ ,

$v_1$  die Geschwindigkeit des Radpunktes  $D$ , senkrecht zu  $MD = R_1$  und, wenn  $\omega$  die Winkelgeschwindigkeit des Rades ist,  $= R_1 \omega$ ;

$c$  und  $c_1$  seien die Weiten des Schaufelraums bei  $E$  und bei  $D$ , nämlich die aus  $C$  als Mittelpunkt mit den Halbmessern  $CE$  und  $CD$  beschriebenen Bogenlängen zwischen den einander zugekehrten Schaufelflächen.

Wird nun, wie es in analogen Fällen üblich ist und erfahrungsgemäss zu hinlänglich wenig fehlerhaften Ergebnissen führt, der Bewegungszustand des in den Schaufelraum ein- und in ihm weiterfließenden Wassers in jedem Augenblicke demjenigen gleich gesetzt, welcher eigentlich erst im Beharrungszustande unter gleich bleibenden augenblicklichen Umständen eintreten würde, so ist nach einer Fundamentalgleichung der technischen Hydraulik (siehe Bd. I, §. 78, Gl. 3) einstweilen ohne Rücksicht auf Bewegungswiderstände:

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + h_0 - (h - y) + k.$$



Dabei ist

$$\frac{w_0^2}{2g} + h_0 = \frac{w^2}{2g} + h;$$

$k$  ist die Arbeit der Centrifugalkraft pro 1 Kgr. Wasser bei der relativen Bewegung von  $E$  bis  $D$ , also

$$k = \frac{\omega^2}{g} \int_R^{R_1} R_1 dR_1 = \frac{\omega^2}{g} \frac{R_1^2 - R^2}{2} = \frac{v_1^2 - v^2}{2g}.$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke giebt, wenn zur Berücksichtigung von Bewegungswiderständen schliesslich  $w_1^2$  mit  $(1 + \zeta)$  multiplicirt wird, unter  $\zeta$  den resultirenden Widerstandscoefficienten verstanden,

$$(1 + \zeta) w_1^2 = w^2 + 2gy + v_1^2 - v^2 \dots \dots \dots (1).$$

Die relative Zuflussgeschwindigkeit  $w$  hat zwar im Allgemeinen nicht genau die Richtung  $ED$ , doch ist es bei ihrer geringen Grösse hier unerheblich, wenn sie selbst etwas gegen die vorderen Schaufelflächen gerichtet sein sollte. Mit

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha + \varphi) \dots \dots \dots (2)$$

und

$$v_1 = v \frac{R - x \sin \alpha}{R} = v \left( 1 - \frac{x \sin \alpha}{R} \right) \dots \dots \dots (3)$$

ergiebt sich  $w_1$  durch Gl. (1) bei gegebenen Werthen von  $R$ ,  $\alpha$ ,  $v$ ,  $u$  als Function von  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$ , welche Grössen unter sich in einer Beziehung stehen, die aus Fig. 23 durch Gleichsetzung von

$$h = x \sin \varphi + y$$

mit der Differenz der Verticalprojectionen von  $EC$  und  $A_0C_0$ , vermehrt um die Verticalprojection von  $C_0C$ , erhalten wird, nämlich

$$x \sin \varphi + y = r(\sin \varphi - \sin \varphi_0) + m(\cos \varphi_0 - \cos \varphi)$$

oder

$$x = r - \frac{r \sin \varphi_0 - m(\cos \varphi_0 - \cos \varphi) + y}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (4).$$

Ein zweiter Ausdruck von  $w_1$  als Function von  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$  entspricht dem Aenderungsgesetz des Querschnitts  $F$  der augenblicklichen Wasserfüllung des Schaufelraums mit der (zur Radaxe senkrechten) Ebene der Figur. Es ist nämlich

$$F = x \frac{c + c_1}{2} \text{ und } \frac{c_1}{c} = \frac{r - x}{r} = 1 - \frac{x}{r},$$

also

$$F = cx \left( 1 - \frac{x}{2r} \right); dF = c \left( 1 - \frac{x}{r} \right) dx.$$

Indem diese Aenderung von  $F$  in einem Zeitelement  $dt$  auch

$$dF = c_1 w_1 dt = c \left(1 - \frac{x}{r}\right) w_1 \frac{d\varphi}{\omega}$$

ist, folgt durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von  $dF$ :

$$w_1 = \omega \frac{dx}{d\varphi} \dots \dots \dots (5).$$

Durch die Substitution dieses Ausdrucks in der Gleichung (1) wird diese eine Differentialgleichung zwischen  $x$ ,  $y$  und  $\varphi$ , welche integrirt werden müsste, um in Verbindung mit (4) daraus  $x$  und  $y$  als Functionen von  $\varphi$  zu finden. Diese praktisch nicht ausführbare Bestimmung wird indessen sehr einfach (die Bildung der Differentialgleichung vermieden), wenn man sich erlaubt, statt (5)

$$w_1 = \omega \frac{dx_0}{d\varphi}$$

zu setzen, unter  $x_0$  den Werth von  $x$  verstanden, welcher  $y = 0$  entspricht, also die von  $ED$  nur sehr wenig verschiedene Strecke  $ED_0$ , falls  $D_0$  den Schnittpunkt von  $ED$  mit  $A_0 W_0$  bedeutet. Aus

$$x_0 = r - \frac{r \sin \varphi_0 - m (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \dots \dots \dots (6)$$

folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{dx_0}{d\varphi} &= (r \sin \varphi_0 - m \cos \varphi_0) \frac{\cos \varphi}{\sin^2 \varphi} + \frac{m}{\sin^2 \varphi} \\ &= \frac{r \sin \varphi_0 - m (\cos \varphi_0 - \cos \varphi)}{\sin \varphi} \cot \varphi + m \\ &= (r - x_0) \cot \varphi + m = MG \dots \dots \dots (7), \end{aligned}$$

wenn  $G$  den Schnittpunkt der Geraden  $MC$  mit der Verticalen durch  $D_0$  bedeutet. Mit der Annäherung, welche  $x = x_0$  entspricht und mit welcher nach (3) jetzt auch

$$v_1 = v \left(1 - \frac{x_0 \sin \alpha}{R}\right)$$

gesetzt werden kann, ist also  $w_1 =$  der Geschwindigkeit des Radpunktes  $G$ . Wird diese mit  $v_2$  bezeichnet, so findet man  $y$  nach (1) durch die Gleichung:

$$2gy = v^2 - v_1^2 + (1 + \zeta) v_2^2 - w^2 \dots \dots \dots (8)$$

unmittelbar als Function von  $\varphi$ , indem

$$\begin{aligned} v^2 - v_1^2 &= \frac{x_0 \sin \alpha}{R} \left(2 - \frac{x_0 \sin \alpha}{R}\right) v^2 \\ &= x_0 \sin \alpha (2R - x_0 \sin \alpha) \omega^2 \\ v_2 &= [(r - x_0) \cot \varphi + m] \omega \\ w^2 &= u^2 + v^2 + 2uv \cos(\alpha + \varphi) \end{aligned} \dots \dots \dots (9)$$

und  $x_0$  durch (6) als Function von  $\varphi$  bestimmt ist.

Es mag bemerkt werden, dass Gl. (3) schon insofern nicht genau war, als  $x \sin \alpha$  daselbst für die radiale Strecke von  $D$  bis zum Radumfang gesetzt worden ist. Ebenso ist im Ausdrucke (9) von  $v^2 - v_1^2$  statt  $x_0 \sin \alpha$  richtiger die radiale Strecke von  $D_0$  bis zur Radperipherie zu setzen. Wird also in Fig. 23 die Gerade  $D_0P$  normal zu  $MD_0$  gezogen bis zum Schnittpunkte  $P$  mit dem Umfang des Rades, so ergibt sich  $v^2 - v_1^2 =$  dem Quadrat der Geschwindigkeit eines Radpunktes im Abstände  $D_0P$  von der Axe. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von  $v_2$  und weil auch  $w$  constructiv durch das Geschwindigkeits-Parallelogramm für den Punkt  $E$  zu bestimmen ist, ergibt sich somit, wie überhaupt die Zeichnung zur Bestimmung aller Bestandtheile von  $y$  benutzt werden kann.

Indem übrigens  $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx_0}{d\varphi}$  etwas zu gross, also auch  $w_1$  nach (5) etwas zu gross =  $v_2$  gesetzt worden ist, desgleichen  $v^2 - v_1^2$  nach (9) etwas zu gross ist, wird auch  $y$  durch dieses Näherungsverfahren etwas zu gross gefunden. Das hat aber um so weniger zu bedeuten, als der Coefficient  $\zeta$  nur ungefähr geschätzt werden kann. Insoweit der Widerstand von der Reibung an den Schaufelflächen herrührt, kann etwa

$$\zeta = 0,03 \frac{x}{d}$$

gesetzt werden, unter  $d$  den mittleren Durchmesser des Canals verstanden:

$$d = \frac{4bc}{2(b+c)} = \frac{2bc}{b+c} \text{ nahe} = 2c,$$

sofern hier  $b$  sehr gross gegen  $c$  ist. Mit durchschnittlich  $c = 0,25$  Mtr. und  $x = 1,25$  Mtr. wäre  $\zeta = 0,075$ . Ein weiterer Widerstand wird aber durch den Stoss gegen die Stirnflächen der Schaufeln und durch eine damit zusammenhängende, übrigens gewiss sehr geringfügige innere Contraction verursacht, und mag mit Rücksicht darauf im Ganzen etwa  $\zeta = 0,15$  zu schätzen sein, entsprechend einem Geschwindigkeitscoefficienten

$$= \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0,93.$$

Die Gleichungen (8) und (9) bleiben bis zu Ende der ersten Füllungsperiode des Schaufelraums, d. h. bis zur Lage  $A'B'$  seiner vorderen Schaufel gültig. In der dann folgenden zweiten Füllungsperiode nimmt seine im Radumfang gemessene Oeffnungsweite von  $\epsilon e$  bis Null ab, wenn  $\epsilon e$  den Theilbogen  $e$  nach Abzug des von einer Schaufel eingenommenen Theils bedeutet, bei hölzernen Schaufeln etwa  $\epsilon = 0,9$ . Dabei nimmt auch  $w_1$  bis Null ab, indem die relative Geschwindigkeit, mit

welcher das Wasser in den Schaufelraum einströmt, durch die plötzliche Querschnittsvergrößerung dieses Wasserstroms in zunehmendem Masse verloren geht. Diese relative Einströmungsgeschwindigkeit selbst ändert sich aber nicht wesentlich und mag für die ganze zweite Füllungsperiode constant = demjenigen Werthe

$$w' = \frac{r-x}{r} w_1 \text{ mit } w_1 \text{ nahe } = v_2 \dots \dots \dots (10)$$

gesetzt werden, den sie zu Ende der ersten Periode angenommen hatte; ein etwas wachsender Einströmungswiderstand wird in seiner Wirkung theilweise durch die zunehmende, der Einströmung förderliche Druckhöhe  $y$  ausgeglichen.

Ist nun  $q'$  das Wasservolumen, welches pro Einheit der Radbreite in der zweiten Füllungsperiode in den Schaufelraum einfließt, also  $dq'$  dasselbe für ein Zeitelement  $dt$ , und ist der von  $\varepsilon e$  bis Null abnehmende Einmündungsbogen augenblicklich =  $z$ , somit die Einmündungsweite =  $z \sin \alpha$ , so ergibt sich mit einem empirischen Coefficienten  $\mu$ , der hier etwa = 0,9 veranschlagt werden mag:

$$dq' = \mu w' z \sin \alpha dt = \mu w' z \sin \alpha \frac{-dz}{v}$$

$$q' = \mu \frac{w'}{v} \sin \alpha \int_{\varepsilon e}^0 z (-dz) = \mu \frac{w'}{v} \frac{(\varepsilon e)^2}{2} \sin \alpha \dots \dots (11).$$

Zeichnet man den Schaufelraum in den Lagen, welche dem Anfange und dem Ende dieser zweiten Füllungsperiode entsprechen, wie es in Fig. 23 geschehen ist, und sind  $x = ED$ ,  $x' = E'D'$  die im Wasser liegenden Strecken der Mittellinien  $EC$ ,  $E'C'$ , so findet man  $x'$  aus  $x$  und  $q'$  ( $y'$  aus  $y$  und  $q'$ ), indem aus dem Mittelpunkte  $M$  mit dem Halbmesser  $MD$  ein Kreisbogen beschrieben wird, welcher  $E'C'$  in  $N$  schneidet, und indem eine Horizontale über  $N$  so gezogen wird, dass sie mit der Horizontalen durch  $N$  aus der Fläche des Schaufelraums ein Stück =  $q'$  ausschneidet; sie schneidet  $E'C'$  im Punkte  $D'$ , dessen Tiefe unter  $A_0 W_0$  mit  $y'$  bezeichnet wurde.

Die Länge  $x'$  oder vielmehr  $x' \sin \alpha$  ist aber durch das Aufschlagwasserquantum  $q$  pro Sek. und pro 1 Mtr. Radbreite bestimmt. Mit der obigen Bedeutung von  $\varepsilon$  kann nämlich gesetzt werden:

$$q = \frac{Q}{b} = \varepsilon x' \sin \alpha \frac{v + v_1}{2}$$

$$= \varepsilon x' \sin \alpha \left(1 - \frac{x' \sin \alpha}{2R}\right) v \dots \dots \dots (12).$$

Bei der grossen Zahl von Radelementen, welche hier in Betracht kommen, ist es kaum zu vermeiden, dieselben wesentlich durch Probiren so zu bestimmen, dass mit Berücksichtigung sonstiger Erfordernisse der Schaufelstellung das verlangte Wasserquantum aufgenommen werden kann, und zwar so aufgenommen wird, dass zu Ende der ersten Füllungsperiode eines Schaufelraums das Wasser in ihm nahe bis zur Höhe des Oberwasserspiegels  $A_0 W_0$  reicht. Bei gegebenem Gefälle  $H$  und Aufschlagwasserquantum  $Q$  werde letzteres hier durch Annahme in die Factoren  $b$  und  $q$  zerlegt. Angenommen werde ferner  $v$ ,  $R$ , wodurch  $\omega = \frac{v}{R}$  bestimmt ist, wogegen die Annahme von  $m$  (mit Rücksicht auf den Wasseraustritt nicht grösser, als die Gewinnung eines hinlänglich grossen Eintauchungswinkels  $\varphi_0$  erfordert) besser vorbehalten bleibt, bis die Lage von  $A_0 W_0$  gegen das Rad bestimmt ist. Durch die angenommene Zahl und Dicke der Schaufeln werden aber weiter  $e$  und  $\varepsilon$  festgesetzt. Aus (12) ergibt sich dann  $x' \sin \alpha$ , und können in der Zeichnung der Unter- und der Oberwasserspiegel eingetragen werden, ersterer ( $WS$ ) in noch zu besprechender Höhe  $t$  über dem tiefsten Punkt des Rades, letzterer ( $A_0 W_0$ ) um  $H$  Mtr. höher als jener, oder richtiger um

$$H - \frac{u^2}{2g} = H - \text{ca. } 2 \text{ Centimtr.}$$

höher. Die Lage von  $A_0 W_0$  bestimmt den Punkt  $A_0$  und führt zu passender Annahme von  $m$ , wodurch auch  $\alpha$  und  $r$ , sowie  $x'$  bestimmt sind. Jetzt handelt es sich noch um den Punkt  $A'$ , also um  $a_1$  und  $u = \frac{q}{a_1}$ . Es ist aber  $A'$  bestimmt durch den Schnittpunkt  $X$  von  $A_0 W_0$  mit der durch  $A'$  gehenden Tangente des Kreises ( $C$ ), welcher Punkt  $X$  nahe in der Mitte zwischen den Punkten  $D_0$  und  $D'_0$  liegt, in welchen  $A_0 W_0$  von der Mittellinie eines Schaufelraums zu Anfang und zu Ende der zweiten Füllungsperiode geschnitten wird. Zwischen diesen Punkten  $D_0$  und  $D'_0$  muss offenbar auch der Punkt  $X_0$  liegen, in welchem ein aus  $M$  mit dem Halbmesser  $R_1 = R - x' \sin \alpha$  beschriebener Kreis den Oberwasserspiegel schneidet, und liegt es nahe, den noch unbekanntem Punkt  $X$  zunächst in diesem schon bekannten Punkte  $X_0$  liegend anzunehmen, wodurch auch  $EC$  und  $E'C'$  bestimmt sind, sowie der Punkt  $D'$  als Schnittpunkt von  $E'C'$  mit jenem Kreise zum Halbmesser  $R_1$ ; die zu messende Tiefe von  $D'$  unter  $A_0 W_0$  ist  $= y'$ . Der mit  $X_0$  vorläufig zusammenfallend angenommene Punkt  $X$  bestimmt endlich  $a_1$  und  $u$ ; aber

jene Annahme bedarf noch der Controle und ev. der Berichtigung. Wird zu dem Ende  $y$  aus (8),  $q'$  aus (11) ermittelt, so müsste der hierdurch bestimmte Werth von  $y'$  mit dem obigen übereinstimmen, widrigenfalls die beiden entsprechenden horizontalen Geraden aus dem Kreise zum Halbmesser  $R_1$  einen kleinen Bogen herauschnitt, dessen mittlere Punkte corrigirte Lagen des Punktes  $D'$  wären, welche in leicht ersichtlicher Weise entsprechend corrigirte Lagen des Punktes  $A'$ , also corrigirte Werthe von  $a_1$  und  $u$  zur Folge haben. Dass übrigens  $y$  bei dieser Bestimmung von  $a_1$  als eine sehr kleine Grösse gefunden wird, wie verlangt wurde, ist leicht zu ermassen.

