Theoretische Maschinenlehre

in 4 Bänden

Theorie der Kraftmaschinen

Grashof, Franz

Leipzig, 1890

II. Wasserräder

urn:nbn:de:bsz:31-282943

Dagegen ist es fraglich, ob auch bei Hochwasser die Stauhöhe am oberen Ende der benutzten Flussstrecke bei A der Bedingung gemäss noch kleiner, als 0,06 Mtr., folglich ob die Flussstelle, wo bei Hochwasser die Stauhöhe $h^1 = 0{,}06$ Mtr. stattfinden wird, um weniger als 500 Mtr. vom Wehr bei C entfernt ist? Zur Prüfung dienen wieder die Gleichungen (4)—(10), in welchen aber jetzt

$$a = a^1 = 0{,}58 \text{ und } u_0 = \frac{6{,}5}{0{,}58 \,.\, 10} = 1{,}121$$

zu setzen ist, während es nur einen kleinen Fehler verursachen kann, wenn der frühere Werth des Coefficienten

$$c = \left(\frac{k_0}{k}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}92$$

hier beibehalten wird. So findet man nach (4):

$$s = 420 + 191\,(i^1 - i)$$

und weiter mit Rücksicht auf (10) und die betreffende Tabelle in Bd. I, §. 133, nämlich mit

$$\frac{1}{x} = \frac{0{,}58 \,.\, 0{,}92}{0{,}58 + 0{,}9} = 0{,}361 \qquad i = 0{,}0664$$

$$\frac{1}{x^1} = \frac{0{,}58 \,.\, 0{,}92}{0{,}58 + 0{,}06} = 0{,}834 \qquad i^1 = 0{,}4811$$

$$s = 420 + 79 = 499 \text{ Mtr.}$$

Die Wehrdammhöhe = 1,13 Mtr., entsprechend der Stauhöhe $h = 0{,}9$ Mtr. an der Flussstelle C, ist also in der That eben noch zulässig.

II. Wasserräder.*

§. 12. Einleitende Erklärungen.

Die wesentlichsten und besonders für die Theorie vorzugsweise in Betracht kommenden Theile eines Wasserrades sind seine Schaufeln (von Holz oder Eisenblech), welche zur unmittelbaren Aufnahme des Wasserdrucks dienen und welche, abgesehen von ihrer Dicke, als con-

* Es versteht sich von selbst, dass hier wie in den folgenden Abschnitten die bezügliche Litteratur vielfach benutzt worden ist, wenn es auch an den betreffenden Stellen nicht immer ausdrücklich gesagt wurde. Was insbesondere diesen von den Wasserrädern handelnden Abschnitt betrifft, so bezieht sich jene Bemerkung besonders auf die Schriften von Redtenbacher und auf G. Herrmann's Bearbeitung der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik von Weisbach.

gruente materielle Flächen bezeichnet werden können, die in gleichen Entfernungen von einander und in gleichen Lagen gegen das Rad an dessen Umfange so angeordnet sind, dass sie bei der Umdrehung des Rades alle denselben ringförmig cylindrischen Raum durchlaufen. Dieser Raum heisse im Folgenden der Radkranz, jeder der gleichen Theile, in die er durch die Schaufeln getheilt wird, ein Schaufelraum.

An seiner äusseren Cylinderfläche ist der Radkranz offen, indem hier das Wasser ein- und austritt. (Nur ausnahmsweise ist wohl auch das Wasser an der Innenfläche des Kranzes eingeführt worden.) Gewöhnlich ist der Radkranz an seiner inneren Cylinderfläche durch einen sogenannten Boden materiell abgeschlossen. Je nach Form und Stellung der Schaufeln, deren Oberflächen übrigens stets cylindrische (ebene, gebrochene oder krumme) Flächen mit Erzeugungslinien parallel der Radaxe sind, unterscheidet man gewöhnlich Schaufelräder im engeren Sinne und Zellenräder; bei ersteren haben die Schaufeln eine vorwiegend radiale, bei letzteren wenigstens nach aussen hin eine mehr tangentiale Richtung. An den beiden ebenen ringförmigen Seitenflächen ist der Radkranz bei Zellenrädern materiell abgeschlossen, bei den Schaufelrädern nicht immer, vielmehr sind Schaufelräder mit seitlich geschlossenem Radkranz (sogenannte Staberäder) und solche mit seitlich offenem Radkranz (sogenannte Strauberäder) zu unterscheiden.*

Man unterscheidet ferner freihängende und Kropfräder. Erstere sind entweder freihängend im engeren Sinne, nämlich so, dass die tiefste Stelle des Rades sich noch etwas, um den sogenannten Betrag des Freihängens, über dem Unterwasserspiegel befindet, oder sie tauchen in das Wasser ein, entweder als Schiffmühlenräder in das verhältnissmässig unbegrenzte Wasser eines Flusses, oder in das in einem geraden sogenannten Schnurgerinne fliessende Wasser mit möglichst kleinem Spielraume zwischen dem Radumfang und dem Gerinneboden. Bei den Kropfrädern wird der wasserhaltende Bogen des Kranzes von einem

* Dem sonstigen Sprachgebrauche würde es besser entsprechen, die Schaufelräume, abgesehen von der Schaufelform, immer dann als Zellen, die betreffenden Räder als Zellenräder zu bezeichnen, wenn der Radkranz seitlich materiell abgeschlossen ist, also die Schaufelräume nur nach aussen offen sind; doch mögen in dieser Hinsicht die eingebürgerten Benennungen beibehalten werden, die aus einer Zeit stammen, in welcher der Bau der Wasserräder kaum Sache des wissenschaftlichen Maschinenbaues, vielmehr lediglich des empirischen Handwerks war. Nur der oben festgestellte Begriff des Radkranzes weicht von dem hier üblichen Sprachgebrauche ab, gemäss welchem vielmehr die ringförmigen Seitenwände des hier so genannten Radkranzes als Radkränze bezeichnet zu werden pflegen.

sogenannten **Kropf** (Mantel) mit möglichst kleinem Spielraume zwischen der cylindrischen Oberfläche desselben und den äusseren Schaufelkanten umschlossen. Dieser aus Holz oder Stein hergestellte Kropf ist gewöhnlich zu einem **Kropfgerinne** ausgebildet durch ebene vertikale Seitenwände, die den Radkranz auch seitlich mit möglichst kleinem Spielraume umschliessen und (wenigstens im Falle hölzerner Kropfgerinne) als **Wasserbänke** bezeichnet zu werden pflegen. Nothwendig zum Zweck des Kropfes, den Ausfluss des Wassers aus den Schaufelräumen vor deren tiefster Lage thunlichst zu erschweren, sind dergl. Seitenwände des Kropfes natürlich bei Schaufelrädern mit seitlich offenem Radkranz.

In Bezug auf die Art der Wasserzuführung unterscheidet man Räder mit **Spannschütze**, **Ueberfallschütze** oder **Leitschaufelschütze** (Coulissenschütze), jenachdem das Aufschlagwasser aus einer rechteckigen Mündung mit oder ohne Ansatzgerinne dem Rade zufliesst, oder als Ueberfall über einer horizontalen Schwelle mit oder ohne angesetzte Leitschaufel, oder endlich aus einer kurzen Ansatzröhre bezw. aus einem System von solchen mit rechteckigen Querschnitten. Bei der **Spannschütze** geschieht die Regulirung durch ein von oben her stellbares Schutzbrett, wodurch die Entfernung des oberen vom festliegenden unteren Rande der Ausflussöffnung, also die Höhe der letzteren verändert werden kann; die Regulirung betrifft unter diesen Umständen nur die Menge, nicht aber die Geschwindigkeit des ausfliessenden und dem Rade zufliessenden Wassers, welche vielmehr mit dem Oberwasserstande sich entsprechend ändert und selbst (als mittlere Geschwindigkeit) bei unverändertem Oberwasserspiegel in bestimmtem Masse etwas grösser wird bei der Senkung, etwas kleiner bei der Hebung des Schutzbrettes, somit etwas grösser bei der Verkleinerung, etwas kleiner bei der Vergrösserung der Wassermenge. Bei der **Ueberfallschütze** sind durch Verstellung der Ueberfallschwelle, also durch Aenderung der Höhe des Ueberfalles stets nur die Menge und die Geschwindigkeit des überfallenden Wassers in gleichem Sinne regulirbar; aber es ist wenigstens möglich, bei beliebig veränderlichem Oberwasserstande beide constant zu erhalten oder in beliebigem Masse, nur nicht unabhängig von einander zu ändern. Bei der **Leitschaufelschütze** endlich, wenigstens bei ihrer vollkommensten Ausführungsart, wobei das Wasser zwischen den einander zugekehrten horizontalen Rändern von zwei einzeln und unabhängig von einander stellbaren Schutzbrettern und längs einem System von Leitschaufeln, welche zwischen der Gleitbahn jener Schutzbretter und dem Rade festliegend angeordnet sind, dem letzteren zufliesst, können die Menge und die

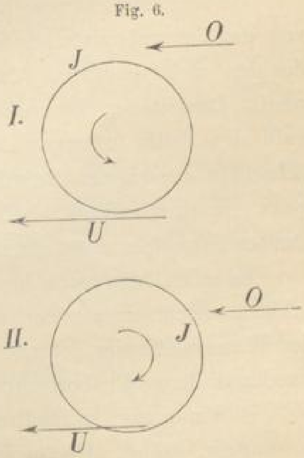
Geschwindigkeit des zufliessenden Wassers unabhängig von einander regulirt werden, und es ist insofern diese Art der Wasserzuführung, wo sie constructiv am Platze ist, besonders bei sehr veränderlichem Oberwasserstande die vollkommenste, um so mehr, als man dabei auch die Sicherstellung der vortheilhaftesten Richtung des Wassereinflusses in das Rad am besten in der Gewalt hat. Freilich ist sie mit etwas grösseren hydraulischen Widerständen verbunden.