Einen ungünstigen Einfluss hat die Schaufelstellung des Sagebien-Rades auf den Austritt des Wassers. Sollte dieses möglichst widerstandslos in horizontaler Richtung ausfliessen in solchem Masse, dass die Wasseroberflächen aller sich entleerenden Schaufelräume in der Höhe des Unterwasserspiegels  $WS$  liegen, wie Fig. 23 andeutet, so müsste zu der durch  $bc$  in der Figur dargestellten Umfangsgeschwindigkeit  $v$  eine Relativgeschwindigkeit  $ab$  hinzutreten. Die absolute Ausflussgeschwindigkeit, dargestellt durch  $ac$ , wäre dann

$$u_1 = v \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \dots \dots \dots (13),$$

wo  $\psi$  der Nebenwinkel des hier stumpfen Winkels  $q$  ist und während des Ausflusses abnimmt. Ein genügender Mittelwerth von  $u_1$  würde sich mit dem Winkel  $\psi$  für eine nach Schätzung mittlere Lage des Austrittspunktes  $b$  ergeben. Die dieser mittleren Ausflussgeschwindigkeit  $u_1$  entsprechende Geschwindigkeitshöhe (lebendige Kraft) wäre für den Effect des Rades verloren, und es empfiehlt sich in der That, sie als Gefällverlust statt der kleineren Geschwindigkeitshöhe  $\frac{v^2}{2g}$  in Rechnung zu stellen, weil, wenn die zu Grunde liegende Voraussetzung nicht zuträfe, ein anderer, voraussichtlich nicht kleinerer Effectverlust die Folge davon sein würde.

Sehr wesentlich bei der grossen, mit dem ganzen Gefälle vergleichbaren Eintauchungstiefe dieser Räder ist der mit  $h_1$  bezeichnete, am Ende von §. 14 hinsichtlich seiner Bedeutung für Kropfräder besprochene Gefällverlust, mit Rücksicht auf welchen besonders eine passende Wahl der Wassertiefe  $t$  im Abflussgerinne wichtig ist, also der Eintauchungstiefe des Rades, da der Boden des Abflussgerinnes angemessener Weise gemäss Fig. 23 die tangential Fortsetzung des Kropfgerinnebodens bildet. Damit nämlich das mit der absoluten Geschwindigkeit  $u_1$  aus dem Rade

fließende nicht gegen das abfließende Wasser stosse und dadurch eine schädliche Welle wirbelnden Wassers hinter dem Rade aufwerfe, würde dem Abflussgerinne zunächst dem Rade eine Neigung zu geben sein, in- folge welcher das Wasser in ihm mit derselben Geschwindigkeit  $u_1$  strömt, entsprechend der Wassertiefe

$$t = \frac{q}{u_1},$$

wenn nicht dadurch andererseits eine zu grosse, zur Hälfte als Gefäll- verlust zu betrachtende Höhe des Wasserspiegels im tiefsten Schaufel- raum über  $WS$  verursacht würde. Diese Höhendifferenz würde ver- mieden durch

$$t = x' \sin \alpha,$$

also durch eine mittlere Geschwindigkeit im Abflussgerinne, welche nach (12):

$$\frac{q}{x' \sin \alpha} = \varepsilon \left( 1 - \frac{x' \sin \alpha}{2R} \right) v$$

wesentlich  $< v$  wäre. Mit Rücksicht auf diese sich widersprechenden Rücksichten wird es am besten sein, die Abflussgeschwindigkeit zwischen der zuletzt bestimmten und  $u_1$  zu wählen, etwa  $= \varepsilon v$ , entsprechend dem immer noch meistens erheblichen Gefällverluste:

$$h_1 = \frac{1}{2} (x' \sin \alpha - t) = \frac{1}{2} \left( x' \sin \alpha - \frac{q}{\varepsilon v} \right) \dots \dots \dots (14).$$

Wollte man ihn dadurch zu vermeiden suchen, dass das Kropfgerinne über  $U$  hinaus noch etwas fortgesetzt wird in solchem Betrage, dass der Unterwasserspiegel trotz  $t < x' \sin \alpha$  die Höhe  $x' \sin \alpha$  über  $U$  erhalte, so würde in den von  $U$  bis zum Ende des Kropfgerinnes befindlichen Schaufelräumen eine theilweise Wiedererhebung des Wassers stattfinden und somit im Wesentlichen der fragliche Gefällverlust nur an eine andere Stelle verlegt erscheinen. —

Beispielsweise sei  $H = 1$  Mtr. gegeben und werde angenommen:

$$q = 0,6 \quad v = 0,6 \quad R = 4.$$

Dann ist  $\omega = 0,15$  und bei der Annahme von 80 Schaufeln:

$$e = 0,314.$$

Hiermit und mit  $\varepsilon = 0,9$  folgt aus (12):

$$x' \sin \alpha = 1,333.$$

Nach der weiteren Annahme:

$$t = \frac{q}{\varepsilon v} = 1,111, \text{ entsprechend } h_1 = 0,111$$

nach (14), lassen sich die concentrischen Kreise um  $M$  mit den Halbmessern  $R$  und  $R_1 = R - x' \sin \alpha$  verzeichnen, sowie die Wasserspiegel  $WS$  und  $A_0W_0$  eintragen, deren letzterer jene Kreise in  $A_0$  und  $X_0$  schneidet. Der Winkel  $\varphi_0$  ergibt sich hinlänglich gross = nahe  $40^\circ$  mit

$$m = 0,8 \quad \sin \alpha = 0,98 \quad r = 3,92.$$

Hiermit lässt sich auch der Kreis ( $C$ ) verzeichnen, dessen durch  $X_0$  gehende betreffende Tangente den Punkt  $A'$  vorläufig bestimmt und damit

$$a_1 = 1,21 \quad \text{und} \quad u = 0,496$$

sowie auch die Mittellinien  $EC$  und  $E'C'$ , in letzterer den Punkt  $D'$ , dessen Tiefe  $y'$  unter  $A_0W_0$  durch Messung = 0,06 Mtr. gefunden wird. Mit den durch Zeichnung gefundenen Grössen

$$MG = 2,33 \quad D_0P = 2,90 \quad w = 0,40$$

ergibt sich jetzt aus (8) und (11):

$$y = 0,009 \quad \text{und} \quad q' = 0,014,$$

hiermit  $y' = 0,10$ . Von diesem letzteren Werthe in Betreff der Lage von  $D'$  ausgehend findet man auf dieselbe Weise ( $y$  und  $q'$  ändern sich dabei so wenig, dass sie keine Neuberechnung erfordern)  $y' = 0,08$ . Also die Annahme

$$y' = 0,06 \quad \text{gibt} \quad y' = 0,10, \quad \text{d. i.} \quad 0,04 \quad \text{zu viel,}$$

$$y' = 0,10 \quad \text{gibt} \quad y' = 0,08, \quad \text{d. i.} \quad 0,02 \quad \text{zu wenig,}$$

so dass auf einen wahren (sich selbst reproducirenden) Werth

$$y' = 0,087$$

zu schliessen ist. Die ihm entsprechend corrigirte Lage von  $A'$  ergibt

$$a_1 = 1,25 \quad \text{und} \quad u = 0,48.$$

Mit Hülfe der Zeichnung findet man auch im Mittel nahe

$$u_1 = 0,78. \quad -$$

Was den Wirkungsgrad eines Sagebien-Rades betrifft, so ist der Einfluss des Wassers mit einem nur kleinen Effectverluste verbunden. Zu dem hydraulischen Widerstande der Ueberfallschütze, der einen Gefällverlust = ungefähr  $0,1 \frac{u^2}{2g}$  verursacht, kommt ein Eintrittswiderstand im engeren Sinne, der für die erste Periode des Einfließens oben durch den Coefficienten  $\zeta = 0,15$ , auf die Geschwindigkeit  $w_1$  bezogen, geschätzt wurde, für die zweite Periode aber erheblich grösser ist. Für beide Perioden zusammen und bezogen auf die absolute Zuflussgeschwindigkeit  $u$  mag er zu durchschnittlich 0,3 veranschlagt, also der ganze Gefällverlust infolge des Zu- und Einflusses des Wassers



$$= 0,4 \frac{u^2}{2g}$$

gesetzt werden. Um so grösser ist der nach obigen Erwägungen

$$= \frac{u_1^2}{2g} + h_1$$

zu setzende Gefällverlust infolge der ungünstigen Art des Ausflusses, wo  $u_1$  und  $h_1$  durch (13) und (14) bestimmt sind. Mit Hinzufügung des Verlustes  $h_3$  infolge der Spielräume ist dann der resultirende Gefällverlust:

$$H_1 = 0,4 \frac{u^2}{2g} + \frac{u_1^2}{2g} + h_1 + h_3 \dots \dots \dots (15).$$

$h_3$  besteht aus zwei Theilen, welche, entsprechend den Spalten an den Aussenkanten der Schaufeln und den Seitenspalten längs den Bögen  $A'U$  (Figur 23) des Radkranzes, bezw. mit  $(h_3)$  und  $[h_3]$  bezeichnet seien; bei der Unsicherheit des der Spaltweite  $s$  im einzelnen Falle zuzuschreibenden Werthes genügt eine nur mässig angenäherte Bestimmung beider Theile von  $h_3$ . Nach §. 17 ist

$$(h_3) = 3,4 \frac{Rs}{eq} \int_0^{\vartheta} y \sqrt{z} d\varphi$$

zu setzen, wo  $\vartheta =$  Winkel  $UMA'$  ist und  $\varphi$  nicht den in Fig. 23 ebenso bezeichneten, sondern den Winkel bedeutet, welcher  $MU$  mit dem nach irgend einem Punkte des Bogens  $A'U$  gezogenen Halbmesser bildet. Hier ist  $z$  immer  $= y$ ; wenn also näherungsweise  $y = e \sin \varphi$  gesetzt wird, ist das Integral

$$= e \sqrt{e} \int_0^{\vartheta} \sin \varphi \sqrt{\sin \varphi} d\varphi.$$

Mit  $\varphi$  statt  $\sin \varphi$  wird es

$$= \frac{2}{5} e \sqrt{e} \vartheta^{\frac{5}{2}}$$

zu gross gesetzt, der Fehler aber theilweise corrigirt, wenn nachträglich zum Theil wieder  $\sin \vartheta$  für  $\vartheta$ , nämlich das Integral

$$= 0,4 e \sqrt{e} \cdot \vartheta \sin \vartheta \sqrt{\sin \vartheta}$$

gesetzt wird. Bezeichnet  $a'$  den Abstand des Punktes  $A'$  von der Verticalen  $MU$ , so ist  $\sin \vartheta = \frac{a'}{R}$  und somit näherungsweise:

$$(h_3) = 3,4 \frac{Rs}{eq} \cdot 0,4 e \sqrt{e} \cdot \vartheta \frac{a'}{R} \sqrt{\frac{a'}{R}} = 1,4 \frac{sa'}{q} \sqrt{\frac{ea'}{R}} \cdot \vartheta \dots (16).$$

Bei der kleinen Theilung  $e$  und der mässigen Grösse von  $\vartheta$  fallen die Fehler dieser Bestimmung wenig ins Gewicht.

In Betreff des Ausflusses durch die Seitenspalten kann man in dem Falle, dass  $A'$  unter dem Unterwasserspiegel  $WS$  liegt, also  $a_1 > H$  ist, näherungsweise annehmen, dass dieser Ausfluss durch je zwei in gleicher Höhe liegende Seitenspaltelemente  $= R d\varphi . s$  entsprechend derselben Druckhöhe  $h$  stattfindet, welche auch die resultirende Fallhöhe des ausgeflossenen Wassers bis  $WS$  darstellt, so dass der dadurch pro Sekunde verursachte Arbeitsverlust

$$= \gamma (\mu . 2 R d\varphi . s \sqrt{2gh}) h$$

ist. Der ganze von den Seitenspalten herrührende Arbeitsverlust pro Sek.  $= \gamma Q[h_3]$  ist das von 0 bis  $\vartheta$  genommene Integral dieses Ausdrucks, also

$$[h_3] = 2\mu\sqrt{2g} \frac{Rs}{Q} \int_0^{\vartheta} h \sqrt{h} . d\varphi.$$

Während  $\varphi$  zwischen Null und  $\vartheta$  veränderlich ist, ändert sich  $h$  zwischen Null und  $H$  ungefähr so, dass

$$h = H \frac{1 - \cos \varphi}{1 - \cos \vartheta}$$

gesetzt werden kann, also

$$[h_3] = 2\mu\sqrt{2g} \frac{Rs}{Q} \left( \frac{H}{1 - \cos \vartheta} \right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\vartheta} (1 - \cos \varphi)^{\frac{3}{2}} d\varphi \dots (17).$$

Wird das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral mit  $J$ , sowie  $\frac{\varphi}{2}$  mit  $x$  bezeichnet, so ist

$$J = \int_0^{\vartheta} \left( 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \right)^{\frac{3}{2}} d\varphi = 4\sqrt{2} \int_0^{\frac{\vartheta}{2}} \sin^3 x dx.$$

Bekanntlich ist aber

$$\int_0^x \sin^3 x dx = -\frac{1}{3} \cos x (2 + \sin^2 x) + \frac{2}{3}$$

oder, wenn mit grosser Annäherung, sofern  $x$  ein kleiner Winkel ist,

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} \sin^4 x$$

gesetzt wird und auch bei der Multiplication nur noch Glieder bis mit  $\sin^4 x$  berücksichtigt werden,

$$\begin{aligned} \int_0^x \sin^3 x \, dx &= \frac{1}{3} \left[ - \left( 1 - \frac{1}{2} \sin^2 x - \frac{1}{8} \sin^4 x \right) (2 + \sin^2 x) + 2 \right] \\ &= \frac{1}{3} \left[ -2 + \sin^2 x + \frac{1}{4} \sin^4 x \right. \\ &\quad \left. - \sin^2 x + \frac{1}{2} \sin^4 x + 2 \right] = \frac{1}{4} \sin^4 x. \end{aligned}$$

Hiernach ist  $J = \sqrt{2} \cdot \sin^4 \frac{\vartheta}{2}$

$$\frac{J}{(1 - \cos \vartheta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{J}{\left( 2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2} \right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2} \sin^4 \frac{\vartheta}{2}$$

und nach (17) mit  $u \sqrt{2g} = 3,4$ :

$$[h_3] = 3,4 \frac{R s}{Q} H \sqrt{H} \sin^4 \frac{\vartheta}{2} \dots \dots \dots (18).$$

Im Falle  $a_1 < H$  ist dieser Ausdruck zu gross, indem dann zwar die vom Wasserspiegel im betreffenden Schaufelraume bis zum Unterwasserspiegel zu rechnende gesammte Fallhöhe eines ausfliessenden Wassertheilchens nach wie vor zwischen 0 und  $H$  veränderlich ist, dagegen die für die Ausflussmenge massgebende Druckhöhe nur wenig  $> a_1$  werden kann, diesen grössten oder einen nur wenig kleineren Werth freilich um so länger behält, je mehr  $H > a_1$  ist. Schätzungsweise kann diesen Umständen dadurch Rechnung getragen werden, dass dann

$$H \sqrt{\frac{H + a_1}{2}} \text{ statt } H \sqrt{H}$$

in Gl. (18) gesetzt wird.

Bei obigem Beispiele war

$$w = 0,48 \quad u_1 = 0,78 \quad h_1 = 0,111.$$

Also ist nach (15):

$$H_1 = 0,147 + h_3.$$

Ferner war

$$H = 1 (< a_1), \quad R = 4, \quad e = 0,314, \quad q = 0,6$$

und ergibt sich aus der Zeichnung:

$$a' = 2,47 \text{ und } \vartheta = \arcsin \frac{a'}{R} = 0,666 (38^\circ 8').$$

Hiermit folgt aus (16) und (18):

$$(h_3) = 1,69 s \text{ und } [h_3] = 4,44 \frac{s}{Q},$$

also beispielsweise mit  $s = 0,015$  und  $Q = 2$ :

$$h_3 = (h_3) + [h_3] = 0,059$$

$$H_1 = 0,147 + 0,059 = 0,206.$$

Die Reibung der Wasserradwelle in den Lagern ist des bedeutenden Radgewichtes wegen verhältnissmässig gross, wogegen die sonstigen nebensächlichen Widerstände, insbesondere der Luftwiderstand und die Wasserreibung im Kropf, wegen der kleinen Geschwindigkeiten weniger erheblich sind. Der Effectverlust  $E_1$  durch alle diese Nebenwiderstände zusammen dürfte hier mit 5,4 % des absoluten Effects reichlich veranschlagt sein, entsprechend einem resultirenden Wirkungsgrad:

$$\eta = 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0} = 0,74.$$

Derselbe ist wesentlich grösser, als der nach vorigem Paragraph den gewöhnlichen tiefschlächtigen Rädern bei gleichem Gefälle zukommende. Aber freilich wird dieser Vortheil grossentheils aufgewogen durch die wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit des Rades meistens erforderliche complicirtere Transmission und durch grössere Herstellungskosten des Rades selbst. Zuppinger hat die entgegengesetzten Rücksichten dadurch zu vermitteln und das Rad (in Betreff des Wasseraustritts) zu verbessern gesucht, dass er ihm einen kleineren Durchmesser bei trotzdem etwas grösserer Umfangsgeschwindigkeit gab und etwas nach vorn convex gekrümmte, nach aussen radial verlaufende Schaufeln.

## 2. Unterschlächtige Wasserräder.

### §. 24. Das unterschlächtige Stossrad im Gerinne.

Solche Räder sind die einfachsten, aber auch freilich sehr unvollkommene Motoren zur Verwerthung kleiner Gefälle bis zu etwa 1 Mtr. Die gewöhnlichsten haben radial gestellte ebene Schaufeln und bewegen sich in einem sogenannten Schnurgerinne, d. h. in einem ganz geraden, etwas abwärts geneigten Gerinne, in welchem das Aufschlagwasser, regulirt durch eine Spansschütze, deren Oeffnung bis zum Boden und zu den Seitenwänden des Gerinnes sich erstreckt, mit der Geschwindigkeit  $u$  dem Rade zufliesst. Um den dieser verhältnissmässig grossen Geschwindigkeit entsprechenden Effectverlust durch Reibung an der Gerinnewand zu vermindern, ist es zweckmässig, den Weg von der Schütze bis zum Eintritt in das Rad so klein wie möglich zu machen, was besonders durch Schräg-

stellung der Schütze erzielt werden kann. Indem die Geschwindigkeit  $u$  durch den Stoss in die kleinere Geschwindigkeit  $v$  = der Umfangsgeschwindigkeit des Rades übergeht, welche nur wenig  $> 0,4 u$  zu sein pflegt, geht die Dicke  $a_1$  des zufließenden Wasserstroms von etwa 0,12 bis 0,15 Mtr. in  $a_2$  nahe  $= 2,5 a_1$  über, wodurch das Bedürfniss einer Kranzbreite  $a$  von wenigstens etwa  $3 a_1 = 0,35 - 0,45$  Mtr. bedingt wird. Im Falle des Schnurgerinnes hat diese grössere Stromtiefe  $a_2$  des vom Rade wegfließenden Wassers eine Erhebung der Oberfläche um  $a_2 - a_1$  über die Oberfläche des dem Rade zufließenden Wassers zur Folge, und es ist unter solchen Umständen, wenn  $\zeta$  den Widerstandscoefficienten der Schütze mit Schussgerinne von ihr bis zum Rade bedeutet,

$$(1 + \zeta) \frac{u^2}{2g} = H + a_2 - a_1 \dots \dots \dots (1),$$

sowie auch (siehe den Schluss von §. 15) ein gewisser Vortheil hinsichtlich des Wasserverlustes durch den Spielraum zwischen Rad und Gerinneboden damit verbunden ist. Indessen werden doch diese Umstände mehr als aufgewogen durch einen Gegendruck auf die Schaufeln und durch die sonstigen Nachtheile zu tiefen Eintauchens derselben, so dass es besonders dann, wenn bei veränderlichem Wasserstande diese Eintauchungstiefe erheblich wachsen könnte, besser ist, jene Erhebung  $= a_2 - a_1$  der Wasseroberfläche durch einen entsprechenden Abfall des Gerinnes hinter dem Rade zu verhindern. Dieser Abfall ist dann passend an einen schwachen Kropf anzuschliessen, der unten das Rad beiderseits vom tiefsten Punkte  $U$  längs je einem Bogen  $=$  ungefähr dem Theilbogen  $e$  umgibt und welcher aus den in §. 15 erörterten Gründen den Wasserverlust wesentlich verkleinert. Ein solches übrigens gerade Gerinne mit kropffartiger Höhlung seines Bodens unter dem Rade und einem an diese sich unmittelbar anschliessenden Abfall (siehe die später im §. 27 besprochene ähnliche Disposition eines Poncelet-Rades) werde zur Unterscheidung vom eigentlichen Schnurgerinne hier kurz als Kropfgerinne bezeichnet. Die im Falle des Schnurgerinnes zuweilen angewendeten sogenannten Pansterzeuge zur Hebung und Senkung des Rades beim Steigen und Fallen des Wassers sind insofern unvollkommen, als sie zur Zulassung grösserer Spielraumweiten  $s$  selbst unter normalen Umständen Veranlassung geben.

Der Wirkungsgrad  $\eta$  eines unterschlächtigen Stossrades ist jedenfalls  $< 0,5$ , da ein Stossgefälle immer nur höchstens zur Hälfte verwerthet werden kann, wie schon im §. 18 unter 2) gefunden wurde, hier aber das ganze disponible Gefälle  $H$  Stossgefälle ist; wegen sonstiger

Verluste, wie besonders des Wasserverlustes, ist er thatsächlich viel  $< 0,5$ . Sein vollständiger Ausdruck ist nach §. 17:

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_1}{Q}\right) \left(1 - \frac{H_1}{H}\right) - \frac{E_1}{E_0},$$

worin für den verhältnissmässigen Wasserverlust  $\frac{Q_1}{Q}$ , den verhältnissmässigen Gefällverlust  $\frac{H_1}{H}$  und den verhältnissmässigen Effectverlust  $\frac{E_1}{E_0}$  durch nebensächliche Widerstände (Zapfenreibung, Luftwiderstand u. a.) die hier zutreffenden Ausdrücke (Functionen bezüglicher Radelemente) oder erfahrungsmässig angemessene Zahlenwerthe zu setzen sind. Zunächst ist

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{a_1} \left[ s + \frac{e^2}{24 R} \left( \frac{u}{u-v} \right)^2 \right] \dots \dots \dots (2),$$

von welchem Ausdrücke nach §. 15 im Falle eines Kropfgerinnes das zweite Glied gestrichen, dagegen bei einem Schnurgerinne für die Weite  $s$  des Spielraums der etwas kleinere Werth

$$s_1 = s \left( 1 - 0,8 \frac{a_1}{H} \right) \dots \dots \dots (3)$$

gesetzt werden kann. Der Gefällverlust  $H_1$  ist mit obiger Bedeutung von  $\zeta$ , sowie mit Rücksicht darauf, dass hier das Wasser dem Rade tangential zufliesst, also  $w = u - v$ , sowie auch, wenigstens bei radial gerichteten Schaufeln, die relative Stosseschwindigkeit  $w_1 = w$  ist,

$$H_1 = \zeta \frac{u^2}{2g} + \frac{(u-v)^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = (1 + \zeta) \frac{u^2}{2g} - \frac{uv}{g} + \frac{v^2}{g}.$$

Wenn man aber den Gegendruck des Unterwassers, welcher im Falle des Schnurgerinnes der Erhebung um den Betrag  $a_2 - a_1$  entspricht, nicht besonders als Widerstand in Rechnung bringt, ist er auch bezüglich  $u$  ausser Acht zu lassen und somit statt (1) in allen Fällen

$$(1 + \zeta) \frac{u^2}{2g} = H$$

zu setzen. Damit wird

$$\frac{H_1}{H} = 1 - \frac{(u-v)v}{gH} \dots \dots \dots (4).$$

Mit der Bezeichnung  $\vartheta$  für  $\frac{E_1}{E_0}$ ,  $\sigma$  für  $\frac{Q_1}{Q}$  ist also

$$\eta = (1 - \sigma) \frac{(u-v)v}{gH} - \vartheta \dots \dots \dots (5).$$

Von Wichtigkeit ist die Frage nach dem vortheilhaftesten Gange des Rades, nämlich nach der Umfangsgeschwindigkeit  $v$ , bei welcher unter übrigens gegebenen Umständen  $\eta$  am grössten ist; eine mehr oder weniger willkürliche Annahme in dieser Hinsicht, wie bei den in den §§. 19—23 besprochenen Rädern, ist hier ausgeschlossen. Wären  $\sigma$  und  $\vartheta$  unabhängig von  $v$ , so wäre nach (5) der Wirkungsgrad am grössten für

$$(u - v)v = \max, \text{ also } v = 0,5 u.$$

Indem aber  $\vartheta$  mit  $v$  wächst, wie namentlich die Ausdrücke von  $E_1$  und  $E_2$ , §. 17, ersehen lassen, im Falle des Schnurgerinnes auch  $\sigma$  gemäss der Form des zweiten Gliedes des Ausdruckes (2) um so grösser ist, je grösser  $v$ , lässt sich schliessen und wird es durch die Erfahrung bestätigt, dass thatsächlich das Maximum von  $\eta$  einer Geschwindigkeit  $v$  etwas  $< 0,5 u$  entspricht. Aus zahlreichen, freilich nur an Modellrädern angestellten Versuchen ergibt sich im Durchschnitt

$$\eta = \max \text{ für } v = 0,4 \sqrt{2gH} \dots\dots\dots (6),$$

und da nach Versuchen von Poncelet, über welche im Bd. I, §. 85 unter 2) berichtet wurde,

$$u = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{2gH}{1,15}} \dots\dots\dots (7)$$

gesetzt werden kann (entsprechend einem Geschwindigkeitscoefficienten  $= \sqrt{\frac{1}{1,15}} = 0,933$ ), folgt

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{\sqrt{1,15 \cdot 0,16}} = \frac{1}{0,429} = 2,33 \dots\dots\dots (8)$$

$$\frac{(u - v)v}{gH} = 1,33 \cdot 0,32 = 0,426,$$

somit nach (5) der Wirkungsgrad bei vortheilhaftestem Gange:

$$\eta = 0,426 (1 - \sigma) - \vartheta \dots\dots\dots (9).$$

Bei einem Rade mit Kropfgerinne kann  $\sigma = \frac{s}{a_1}$  gesetzt werden, durchschnittlich etwa

$$\sigma = \frac{0,015}{0,12} = \frac{1}{8}$$

Mit  $\vartheta = 0,06$  ist dann  $\eta = 0,31$ .

Bei einem gemeinen Rade im Schnurgerinne wird die Weite des Spielraums wenigstens = 0,02 Mtr. zu setzen sein, welche indessen nach

(3) nur theilweise in Rechnung gestellt zu werden braucht, insbesondere z. B. mit

$$s_1 = 0,02 \left( 1 - 0,8 \frac{0,12}{0,5} \right) = 0,016$$

für  $a_1 = 0,12$  und  $H = 0,5$  Mtr. Dagegen kommt jetzt noch das zweite Glied im Ausdrucke (2) von  $\sigma$  in Betracht. Hätte z. B. das Rad 40 Schaufeln bei  $R = 3$  Mtr. Halbmesser, entsprechend einer Theilung

$$e = \frac{2\pi \cdot 3}{40} = 0,47 \text{ Mtr.},$$

so ergäbe sich mit  $u = 2,33 v$ :

$$\sigma = \frac{1}{0,12} (0,016 + 0,009) = 0,208$$

und, wenn wieder  $\beta = 0,06$  angenommen wird, nach (9):

$$\eta = 0,28.$$

In Folge grösserer Spaltweite ist der Wirkungsgrad oft noch erheblich kleiner. Er kann etwas vergrössert werden durch eine (bis zu etwa  $30^\circ$  gehende) Neigung der ebenen Schaufeln gegen die radiale Richtung in solchem Sinne, dass sie sich mehr vertical aus dem Wasser erheben. Diese Neigung vermindert hier nicht nur den Widerstand des Unterwassers, sondern auch den Stossverlust. Letzterer entspricht dann nämlich nur der normal gegen die Schaufel gerichteten Componente von  $u$ , während mit der längs derselben gerichteten Geschwindigkeitscomponente das Wasser an ihr emporfliesst und hierbei, sowie beim Zurückfliessen durch stetige Druckwirkung einen Theil seines verbliebenen Arbeitsvermögens an das Rad abgibt. Es nähert sich somit die Art der Wirkung einigermaßen der des Poncelet-Rades. Indessen darf die Neigung der Schaufeln nicht so gross sein, dass das zurückfliessende Wasser erst dann die äussere Schaufelkante erreichen würde, wenn dieselbe sich bereits um eine gewisse Höhe aus dem Unterwasser erhoben hätte: diese Höhe wäre als entsprechender Gefällverlust zu betrachten. Besonders bei geringerer Eintauchungstiefe des Rades mit Gerinneabfall könnte so der Vortheil geneigter Schaufelstellung leicht durch einen grösseren Nachtheil mehr als aufgewogen werden, und ist es überhaupt vorzuziehen, zum Poncelet-Rade mit passend gekrümmten Schaufeln überzugehen, falls die Stosswirkung thunlichst durch stetige Druckwirkung bei unterschlächtigen Rädern ersetzt werden soll und nicht den Umständen gemäss die Einfachheit des Baues Haupterforderniss ist.



## §. 25. Theilung der Wasserkraft.

Eine vollständigere Ausnutzung der Wasserkraft (des Arbeitsvermögens, welches der vom Gefälle  $H$  herrührenden Ausflussgeschwindigkeit  $u$  aus der Schutzöffnung entspricht) lässt sich bei unterschlächtigen Rädern im Schnurgerinne dadurch erzielen, dass deren mehrere hinter einander in demselben Gerinne angeordnet werden. Setzt man nämlich den Nutzeffect eines solchen mit Rücksicht auf Gl. (4) im vorigen Paragraph:

$$\begin{aligned} E &= \gamma(Q - Q_1)(H - H_1) - E_1 \\ &= \mu Q(H - H_1) = \frac{\mu Q}{g}(u - v)v, \end{aligned}$$

wo mit der Bezeichnung  $\sigma$  für  $\frac{Q_1}{Q}$  der Coefficient  $\mu$  etwas  $< \gamma(1 - \sigma)$  ist, sind ferner  $v_1, v_2 \dots v_n$  die Umfangsgeschwindigkeiten der im Allgemeinen  $n$  Räder, und ist das Gerinne so wenig geneigt, dass die dem Gefälle entsprechende Componente der Schwere mit dem Widerstande des Gerinnes im Gleichgewicht ist, also die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers aus irgend einem Rade = der Einflussgeschwindigkeit in das folgende gesetzt werden kann, so sind die Nutzeffekte der  $n$  Räder:

$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\mu_1 Q}{g}(u - v_1)v_1 \\ E_2 &= \frac{\mu_2 Q}{g}(v_1 - v_2)v_2 \\ &\vdots \\ E_n &= \frac{\mu_n Q}{g}(v_{n-1} - v_n)v_n. \end{aligned}$$

Die Coefficienten  $\mu$  sind zwar streng genommen Functionen der Geschwindigkeiten, und es ist

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots$$

besonders deshalb, weil die Tiefe des den Rädern zufließenden Wassers immer grösser und somit  $\sigma$  immer kleiner wird. Sieht man aber hiervon ab, setzt vielmehr alle jene Coefficienten  $\mu_1, \mu_2 \dots$  = einem constanten Mittelwerthe  $\mu$ , so folgt der Gesamteffect aller Räder:

$$\Sigma E = \frac{\mu Q}{g}[(u - v_1)v_1 + (v_1 - v_2)v_2 + \dots + (v_{n-1} - v_n)v_n] \dots (1).$$

Damit er ein Maximum sei, müssen die Differentialquotienten nach  $v_1, v_2 \dots$  einzeln = 0, muss also

$$\begin{aligned} u - 2v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 &= 0 \\ &\vdots \\ v_{n-2} - 2v_{n-1} + v_n &= 0 \\ v_{n-1} - 2v_n &= 0 \end{aligned}$$

sein, woraus successive folgt:

$$u - v_1 = v_1 - v_2 = v_2 - v_3 = \dots = v_{n-1} - v_n = v_n,$$

also

$$v_n = \frac{1}{n+1} u, \quad v_{n-1} = \frac{2}{n+1} u \dots v_2 = \frac{n-1}{n+1} u, \quad v_1 = \frac{n}{n+1} u$$

$$\begin{aligned} \Sigma E &= \mu Q \frac{u^2}{g} \left[ \frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n-1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \right] \\ &= \frac{n}{n+1} \mu Q \frac{u^2}{2g} \dots \dots \dots (2). \end{aligned}$$

Bei einem einzigen Rade oder bei mehreren gleichen Rädern neben einander hätte man

$$E = \frac{\mu Q}{g} (u - v) v = \frac{1}{2} \mu Q \frac{u^2}{2g} \text{ mit } v = \frac{u}{2} \dots \dots \dots (3),$$

und es ist also der durch  $n$  Räder hinter einander höchstens erzielbare verhältnissmässige Gewinn:

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = \frac{n-1}{n+1} = 0,33 \quad 0,5 \quad 0,6 \dots$$

für  $n = 2 \quad 3 \quad 4 \quad \dots$ ,

mit wachsender Zahl  $n$  der Grenze 1 sich nähernd.