Mehr von constructiver Wichtigkeit, als von Bedeutung für die hier zu besprechende Theorie der Wasserräder, ist die Art und Weise, wie die gewonnene Arbeit vom Rade fortgepflanzt wird, ob insbesondere dazu 1) ein in einiger Entfernung von ihm auf der Wasserradwelle sitzendes Zahnrad dient, oder 2) ein mit dem Radkranze auf einer Seite verbundener Zahnkranz, oder 3) zwei solche Zahnkränze, die auf beiden Seiten mit dem Radkranze verbunden sind und in zwei Getriebe der Transmissionswelle eingreifen. Wenn man bei Voraussetzung von zwei Armsystemen zur Verbindung des Radkranzes mit der Welle dasjenige, welches im Falle 1) dem auf der Welle sitzenden Zahnrade zunächst liegt, als das erste, das andere als das zweite Armsystem bezeichnet, so wird das Wellenstück zwischen dem Zahnrade und dem ersten Armsystem durch das Kraftmoment M, das Wellenstück zwischen beiden Armsystemen durch das Kraftmoment $\frac{1}{2} M$ auf Torsion, sowie jedes Armsystem durch das Kraftmoment $\frac{1}{2} M$ auf Biegung in Anspruch genommen, wo $M = E . \omega$ ist, unter E (§. 8) den Nutzeffect und unter ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades verstanden. Im Falle 2) geht die Hälfte des Moments M unmittelbar in den Zahnkranz über, die andere Hälfte wird durch das zweite, nämlich durch das auf der anderen Seite des Radkranzes befindliche Armsystem, durch die Welle und durch das erste Armsystem auf den Zahnkranz übertragen. Vom Kraftmoment $\frac{1}{2} M$ werden somit beide Armsysteme und zwar in entgegengesetztem Sinne auf Biegung, das zwischen ihnen liegende Wellenstück auf Torsion in Anspruch genommen, es sei denn, dass durch schräg eingefügte Umfangszugstangen beide Seiten des Radkranzes unmittelbar so mit einander verbunden werden, dass sie keiner nennenswerthen relativen Verdrehung fähig sind. Vollkommen wird im Falle 3) die Welle vor Torsion, und werden die Radarme vor Biegung (abgesehen von der Wirkung des Radgewichtes) bewahrt, indem letztere dann nur zum Tragen des Rades dienen. Weitere, übrigens leicht zu übersehende Complicationen dieser Verhältnisse, welche für die Construction des Rades natürlich von erheblicher Bedeutung sind, treten dann ein, wenn bei sehr breiten Rädern noch ein drittes mittleres Armsystem angeordnet oder wenn ein Zahnkranz, anstatt unmittelbar mit dem Radkranze, an mittleren Stellen mit den Armen eines Armsystems verbunden wird.

Das hauptsächlichste Kriterium für die Unterscheidung verschiedener Arten von Wasserrädern ist der Ort, wo das Wasser in das Rad eingeführt wird. Jenachdem dieser nahe der obersten, mittleren (in der Höhe der Radaxe gelegenen) oder untersten Stelle des Rades sich befindet, unterscheidet man *oberschlächtige*, *mittelschlächtige* und *unterschlächtige Räder*, auch zwischen den ober- und mittelschlächtigen noch *rückenschlächtige* (hochschlächtige), zwischen mittel- und unterschlächtigen noch *tiefschlächtige* Räder.

Ober- und rückenschlächtige Räder sind freihängende Zellenräder, bei welchen das Wasser vorwiegend unmittelbar durch seine Schwere wirkt, indem es in den Zellen der einen Radhälfte niedersinkt; die Stosswirkung vermöge der lebendigen Kraft, womit das Wasser einfliesst, ist von untergeordneter Bedeutung, indem das zur Erzeugung dieser lebendigen Kraft verwendete Gefälle einen verhältnissmässig kleinen Theil des ganzen Gefälles ausmacht. Den oberschlächtigen Rädern pflegt das Wasser durch eine Spannschütze, den rückenschlächtigen durch eine Leitschaufelschütze zugeführt zu werden, ein Vorzug der letzteren besonders bei veränderlicher Höhenlage des Oberwasserspiegels. Auch besteht der Unterschied, dass den oberschlächtigen Rädern das Wasser im Zuflussgerinne in demselben Sinne zufliesst, in welchem die Eintrittsstelle des Wassers in das Rad infolge der Drehung des letzteren ausweicht, den rückenschlächtigen Rädern aber im umgekehrten Sinne, wie ein Blick auf Fig. 6 erkennen lässt, in welcher die Pfeile O und U bezw. den Ober- und Unterwasserspiegel und zugleich die Bewegungsrichtungen des Wassers daselbst andeuten, J die mittlere Einflussstelle des Wassers in das oberschlächtige Rad gemäss der durch I., in das rückenschlächtige Rad gemäss der durch II. angedeuteten Disposition. Unter diesen Umständen ist unten die Abflussrichtung U des Wassers

Fig. 6.



der Bewegungsrichtung des oberschlächtigen Rades daselbst entgegengesetzt, mit derjenigen des rückenschlächtigen dagegen übereinstimmend, weshalb ersteres zur Vermeidung eines erheblichen Widerstandes im Unterwasser vor dem Eintauchen in dasselbe (dem sogenannten Waten) bewahrt werden muss, zuweilen (bei sehr veränderlicher Höhenlage des Unterwasserspiegels) ihm sogar unter mittleren Umständen ein gewisser Betrag des Freihängens gegeben wird, der einen für den Effect des Rades verlorenen Theil des Gefälles darstellt. Das Waten rückenschlächtiger Räder ist dagegen nicht von so erheblichem Nachtheil, was als Vorzug derselben auch mit Rücksicht auf die Veränderlichkeit des Unterwasserstandes zu betrachten ist. Um in solchen Fällen, in welchen thunlichst sparsame Wasserverwendung geboten ist, den Wirkungsgrad der rückenschlächtigen Räder noch mehr zu steigern, wird der wasserhaltende Bogen des Radkranzes zuweilen schon mit einem Mantel umgeben, bei welchem dann aber Wasserbänke (Seitenwände, die den Radkranz zwischen sich fassen) entbehrlich sind.

Mittel- und tiefschlächtige Räder sind gewöhnlich Schaufelräder mit Kropf, bei denen alle Arten der Wasserzuführung vorkommen. Bei den mittelschlächtigen Rädern wirkt das Wasser noch vorwiegend unmittelbar durch seine Schwere, indem es auf den im Kropf laufenden Schaufeln relativ ruhend niedersinkt, jedoch auch schon grossentheils, bei tiefschlächtigen Rädern mitunter sogar vorwiegend durch Stoss infolge des Geschwindigkeitsüberschusses des die Schaufeln treffenden Wassers.

Unterschlächtige Räder sind Schaufelräder, welchen abgesehen von den im unbegrenzten Wasser hängenden Schiffmühlenrädern, die einer Schütze nicht bedürfen, das Wasser durch eine Spannschütze zugeführt wird. Dasselbe wirkt ausschliesslich mittelbar durch seine schon ausserhalb des Rades erlangte lebendige Kraft, und zwar bei den mit ebenen Schaufeln versehenen Schiffmühlenrädern und Rädern im Schnurgerinne durch Stoss, bei dem mit gekrümmten und entsprechend gestellten Schaufeln ausgerüsteten Poncelet-Rade durch stetigen Druck. —

Es seien hier noch im Voraus einige Buchstabenbezeichnungen erklärt, welche ausser den schon im §. 8 erklärten bezüglich der Theorie der Wasserräder im Folgenden stets in denselben Bedeutungen gebraucht werden sollen. Es bezeichne

R den äusseren Halbmesser des Rades,

a die radiale Dimension des Radkranzes, die sogenannte Kranzbreite oder Radtiefe, bei vorhandenem Boden bis zu dessen Aussenfläche gerechnet,

b die axiale Dimension des Radkranzes oder die Radbreite, bei vorhandenen Seitenwänden des Radkranzes auch Radweite genannt, wodurch ausgesprochen ist, dass dann diese Dimension im Lichten zwischen den Seitenwänden gemessen werden soll (entsprechend der Bedeutung des Products ab als der Querschnittsgrösse des von den wirksamen Schaufelflächen durchlaufenen ringförmigen Raumes, der oben als Radkranz bezeichnet wurde),

z die Anzahl der Schaufeln,

e die Theilung des Rades, d. i. die in der äusseren Peripherie gemessene Entfernung zweier benachbarter Schaufeln,

ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades,

n seine Umdrehungszahl pro Minute,

u die absolute Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers an der äusseren Peripherie, und zwar bezogen auf den Mittelpunkt J des Einlaufbogens, d. h. des Bogens der Radperipherie, längs welchem das Wasser einfliesst,

h den Theil des disponiblen Gefälles H, welcher zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit verwendet wird, also die Tiefe des Punktes J unter dem Oberwasserspiegel,

v die äussere Peripheriegeschwindigkeit des Rades,

α den Winkel zwischen den Richtungen von u und v, falls u auf den festliegenden Punkt J und v auf den augenblicklich damit zusammenfallenden Punkt der Peripherie des rotirenden Rades bezogen wird,

w die ebenso verstandene relative Eintrittsgeschwindigkeit des Wassers gegen das Rad, also die Resultante von u und der entgegengesetzt genommenen, auf denselben Punkt bezogenen Peripheriegeschwindigkeit v,

β den spitzen Winkel, unter welchem der Umfang des Rades vom Querprofil der Schaufelfläche, nämlich von ihrem Durchschnitt mit einer zur Radaxe senkrechten Ebene geschnitten wird,

ε das Verhältniss $\frac{Q}{abv}$, den sogenannten Füllungscoefficienten, nämlich das Verhältniss des zufliessenden Wasservolumens zu demjenigen Volumen, welches gleichzeitig ein Querschnitt ab des Radkranzes mit der Annäherung beschreibt, mit welcher die Geschwindigkeit seines Mittelpunktes $= v$ gesetzt werden kann, und also auch zu demjenigen Volumen, welches vom Wasser höchstens ausgefüllt werden könnte, falls die Schaufeln materielle Flächen ohne Dicke wären,

F den Querschnitt, also Fb das cylindrische Volumen der von einem Schaufelraume thatsächlich aufgenommenen Wassermenge.

Endlich sei stets mit M der Mittelpunkt, mit O der oberste, mit U der unterste Punkt der Radperipherie bezeichnet, mit E der Mittelpunkt eines Theilbogens e, mit J der schon erwähnte Mittelpunkt des Einlaufbogens. Letzterer ist von fester Lage, während jeder Punkt E mit dem Rade umläuft, also nur periodisch und augenblicklich mit J zusammenfällt.

Zwischen den erklärten Buchstabengrössen finden folgende allgemeine Beziehungen statt:

$$\left.\begin{aligned} n &= \frac{60\,\omega}{2\,\pi} = \frac{30}{\pi}\,\omega = 9{,}55\,\omega \\ \omega &= \frac{\pi}{30}\,n = 0{,}1047\,n \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

$$2\,\pi R = z e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

ferner, da u, v, w die Seiten eines Dreiecks sind, in welchem der Seite w der Winkel α gegenüberliegt,

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2\,uv\cos\alpha \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

endlich, da $\frac{Q}{v}$ das pro Längeneinheit der Radperipherie zufliessende Wasservolumen, also

$$Fb = \frac{Q}{v}\,e$$

ist, mit Rücksicht auf die Bedeutung von ε:

$$F = \frac{Qe}{bv} = \varepsilon a e \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Die Theorie der Wasserräder hat hauptsächlich das Ziel, den Wirkungsgrad η eines gegebenen oder eines zu entwerfenden Rades als Function seiner Elemente mit angemessener Näherung auszudrücken, um danach auch diejenigen Werthe bezw. Verhältnisse der besprochenen und anderer Radelemente zu finden, welche einen möglichst grossen Wirkungsgrad unter sonst gegebenen Umständen zur Folge haben. Dazu ist die Kenntniss der Abhängigkeitsgesetze der einzelnen Effectverluste nöthig, welche bei einem Wasserrade vorkommen. Es mögen zunächst allgemein, abgesehen von den einzelnen Arten von Wasserrädern, die wesentlichsten dieser Effectverluste näher besprochen und thunlichst zur Ableitung von Berechnungs- und Constructionsregeln verwerthet werden. Die wichtigsten derselben können als Gefällverluste, andere als Wasserverluste oder unmittelbar als aliquote Theile des absoluten Effects in Rechnung gebracht werden.

a. Allgemeine Erörterungen in Betreff der Verhältnisse von Wasserrädern, insbesondere ihrer Effectverluste.

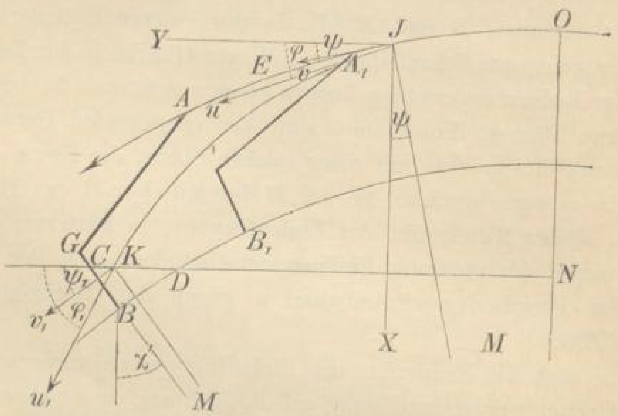
§. 13. Effectverluste, mit welchen der Einfluss des Wassers in das Rad verbunden ist.

Der wesentlichste dieser Effectverluste rührt her von dem Stosse des einfliessenden Wassers, sei es gegen die jeweils von ihm getroffene Schaufel, sei es gegen das Wasser, das in dem betreffenden Schaufelraume schon angesammelt und im unteren Theile desselben näherungsweise zu relativer Ruhe gegen das Rad gelangt ist. Behufs allgemeiner Erörterung dieses als Gefällverlust auszudrückenden Effectverlustes seien AB und A_1B_1 zwei benachbarte Schaufeln, in Figur 7 als Schaufelprofile, nämlich als Durchschnittslinien mit der zur Radaxe senkrechten Ebene der Figur sich darstellend, AB die bezüglich des Bewegungssinnes des Rades vordere, A_1B_1 die hintere Schaufel, A und A_1 die in der äusseren, B und B_1 die in der inneren Cylinderfläche des Radkranzes gelegenen Schaufelränder. Wegen Gleichheit der Verhältnisse in allen zur Radaxe senkrechten Ebenen können stets statt der betreffenden cylindrischen Flächen ihre Profile, statt der erzeugenden Geraden jener Flächen ihre Schnittpunkte mit einer solchen Ebene, der Ebene der Figur, in Betracht gezogen werden. So sei E der Mittelpunkt des Theilbogens $AA_1 = e$, J der Mittelpunkt des Einlaufbogens; in letzterem sei φ der Neigungswinkel der absoluten Einflussgeschwindigkeit u, ψ der Neigungswinkel der Peripheriegeschwindigkeit v gegen den Horizont = dem Winkel JMO.

Wenn auch die Endpunkte des Einlaufbogens als vorderer und hinterer bezeichnet werden mit Bezug auf die Richtung, in welcher der Theilbogen AA_1 am festliegenden Einlaufbogen sich vorbei bewegt, so fängt der Einfluss des Wassers in den Schaufelraum zwischen AB und A_1B_1 an, wenn A mit dem hinteren, er hört auf, wenn A_1 mit dem vorderen Endpunkte des Einlaufbogens zusammenfällt. Dabei kommen die Wassertheilchen, welche an verschiedenen Stellen des Einlauf- und des Theilbogens in den Schaufelraum einfliessen, mit verschiedenen Geschwindigkeiten, überhaupt unter verschiedenen Umständen zum Stoss, pro Gewichtseinheit verschieden grosse Effectverluste, d. h. verschieden grosse Gefällverluste bedingend. Die genauere Berücksichtigung dieser Verschiedenheiten würde auf kaum überwindliche Schwierigkeiten oder wenigstens zu Weitläufigkeiten führen, die zum Genauigkeitsbedürfnisse in

Missverhältniss ständen. Es kann aber kein in Betracht kommender Fehler dadurch verursacht werden, dass man den durchschnittlichen betreffenden Gefällverlust demjenigen gleich setzt, welcher dem mittleren Wassertheilchen der Füllung des in Rede stehenden Schaufelraumes, nämlich demjenigen entspricht, das im Punkte J in dem Augenblicke einfliesst, in welchem E mit J zusammenfällt. Dieses Wassertheilchen kommt zum Stoss, wenn die Hälfte der Wasserfüllung des betrachteten Schaufelraumes bereits zum Stoss gelangt ist, und zwar erfolgt der Stoss im Allgemeinen in einem gewissen Punkte K der Oberfläche CD des im unteren Theile des Schaufelraums schon angesammelten Wassers vom Volumen $\frac{1}{2}Fb$. Die Richtung der Einflussgeschwindigkeit u (der Winkel φ) kann immer so gewählt werden, dass der Stosspunkt K von solcher Lage ist, wie hier vorausgesetzt werden soll.

Fig. 7.