Die Nutzeffekte  $E_1 \dots E_n$  der einzelnen Räder nehmen hierbei im Verhältnisse der ganzen Zahlen  $n \dots 1$  successive ab, was aber in der Regel nicht zweckmässig sein wird. Besser selbst auf Kosten der Grösse des Effectgewinnes erscheint eine solche Wahl der Umfangsgeschwindigkeiten, dass die Nutzeffekte aller hinter einander gelagerten  $n$  Räder gleich gross sind. Wird dann hier dasjenige dieser Räder als erstes bezeichnet, welchem das Wasser zuletzt zufliesst, so ist nach (1):

$$\Sigma E = \frac{\mu Q}{g} [(u - v_n) v_n + \dots + (v_3 - v_2) v_2 + (v_2 - v_1) v_1]$$

mit der Bedingung

$$(u - v_n) v_n = \dots = (v_3 - v_2) v_2 = (v_2 - v_1) v_1 \dots \dots \dots (4),$$

zu welcher, weil sie nur  $n-1$ , somit zur Bestimmung der Umfangsgeschwindigkeiten nicht ausreichende Gleichungen liefert, noch

$$v_2 = 2v_1$$

als nahe dem vortheilhaftesten Gange des ersten Rades entsprechend hinzugenommen werde. Der Werth der durch (4) einander gleich gesetzten Producte ist dann  $= v_1^2$  und

$$\Sigma E = n \mu Q \frac{v_1^2}{g} = 4n \left( \frac{v_1}{u} \right)^2 E \dots \dots \dots (5)$$

mit Rücksicht auf (3), während aus (4) successive folgt:

$$v_3 = \frac{v_1^2}{v_2} + v_2 = \left( \frac{1}{2} + 2 \right) v_1 = \frac{5}{2} v_1$$

$$v_4 = \frac{v_1^2}{v_3} + v_3 = \left( \frac{2}{5} + 5 \right) v_1 = \frac{29}{10} v_1$$

$$v_5 = \left( \frac{10}{29} + \frac{29}{10} \right) v_1 = \frac{941}{290} v_1 \text{ u. s. f.}$$

Bei  $n = 2$  Rädern ist  $v_3 = u$ , also

$$v_1 = \frac{2}{5} u, \quad v_2 = \frac{4}{5} u$$

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = 4 \cdot 2 \left( \frac{2}{5} \right)^2 - 1 = 0,28.$$

Bei  $n = 3$  Rädern ist  $v_4 = u$ , also

$$v_1 = \frac{10}{29} u, \quad v_2 = \frac{20}{29} u, \quad v_3 = \frac{25}{29} u$$

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = 4 \cdot 3 \left( \frac{10}{29} \right)^2 - 1 = 0,43.$$

Bei  $n = 4$  Rädern ist  $v_5 = u$ , also

$$v_1 = \frac{290}{941} u, \quad v_2 = \frac{580}{941} u, \quad v_3 = \frac{725}{941} u, \quad v_4 = \frac{841}{941} u$$

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = 4 \cdot 4 \left( \frac{290}{941} \right)^2 - 1 = 0,52.$$

Wie man sieht, kommt der mit gleichem Nutzeffect aller Räder erreichbare Effectgewinn dem oben bestimmten Maximum ziemlich nahe. Im Vergleich mit einem einzigen Rade wird er freilich abgeschwächt durch Vergrößerung des Luftwiderstandes, der Zapfenreibung und der Anlagekosten, und tritt er hauptsächlich erst hervor im Vergleich mit mehreren Rädern nebeneinander, wenn nämlich eine Theilung der Wasserkraft an und für sich schon aus anderen Gründen nöthig oder wünschenswerth ist.

Zu solcher Theilung der Wasserkraft kann auch bei anderen Arten von Wasserrädern Veranlassung vorhanden sein, wenn ein Rad zu gross

ausfallen würde oder wenn verschiedene Arbeitsmaschinen durch Wasserkraft zu treiben sind, welche unabhängig von einander auf möglichst vortheilhafte Weise sollen in und ausser Betrieb gesetzt werden können. Während bei unterschlächtigen Stossrädern diese Theilung der Wasserkraft, wie sich gezeigt hat, am besten durch Theilung der durch das Gefälle erzeugten lebendigen Kraft geschieht, wäre bei den vorzugsweise unmittelbar durch das Gewicht des niedersinkenden Wassers wirkenden ober- und rücksenschlächtigen Rädern der Zweck durch Theilung des Gefälles zu erzielen, wenn nicht bei solchen Rädern stets  $\eta$  um so kleiner wäre, je kleiner  $H$ , und wenn nicht bei der Theilung von  $H$  eine in den meisten Fällen wohl kaum erwünschte sehr verschiedene Lagerungshöhe der einzelnen Räder erforderlich würde. Es wird deshalb hier am vortheilhaftesten sein, das Gefälle  $H$ , wenn es nicht übermässig gross ist, allen Rädern unverkürzt zu erhalten und vielmehr die Wassermenge  $Q$  unter sie zu vertheilen. Bei mittel- und tiefschlächtigen Rädern kann es zweifelhafter sein, ob die Theilung von  $H$  oder von  $Q$  vorzuziehen ist; die Rücksicht auf praktische Anordnung dürfte für letzteres auch hier meistens den Ausschlag geben.

#### §. 26. Unterschlächtige Räder im freien Strom.

Die vermuthlich ältesten, zum Betriebe von Mühlen und von Wasserschöpfmaschinen schon im frühen Alterthume vorkommenden Wasserräder benutzen das freie Arbeitsvermögen des in Flussbetten strömenden Wassers ohne weiteren Aufstau oder weitere Einengung desselben, als es die Anordnung des Rades bis zu einem gewissen Grade von selbst mit sich bringt. Bei der hauptsächlichsten Verwendung zum Mühlenbetriebe pflegt die Radwelle von zwei prahmartig mit flachen Böden gebauten Schiffen getragen zu werden, von dem grösseren sogenannten Hausschiffe, welches das Mühlwerk enthält, und dem Welschiffe, welches durch Balken und Laufbrücke mit jenem verbunden ist; beide zusammen liegen im Flusse vor Anker oder sind am Ufer befestigt. Die Bezeichnung solcher Räder als Schiffmühlenräder wird auch auf die ganze Gattung übertragen. Bei  $R = 2 - 3$  Mtr. Halbmesser haben sie gewöhnlich eine Breite  $b = 2 - 5$  Mtr. und eine Kranzbreite  $a = 0,25 R$  ungefähr, also  $= 0,5 - 0,75$  Mtr. Der Radkranz hat dabei nur die früher erklärte und hier stets zu Grunde liegende geometrische Bedeutung, indem die ebenen und meistens radialen Schaufeln von geringerer Zahl (selten mehr als 16 bis 20) abgesehen von geeigneter Verstrebung unter sich nur an den

Radarmen (ohne Boden und Seitenwände des Kranzes) befestigt sind. Da das mit mässiger Geschwindigkeit  $u$  strömende und dem Rade zufließende Wasser nur wenig an den Schaufeln emporsteigen, übrigens auch nach dem Stosse nicht nur nach oben, sondern nach allen Seiten ausweichen kann, ist es zulässig und passend, zur Fassung eines möglichst tiefen Wasserstroms die Schaufeln wesentlich mehr, als bis zur Hälfte ihrer Höhe  $a$  eintauchen zu lassen.

In dem allgemeinen Ausdrücke des Nutzeffects:

$$E = \gamma(Q - Q_1)(H - H_1) - E_1 \dots \dots \dots (1)$$

kann, wie beim unterschlächtigen Stossrade im Gerinne (§. 24, Gl. 4),

$$H - H_1 = \frac{(u - v)v}{g} \dots \dots \dots (2)$$

gesetzt werden unter der (hier freilich weniger vollkommen zutreffenden) Voraussetzung, dass das zum Stoss gelangende Wasser durch diesen Stoss die Umfangsgeschwindigkeit  $v$  des Rades annimmt. Ausserdem ist hier

$$Q = Fu = a_1 b u \dots \dots \dots (3)$$

zu setzen, unter  $F$  die (bei verticaler Stellung) eingetauchte Schaufelfläche,  $a_1$  die Eintauchungstiefe verstanden, während dann der verhältnissmässige Wasserverlust nur = dem zweiten Gliede des Ausdrucks (2) in §. 24:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{24} \frac{e^2}{R a_1} \left( \frac{u}{u - v} \right)^2 \dots \dots \dots (4)$$

ist, welcher dem Umstande entspricht, dass das zufließende Wasserquantum nicht vollständig (wegen grösserer Entfernung  $e$  der aufeinander folgenden Schaufeln oft nur ziemlich unvollständig) zum Stosse gelangt. Die Einsetzung dieser Werthe (2)–(4) in Gl. (1) giebt:

$$E = \frac{\gamma F u}{g} \left[ 1 - \frac{1}{24} \frac{e^2}{R a_1} \left( \frac{u}{u - v} \right)^2 \right] (u - v)v - E_1 \dots \dots (5).$$

Dem Umstande, dass das am Rande, wo es unbehindert ausweichen kann, gegen die Schaufeln treffende Wasser nicht vollkommen die Geschwindigkeit  $v$  durch den Stoss annimmt, kann durch rechnungsmässige Verkleinerung von  $F$  oder durch Vergrösserung von  $E_1$  Rechnung getragen werden. Indessen ist, was den Ausdruck (4) betrifft, hier ausserdem (wie die betreffende Untersuchung im §. 15 erkennen lässt) die Länge des unter Wasser befindlichen Umfangsbogens des Rades

$$> e \frac{u}{u - v}$$

vorausgesetzt. Dies erfordert eine Eintauchungstiefe

$$a_1 > \frac{1}{2R} \left( \frac{e}{2} \frac{u}{u-v} \right)^2$$

oder eine Schaufelzahl

$$z = \frac{2\pi R}{e} > 2\pi R \left( \frac{1}{2} \frac{u}{u-v} \frac{1}{\sqrt{2Ra_1}} \right)$$

$$z > \pi \frac{u}{u-v} \sqrt{\frac{R}{2a_1}}, \text{ nahe } z > \frac{u}{u-v} \sqrt{\frac{5R}{a_1}} \dots \dots \dots (6),$$

indem  $\pi^2$  nahe = 10 ist. Diese Bedingung findet sich mit  $z \leq 10$  erfüllt, wenn

$$\frac{u}{u-v} \sqrt{\frac{5R}{a_1}} < 10, \quad \frac{a_1}{R} > 0,05 \left( \frac{u}{u-v} \right)^2$$

oder bei Voraussetzung des erfahrungsmässig nahe vortheilhaftesten Geschwindigkeitsverhältnisses  $v = 0,4u$ , wenn

$$\frac{a_1}{R} > 0,05 \frac{25}{9}, \text{ d. i. } a_1 > 0,14 R$$

ist, was mit  $a_1$  wesentlich  $> 0,5a$  und  $a = 0,25R$  in der That der Fall sein wird.

Sofern der Gang des Rades von dem vortheilhaftesten nicht erheblich verschieden ist, kann in dem auf den Wasserverlust bezüglichen Factor des Ausdrucks (5) von  $E$

$$v = 0,4u, \text{ also } \left( \frac{u}{u-v} \right)^2 = \frac{25}{9}$$

gesetzt werden. Mit  $e = \frac{2\pi R}{z}$  ist er dann

$$= 1 - \frac{4,6 R}{a_1 z^2},$$

und wenn ferner statt der Subtraction von  $E_1$  das Hauptglied mit einem Factor  $\mu < 1$  multiplicirt wird, welcher zugleich der unvollkommenen Stosswirkung an den Schaufelrändern Rechnung trägt, ergibt sich

$$E = \mu \frac{\gamma Fu}{g} \left( 1 - \frac{4,6 R}{a_1 z^2} \right) (u-v) v \dots \dots \dots (7).$$

Mit der Erfahrung scheint dieser Ausdruck in ziemlich guter Uebereinstimmung zu sein, wenn

$$\mu = 0,88 \text{ oder } \frac{\mu \gamma}{g} = 90$$

gesetzt wird, also

$$E = 90 \left( 1 - \frac{4,6 R}{a_1 z^2} \right) F u (u - v) v \dots \dots \dots (8)$$

oder auch

$$E = 90 \left( 1 - \frac{25}{z^2} \right) F u (u - v) v \dots \dots \dots (9),$$

entsprechend  $a_1 = 0,184 R$  im Durchschnitt. Von der Schaufelzahl  $z$  bleibt  $E$  in hohem Grade abhängig, indem

für  $z = 10$  bis  $20$ 

$$90 \left( 1 - \frac{25}{z^2} \right) = 67,5 \quad , \quad 84,4$$

sich ergibt. Setzt man in Gl. (7)

$$\mu \left( 1 - \frac{4,6 R}{a_1 z^2} \right) = 0,88 \left( 1 - \frac{25}{z^2} \right) = \mu_1$$

und  $v = 0,4 u$ , so wird

$$E = \mu_1 \frac{\gamma Q}{g} \cdot 0,24 u^2 = 0,48 \mu_1 \gamma Q \frac{u^2}{2g},$$

entsprechend einem Wirkungsgrade

$$\eta = 0,48 \mu_1 = 0,32 \text{ bis } 0,40$$

für  $z = 10$             „     $20$ .

Dass er etwas grösser ist, als bei unterschlächtigen Stossrädern im Gerinne, liegt an der anderen Auffassung von  $Q$ , bei welcher Spielräume nicht in Betracht kommen, sowie daran, dass hier  $u$  eine gegebene Grösse und nicht erst mit Verlust aus einem Gefälle  $H$  zu gewinnen ist. Uebrigens ist dieses  $\eta$  hier ohne technisch-wirtschaftliche Bedeutung.

#### §. 27. Das Poncelet-Rad.

Dasselbe bezweckt dadurch eine bessere Verwerthung der durch das Gefälle ausserhalb des Rades erzeugten lebendigen Kraft des Wassers, dass dieses, indem es an der hohlen Seite passend gekrümmter Schaufeln (von Eisenblech) relativ empor- und zurückfliesst, durch stetigen Druck anstatt durch Stoss Arbeit leistet, und dass zugleich dem Wasser nach seinem Ausflusse aus dem Rade eine kleinere lebendige Kraft verbleibt, indem bei entsprechender Schaufelstellung aus der Umfangsgeschwindigkeit  $v$  des Rades und der (hier nicht verschwindend kleinen) relativen Ausflussgeschwindigkeit  $w_1$  des Wassers eine absolute Ausflussgeschwindigkeit  $u_1$  desselben resultiren kann, welche erheblich  $< v$  ist. Der Wasserzfluss wird durch eine Spansschütze regulirt, deren Mündungshöhe die

Dicke  $a_1$  des zufließenden Wasserstroms bestimmt, während seine mittlere Geschwindigkeit  $u$ , bei passendem Abhange des Schussgerinnes von der Mündung bis zum Einflusse in das Rad nahe gleich bleibend, nach Gl. (7) im §. 24 auch hier

$$u = \sqrt{\frac{2gH}{1 + \zeta}} = \sqrt{\frac{2gH}{1,15}} \dots \dots \dots (1)$$

gesetzt werden kann, indem mit  $\zeta = 0,15$  den Widerständen der Schütze und des durch entsprechende Anordnung derselben möglichst kurz zu haltenden Schussgerinnes zusammen genügend Rechnung getragen wird.

Das Ponceletrad ist besonders für Gefälle  $H = 0,75$  bis  $1,5$  Mtr. geeignet, findet sich aber auch bei

$$H = 0,5 \quad \text{bis} \quad 2 \text{ Mtr.}$$

$$\text{Dabei pflegt } R = 1,5 \quad \text{„} \quad 3 \quad \text{„} \quad \text{zu sein}$$

$$= 3H \quad \text{„} \quad 1,5H$$

$$\text{und die Schaufelzahl } z = 32 \quad \text{„} \quad 48,$$

$$\text{entsprechend der Theilung } e = 0,3 \quad \text{„} \quad 0,4 \text{ Mtr.};$$

$$\text{ferner } a_1 = 0,12 \quad \text{„} \quad 0,24 \quad \text{„}$$

$$= 0,24H \quad \text{„} \quad 0,12H = 0,08R$$

im Durchschnitt, sofern nicht die Rücksicht auf die Radbreite  $b$  einen etwas anderen Werth von  $a_1$  vorziehen lässt; mit der etwas grösseren Breite  $b_1$  des Zuflussgerinnes ist nämlich  $a_1$  durch die Gleichung verbunden:

$$Q = a_1 b_1 u \dots \dots \dots (2).$$

Dem Schussgerinne wird passend ein solcher Abhang  $\alpha_1$  gegeben, dass die das Wasser beschleunigende Componente der Schwere mit der Reibung ungefähr im Gleichgewichte ist und somit  $u$  von der Schützenmündung bis zum Rade weder wesentlich zu- noch abnimmt. In der Regel genügt dazu

$$\alpha_1 = 0,035 (= 2^0),$$

während bei aussergewöhnlichen Verhältnissen  $\alpha_1$  von  $H$  und  $a_1$  abhängig zu machen wäre. Wird z. B. nach der von Bazin aus seinen betreffenden Versuchen abgeleiteten empirischen Formel (Bd. I., §. 126, Gl. 12), unter  $r_1$  die mittlere hydraulische Tiefe des Schussgerinnes verstanden,

$$u = \sqrt{\frac{r_1 \alpha_1}{m + \frac{n}{r_1}}}$$

gesetzt mit  $m = 0,0002$  und  $n = 0,000012$ , ausserdem  $r_1$  näherungsweise  $= a_1$ , so folgt



$$10\,000\ \alpha_1 = \frac{u^2}{a_1} \left( 2 + \frac{0,12}{a_1} \right) \dots\dots\dots (3)$$

und mit  $u^2 = \frac{2gH}{1,15} = 17H$

insbesondere für  $H = 0,5$  bis  $2$  Mtr.  
 und  $a_1 = 0,12$  bzw.  $0,24$  Mtr.  
 $\alpha_1 = 0,0212$  „  $0,0354$   
 im Gradmass =  $1^\circ 13'$  „  $2^\circ 2'$ .

Für  $H = 2$  und  $a_1 = 0,12$  dagegen ergäbe sich

$$\alpha_1 = 0,085 (= 4^\circ 52').$$

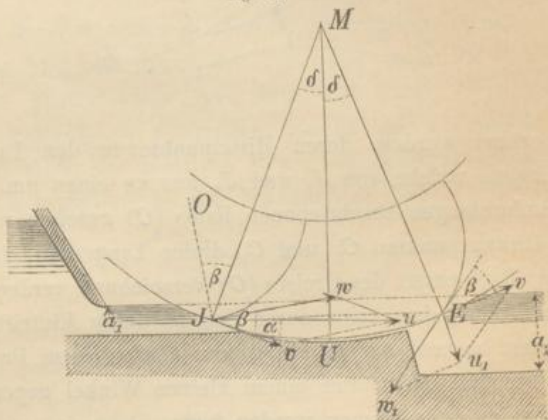
Unter dem Rade lässt man den Gerinneboden in eine Kröpfung übergehen, welche mit möglichst kleinem Spielraume  $s$  einen Umfangsbogen ungefähr  $= 2c$  umfasst (Figur 24) und an welche sich ein Abfall anschließt, der passend sobemessen wird, dass die Oberfläche des Unterwassers nahe in gleiche Höhe mit dem oberen Endpunkte des Einlaufbogens zu liegen kommt, und dass die Tiefe  $a_2$  des abfließenden Wassers dicht am Rade der horizontalen Componente  $u_2$  der absoluten Austrittsgeschwindigkeit  $u_1$  entspricht gemäss der Gleichung

$$a_2 u_2 = a_1 u,$$

sofern nicht etwa  $u_2$  kleiner ist, als die (wenigstens dafür zu setzende) Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im weiteren Verlauf im Abflussgerinne fließen soll, oder sofern nicht durch Verbreiterung der letztern die nöthige Tiefe  $a_2$  verkleinert wird.

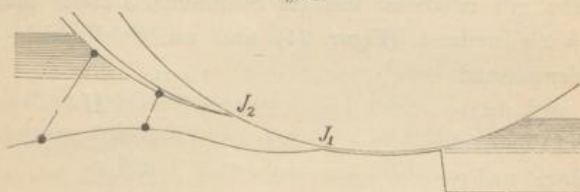
Das gerade Zuflussgerinne, Fig. 24, ist mit dem Nachtheil verbunden, dass die ankommenden Wasserfäden die Peripherie des Rades in den verschiedenen Punkten des Einlaufbogens unter verschiedenen Winkeln schneiden, im unteren Endpunkte unter erheblich kleinerem, als im oberen, während eine bestimmte Grösse  $\alpha$  dieses Winkels erforderlich ist, um das

Fig. 24.



Wasser ohne Stoss gegen die Schaufeln einfließen zu lassen, nämlich die relative Zuflussgeschwindigkeit  $w =$  der Resultanten von  $u$  und  $-v$  tangential an das betreffende Schaufelprofil zu richten. Diese Verhältnisse werden verbessert durch passende Krümmung des Gerinnebodens (Fig. 25) und des (in solchem Falle eisernen) Schutzbrettes, welches letztere bis dicht an das Rad herangeführt und durch Lenkstangen mit dem Gerinneboden verbunden ist, so dass dadurch zugleich eine sehr leichte Beweglichkeit desselben erreicht wird und eine Führung des Wassers bis zum Rade von oben und unten zwischen Leitflächen. Die Profile der letzteren schneiden die Radperipherie in den Endpunkten  $J_1$  und  $J_2$  des Einlaufbogens unter gleichen Winkeln  $\alpha$ , wenn sie in diesen Punkten von Kreisen

Fig. 25.



berührt werden, deren Mittelpunkte in den Tangenten  $J_1C_1$  und  $J_2C_2$  liegen, welche von  $J_1$  und  $J_2$  aus an einen um den Mittelpunkt  $M$  des Radumfangs beschriebenen Kreis ( $C$ ) gezogen werden, z. B. in den Berührungspunkten  $C_1$  und  $C_2$  dieser Tangenten, indem etwa jene Profile als Evolventen des Kreises ( $C$ ) verzeichnet werden. Letzterer ist dadurch bestimmt, dass seine durch den mittleren Eintrittspunkt  $J$  gehende Tangente normal zur Richtung von  $u$  in diesem Punkte sein muss, welche horizontal oder unter einem kleinen Winkel gegen den Horizont abwärts geneigt angenommen werden kann. —

Zur Gewinnung eines Ausdruckes für den Wirkungsgrad werde vorläufig angenommen, dass alle Wassertheilchen sich ebenso bewegen, wie ein im Punkte  $J$  einfließendes isolirtes Theilchen, wenn bei seinem Eintritte eine Schaufel eben diesen Punkt  $J$  passirt hat. Damit das Wassertheilchen sich in Berührung mit der concaven Schaufelfläche an dieser entlang bewege, ohne einen Stoss gegen sie ausgeübt und dadurch einen Verlust an äusserem Arbeitsvermögen erlitten zu haben, muss der Radumfang von der relativen Eintrittsgeschwindigkeit  $w$  unter demselben Winkel  $\beta$  geschnitten werden wie vom Schaufelprofil, muss also

$$u \sin(\beta - \alpha) = v \sin \beta \dots \dots \dots (4)$$

sein, welche Gleichung unmittelbar ausdrückt, dass die zur Schaufel normal

gerichteten Componenten von  $u$  und  $v$  in gleichem Sinne gleich gross sind. Mit der relativen Geschwindigkeit

$$w = u \cos(\beta - \alpha) - v \cos \beta$$

beginnt dann das Wasser an der Schaufel entlang aufwärts zu fliessen, während sie mit dem Rade sich um dessen Axe dreht, bis die relative Geschwindigkeit = 0 geworden ist durch die gleichzeitige Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft als erster Ergänzungskraft der relativen Bewegung. (Die zweite, stets normal zur relativen Geschwindigkeit, ändert ihre Grösse nicht.) Das Zurückfliessen längs der Schaufel wird durch dieselben Kräfte beschleunigt, und wenn nun die Anordnung so getroffen ist, dass der Austrittspunkt  $E$  in gleicher Höhe mit dem Eintrittspunkte  $J$  liegt, so ist, abgesehen von der Reibung des Wassers an der Schaufel und von der gegenseitigen Störung der Wassertheilchen in ihrer Bewegung, die oben mit  $w_1$  bezeichnete relative Austrittsgeschwindigkeit wieder =  $w$ . Unter  $u_1$  die entsprechende absolute Austrittsgeschwindigkeit, ferner unter  $Q_1$  den hier nur durch den Spielraum zwischen Rad und Gerinne verursachten Wasserverlust pro Sek. und unter  $E_1$  den Effectverlust durch Nebenwiderstände verstanden, welche hier wesentlich auch die erwähnten Widerstände der relativen Bewegung des Wassers in den Schaufelräumen in sich begreifen, ist der Nutzeffect.

$$E = \gamma(Q - Q_1) \frac{u^2 - u_1^2}{2g} - E_1$$

oder wegen

$$u^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos \beta$$

$$u_1^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos \beta$$

also

$$u^2 - u_1^2 = 4vw \cos \beta = 4v(u \cos \alpha - v)$$

und mit den im §. 24 benutzten Bezeichnungen

$$\sigma = \frac{Q_1}{Q} \quad \text{und} \quad \vartheta = \frac{E_1}{E_0}$$

$$E = \gamma Q (1 - \sigma) \frac{2(u \cos \alpha - v)v}{g} - \vartheta E_0$$

$$\eta = (1 - \sigma) \frac{2(u \cos \alpha - v)v}{gH} - \vartheta \dots \dots \dots (5).$$

Die Vergleichung mit dem Ausdrucke (5) im §. 24 lässt erkennen, dass ohne  $\vartheta$  dieser Wirkungsgrad nahe doppelt so gross ist wie beim unterschlächtigen Stossrade, da  $\alpha$  so klein gemacht werden kann ( $< 20^\circ$ ), dass  $\cos \alpha$  nahe = 1 ist; freilich ist  $\vartheta$  hier grösser.

Wäre  $\vartheta$  ebenso, wie es von  $\sigma$  angenommen werden kann, unabhängig von  $v$ , so wäre nach (5) bei gegebenen Werthen von  $H, u, \alpha$

$$\eta = \max \text{ für } v = \frac{u \cos \alpha}{2}.$$

Aus Versuchen von Poncelet, Morin u. A. ist jedoch zu schliessen, dass thatsächlich hier im Durchschnitt

$$v = 0,5 \sqrt{2gH} \dots \dots \dots (6)$$

dem Maximum von  $\eta$  entspricht, nach Gl. (1) also das Geschwindigkeitsverhältniss

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{0,5\sqrt{1,15}} = \frac{1}{0,536} = 1,866 \dots \dots \dots (7).$$

Für diesen vortheilhaftesten Gang des Rades ist in (5)

$$\frac{2(u \cos \alpha - v)v}{gH} = 2 \left( \frac{u}{v} \cos \alpha - 1 \right) \frac{v^2}{gH} = 1,866 \cos \alpha - 1,$$

etwa = 0,8 mit  $\alpha = 15^\circ 15'$ , somit

$$\eta = 0,8(1 - \sigma) - \vartheta \dots \dots \dots (8).$$

Eine nähere theoretische Bestimmung von  $\eta$  ist kaum thunlich. Lässt sich auch  $\sigma$  nahe = dem Verhältnisse der Spaltweite  $s$  zur Strahldicke  $\alpha_1$  setzen, so entzieht sich doch  $\vartheta$  einer zuverlässigen Vorausbestimmung durchaus mit Rücksicht auf die Natur der mancherlei störenden Einflüsse, welchen dieses Glied Rechnung zu tragen hat. Erfahrungsmässig kann bei passender

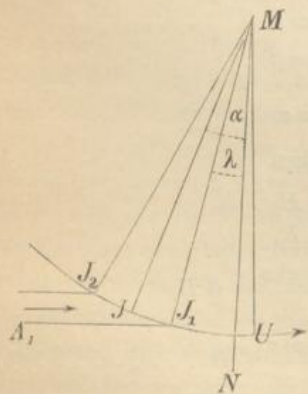
Anordnung und bei nahe günstigstem Gange auf  $\eta = 0,6$  bis  $0,65$  gerechnet werden.

Wichtig ist aber beim Ponceletrade die Feststellung der Beziehungen zwischen den Radelementen, welche einen möglichst grossen Wirkungsgrad erwarten lassen; diese Elemente sind zu mannichfaltig, als dass ihre besten Verhältnisse lediglich durch Versuche zu finden wären.

1) Eine erste solche Beziehung entspricht der Forderung, dass die Kröpfung des Gerinnebodens einen angemessenen Umfangsbogen des Rades

ungefähr =  $2e$  = der doppelten Theilung umfasse. Ist  $J_1 J_2$  in Fig. 26 der Einlaufbogen,  $J$  sein Mittelpunkt,  $A_1 J_1$  das Profil des Schussgerinnebodens, unter dem oben besprochenen kleinen Winkel  $\alpha_1 = 2^\circ$  im

Fig. 26.



Durchschnitt gegen den Horizont geneigt,  $MN$  normal zu  $A_1J_1$  (Winkel  $UMN = \alpha_1$ ), so soll also, wenn  $MN$  als Mittellinie der Kröpfung angenommen wird,

$$\text{Winkel } NMJ_1 = \lambda \text{ ungefähr} = \frac{e}{R} = \frac{2\pi R}{z} \dots \dots \dots (9)$$

sein, während der Winkel  $NMJ = \alpha$  ist, indem seine Schenkel  $MN$  und  $MJ$  normal bzw. zu den Geschwindigkeitsrichtungen  $u$  und  $v$  im Punkte  $J$  sind. Der Winkel  $NMJ_2$  ist dann

$$= \lambda + 2(\alpha - \lambda) = 2\alpha - \lambda$$

und somit die Dicke  $a_1$  des zufließenden Wasserstroms = dem Abstände des Punktes  $J_2$  von  $A_1J_1$ :

$$a_1 = R [\cos \lambda - \cos (2\alpha - \lambda)].$$

Mit Rücksicht auf eine bekannte goniometrische Formel folgt daraus

$$\frac{a_1}{R} = 2 \sin \alpha \sin (\alpha - \lambda) \dots \dots \dots (10).$$

2) Die wenigstens erforderliche Kranzbreite  $a$  ferner, damit das in einen Schaufelraum eingeflossene Wasser nicht über den inneren Schaufelrand weg fließen oder im Falle eines Radbodens nicht durch diesen in seiner Bewegung gehemmt werden könne, ergibt sich durch folgende Ueberlegung, wieder zunächst bezüglich der Bewegung eines isolirten Wassertheilchens, welches im Punkte  $J$  einfließt, nachdem eine Schaufel eben vorbeigegangen ist. Die relative Bewegung dieses Wassertheilchens an der Schaufel wird verzögert durch die vereinigte Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft, deren Richtungen bzw. vertical und radial, und deren Grössen pro Masseneinheit

$$\text{bzw.} = g \text{ und} = \frac{v^2}{R^2} x.$$

sind, unter  $x$  die augenblickliche Entfernung des Theilchens von der Radaxe verstanden. Bezeichnet also  $r$  den im Augenblicke seiner relativen Ruhe erreichten Minimalwerth von  $x$ ,  $\varepsilon$  den Winkel, welchen der nach der betreffenden Stelle gezogene Radius mit der Verticalen  $MU$  (Fig. 26) bildet, und  $\delta$  den Winkel  $UMJ = \alpha + \alpha_1$ , so ist

$$R \cos \delta - r \cos \varepsilon$$

die von  $J$  aus erreichte Höhe, also abgesehen von Reibung und sonstigen Widerständen  $r$  bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{w^2}{2} = g (R \cos \delta - r \cos \varepsilon) + \int_r^R \frac{v^2}{R^2} x dx.$$

Aus derselben folgt:

$$w^2 = 2gR \left( \cos \delta - \frac{r}{R} \cos \varepsilon \right) + v^2 \frac{R^2 - r^2}{R^2}$$

oder wegen  $w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha$

$$\frac{w^2 - v^2}{v^2} = \frac{u(u - 2v \cos \alpha)}{v^2} = \frac{2gR}{v^2} \left( \cos \delta - \frac{r}{R} \cos \varepsilon \right) - \frac{r^2}{R^2}$$

und mit Rücksicht auf (6) und (7):

$$\frac{r^2}{R^2} + 4 \frac{R}{H} \cos \varepsilon \cdot \frac{r}{R} = 4 \frac{R}{H} \cos \delta - 1,866 (1,866 - 2 \cos \alpha).$$

Da  $\delta$  nur wenig  $> \alpha$  und  $\varepsilon$  jedenfalls ein sehr kleiner Winkel ist, setzt man beide Seiten der gewonnenen Gleichung nur sehr wenig zu gross mit

$$\cos \delta = \cos \alpha \text{ und } \cos \varepsilon = 1,$$

was darauf hinauskommt, die von  $J$  aus erreichte Höhe des Wassertheilchens

$$= R \cos \alpha - r$$

zu setzen. Die Gleichung für  $r$  wird dadurch:

$$\left( \frac{r}{R} \right)^2 + 4 \frac{R}{H} \cdot \frac{r}{R} = \left( 4 \frac{R}{H} + 3,73 \right) \cos \alpha - 3,48 \dots \dots (11).$$