Während das mittlere Wassertheilchen unter dem Einflusse seiner Anfangsgeschwindigkeit u im Punkte J und der Schwere die parabolische Bahn JK durchläuft, welche die Richtungslinie von u in J berührt, seien die Schaufeln AB, A_1B_1 und der Punkt E in die Lagen gekommen, die in Fig. 7 angegeben sind, so dass der Bogen JE der Radperipherie $= vt$ ist, wenn t die Zeit der fraglichen Bewegung in Secunden bedeutet. Die Endgeschwindigkeit des Wassertheilchens in K sei $= u_1$, unter dem Winkel φ_1 gegen den Horizont geneigt. Die Geschwindigkeit des Radpunktes K, welche im Verhältnisse $KM:JM$ kleiner als v ist, sei mit v_1, der Neigungswinkel ihrer zu KM senkrechten Richtung gegen den Horizont mit ψ_1 bezeichnet. Ist endlich w_1 die relative Geschwindigkeit des Wassertheilchens gegen das Rad im Punkte K (die Resultante von u_1 und $-v_1$), und nimmt man an, dass diese relative Geschwindigkeit durch den Stoss verloren wird (das Theilchen plötzlich zu relativer Ruhe gegen das Rad gelangt), so ist $\frac{w_1^2}{2g}$ der Verlust an lebendiger Kraft pro 1 Kgr., d. h. der Verlust an Gefälle, welcher als durchschnittlicher Gefällverlust betrachtet werden sollte.*

Das Quadrat der relativen Geschwindigkeit w_1 als der Resultanten von u_1 und $-v_1$ ist:

$$w_1^2 = (u_1 \cos\varphi_1 - v_1 \cos\psi_1)^2 + (u_1 \sin\varphi_1 - v_1 \sin\psi_1)^2$$

oder, da von der absoluten Geschwindigkeit des Wassertheilchens nur die verticale Componente durch die Wirkung der Schwere geändert wird, also

$$u_1 \cos\varphi_1 = u \cos\varphi \text{ und } u_1 \sin\varphi_1 = u \sin\varphi + gt$$

ist, unter g immer die Beschleunigung der Schwere verstanden,

$$w_1^2 = (u \cos\varphi - v_1 \cos\psi_1)^2 + (u \sin\varphi + gt - v_1 \sin\psi_1)^2 \ldots (1).$$

Ebenso wie v und ψ (mit der Lage des Punktes J) sind auch u und φ in einem gegebenen Falle gegeben, so dass die Berechnung von w_1 nach Gl. (1) nur noch die Kenntniss der Zeit t und der Lage des Punktes K erfordert, wodurch nämlich v_1 und ψ_1 bestimmt sind. Indem aber die Coordinaten x, y von K in Beziehung auf die Axen JX (vertical) und JY (horizontal)

$$x = u \sin\varphi \,.\, t + \frac{gt^2}{2} \text{ und } y = u \cos\varphi \,.\, t \ldots\ldots\ldots (2)$$

sind, erfordert die Bestimmung von w_1 und somit des Gefällverlustes $\frac{w_1^2}{2g}$ in der That nur noch die Kenntniss von t. Eine Gleichung für t ergiebt sich durch Aufstellung eines zweiten Ausdrucks von x und seine Gleich-

* Nach einem allgemeinen Satze der Mechanik ist der Verlust an lebendiger Kraft infolge von unelastischen Stössen zwischen den materiellen Punkten eines beliebigen Systems = der Summe derjenigen lebendigen Kräfte, welche den verlorenen Geschwindigkeiten aller Punkte entsprechen, unter der vorlorenen Geschwindigkeit eines Punktes die Resultante seiner Geschwindigkeit vor dem Stoss (hier u_1) und entgegengesetzt genommenen Geschwindigkeit nach dem Stoss (hier $-v_1$) verstanden. Zu dem System gehört hier freilich auch das Rad; sofern dieses aber unter dem Einflusse der sich beständig wiederholenden Stösse und der übrigen gleich bleibenden Umstände eine constante Geschwindigkeit hat, betrifft der hier in Rede stehende Verlust an lebendiger Kraft thatsächlich nur das Wasser.

setzung mit obigem gemäss Gl. (2). Zu dem Ende sei mit ψ'' der Winkel bezeichnet, unter welchem die Sehne JE gegen JY geneigt ist, also

$$\psi'' = \psi + \frac{1}{2}\frac{JE}{JM} = \psi + \frac{1}{2}\frac{vt}{R} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Der Bogen $JE = vt$ ist aber immer klein genug, um ohne in Betracht kommenden Fehler seiner Sehne gleich gesetzt werden zu können, so dass, wenn k die Höhe des Punktes E über der horizontalen Geraden durch den Punkt K bedeutet, auch

$$x = vt \sin\psi'' + k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ist und durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von x sich die Gleichung ergiebt:

$$g^2t^2 + 2gt(u \sin\varphi - v \sin\psi'') = 2gk \quad \ldots\ldots\ldots (5).$$

Vermittels dieser Gleichung kann t durch wiederholte Annäherung gefunden werden. Behufs einer ersten Näherung kann das Schaufelprofil AB in der Lage gezeichnet werden, in welcher (entsprechend $t = 0$) E mit J zusammenfällt, und k = der Höhe der zusammenfallenden Punkte E, J über der horizontalen Geraden, welche mit AB und dem inneren Umfange des Radkranzes die Fläche $\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}\varepsilon a e$ umgrenzt, berechnet oder mit dem Zirkel abgegriffen werden. Wird ferner ψ'' vorläufig $= \psi$ gesetzt, so ergiebt sich aus (5) ein erster Näherungswerth von t, mit welchem dann ein zweiter Näherungswerth gefunden werden kann, indem $JE = vt$ abgetragen, AB in der entsprechend corrigirten Lage gezeichnet und k = der Höhe von E über der Horizontalen ermittelt wird, welche mit der neuen Lage von AB und dem inneren Umfange des Radkranzes die Fläche $\frac{1}{2}F$ umgrenzt, und indem auch ψ'' gemäss Gl. (3) corrigirt wird. Nöthigenfalls können noch weitere, immer genauere Werthe von t auf dieselbe Weise gefunden werden.

Beispielsweise sei für ein oberschlächtiges Rad (alle Längen auf das Meter als Einheit bezogen)

$$R = 6; \quad z = 100; \quad a = 0{,}32; \quad \varepsilon = \frac{1}{4}$$
$$\varphi = 22^0, \; u = 5; \quad \psi = 12^0, \quad v = 2{,}5.$$

Es ist dann die Theilung $e = \frac{2\pi R}{z} = 0{,}377$ und der Theilwinkel, der mit λ bezeichnet sei,

$$\lambda = \frac{360^0}{z} = 3^0\,36'.$$

Die Schaufeln seien einfach gebrochen, bestehend aus je einer ebenen und radial gerichteten sogenannten Riegelschaufel, welche sich bis zur Mitte der Kranzbreite erstrecke, und einer gleichfalls ebenen sogenannten Stossschaufel (obschon sie den Stoss des Wassers nicht zu empfangen bestimmt ist), welche so geneigt sei, dass ihr Mittelpunktswinkel $AMB =$ dem Theilwinkel ist, dass also A und B_1 (Fig. 7) in demselben Halbmesser des Rades liegen. (Die Figur ist der Wirklichkeit besonders deshalb nicht ganz entsprechend, weil zu ihrer grösseren Deutlichkeit die Kranzbreite zu gross gezeichnet ist.)

Wird nun zunächst der betrachtete Schaufelraum in der Lage vorausgesetzt, in welcher E mit J zuzammenfällt, so ist der Winkel OMB, der mit χ bezeichnet sei,

$$\chi = \psi + 1{,}5\,\lambda = 17^0\,24'$$

und die Höhe des in J liegenden Punktes E über B mit Rücksicht auf

$$MB = R - a = 5{,}68$$

$$p = MJ\,.\,cos\,\psi - MB\,.\,cos\,\chi = 0{,}449.$$

Unter der Voraussetzung, dass die horizontale Gerade, welche vom Querschnitte des Schaufelraums unterhalb die Fläche

$$\frac{\varepsilon a e}{2} = 0{,}0151$$

abschneidet, den radialen Theil der Schaufel AB (die Riegelschaufel) trifft und von ihr das Stück

$$r = BC < 0{,}16$$

abschneidet, kann die fragliche Fläche ohne in Betracht kommenden Fehler als ein rechtwinkliges Dreieck BCD betrachtet werden; ist dessen Höhe, zur Hypothenuse CD gehörig, $= q$, so ist die Kathete

$$BC = r = \frac{q}{cos\,\chi}$$

und die andere Kathete $\quad BD = \dfrac{q}{sin\,\chi}$,

also der Inhalt $\quad = \dfrac{1}{2}\,\dfrac{q}{cos\,\chi}\,\dfrac{q}{sin\,\chi} = \dfrac{q^2}{sin\,2\chi}$.

Daraus folgt $q = \sqrt{0{,}0151\,sin\,2\chi} = 0{,}093$ und der entsprechende Werth von $r = 0{,}097$ bestätigt dadurch, dass er $< 0{,}16$ ist, die Voraussetzung dieser Berechnung von q.