Der daraus folgende Minimalwerth  $= R - r$  der Kranzbreite  $a$  genügt indessen noch nicht aus verschiedenen Gründen. Zunächst ist zu bedenken, dass ein bei  $J_2$  (Fig. 26) eintretendes isolirtes Wassertheilchen höher hinauf bis zu einer kleineren Entfernung  $r$  von der Radaxe gelangt, welche näherungsweise aus (11) gefunden würde, wenn darin  $\alpha$  durch den Winkel  $NMJ_2$  (Fig. 26)  $= 2\alpha - \lambda$  ersetzt wird. Auch werden die bei  $J_2$  zuerst in den Schaufelraum eingetretenen Wassertheilchen, wenn sie für sich allein zu relativer Ruhe gelangt sein würden, thatsächlich an ihrer rückläufigen Bewegung durch das nachfolgende Wasser zunächst noch gehindert; sie werden durch letzteres noch etwas weiter aufwärts in den Schaufelraum hineingedrängt. Dem Ergebnisse dieser zusammengesetzten und theoretischer näherer Prüfung unzugänglichen Umstände wird man voraussichtlich wenigstens nahe kommen mit der Annahme, dass die ganze Wasserfüllung eines Schaufelraums gleichzeitig seine rückläufige Bewegung beginnt in einem Augenblicke, in welchem sie sich zur Hälfte innerhalb, zur Hälfte ausserhalb der mit dem Rade coaxialen Cylinderfläche befindet, deren Halbmesser  $r$  durch (11) bestimmt ist. Nun ist abgesehen von  $Q_1$  pro Längeneinheit der Radbreite das Wasservolumen eines Schaufelraumes  $= a_1 u \frac{e}{v}$ , und wenn man selbst günstigsten Falles

annimmt, dass im Augenblicke der Bewegungsumkehr die innere Hälfte desselben den Raum zwischen beiden Schaufeln, der hier eine mittlere Weite etwas  $< \frac{r}{R}e$  normal zum Radius gemessen besitzt, ganz ausfüllt, so ergibt sich die Strecke, um welche das Wasser die Cylinderfläche zum Halbmesser  $r$  nach radialer Richtung einwärts überschreitet, etwas

$$> \frac{1}{2} a_1 u \frac{e}{v} : \frac{r}{R} e, \text{ d. i. } > \frac{a_1}{2} \frac{u}{v} \frac{R}{r},$$

nach (7) etwas  $> 0,93 a_1 \frac{R}{r}$ , nahe  $= a_1 \frac{R}{r}$ . Für die Kranzbreite folgt also schliesslich die Bedingung:

$$a > R - r + a_1 \frac{R}{r} \dots \dots \dots (12)$$

mit dem durch (11) bestimmten Werthe von  $r =$  der positiven Wurzel dieser Gleichung.

3) Wichtig ist auch die passende Wahl der Schaufelform, bezw. des Krümmungshalbmessers  $\rho$  des, wie üblich, als Kreisbogen anzunehmenden Profils der cylindrischen Schaufelfläche. Er ist davon abhängig zu machen, dass das Wasser, indem es in einem Schaufelraume hin- und zurückfliesst, durch eine resultirende Kraft beständig gegen die hohle Seite der ihn begrenzenden vorderen Schaufel gedrängt und somit, durch sie geführt, eine möglichst regelrechte zwangläufige strömende Bewegung behalte. Solche Unregelmässigkeiten, welche von gegenseitigen Störungen der Wassertheilchen herrühren, sind freilich unvermeidlich, und kann es sich hier wieder nur um die Bewegung eines als materieller Punkt zu betrachtenden isolirten Theilchens handeln, dessen Normaldruck  $N$  auf seine Leitfläche beständig positiv, nämlich nach vorn gegen die hohle Seite hin gerichtet bleiben soll.

Ist  $K$  die bewegende Kraft eines solchen an einer Fläche beweglichen Punktes (an ihrer concaven Seite, wie dem vorliegenden Falle entsprechend angenommen werde), so ist seine Bewegung abgesehen von Reibung identisch mit der durch die Kräfte  $K$  und  $-N$  bestimmten freien Bewegung, unter  $-N$  eine dem Normaldrucke  $N$  entgegengesetzte gleiche Kraft verstanden. Indem die resultirende Kraft  $= \text{Res.}(K, -N)$  des frei beweglichen Punktes auch in eine Centripetalkraft  $P$  und Tangentialkraft  $T$  zerlegt werden kann, ist

$$\text{Res.}(K, -N) = \text{Res.}(P, T),$$

wo das Zeichen  $\equiv$  die Aequivalenz, nämlich die Uebereinstimmung nach Grösse und Richtung bedeuten soll. Daraus folgt, dass die Kräfte

$$K, -N, -P, -T$$

an dem materiellen Punkte sich Gleichgewicht halten. Indem dann jede von ihnen, in entgegengesetztem Sinne genommen, den übrigen zusammen äquivalent ist, ergibt sich, falls mit  $F$  die Centrifugalkraft  $= -P$  bezeichnet wird,

$$N \equiv Res. (K, F, -T).$$

Werden  $K, F$  in die zur Fläche normalen Componenten  $K_n, F_n$  und in tangentialen Componenten zerlegt, so sind also letztere mit  $-T$  im Gleichgewicht und ist

$$N = F_n \pm K_n \dots \dots \dots (13).$$

$F_n$  und  $K_n$  sind absolut verstanden. Vor  $K_n$  gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem diese Kraftcomponente gegen die hohle Seite der Fläche hin oder umgekehrt gerichtet ist, also ohne die stets in ersterem Sinne wirkende Kraftcomponente  $F_n$  einem positiven oder negativen Werthe des algebraisch verstandenen Normaldruckes  $N$  entsprechen würde.

Hat die Leitfläche, wie hier die Schaufelfläche, eine eigene Bewegung, so kann diese in jedem Zeitelement als zusammengesetzt betrachtet werden aus der Translation eines mit der Fläche fest verbundenen Punktes  $S$  und aus der Rotation mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  um eine durch  $S$  gehende augenblickliche Drehaxe (Momentanaxe); je nach der Wahl von  $S$  ist die Translation von verschiedener Grösse und Richtung, die Momentanaxe von verschiedener Lage, aber die Richtung der letzteren und die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  bleiben unverändert. In solchem Falle ist  $F$  die relative Centrifugalkraft,  $K$  die relative bewegende Kraft des materiellen Punktes. Letztere ist die Resultante der absoluten bewegenden Kraft und von zwei sogenannten Ergänzungskräften, welche nämlich hinzugedacht werden müssen, um die relative Bewegung gerade so zur Folge zu haben, als ob sie eine absolute Bewegung wäre. Pro Masseneinheit des materiellen Punktes ist die erste Ergänzungskraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet der Beschleunigung des mit ihm augenblicklich zusammenfallenden Leitflächenpunktes, die zweite  $= 2\omega w'$ , wenn  $\omega$  die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Fläche um die Momentanaxe,  $w'$  die Projection der augenblicklichen relativen Geschwindigkeit  $w$  des materiellen Punktes gegen die Leitfläche auf eine zur Momentanaxe



senkrechte Ebene  $E$  bedeutet; die Richtung dieser zweiten Ergänzungskraft ergibt sich, wenn die Richtung von  $w'$  in der Ebene  $E$  entgegengesetzt dem Drehungssinne von  $\omega$  um  $90^\circ$  gedreht wird.\*

\* Der hier benutzte Satz, betreffend die relative Bewegung eines materiellen Punktes  $P$  in Beziehung auf ein selbst in Bewegung begriffenes starres System, ist von so grosser Bedeutung für manche Probleme der Maschinenlehre und wird im Folgenden so oft in Betracht kommen, dass seine Begründung hier beigefügt werden mag.

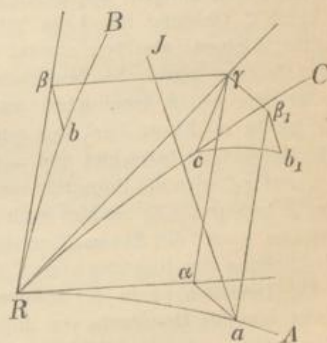
$S$  sei der Punkt des Systems, mit welchem zur Zeit  $t$  der materielle Punkt  $P$  im Punkte  $R$  des absoluten Raumes zusammenfällt. In diesem sei  $RA$  (Fig. 27) die Bahn von  $S$ , ihr Bogenelement  $Ra$  der Weg im Zeitelement  $dt$ ,  $Ra$  der Weg, welchen  $S$  in derselben Zeitintervall  $dt$  in der Tangente (an  $RA$  in  $R$ ) mit der Geschwindigkeit  $v$  durchlaufen haben würde, welche  $S$  am Orte  $R$ , also zur Zeit  $t$  besitzt. Die Gerade  $aa$ , unendlich klein zweiter Ordnung, heisst die Deviation in der absoluten Bewegung von  $S$ ; sie stimmt der Richtung nach mit der Beschleunigung zur Zeit  $t$  überein, ihre Grösse ist = dieser Beschleunigung multiplicirt mit  $\frac{dt^2}{2}$ .

$RB$  sei die Lage der relativen Bahn von  $P$  im System zur Zeit  $t$ ,  $Rb$  der Weg in ihr während  $dt$ ,  $R\beta$  der Weg, welcher gleichzeitig in der Tangente (an  $RB$  in  $R$ ) mit der augenblicklichen relativen Geschwindigkeit  $w$  von  $P$  durchlaufen sein würde;  $\beta b$  ist dann die Deviation in der relativen Bewegung von  $P$ .

Nun ist die Diagonale  $R\gamma$  des Parallelogramms über  $Ra$  und  $R\beta$  der Weg, welchen  $P$  während  $dt$  mit der augenblicklichen (dem Orte  $R$  oder Zeitmoment  $t$  entsprechenden) absoluten, aus  $c$  und  $v$  zusammengesetzten, Geschwindigkeit durchlaufen hätte; sie berührt die absolute Bahn  $RC$  von  $P$  im Punkte  $R$ . Die Gerade  $\gamma c$  ist die Deviation in der absoluten Bewegung von  $P$ , wenn  $c$  der Ort dieses Punktes im absoluten Raume zur Zeit  $t + dt$  ist. Derselbe ergibt sich durch folgende Erwägung.

Denkt man zunächst das System während  $dt$  unbewegt, so kommt  $P$  im absoluten Raume von  $R$  nach  $b$ . Dann führe das System, während  $P$  mit ihm fest verbunden bleibt, seine Elementarbewegung aus, welche zerlegt werden kann in eine Translation, durch welche  $S$  von  $R$  nach  $a$  kommt, und in eine Drehung  $= \omega dt$  um die betreffende Momentanaxe  $aJ$ ; die Richtung der letzteren in Fig. 27 entspricht zugleich dem Sinn der Drehung in üblicher Weise, indem sie nämlich rechtshändig sein soll für ein von  $J$  nach  $a$  blickendes Auge. Da die Verschiebung  $Ra$  in  $Ra$  und  $aa$  zerlegt werden kann, gelangt durch sie  $\beta$  nach  $\beta_1$ , also  $b$  (mit  $P$ ) nach  $b_1$ , wenn  $\gamma\beta_1$  parallel und  $= aa$ ,  $\beta_1 b_1$  parallel und  $= \beta b$  ist. In Folge der Drehung  $= \omega dt$  um  $aJ$  durchläuft dann noch  $P$  einen Kreisbogen  $b_1 c$ , der als gerade Linie

Fig. 27.



Im vorliegenden Falle kann von vornherein angenommen werden, dass das Wassertheilchen sich in einem Profil der Schaufelfläche (einem Kreisbogen zum Halbmesser  $\rho$ ), also in einer zur Radaxe senkrechten Ebene bewegt; diese ist eine Ebene  $E$ , indem die Schaufel um die Radaxe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  rotirt. Unter diesen Umständen ist  $F_n$  identisch mit  $F$ ,  $w'$  identisch mit  $w$ ; die erste Ergänzungskraft ist radial auswärts gerichtet und pro Masseneinheit =  $\omega^2 x$  in der Entfernung  $x$  von der Radaxe, die zweite Ergänzungskraft, pro Masseneinheit =  $2 \omega w$ , ist normal zur Schaufel wie  $F$ , jedoch nicht wie  $F$  stets gegen die Schaufel hin, sondern gegen sie hin oder umgekehrt gerichtet,

betrachtet werden kann, senkrecht zur Ebene  $Jab_1$  und in der Figur nach vorn gerichtet. Weil übrigens  $a\beta_1 = R\beta$  unendlich klein 1. Ordnung,  $\beta_1 b_1 = \beta b$  unendlich klein 2. Ordnung ist, kann mit Vernachlässigung von verhältnissmässig unendlich kleinen, also von absolut unendlich kleinen Grössen 3. Ordnung für den bei der Drehung von  $b_1$  beschriebenen Bogen, welcher selbst unendlich klein 2. Ordnung ist, der von  $\beta_1$  beschriebene substituiert werden, oder es kann die Gerade  $b_1 c$  als senkrecht zur Ebene  $J\alpha\beta_1$  (als senkrecht zur Momentanaxe  $aJ$  und zur relativen Geschwindigkeit  $w$ ) betrachtet und =  $p\omega dt$  gesetzt werden, wenn  $\hat{p}$  das Perpendikel von  $\beta_1$  auf  $aJ$  oder die Projection von  $a\beta_1 = R\beta = wdt$  auf eine zu  $aJ$  senkrechte Ebene  $E$  bedeutet. Es ist also auch  $b_1 c = w' dt \cdot \omega dt = \omega w' dt^2$ , unter  $w'$  die Projection von  $w$  auf die Ebene  $E$  verstanden, und ergibt sich die Richtung von  $b_1 c$  durch Drehung der Richtung von  $w'$  in  $E$  um  $90^\circ$  im Sinne von  $\omega$ .

Die Deviation  $\gamma c$  in der zusammengesetzten oder absoluten Bewegung von  $P$  erscheint nun als Resultante von drei Strecken: 1)  $\gamma\beta_1$  gleich und gleich gerichtet der Deviation  $\alpha\alpha$  in der absoluten Bewegung des mit  $P$  augenblicklich zusammenfallenden Systempunktes  $S$ , 2)  $\beta_1 b_1$  gleich und gleich gerichtet der Deviation  $\beta b$  in der relativen Bewegung von  $P$ , 3)  $b_1 c = \omega w' dt^2$ , gerichtet wie die Projection  $w'$  der relativen Geschwindigkeit  $w$  auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene nach der Drehung in dieser um  $90^\circ$  im Sinne der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Systems um die Momentanaxe. Wegen

$$\text{Deviation} = \text{Beschleunigung} \text{ mal } \frac{dt^2}{2}$$

ist die absolute Beschleunigung von  $P$  entsprechend zusammengesetzt aus der absoluten Beschleunigung von  $S$ , der relativen Beschleunigung von  $P$  und aus einer Beschleunigung =  $2 \omega w'$ , gerichtet wie von  $b_1 c$  angegeben.

Weil endlich in dem räumlichen Viereck  $\gamma\beta_1 b_1 c\gamma$  sich  $\beta_1 b_1$  als Resultante von  $\beta_1\gamma$ ,  $\gamma c$  und  $cb_1$  darstellt, ist die relative Beschleunigung (relative bewegende Kraft pro Masseneinheit) des Punktes  $P$  die Resultante der absoluten Beschleunigung dieses Punktes, der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung des mit ihm augenblicklich zusammenfallenden Systempunktes und einer Beschleunigung =  $2 \omega w'$ , deren Richtung sich ergibt, indem die Projection  $w'$  der relativen Geschwindigkeit von  $P$  auf eine zur Momentanaxe des Systems senkrechte Ebene in dieser um  $90^\circ$  gedreht wird entgegengesetzt dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  des Systems um jene Momentanaxe.

jenachdem das Wassertheilchen sich einwärts oder auswärts an ihr entlang bewegt. Erstere Ergänzungskraft heisse die absolute, letztere die zusammengesetzte Centrifugalkraft. Indem endlich die absolute bewegende Kraft bei Abstraction von Reibungswiderständen lediglich in der Schwerkraft besteht, ist nach (13) hier der Normaldruck eines Wassertheilchens gegen die betreffende Schaufel = der algebraischen Summe der relativen und der zusammengesetzten Centrifugalkraft, sowie der zur Schaufel normal gerichteten Componenten der Schwerkraft und der absoluten Centrifugalkraft. Während das Wassertheilchen an der Schaufel aufwärts fließt, sind die zwei ersten dieser vier Einzelkräfte normal gegen die Schaufel hin gerichtet, welche auch gegen die Richtungen der Schwerkraft und der absoluten Centrifugalkraft sich noch in günstigerer Lage befindet, als bei der rückläufigen Bewegung des Theilchens. Es genügt deshalb, für letztere durch passende Wahl von  $\rho$  einen positiven (nach vorn gerichteten) Normaldruck zu sichern. Indem sich annehmen lässt, dass dieser Forderung für die ganze rückgängige Bewegung genügt sein wird, wenn es mit einem mässigen Ueberschusse von Sicherheit für den Anfang und das Ende derselben der Fall ist, werde zunächst jener Anfang, nämlich der Augenblick betrachtet, in welchem das Wassertheilchen in relativer Ruhe gegen das Rad sich am meisten dessen Axe genähert hat.

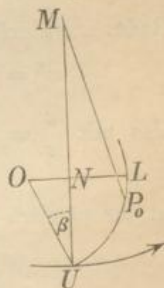
Die betreffende Schaufel ist dann nur sehr wenig von ihrer tiefsten Lage  $UL$ , Fig. 28, entfernt. In dieser Figur bedeutet  $P_0$  die relative Ruhelage des Theilchens,  $O$  den Mittelpunkt des Kreises zum Radius  $\rho$ , von welchem  $UL$  ein Bogen ist,  $ONL$  eine horizontale, also zu  $MU$  senkrechte Gerade. Mit  $w = 0$  sind im fraglichen Augenblicke auch die relative und zusammengesetzte Centrifugalkraft = 0. Die Schwerkraft würde einen positiven Normaldruck bewirken, wenn  $P_0$  unter  $L$ , die absolute Centrifugalkraft allein, wenn  $P_0$  unter dem Punkte läge, in welchem das Schaufelprofil oberhalb  $L$  von einer durch  $M$  gehenden Geraden berührt wird. Mit Rücksicht auf beide Kräfte zusammen gewährt also die Forderung

$$MP_0 > ML$$

eine überschüssige Sicherheit. Für ein mittleres Theilchen der Wasserfüllung des betreffenden Schaufelraums wäre dabei  $MP_0 =$  der durch (11) bestimmten Strecke  $r$  zu setzen. Mit Rücksicht auf die vorderen Theilchen ist es aber rathsamer,  $MP_0$  nach (12) nicht grösser als  $r - a_1$  zu

Grashof, theoret. Maschinenlehre. III.

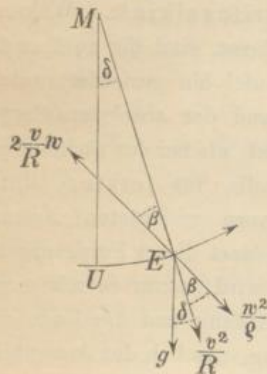
Fig. 28.



nehmen, und ergibt sich so, wie aus Fig. 28 leicht ersichtlich ist, die folgende einer wenigstens erforderlichen Grösse von  $\rho$  entsprechende Bedingung:

$$\begin{aligned} (r - a_1)^2 &> (R - \rho \cos \beta)^2 + (\rho - \rho \sin \beta)^2 \\ (r - a_1)^2 &> R^2 - 2R\rho \cos \beta + 2\rho^2(1 - \sin \beta) \\ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2(1 - \sin \beta) - \frac{\rho}{R} \cos \beta + \frac{1}{2} \left[1 - \left(\frac{r - a_1}{R}\right)^2\right] &< 0 \dots (14). \end{aligned}$$

Fig. 29.



Zu Ende der rückläufigen Bewegung des mittleren Wassertheilchens an der Stelle  $E$  (Fig. 29) ist seine relative Geschwindigkeit abgesehen von Widerständen wieder  $= w$  wie beim Eintritte bei  $J$  (Figur 24). Die betreffenden Richtungen der den Normaldruck bedingenden vier Einzelkräfte sind in Fig. 29 durch Pfeile angedeutet und die Grössen pro Masseneinheit beigeschrieben. Es ergibt sich daraus die Forderung:

$$2 \frac{v}{R} w < \frac{w^2}{\rho} + \frac{v^2}{R} \cos \beta + g \cos (\beta + \delta),$$

welche übrigens bei günstigem Gange des

Rades stets erfüllt ist. Wegen

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv \cos \alpha = \left(\frac{u^2}{v^2} + 1 - 2\frac{u}{v} \cos \alpha\right) v^2,$$

also mit  $\frac{u}{v} = 1,866$  nach (7) wegen

$$w^2 = (4,48 - 3,73 \cos \alpha) v^2 = \mu v^2$$

ist ihr nämlich die Form zu geben:

$$\frac{2\sqrt{\mu}}{R} v^2 < \frac{\mu v^2}{\rho} + \frac{v^2}{R} \cos \beta + g \cos (\beta + \delta)$$

$$2\sqrt{\mu} < \mu \frac{R}{\rho} + \cos \beta + \frac{gR}{v^2} \cos (\beta + \delta)$$

oder mit  $v^2 = \frac{gH}{2}$  nach (6):

$$\frac{R}{\rho} > \frac{1}{\mu} \left[2\sqrt{\mu} - \cos \beta - 2\frac{R}{H} \cos (\beta + \delta)\right] \dots \dots (15).$$

Durch diese Bedingung wird aber die zulässige Grösse von  $\rho$ , wenn überhaupt, dann um so mehr eingeschränkt, je kleiner

$$\mu, \frac{R}{H}, \cos \beta \text{ und } \cos (\beta + \delta)$$

sind, und da

$$\mu > 0,8 (\alpha > 90^\circ 21'), \text{ nahe } \sqrt{\mu} > 0,9$$

$$\frac{R}{H} > 1,5, \cos \beta > 0,8 (\beta < 36^\circ 52'),$$

$$\cos(\beta + \delta) > 0,54 (\beta + \delta < 57^\circ 19')$$

ist, folgt

$$\frac{R}{\rho} > \frac{1}{0,8} (1,8 - 0,8 - 1,62),$$

wodurch thatsächlich  $\rho$  nicht beschränkt wird. Die hier in Rede stehende Rücksicht führt also nur zur Grenzbedingung (14) für die Schaufelkrümmung.

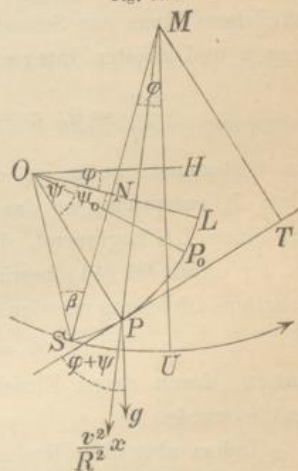
4) Endlich bleibt der den bisherigen Erwägungen zu Grunde liegenden Voraussetzung gleicher Höhenlage der Punkte  $J$  und  $E$  (Fig. 24), in welchen das mittlere Wassertheilchen einer Schaufelraumfüllung ein- und austritt, durch eine Bedingungsgleichung zu entsprechen. Sie erfordert die Feststellung der Beziehung zwischen gleichzeitigen Wegen des Wassertheilchens längs der Schaufel und eines Schaufelpunktes in Beziehung auf die Erde. Zu dem Ende sei, während das Theilchen (abgesehen von störenden Einflüssen der übrigen, sowie von Reibungswiderständen) an der Schaufel  $SL$  emporsteigend sich in  $P$  (Fig. 30) befindet,

Winkel  $UMS = HOL = \varphi$   
 ( $OH$  horizontal,  $ONL$  normal zu  $MS$ ),  
 Winkel  $LOP = \psi$ , Strecke  $MP = x$ ,  
 $MT$  parallel  $OP$ ,  $PT$  normal dazu, also  
 Tangente von  $SL$ . Die Beschleunigung  
 des Wassertheilchens in seiner kreisförmigen  
 relativen Bahn  $SL$ , welche einerseits

= Radius mal Winkelbeschleunigung um  $O = \rho \frac{d^2\psi}{dt^2}$  ist (positiv im Sinne  $LS$ ), ist auch = der Summe der nach  $TP$  gerichteten Componenten der vertical gerichteten Beschleunigung der Schwere und der im Sinne  $MP$  gerichteten absoluten Centrifugalbeschleunigung, indem die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung ebenso wie der Bahnwiderstand als senkrecht zur Bahn ohne Antheil sind. Es ist also

$$\rho \frac{d^2\psi}{dt^2} = g \cos(\varphi + \psi) + \frac{v^2}{R^2} x \cos(MPT)$$

Fig. 30.



oder wegen

$$x \cos(MPT) = MN \cdot \cos \psi + NO \cdot \sin \psi$$

$$\rho \frac{d^2 \psi}{dt^2} = g \cos(\varphi + \psi) + \frac{v^2}{R^2} [(R - \rho \cos \beta) \cos \psi + \rho \sin \beta \sin \psi] \quad (16).$$

Von den drei Veränderlichen  $\varphi$ ,  $\psi$ ,  $t$  dieser Gleichung wird  $t$  durch Multiplication mit

$$\frac{dt^2}{d\varphi^2} = \frac{R^2}{v^2}$$

eliminiert. (Es ist nämlich  $v dt = -R d\varphi =$  dem Wegelement des Schaufelpunktes  $S$ .) Sie geht dadurch über in:

$$\rho \frac{d^2 \psi}{d\varphi^2} = g \frac{R^2}{v^2} \cos(\varphi + \psi) + (R - \rho \cos \beta) \cos \psi + \rho \sin \beta \sin \psi \quad (17).$$

Hieraus wäre nun streng genommen durch zweifache Integration eine endliche Gleichung zwischen  $\varphi$  und  $\psi$  abzuleiten, welche Winkel gleichzeitige Wege des Schaufelpunktes  $S$  gegen die Erde und des Wassertheilchens längs der Schaufel bestimmen; dabei wären die Constanten der ersten und zweiten Integration durch die zusammengehörigen Werthe

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = 0, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{und} \quad \varphi = \delta, \quad \psi = 90^\circ - \beta$$

zu bestimmen, unter  $\psi_0$  den Winkel  $LO P_0$  verstanden, welcher dem Orte  $P_0$  entspricht, wo das Wassertheilchen, seine rückläufige Bewegung im Sinne  $LS$  beginnend, sich in relativer Ruhe an der Schaufel befindet in der durch Gl. (11) bestimmten Entfernung  $r$  von  $M$ . In die dann so erhaltene Gleichung müssten schliesslich auch die zusammengehörigen Werthe

$$\varphi = -\delta, \quad \psi = 90^\circ - \beta$$

passen, durch deren Einsetzung die gesuchte Bedingungsgleichung erhalten würde.

Indem aber diese Rechnung mit kaum überwindlichen Schwierigkeiten verbunden wäre, mag näherungsweise in Gl. (16)  $\varphi = 0$  gesetzt werden, gleich als ob, was die Wirkung der Schwere betrifft, bei der Bewegung des Wassertheilchens längs der Schaufel dieselbe sich beständig in ihrer tiefsten Lage befände. Die dadurch erhaltene Gleichung:

$$\rho \frac{d^2 \psi}{dt^2} = \left[ g + \frac{v^2}{R^2} (R - \rho \cos \beta) \right] \cos \psi + \frac{v^2}{R^2} \rho \sin \beta \sin \psi$$

entspricht einer gleich grossen Zeit des Hinganges und des Herganges des Wassertheilchens; dass damit erstere zu klein, letztere zu gross gefunden wird, ist unerheblich, weil es hier nicht sowohl auf diese einzelnen Zeitintervalle, als vielmehr nur auf ihre durch fragliche Vereinfachung

ohne Zweifel nur wenig geänderte Summe ankommt = der Zeit, welche dem Drehungswinkel  $2\delta$  des Rades entspricht. Indem nun die angenäherte Differentialgleichung auch geschrieben werden kann:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{v^2}{R^2} \left( \frac{gR}{\rho v^2} + \frac{R}{\rho} - \cos\beta \right) \cos\psi + \frac{v^2}{R^2} \sin\beta \sin\psi,$$

hat sie die Form:

$$2 \frac{d^2\psi}{dt^2} = A \cos\psi + B \sin\psi$$

oder

$$d \left[ \left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 \right] = A d \sin\psi - B d \cos\psi \dots \dots \dots (18)$$

mit

$$A = \frac{v^2}{R^2} m \text{ und } B = 2 \frac{v^2}{R^2} \sin\beta,$$

wobei mit Rücksicht auf (6):

$$\begin{aligned} m &= 2 \frac{R}{\rho} \left( \frac{gR}{v^2} + 1 \right) - 2 \cos\beta \\ &= 2 \frac{R}{\rho} \left( 2 \frac{R}{H} + 1 \right) - 2 \cos\beta \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

ist. Die Integration von (18) giebt mit Berücksichtigung der zusammengehörigen Werthe

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \psi = \psi_0$$

$$\left( \frac{d\psi}{dt} \right)^2 = A (\sin\psi - \sin\psi_0) + B (\cos\psi_0 - \cos\psi)$$

und weiter, wenn jetzt  $t$  insbesondere die halbe Zeitdauer der Hin- und Herbewegung des Wassertheilchens bedeutet,

$$t = \int_{\psi_0}^{90^\circ - \beta} \frac{d\psi}{\sqrt{A (\sin\psi - \sin\psi_0) + B (\cos\psi_0 - \cos\psi)}}$$

Weil diese Zeit auch  $= \frac{R\delta}{v}$  sein soll, folgt endlich mit Rücksicht auf die Bedeutungen von  $A$  und  $B$ :

$$\delta = \int_{\psi_0}^{90^\circ - \beta} \frac{d\psi}{\sqrt{m (\sin\psi - \sin\psi_0) + 2 \sin\beta (\cos\psi_0 - \cos\psi)}} \dots \dots (20).$$

Den gefundenen Bedingungen (4), (7), (10), (11) und (12), (14), (20) muss durch Probiren zu entsprechen gesucht werden. Beispielsweise sei

$H = 1$	1,5	2 Mtr.
$R = 2$	2,5	3 " = $H + 1$
$z = 40$	44	$48 = 32 + 8 H$
$\frac{360^\circ}{z} = 9^\circ$	$8^\circ 11'$	$7^\circ 30'$
$\alpha_1 = 0,16$	0,20	$0,24 = 0,08 R.$

Wird  $\alpha = 18^\circ$  angenommen, so folgt  $\lambda = 10^\circ 34'$  aus (10) etwas  $> \frac{360^\circ}{z}$ , was für die Wirksamkeit der Gerinnekröpfung nur vortheilhaft sein kann.

Der weiteren Annahme  $\beta = 36^\circ$  entspricht  $\frac{u}{v} = 1,9$  nach Gl. (4), hinlänglich nahe = dem nach (7) erfahrungsmässig besten Werthe dieses Geschwindigkeitsverhältnisses. Aus (11) und (12) folgt dann weiter:

$\frac{r}{R} = 0,866$	0,852	0,844
$r = 1,732$	2,130	2,532 Mtr.
$a > 0,453$	0,605	0,752 "

und wenn etwa 0,1 Mtr. zugegeben wird, ergibt sich

$$a = 0,55 \quad 0,70 \quad 0,85 \text{ Mtr.}$$

Ferner muss nach (14)

$\frac{\varrho}{R} > 0,275$	0,294	0,304
$\varrho > 0,550$	0,735	0,912 Mtr.

sein, und wenn versuchsweise  $\varrho$  zunächst um 20% grösser angenommen wird, folgt

$\varrho = 0,660$	0,882	1,094 Mtr.
$m = 28,682$	22,952	20,318 nach (19)
$\psi_0 = 22^\circ$	$21^\circ$	$20^\circ.$

Die Werthe von  $\psi_0$  sind betreffender Zeichnung entnommen. Jetzt bleibt nur noch zu prüfen, ob der Gleichung (20) genügend entsprochen wird mit  $\delta = \alpha + \alpha_1$ , also gemäss  $\alpha = 18^\circ$  und  $\alpha_1 =$  den auf S. 183 aus Gl. (3) gefundenen Werthen nahezu mit

$$\delta = 19^\circ 30' \quad 19^\circ 45' \quad 20^\circ.$$

Diese Prüfung erfordert, wenn

$$f(\psi) = \sqrt{m(\sin \psi - \sin \psi_0) + 2 \sin \beta (\cos \psi_0 - \cos \psi)}$$

gesetzt wird, die angenäherte Berechnung des Integrals

$$J = \int_{\psi_0}^{90^\circ - \delta} \frac{d\psi}{f(\psi)}.$$



Die Simpson'sche Formel kann dazu im ganzen Umfange nicht benutzt werden wegen

$$f(\psi_0) = 0, \text{ also } \frac{1}{f(\psi_0)} = \infty;$$

vielmehr ist eine Theilung nöthig:

$$J = J_1 + J_2 = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{f(\psi)} + \int_{\psi_1}^{90^\circ - \beta} \frac{d\psi}{f(\psi)} \dots \dots \dots (21)$$

und anderweitige Berechnung des ersten der beiden Theilintegrale, wobei

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi_1 \text{ als nur wenig } > \psi_0$$

vorausgesetzt sei. Indem aber, wenn

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi \text{ wenig } > \psi_0$$

ist, gesetzt werden kann:

$$\sin \psi = \sin \psi_0 + \cos \psi_0 \cdot \Delta\psi$$

$$\cos \psi = \cos \psi_0 - \sin \psi_0 \cdot \Delta\psi$$

$$f(\psi) = \sqrt{(m \cos \psi_0 + 2 \sin \beta \sin \psi_0) \Delta\psi}$$

und auch  $d\psi = d\Delta\psi$  ist, folgt

$$J_1 = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{f(\psi)} = \frac{2}{\sqrt{m \cos \psi_0 + 2 \sin \beta \sin \psi_0}} \int_{\frac{1}{2}\Delta\psi}^{\Delta\psi} \frac{d\Delta\psi}{\sqrt{\Delta\psi}} = 2 \sqrt{\frac{\Delta\psi_1}{m \cos \psi_0 + 2 \sin \beta \sin \psi_0}} \dots \dots \dots (22).$$

Dabei ist  $\Delta\psi_1$  in Bogenmass (als Bogenlänge für den Radius = 1) ausgedrückt vorausgesetzt. Das andere Theilintegral  $J_2$  kann nach der Simpson'schen Formel, etwa

$$J_2 = \int_{\psi_1}^{90^\circ - \beta} \frac{d\psi}{f(\psi)} = \frac{90^\circ - \beta - \psi_1}{12} \left[ \frac{1}{f(\psi_1)} + \frac{4}{f(\psi_2)} + \frac{2}{f(\psi_3)} + \frac{4}{f(\psi_4)} + \frac{1}{f(90^\circ - \beta)} \right] \dots \dots (23)$$

gesetzt werden mit

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi_3 - \psi_2 = \psi_4 - \psi_3 = 90^\circ - \beta - \psi_1.$$

Die Winkel sind hier in Graden ausgedrückt vorausgesetzt.