Die Höhe von E über CD ist nun

$$k = p - q = 0{,}356$$

und mit vorläufig $\psi'' = \psi$ ist nach Gl. (5):

$$g^2 t^2 + 2gt \,.\, 1{,}353 = 6{,}985$$

$$gt = 1{,}616; \quad t = 0{,}102 \,.\, 1{,}616 = 0{,}165 \text{ Sec.}$$

$$vt = 0{,}412; \quad \frac{vt}{R} = 0{,}0687 = 3^0\,56'.$$

Wird jetzt die Schaufel AB in solcher Lage aufgezeichnet, dass $JE = vt = 0{,}412$ ist, so ist

$$\text{Winkel } OME = \psi' = \psi + \frac{vt}{R} = 15^0\,56'$$

$$\text{„} \quad OMB = \chi' = \chi + \frac{vt}{R} = 21^0\,20'$$

$$p = ME \,.\, \cos\psi' - MB \,.\, \cos\chi' = 0{,}479$$

$$q = \sqrt{0{,}0151 \sin 2\chi'} = 0{,}101; \quad r = \frac{q}{\cos\chi'} = 0{,}109$$

$$k = p - q = 0{,}370 \text{ und } \psi'' = \psi + \frac{1}{2}\frac{vt}{R} = 13^0\,58'.$$

Damit geht Gl. (5) über in:

$$g^2 t^2 + 2gt \,.\, 1{,}270 = 7{,}259$$

und giebt

$$gt = 1{,}705; \quad t = 0{,}174.$$

Begnügt man sich mit diesem einmal corrigirten Werth von t und mit $k = 0{,}37$, so ist jetzt

$$vt = 0{,}435; \quad \frac{vt}{R} = 4^0\,10'; \quad \psi'' = 14^0\,5',$$

damit nach Gl. (2) und (4):

$$x = vt \sin\psi'' + k = 6{,}476; \quad y = u \cos\varphi \,.\, t = 0{,}807$$

und, unter N den Durchschnittspunkt von CD mit MO verstanden,

$$MN = R \cos\psi - x = 5{,}393$$

$$NK = R \sin\psi + y = 2{,}054$$

$$MK = \sqrt{MN^2 + NK^2} = 5{,}771.$$

Der Umstand, dass $MK > MD$, nämlich $> 5{,}68$ und $< MC$, nämlich $< 5{,}68 + r = 5{,}789$ ist, bestätigt die zu Grunde liegende Voraussetzung, dass der Stoss des mittleren Wassertheilchens gegen die Oberfläche des im Schaufelraum schon angesammelten Wassers (nicht etwa unmittelbar gegen die Schaufel) stattfindet. Endlich ist jetzt

$$v_1 = \frac{MK}{R} v = 2{,}404 \text{ und } \psi_1 = \arccos\frac{MN}{MK} = 20^0\,51',$$

also nach Gl. (1):

$$w_1^{\,2} = 13{,}12; \quad \frac{w_1^{\,2}}{2g} = 0{,}051\, w_1^{\,2} = 0{,}669.$$

Wenn auch diese Bestimmung des durch den Stoss des einfliessenden Aufschlagwassers bedingten Gefällverlustes durch Zeichnung und Messung von Längen, Flächen und Winkeln, welche bei obigem Beispiel berechnet wurden und wegen einfacher Schaufelform ohne Schwierigkeit berechnet werden konnten, merklich erleichtert werden kann, ein Verfahren, welches für den zeichnenden Constructeur das passendste, auch hinlänglich genau und bei weniger einfacher Schaufelform fast geboten ist, so bleibt sie doch für die gewöhnlichen Bedürfnisse meistens zu zeitraubend. Mit gewöhnlich ausreichender Näherung kann es aber durch eine einfachere Regel ersetzt werden mit Rücksicht darauf, dass die Punkte K und J sehr nahe im Verhältniss zur Grösse des Rades bei einander zu liegen pflegen (viel mehr, als es gemäss der verzerrten Figur 7 der Fall zu sein scheint) und dass die Fehler sich theilweise aufheben, welche dadurch begangen werden, dass ψ_1 in Gl. (1) zu klein, also $\sin\psi_1$ zu klein, $\cos\psi_1$ zu gross gesetzt wird. Setzt man hier und in Gl. (5) näherungsweise

$$v_1 = v, \quad \psi_1 = \psi, \quad \psi'' = \psi,$$

so kann Gl. (1) in der Form geschrieben werden:

$$w_1^{\,2} = (u\cos\varphi - v\cos\psi)^2 + (u\sin\varphi - v\sin\psi)^2 + g^2t^2 + 2gt(u\sin\varphi - v\sin\psi).$$

Die Summe der zwei ersten Glieder auf der rechten Seite ist $= w^2$, die Summe der letzten Glieder $= 2gk$ nach (5); also ergiebt sich

$$\frac{w_1^{\,2}}{2g} = \frac{w^2}{2g} + k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

d. h. der Gefällverlust durch den Stoss des einfliessenden Wassers = der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Geschwindigkeit im mittleren Eintrittspunkte J entspricht, vermehrt um die Höhe dieses Punktes über dem Niveau der halben Wasserfüllung eines Schaufelraumes von solcher Lage, dass der Mittelpunkt E seines Theilbogens mit J zusammenfällt.

Im Falle des obigen Beispiels ergiebt sich nach Gl. (3) im vorigen Paragraph mit

$$\alpha = \varphi - \psi = 10^0: \quad w^2 = 6{,}630$$

und ausserdem war unter der gleichen Voraussetzung des Zusammenfallens von E mit J gefunden worden: $k = 0{,}356$. Nach der Regel (6) wäre also

$$\frac{w_1^{\,2}}{2g} = 0{,}051 \,.\, 6{,}63 + 0{,}356 = 0{,}694$$

um 0,025 Mtr. oder 3,74 % zu gross. Dass überhaupt die Näherungsformel (6) den Gefällverlust etwas zu gross ergeben würde, konnte erwartet werden, weil mit $\psi_1 = \psi$ das zweite Glied im Ausdrucke (1) von w_1^2 in höherem Grade zu gross, als das erste Glied zu klein gesetzt wird und als beide Glieder mit $v_1 = v$ zu klein gesetzt werden.

Ganz ebenso wie gemäss Fig. 7 für ober- und rückenschlächtige Räder ist der in Rede stehende Gefällverlust auch für mittel- und tiefschlächtige Räder zu bestimmen, wobei mit der Näherungsformel (6) in der Regel ein noch kleinerer Fehler verbunden sein wird, weil die Punkte J und K noch näher beisammen liegen. Bei tiefschlächtigen Rädern kann sogar der mit J zusammenfallende Punkt E unter das Niveau der halben Füllung des betreffenden Schaufelraums zu liegen kommen, in welchem Falle die Grösse k ihre obige Bedeutung verliert und der fragliche Gefällverlust einfach $= \frac{w^2}{2g}$ zu setzen ist. Insbesondere ist hier nur die relative Eintrittsgeschwindigkeit w massgebend bei unterschlächtigen Rädern, welche wegen des Einflusses der Schaufelstellung in dieser Hinsicht und aus anderen Gründen demnächst einer besonderen Besprechung unterzogen werden.

Uebrigens sei nachträglich auf die Fehlerhaftigkeit einiger Voraussetzungen hingewiesen, welche der vorstehenden Untersuchung stillschweigend oder ausdrücklich zu Grunde liegen. Stillschweigend wurde die Oberfläche des im Schaufelraum jeweils angesammelten Wassers als horizontale Ebene angenommen, während sie im folgenden Paragraph richtiger als Cylinderfläche erkannt werden wird, deren Krümmung mit der Winkelgeschwindigkeit des Rades zunimmt. Indessen ist dieser Umstand für die vorliegende Untersuchung in der That von nebensächlicher Bedeutung schon im Vergleich mit den Unregelmässigkeiten, welche die Wasseroberfläche während des Einfliessens darbietet und deren Berücksichtigung nicht in Frage kommen kann. Bedenklicher könnte es erscheinen, dass im Vorhergehenden angenommen wurde, das in einen Schaufelraum einfliessende Wasser verliere im Augenblick des Stosses seine relative Geschwindigkeit w_1 vollständig, während thatsächlich dem Wasser auch nach dem Stoss eine gewisse relative Geschwindigkeit gegen das Rad verbleiben wird, welche theils von unregelmässig wirbelnder, theils von regelmässig schwingender Bewegung herrühren kann. Erstere geht indessen bald durch den Uebergang in Molekularbewegungen verloren und kann einen merklichen Fehler kaum zur Folge haben; auch wenn es der Fall wäre, würde er sich der Bestimmung gänzlich entziehen.

Die schwingende Bewegung der Wasserfüllung eines Schaufelraumes kann sich länger erhalten, wird aber auch den Effectverlust durch den Stoss nicht erheblich ändern, sofern sie nur bis zum Austritt des Wassers aus dem Rade im Wesentlichen aufgehört hat. Sie hat dann nur zur Folge, dass der Druck dieser Wassermasse gegen die vordere Schaufel des betreffenden Schaufelraums abwechselnd grösser oder kleiner als bei relativer Ruhe ist, jenachdem die Schwingungsgeschwindigkeit im Sinne der Radbewegung an betreffender Stelle augenblicklich in Abnahme oder Zunahme begriffen ist, wodurch ein einigermassen zuckender ungleichförmiger Gang des Rades verursacht werden kann. Bei frei hängenden Zellenrädern wird ausserdem ein zu frühzeitiges Herausfallen des Wassers aus den Zellen durch solche Schwingungen befördert, weshalb es hier besonders wichtig ist, dieselben durch passende Form und Stellung der Schaufeln thunlichst zu verhindern; ebene bezw. gebrochene Schaufeln, welche eine eckige Zellenform zur Folge haben, sind in dieser Hinsicht stetig gekrümmten Blechschaufeln vorzuziehen. — Anders verhält es sich bei dem Poncelet-Rade, welches überhaupt in mehrfacher Hinsicht eine besondere Untersuchung erfordert; bei ihm ist zur Vermeidung des Stossverlustes die schwingende Bewegung der in einen Schaufelraum eingeströmten Wassermasse gerade beabsichtigt, und zwar eine einmalige Hin- und Herschwingung längs der fast tangential getroffenen Schaufel, wodurch es, wie sich später zeigen wird, bei entsprechender Wahl der Verhältnisse erreicht werden kann, dass die nach erfolgter Rückschwingung aus der relativen Geschwindigkeit des Wassers und der Peripheriegeschwindigkeit des Rades resultirende absolute Austrittsgeschwindigkeit des ersteren zu Gunsten grösstmöglicher Ausnutzung des disponiblen Arbeitsvermögens sehr klein wird. —

Ausser dem Effectverlust durch den Stoss können auch noch einige andere untergeordnete Effectverluste durch die Art der Wassereinführung in das Rad verursacht werden. Insbesondere ist schon die Erzeugung der Einflussgeschwindigkeit u mit einem gewissen Verlust verbunden, der von der Art der Schütze und der Leitung des Wassers von ihr bis zum Rade abhängt und nach bekannten Erfahrungen in Betreff des Ausflusses des Wassers zu beurtheilen ist. Unter ζ den resultirenden Widerstandscoefficienten verstanden, ist der betreffende Gefällverlust

$$= \zeta \frac{u^2}{2g}, \text{ entsprechend } h = (1 + \zeta) \frac{u^2}{2g},$$

und zwar kann ζ bei Spann- und Ueberfallschützen im Durchschnitt $= 0{,}1$, bei Coulissenschützen $= \frac{1}{3}$ gesetzt werden, ensprechend einem Geschwindigkeitscoefficienten

$$\frac{u}{\sqrt{2gh}} = \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0{,}953 \text{ bezw.} = 0{,}866.$$

Ferner ist zu bemerken, dass bei Rädern, deren Schaufelräume nur nach aussen offen sind, also bei Zellenrädern und bei Schaufelrädern mit seitlich geschlossenem Kranze, ein Effectverlust durch den Luftgehalt der Schaufelräume herbeigeführt werden kann, indem, wenn der einfliessende Strahl die Eintrittsöffnung ganz schliesst, jene Luft abgesperrt und comprimirt und so der regelmässige Einfluss des Wassers gestört, bezw. erschwert wird. Bei Kropfrädern ist dieser Zustand der Luftabsperrung in der Regel zeitweilig selbst bei beliebig kleinem Einlaufbogen durch die Anordnung bedingt, wie ein Blick auf Fig. 8 erkennen lässt, da wegen des Gerinnes die Oeffnungsweite jedes in der Füllung begriffenen Schaufelraums allmählich bis Null abnimmt. Indessen lässt sich hier der Uebelstand leicht vermeiden durch sogenannte Ventilation der Schaufelräume, d. h. durch Spalten s im Radboden, welche dicht an der hinteren Schaufel jedes Schaufelraumes längs der ganzen Breite des Rades hinlaufen. Bei mittel- und tiefschlächtigen Kropfrädern sind dann diese Spalten stets so gelegen, dass ein Ausfluss von Wasser durch dieselben ausgeschlossen ist. Bei rückenschlächtigen Rädern erfordert dagegen diese Ventilation schon eine gewisse Complication zur Vermeidung von Wasserverlusten, indem etwa nach Art von Fig. 9 die Luftspalte s jeder Zelle höher hinauf unter den Boden der folgenden Zelle gerückt wird.

Fig. 8.

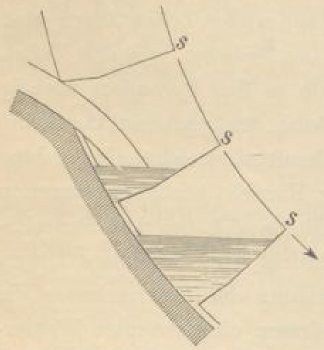
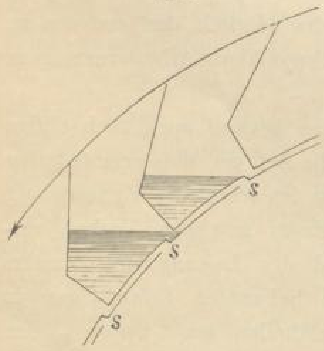


Fig. 9.



Bei oberschlächtigen Rädern wird statt einer solchen hier kaum ausführbaren Ventilation der Zellen dadurch der durch das einfliessende Wasser verdrängten Luft ein Ausweg gesichert, dass die gänzliche Absperrung der Zellenöffnung durch den Wasserstrahl infolge passender

Richtung und Dicke des letzteren unmöglich gemacht wird. Zu dem Ende wird erstens die relative Einlaufgeschwindigkeit w nahe tangential an die den Einlaufbogen passirende Schaufel, also unter dem Winkel β gegen die Radperipherie gerichtet, und zweitens die Theilung e wesentlich grösser als der Einlaufbogen gemacht. Wird letzterer mit i bezeichnet, so ist die Dicke des Wasserstrahls, welche unmittelbar vor seinem Eintritte in das Rad $= i \sin \alpha$ war, unmittelbar nach demselben im Rade selbst $= i \sin \beta$, also, da dort das Wasser die Geschwindigkeit u, hier bei gleicher Breite des Querschnitts die relative Geschwindigkeit w hat,

$$u \sin \alpha = w \sin \beta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (7),$$

wie auch aus dem Dreiecke ersichtlich ist, dessen Seiten $= u, v, w$ sind und in welchem der Winkel α der Seite w sowie gemäss fraglicher Bedingung der Winkel $180^0 - \beta$ der Seite u gegenüberliegt. Ist die Breite des Strahls nicht wesentlich kleiner als die Radbreite b, so ist

$$Q = b i \sin \beta . w = \varepsilon a b v$$

gemäss der Bedeutung des Füllungscoefficienten ε. Nach der zweiten Bedingung muss der hieraus folgende Werth von $i < e$, d. h.

$$i = \frac{\varepsilon a v}{w \sin \beta} < e \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

sein. Bei einfach gebrochenen Schaufeln gemäss Fig. 7 ergiebt sich der Winkel β, unter welchem die Stossschaufel die Radperipherie schneidet, folgendermassen. Ist mit Bezug auf genannte Figur G der Eckpunkt des Schaufelprofils AB an der Uebergangsstelle von der Stoss- zur Riegelschaufel, G' die Projection dieses Punktes auf den Halbmesser MA, ferner $MG = R_1$ und der Mittelpunktswinkel einer Schaufel: $AMB = \sigma$, so ist

$$tg\,\beta = \frac{AG'}{GG'} = \frac{R - R_1 \cos \sigma}{R_1 \sin \sigma} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Bei obigem Beispiele war

$$R = 6; \quad R_1 = 6 - 0{,}16 = 5{,}84; \quad \sigma = \lambda = 3^0\,36'.$$

Damit ergiebt sich

$$tg\,\beta = 0{,}4691; \quad \beta = 25^0\,8'.$$

Indem ferner

$$\varepsilon = \frac{1}{4}; \quad a = 0{,}32; \quad v = 2{,}5; \quad w = \sqrt{6{,}63} = 2{,}575$$

war, folgt aus (8):

$$i = 0{,}183 \text{ nahe } = \frac{1}{2} e,$$

Aus Gl. (7) folgt

$$sin\,\alpha = \frac{w}{u}\,sin\,\beta = 0{,}2187;\quad \alpha = 12^0\,38'.$$

Damit freilich eine Schaufel, während sie am Einlaufbogen sich entlang bewegt, in keiner Lage im Geringsten gegen ihre Vorderfläche gestossen werde, sollte dieser Werth von α besser auf den hinteren Endpunkt des Einlaufbogens bezogen werden, für welchen das Verhältniss $\frac{w}{u}$ nur ganz unerheblich von demjenigen verschieden ist, welches sich auf den mittleren Eintrittspunkt J bezieht. Für letzteren wird dann

$$\alpha = 12^0\,38' - \frac{1}{2}\frac{i}{R} = 11^0\,46'.$$

Thatsächlich war $\alpha = 10^0$ angenommen worden, und es hätte also dieser Winkel (sowie entsprechend der Winkel φ) etwas grösser sein dürfen, obschon der etwas kleinere Werth den vor Allem zu vermeidenden Stoss gegen die vorderen Schaufelflächen um so sicherer ausschliesst, während auch mit i nahe $= 0{,}5\,e$ das Entweichen der verdrängten Luft hinlänglich gesichert bleibt.

Dass, um die Verspritzung von Wasser beim Einflusse möglichst zu vermeiden, die Schaufeln solcher Räder am Rande zuzuschärfen sind, und dass, besonders wenn sie im Freien umlaufend der Einwirkung des Windes ausgesetzt sind, die Breite des einfliessenden Strahls aus demselben Grunde passend etwas kleiner als die Radbreite zu halten sein wird, bedarf kaum der Erwähnung.

§. 14. Effectverluste, welche durch die Art des Austritts des Wassers aus dem Rade veranlasst werden.