Mit den versuchsweise vorläufig angenommenen Werthen von  $\rho$  (und entsprechenden Werthen von  $m, \psi_0$ ) ergibt sich nach (22), (23) und (21), wenn in allen drei Fällen für  $90^\circ - \beta = 54^\circ$ :

$$\psi_1 = 28^\circ, \quad \psi_2 = 34^\circ 30', \quad \psi_3 = 41^\circ, \quad \psi_4 = 47^\circ 30',$$

also in den einzelnen Fällen

$$\begin{array}{rcc} \Delta\psi_1 = 6^\circ & 7^\circ & 8^\circ \\ = 0,1047 & 0,1222 & 0,1396 \end{array}$$

gesetzt wird,

$$\begin{array}{rcc} J_1 = 7^\circ 8' & 8^\circ 34' & 9^\circ 42' \\ J_2 = \underline{9^\circ 43'} & \underline{10^\circ 33'} & \underline{10^\circ 42'} \\ J = 16^\circ 51' & 19^\circ 7' & 20^\circ 24' \\ \text{statt } 19^\circ 30' & 19^\circ 45' & 20^\circ = \delta. \end{array}$$

Der Unterschied zwischen  $J$  und  $\delta$  ist in den zwei letzten Fällen so klein, dass man erwarten kann, ihn durch mässige Veränderung von  $\rho$  genügend zu beseitigen. In der That, wenn in beiden Fällen  $\rho = 1$  Mtr. genommen wird, wozu sich

$$\begin{array}{rcc} m & = 20,049 & \text{und } 22,382 \\ \psi_0 & = 23^\circ 30' & \text{„ } 17^\circ 30' \text{ ergibt,} \\ \text{ferner } \Delta\psi_1 & = 6^\circ 30' & \text{„ } 6^\circ 30' \\ & = 0,1134 & \text{„ } 0,1134, \\ \text{also } \psi_1 & = 30^\circ & \text{„ } 24^\circ \\ \psi_2 & = 36^\circ & \text{„ } 31^\circ 30' \\ \psi_3 & = 42^\circ & \text{„ } 39^\circ \\ \psi_4 & = 48^\circ & \text{„ } 46^\circ 30', \\ \text{so findet man } J_1 & = 8^\circ 53' & \text{„ } 8^\circ 13' \\ J_2 & = \underline{10^\circ 47'} & \text{„ } \underline{11^\circ 47'} \\ J & = 19^\circ 40' & \text{„ } 20^\circ. \end{array}$$

Für Gefälle  $H = 1,5$  bis 2 Mtr. sind also u. A. die folgenden Constructionsverhältnisse passend:

$$\begin{array}{l} R = H + 1 \text{ Mtr., } z = 32 + 8H, a_1 = 0,08R \\ \alpha_1 = \left(1 + \frac{H}{2}\right)^0, \alpha = 18^\circ \quad \beta = 36^\circ \\ a = 0,25 + 0,3H \text{ Mtr., } \quad \rho = 1 \text{ Mtr.} \end{array}$$

Bei den kleineren Gefällen ist es besser, den Winkel  $\alpha$  kleiner zu wählen, um damit auch  $\delta$  zu verkleinern. Wenn das geschieht, ohne das Verhältniss  $\frac{a_1}{R}$  zu ändern, so wird freilich nach Gl. (10) der Winkel  $\alpha - \lambda$  vergrössert und um so mehr  $\lambda$  verkleinert. Es werde deshalb mit  $\alpha$  zugleich das Verhältniss  $\frac{a_1}{R}$  kleiner genommen, und zwar etwa

$$\begin{array}{rcc} \text{für } H = 0,5 & 1 & 1,5 \text{ Mtr.} \\ \text{und } R = 1,5 & 2 & 2,5 \text{ „} \\ a_1 = 0,05R & 0,06R & 0,07R \\ = 0,075 & 0,12 & 0,175 \text{ Mtr.,} \end{array}$$

wozu  $\lambda = 9^{\circ} 27'$      $9^{\circ} 45'$      $10^{\circ} 7'$  aus (10)

und  $\alpha_1 = 2^{\circ} 20'$      $2^{\circ} 26'$      $2^{\circ} 14'$  aus (3)

gefunden wird. Bei der sehr beschränkten Zuverlässigkeit dieser letzten Bestimmung mag übrigens in allen diesen Fällen  $\alpha_1 = 2^{\circ}$ , also  $\delta = \alpha + 2^{\circ}$  gesetzt werden. Es sei nun hier

$$\begin{array}{l} \alpha = 15^{\circ} \quad 16^{\circ} \quad 17^{\circ} \\ \beta = 30^{\circ} \quad 32^{\circ} \quad 34^{\circ}, \end{array}$$

$$\text{also } \frac{u}{v} = 1,93 \quad 1,92 \quad 1,91 \text{ nach (4)}$$

immer noch hinlänglich wenig von dem nach (7) vortheilhaftesten Werthe dieses Geschwindigkeitsverhältnisses verschieden, da  $\eta$  als Function von

$\frac{u}{v}$  sich in der Nähe ihres Maximums nur sehr allmählich mit  $\frac{u}{v}$  ändert.

Aus (11) und (12) folgt jetzt

$$a > 0,223 \quad 0,381 \quad 0,559;$$

$$\text{es möge } a = 0,35 \quad 0,50 \quad 0,65$$

gewählt werden. Indem ferner nach (14)

$$\rho > 0,255 \quad 0,444 \quad 0,667$$

sein muss, werde versuchsweise vorläufig angenommen:

$$\rho = 0,4 \quad 0,6 \quad 0,8.$$

In oben erklärter Weise findet man dann

$$J = 12^{\circ} 57' \quad 16^{\circ} 45' \quad 18^{\circ} 46'$$

$$\text{statt } \delta = 17^{\circ} \quad 18^{\circ} \quad 19^{\circ}.$$

Von der kleinen Differenz im letzten Falle kann man absehen, da der Einfluss der Störungen bei der Bewegung des Wassers längs den Schaufeln ja doch nicht rechnerisch in Anschlag gebracht werden kann. Im zweiten Falle lässt sich die Differenz genügend verkleinern durch eine mässige Vergrößerung von  $\rho$ ; in der That findet man

$$J = 17^{\circ} 49' \text{ mit } \rho = 0,8 \text{ Mtr.}$$

Für Gefälle  $H = 1$  bis 1,5 Mtr. sind also u. A. die folgenden Constructionsverhältnisse passend:

$$R = H + 1 \text{ Mtr.}, \quad z = 32 + 8H, \quad a_1 = (0,04 + 0,02H)R$$

$$\alpha_1 = 2^{\circ}, \quad \alpha = (14 + 2H)^{\circ}, \quad \beta = 2\alpha$$

$$a = 0,2 + 0,3H \text{ Mtr.}, \quad \rho = 0,8 \text{ Mtr.}$$

Für Gefälle unter 1 Mtr. bleibt den Bedingungsgleichungen, besonders Gl. (20) noch Genüge zu leisten; die bisherigen Annahmen ergaben  $J$  wesentlich  $< \delta$ . Um eine bessere Uebereinstimmung zu erzielen, ist

$\delta$  zu verkleinern und  $J$  zu vergrössern. Ersteres bedingt eine noch weitere Verkleinerung von  $\alpha$ .  $J$  wird vergrössert besonders durch Verkleinerung von  $m$ , also von  $\frac{R}{\rho}$  und von  $\frac{R}{H}$  gemäss Gl. (19). Auch wird  $J$  vergrössert durch Vergrösserung des Unterschiedes der Integrationsgrenzen, also durch Verkleinerung von  $\beta$  und von  $\psi_0$ ; ersteres wird schon durch die Verkleinerung von  $\alpha$  herbeigeführt, letzteres durch Verkleinerung von  $\frac{r}{R}$ , wie Fig. 30 erkennen lässt, also durch Verkleinerung von  $\frac{R}{H}$ , wie aus Gl. (11) ersehen werden kann. Der Winkel  $\beta$  könnte zwar auch unabhängig von  $\alpha$  verkleinert werden; denn nach Gl. (4) ist

$$\cos \alpha - \cotg \beta \sin \alpha = \frac{v}{u},$$

also  $\beta$  bei gegebenem Werthe von  $\alpha$  um so kleiner,  $\cotg \beta$  um so grösser, je kleiner  $\frac{v}{u}$  oder je grösser  $\frac{u}{v}$  ist. Weil jedoch die Vergrösserung von  $\frac{u}{v}$  viel über 1,87 hinaus mit Rücksicht auf (7) nicht vortheilhaft ist, ist es sogar rathsam, für  $\alpha < 15^\circ$  den Winkel  $\beta$  etwas  $> 2\alpha$  zu nehmen, indem mit  $\beta = 2\alpha$  einem verschwindend kleinen  $\alpha$  entsprechen würde:  $u = 2v$ .

Die Bedingungsgleichung (20) verlangt somit bei kleinen Gefällen thunlichst kleine Werthe von

$$\alpha, \frac{R}{\rho} \text{ und } \frac{R}{H}$$

Das letztere Verhältniss, welches nach bisheriger Annahme bis 3 zunehmen sollte, wenn  $H$  bis 0,5 Mtr. abnimmt, mag auf höchstens 2,5 beschränkt werden. Die Vergrösserung von  $\rho$  zur Verkleinerung von  $\frac{R}{\rho}$  erscheint höchstens bis  $\rho = 0,4R$  rathsam, so dass  $\frac{R}{\rho}$  wenigstens  $= 2,5$  ist, wie es auch den schon gefundenen Regeln entspricht ( $\rho = 0,8$  für  $R = 2$  bis 2,5 und  $\rho = 1$  für  $R = 2,5$  bis 3). Die Verkleinerung von  $\alpha$  ist nach Gl. (10) durch Verkleinerung von  $\lambda$ , also durch Einschränkung der Kröpfung des Gerinnes unter dem Rade zu erkaufen; jedenfalls muss aber dieser Gleichung zufolge

$$\sin \alpha > \sqrt{\frac{1}{2} \frac{a_1}{R}}$$

sein, z. B.  $\alpha > 9^\circ 6'$  bzw.  $9^\circ 58'$   
für  $a_1 = 0,05R$  „  $0,06R$ .

Versuchsweise werde somit für  $H = 0,5$  Mtr. angenommen:

$$R = 2,5 H = 1,25 \text{ Mtr.}, \quad \rho = 0,4 R = 0,5 \text{ Mtr.}, \\ \alpha = 12^\circ 30', \quad \beta = 26^\circ, \text{ entsprechend } u = 1,88 v \text{ nach (4).}$$

Um  $a_1$  nicht allzu klein zu erhalten und damit den Vortheil des kleineren Winkels  $\alpha$  theilweise zu verlieren durch Vergrößerung von  $\alpha_1$  nach (3), werde  $a_1$  nicht  $= 0,05 R$  angenommen, wie vorhin, sondern

$$a_1 = 0,06 R = 0,075 \text{ Mtr.},$$

entsprechend  $\alpha_1 = 2^\circ 20'$  wie oben, obschon dann aus (10) sich  $\lambda$  nur  $= 4^\circ 32'$  ergibt.

Mit diesen Annahmen folgt aus (11) und (12):

$$a > 0,197 \text{ und mag } a = 0,3 \text{ Mtr.}$$

gewählt werden. Mit der Bedingung (14), welcher  $\rho > 0,219$  entspricht, sind die Annahmen nicht in Widerspruch. Indem aber schliesslich sich  $J = 18^\circ 15'$  ergibt, während hier

$$\delta = \alpha + \alpha_1 = 14^\circ 50'$$

ist, folgt, dass  $\alpha$  unter den übrigens gegebenen Umständen schon zu klein angenommen wurde, entsprechend natürlich  $\beta$ . Mit Rücksicht zugleich auf die für  $H = 1$  Mtr. oben gefundenen Werthe lässt sich schliessen, dass für Gefälle  $H = 0,5$  bis 1 Mtr. die folgenden Constructionsverhältnisse nahe passend sein werden:

$$R = H + 1 \text{ Mtr.}, \text{ doch höchstens } = 2,5 H \\ a_1 = 0,06 R, \quad \alpha_1 = 2,5^\circ, \quad \alpha = (12 + 4 H)^\circ, \quad \beta = (2\alpha + 1 - H)^\circ \\ a = 0,1 + 0,4 H \text{ Mtr.}, \quad \rho = 0,2 + 0,6 H \text{ Mtr.}$$

Aus der gemäss Gl. (1) festgestellten Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{\frac{2gH}{1,15}} = \sqrt{17 H}$$

ergibt sich  $v$  mit Hülfe des Verhältnisses beider Geschwindigkeiten, welches der Gleichung (4) entspricht, und bleibt dann nur noch die lichte Breite  $b$  des Rades zu bestimmen. Dieselbe kann der Weite des Schussgerinnes gleich gesetzt werden, wenn unter dem Rade das Gerinne entsprechend den Wanddicken des Radkranzes und dem nöthigen seitlichen Spielraume etwas verbreitert wird, so dass sie bei gegebener Nutzpferdestärke  $N$  und mit einem angenommenen Wirkungsgrade  $\eta$  aus

$$Q = \frac{0,075 N}{\eta H} = a_1 b u \dots \dots \dots (24)$$

gefunden wird. Wenn endlich unter dem Füllungscoefficienten auch hier das Verhältniss

$$\varepsilon = \frac{Q}{abv} = \frac{a_1 u}{a v}$$

verstanden wird, ergibt sich beispielsweise mit  $\frac{u}{v} = 1,9$

für $H =$	0,5	1	1,5	2
mit $a_1 =$	0,075	0,12	0,175	0,24
und $a =$	0,3	0,5	0,65	0,85
$\varepsilon =$	0,47	0,46	0,51	0,54

durchschnittlich  $\varepsilon = 0,5$ .

### III. Turbinen.\*

#### §. 28. Einleitende Erklärungen.

Auch bei den Turbinen ist, ebenso wie bei den Wasserrädern im engeren Sinne, der wesentlichste Bestandtheil des Rades der die Schaufeln enthaltende Radkranz, welcher bei der theoretischen Untersuchung einzig in Betracht kommt (abgesehen zunächst von gewissen minder vollkommenen Turbinen, die eines eigentlichen Radkranzes entbehren); hier wie früher wird darunter der ringförmige Raum verstanden, welcher bei der Umdrehung des Rades von den Schaufeln durchlaufen wird. Nur ist dieser Raum hier nicht immer cylindrisch, nämlich von rechteckigem Querschnitte. Der wesentlichste Unterschied der Turbinen von den Wasserrädern im engeren Sinne besteht aber, wie früher (§. 8) schon bemerkt wurde, darin, dass bei ihnen das Wasser durch den Radkranz in stetigem Strome hindurch fliesst, dass es also an verschiedenen Stellen ein- und austritt. Dem entsprechend werden die zwischen den Schaufeln enthaltenen gleichen Theile des Radkranzes hier nicht als Schaufelräume, sondern als Turbinen-Canäle bezeichnet, und es sind — abgesehen von den unvollkommenen Stossrädern — die Schaufeln stetig gekrümmt, um Verluste an lebendiger Kraft durch Stoss bei der strömenden Bewegung in den Canälen auszuschliessen. Die Dicke der Schaufeln kommt hier

\* Von neueren Arbeiten sind hier besonders G. Herrmann's Bearbeitung der fünften Auflage von Weisbach's Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik und Ansätze von Bernh. Lehmann in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure zu Rath gezogen worden. C. Bach's Werk „Die Wasserräder“ erschien während der Abfassung des Manuscripts und blieb unberücksichtigt.