Die Effectverluste, um welche es sich hier handelt, sind ebenso wie die wesentlichsten der im vorigen Paragraph besprochenen als Gefällverluste in Rechnung zu stellen. Als ein solcher ist zunächst immer die Geschwindigkeitshöhe zu bezeichnen, welche der absoluten Austrittsgeschwindigkeit entspricht. Letztere ist die Resultante der Peripheriegeschwindigkeit v und der relativen Austrittsgeschwindigkeit, die aber mit Ausnahme des später besonders zu besprechenden Poncelet-Rades so klein zu sein pflegt, dass sie vernachlässigt werden und somit der in Rede stehende Gefällverlust

$$= \frac{v^2}{2g}$$

gesetzt werden kann. Im Uebrigen wird ein Effectverlust durch die Art des Ausflusses, und zwar durch die mittlere Höhe der Ausflussstelle über dem Unterwasserspiegel insbesondere bei freihängenden Zellenrädern verursacht. Zwar ist es unerheblich, dass solchen Rädern, wenigstens den oberschlächtigen, bei den ihrem Entwurf zu Grunde liegenden normalen Umständen (bei mittlerem Unterwasserstande) oft ein gewisser Betrag des Freihängens gegeben wird, wie schon im §. 12 erwähnt wurde, d. h. eine gewisse Höhe h_1 des tiefsten Radpunktes U über dem Unterwasserspiegel. Sehr wesentlich ist aber der Umstand, dass die Zellen solcher Räder schon früher von Wasser entleert sind und dass umsomehr das Wasser schon früher aus denselben auszufliessen anfängt, bevor sie die tiefste Stelle des Rades erreicht haben. Bei der Beurtheilung des hierdurch bedingten Gefällverlustes h_2 = der mittleren Höhe der Austrittsstelle über dem tiefsten Radpunkte U ist zu erwägen, dass die Wasseroberfläche in einer Zelle keine horizontale Ebene, sondern eine Kreiscylinderfläche mit der Radaxe paralleler und vertical darüber liegender Axe bildet, wenigstens näherungsweise mit derjenigen Annäherung, mit welcher in jedem Augenblicke die Zellenfüllung als in relativer Ruhe gegen das Rad betrachtet werden kann.

In der That ist dann diesem relativen Gleichgewicht entsprechend die Oberfläche eine Niveaufläche, also eine Fläche, deren Differentialgleichung

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz = 0$$

ist, unter x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten irgend eines Punktes derselben und unter X, Y, Z die entsprechenden Componenten der auf die Masseneinheit wirkenden relativen bewegenden Kraft verstanden. Obige Gleichung (siehe Bd. I, §. 53, Gl. 5) drückt nämlich aus, dass die Resultante von X, Y, Z im Punkte x, y, z senkrecht zur Fläche, nämlich zu irgend einem Linienelement in derselben ist, deren Projectionen auf die Axen $= dx$, dy, dz sind. Die relative bewegende Kraft setzt sich zusammen aus der Schwerkraft und aus der Centrifugalkraft als erster Ergänzungskraft relativer Ruhe oder Bewegung (die zweite ist bei relativer Ruhe = Null), welche für die in der Entfernung r von der Radaxe befindliche Masseneinheit $= \omega^2 r$ ist und diese Axe rechtwinklig schneidet, unter ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades um dieselbe verstanden. Wird also hier die y-Axe in der Radaxe, die z-Axe vertical abwärts gerichtet angenommen, so dass die Kraft $\omega^2 r$ in der Ebene der x-Axe und der z-Axe liegt und $\omega^2 x$, $\omega^2 z$ ihre betreffenden Componenten sind, so ergiebt sich

$$X = \omega^2 x,\ Y = 0,\ Z = \omega^2 z + g$$

und die Differentialgleichung einer Niveaufläche, insbesondere, falls x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Wasseroberfläche einer Zellenfüllung bedeuten, die Differentialgleichung der letzteren:

$$\omega^2 x \,.\, dx + (\omega^2 z + g)\, dz = 0,$$

woraus durch Integration als endliche Gleichung sich ergiebt:

$$\omega^2 \frac{x^2 + z^2}{2} + gz = \text{Const.}$$

$$x^2 + z^2 + 2\frac{g}{\omega^2} z = \text{Const.}$$

oder auch

$$x^2 + \left(z + \frac{g}{\omega^2}\right)^2 = \text{Const.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1).$$

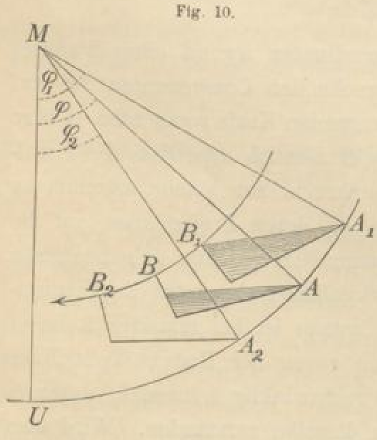
Daraus folgt, dass die Wasseroberfläche jeder Zelle eine Kreiscylinderfläche bildet, deren Axe der Radaxe parallel ist und in der Höhe

$$CM = \frac{g}{\omega^2} = g\left(\frac{30}{\pi n}\right)^2 = \frac{91{,}19}{n^2}\, g = \frac{894{,}6}{n^2} \quad \ldots\ldots\ldots (2).$$

vertical darüber liegt.

Bei grösseren Rädern pflegt ω höchstens $= 0{,}5$ (die Peripheriegeschwindigkeit v höchstens $= 0{,}5\, R$ Mtr. pro Secunde) zu sein, also CM wenigstens $= 4g =$ etwa 40 Mtr., bei kleineren Rädern wenigstens im Verhältnisse zu R nicht wesentlich kleiner. Unter diesen Umständen kann die Wasseroberfläche zwar in der Regel ohne erheblichen Fehler als Ebene betrachtet werden, aber als eine solche, welche um so mehr gegen den Horizont geneigt ist, je näher die betreffende Zelle sich der Stelle befindet, wo die Radperipherie von einer durch den Punkt C gehenden Geraden berührt wird. —

Fig. 10.



Es sei nun $A_1 B_1$ in Fig. 10 die Lage einer Schaufel in dem Augenblicke, in welchem das von ihr getragene Wasser über den äusseren Rand derselben auszufliessen anfängt, in welchem also der aus dem vorbesprochenen Punkte C als Mittelpunkt mit dem Halbmesser CA_1 beschriebene Kreis zusammen mit dem Schaufelprofil eine Fläche umgrenzt, deren Inhalt $= F =$ dem Querschnitt einer Zellenfüllung ist. $A_2 B_2$ sei die Lage der Schaufel, in welcher (abgesehen von adhärirendem Wasser) der Rest des von ihr getragenen

Wassers eben ganz über ihren Rand hinüber ausgeflossen ist, in welcher also ihr Profil von einem aus C mit dem Halbmesser CA_2 beschriebenen Kreise berührend umschlossen wird. AB sei eine Zwischenlage, in welcher das Wasser über den Rand A hinweg im Ausfliessen begriffen ist. Sind ferner die Winkel

$$AMU = \varphi,\ A_1MU = \varphi_1,\ A_2MU = \varphi_2$$

und bezeichnet $f(\varphi)$ den Inhalt der Fläche, welche durch das Schaufelprofil in der Zwischenlage AB und durch den aus C mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreis umgrenzt wird, so ist $f(\varphi)$ eine von der Schaufelform abhängige und so beschaffene Funktion, dass

$$f(\varphi_1) = F \text{ und } f(\varphi_2) = 0$$

ist. Während nun das Rad sich um den Winkel $-d\varphi$ dreht, fliesst aus der Zelle, welche von AB als vorderer Schaufel begrenzt wird, das Wasservolumen

$$-b\,.\,df(\varphi) = -bf'(\varphi)\,d\varphi,$$

unter $f'(\varphi)$ den Differentialquotienten von $f(\varphi)$ nach φ verstanden. Das Niederfallen dieses Wassers bis zur Horizontalebene durch den tiefsten Punkt U des Rades bedingt einen Arbeitsverlust

$$= \gamma\,[-\,bf'(\varphi)d\varphi]\,R\,(1 - \cos\varphi),$$

wenn γ wie immer das specifische Gewicht des Wassers bedeutet. Der Arbeitsverlust pro Zelle bei ihrem Durchgange durch den ganzen Ausgussbogen A_1A_2 ist das von $\varphi = \varphi_1$ bis $\varphi = \varphi_2$ genommene Integral dieses Ausdrucks oder das entgegengesetzte zwischen den umgekehrten Grenzen genommene Integral

$$= \gamma b R \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} f'(\varphi)\,(1 - \cos\varphi)\,d\varphi.$$

In einer Secunde treten $\frac{v}{e}$ Zellen bei A_1 in den Ausgussbogen ein, bei A_2 aus; der Arbeitsverlust pro Secunde ergiebt sich also durch Multiplication mit $\frac{v}{e}$, und weil derselbe bei der oben erklärten Bedeutung von h_2 auch $= \gamma Q h_2$ ist, folgt die Gleichung:

$$\frac{v}{e}\,\gamma b R \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} f'(\varphi)\,(1 - \cos\varphi)\,d\varphi = \gamma Q h_2$$

und daraus wegen $F = \frac{Qe}{bv}$ (§. 12, Gl. 4):

$$h_2 = \frac{R}{F} \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} f'(\varphi)\,(1 - \cos\varphi)\,d\varphi \quad \dots\dots\dots\dots (3).$$

Die Entwickelung des Integrals in diesem Ausdrucke kann erhebliche Schwierigkeiten verursachen, wenn die Schaufelform nicht ganz einfach ist und wenn zugleich der Einfluss berücksichtigt werden soll, den die Drehung des Rades auf Form und Lage der Wasseroberfläche in einer Zelle ausübt. Es entspricht aber durchaus der Näherung, die im vorigen Paragraph zur Bestimmung des Gefällverlustes $\frac{w_1^2}{2g}$ zugelassen wurde, wenn für Gl. (3) gesetzt wird:

$$h_2 = R(1 - \cos\varphi') \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

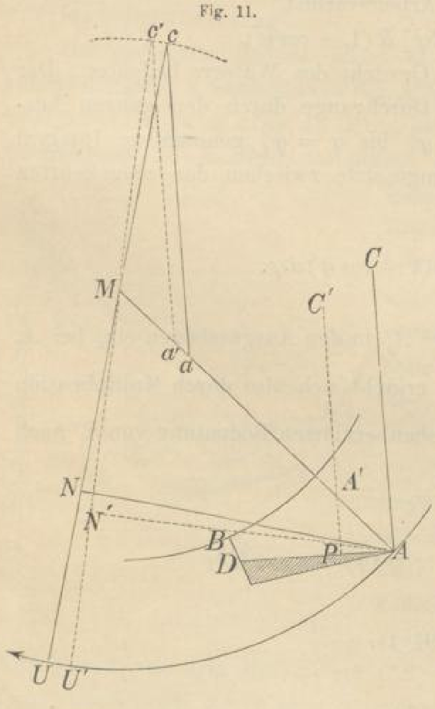
und wenn dabei der Mittelwerth φ', der streng genommen durch die Gleichung

$$F(1 - \cos\varphi') = \int_{\varphi_2}^{\varphi_1} f'(\varphi)(1 - \cos\varphi)\, d\varphi$$

definirt ist, näherungsweise der Gleichung

$$f(\varphi') = \frac{1}{2} F$$

Fig. 11.



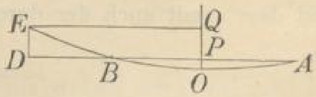
entsprechend gewählt, d. h. wenn h_2 = der Höhe von A über U gesetzt wird in der Lage, in welcher vom Schaufelprofil AB und von dem aus C mit dem Halbmesser CA beschriebenen Kreise eine Fläche $= \frac{1}{2} F$ umgrenzt wird.

Die Bestimmung von h_2 in einem gegebenen Falle geschieht am bequemsten durch Zeichnung und Messung: Figur 11, wobei der verhältnissmässig kleine Bogen AD des genannten Kreises, der sich von A bis zum zweiten Durchschnittspunkte mit dem Schaufelprofil erstreckt, in der Regel als eine zu AC senkrechte gerade Linie zu betrachten ist. Man trägt das Profil AB in beliebiger Lage in den aufgezeichneten Querschnitt des Radkranzes (mit einer zur Radaxe senkrechten Zeichnungsebene) ein und schneidet durch die Gerade AD die (in der Figur schraffirte) Fläche $= \frac{1}{2} F = \frac{1}{2} \varepsilon a e$ ab, zieht AC senkrecht zu AD bis zum Schnittpunkte C mit dem aus dem Mittelpunkte M mit dem Halbmesser $MC = \frac{g}{\omega^2}$ beschriebenen Kreise, zieht CM bis zum Schnittpunkte U mit der Radperipherie und endlich AN senkrecht zu MU; dann ist $h_2 = NU$. Wenn, was meistens der Fall sein wird, der Punkt C wegen zu grosser Entfernung von M nicht zugänglich ist, kann, unter m eine beliebige Zahl verstanden, $Ma = \frac{1}{m} MA$ gemacht und ac parallel AC gezogen werden bis zum Schnittpunkte c mit dem aus M mit dem Halbmesser $\frac{1}{m} \frac{g}{\omega^2}$ beschriebenen Kreise; die Gerade cM fällt dann mit CM zusammen.

Diese Bestimmung von h_2 enthält zwei Fehler. Der eine, welcher leicht zu berichtigen ist, beruht darauf, dass der Mittelpunkt des durch A gehenden Kreises, mit welchem das Schaufelprofil eine ebenso grosse Fläche $= \frac{1}{2} F$ umgrenzt wie mit der Geraden AD, in einer Geraden liegen muss, die nicht in A, sondern in einem gewissen mittleren Punkte P senkrecht zu AD ist, und welcher also den aus M mit dem Halbmesser $\frac{g}{\omega^2}$ beschriebenen Kreis in einem Punkte C' etwas neben C schneidet. Dieselbe Richtung $C'MU'$ wird, sofern C' in der Zeichnung unzugänglich ist, auch dadurch gefunden, dass, unter A' den Schnittpunkt von PC' mit MA verstanden, $Ma' = \frac{1}{m} MA'$ gemacht und $a'c'$ parallel PC' gezogen wird bis zum Durchschnittspunkte c' mit dem aus M mit dem Halbmesser $\frac{1}{m} \frac{g}{\omega^2}$ beschriebenen Kreise. Der Punkt c' liegt in MC' und liefert, falls die Gerade $c'M$ die Radperipherie in U' schneidet und AN' senkrecht zu ihr ist, den corrigirten Werth $N'U'$ von h_2, der etwas $< NU$ ist.

Was die Lage des Punktes P in der Strecke AD betrifft, so entspricht es sehr nahe der Forderung, wenn $AP = \frac{1}{3} AD$ gemacht wird. Ist nämlich in Fig. 12 die

Fig. 12.



Gerade OPQ in P senkrecht zu AD und ist $AOBE$ ein aus einem weit entfernten in OPQ gelegenen Mittelpunkte beschriebener so flacher

Kreisbogen, dass er mit unmerklichem Fehler als Parabelbogen mit dem Scheitel O zur Axe OQ betrachtet werden kann, ist ferner DE senkrecht zu AD und EQ parallel AD,

$$AP = x, \quad DP = y, \quad OP = p, \quad OQ = q,$$

so soll P in AD so liegen, dass

$$\text{die Fläche } AOBA = \frac{2}{3}\cdot 2xp = \frac{4}{3}xp$$

$$= \text{der Fläche } BDEB = DEQP + OBP - OEQ$$

$$= y(q-p) + \frac{2}{3}xp - \frac{2}{3}yq = \frac{1}{3}yq + \left(\frac{2}{3}x - y\right)p$$

ist, dass also

$$4xp = yq + (2x - 3y)p$$

$$(2x + 3y)p = yq$$

oder wegen $p : q = x^2 : y^2$

$$(2x + 3y)x^2 = y^3$$

oder mit $\frac{y}{x} = z$, dass

$$z^3 - 3z - 2 = (z+1)^2(z-2) = 0$$

ist. Die hier einzig in Betracht kommende positive Wurzel $z = \frac{PD}{PA} = 2$ bestätigt die Behauptung. Ist auch hier DE senkrecht zu AD, während in Fig. 11 die Schaufelcurve im Allgemeinen unter einem anderen als rechten Winkel von der Geraden AD in D geschnitten wird, so entspricht diesem Unterschiede doch nur eine Fläche, welche klein im Vergleich mit der selbst kleinen Fläche $AOBA$ oder $BDEB$ in Fig. 12 ist.

Was den anderen Fehler obiger Bestimmung von h_2 betrifft, so beruht er darauf, dass, wenn mit Bezug auf Fig. 10 der Gefällverlust, welcher durch den verfrühten Ausfluss der ersten Hälfte der Wasserfüllung betreffender Zelle verursacht wird, während also ihre vordere Schaufel aus der Lage A_1B_1 in die $f(\varphi) = \frac{1}{2}F$ entsprechende Lage AB übergeht, $= h_2 + \Delta_1$ gesetzt wird, der durch den Ausfluss der zweiten Hälfte verursachte $= h_2 - \Delta_2$, alsdann streng genommen nicht $\Delta_1 = \Delta_2$, und dass somit auch der durchschnittliche Gefällverlust

$$= h_2 + \frac{\Delta_1 - \Delta_2}{2}$$

von h_2 verschieden ist. Die vollständige Berichtigung dieses Fehlers würde auf die Bestimmung des Integrals in Gl. (3) hinauslaufen, welche eben vermieden werden sollte. Einigermassen wird er aber berichtigt, indem $\Delta_1 = \frac{a_1}{2}$, $\Delta_2 = \frac{a_2}{2}$, also der Gefällverlust

$$= h_2 + \frac{a_1 - a_2}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

gesetzt wird, unter a_1 die Höhe des Punktes A_1 über A,
a_2 die Höhe des Punktes A über A_2
verstanden. Diese Längen a_1 und a_2 können durch Zeichnung und Messung gefunden werden, indem ebenso wie oben entsprechend $f(\varphi) = \frac{1}{2} F$ die Strecke NU (Fig. 11) ermittelt wurde, so analoge Strecken N_1U_1 entsprechend $f(\varphi) = F$ und N_2U_2 entsprechend $f(\varphi) = 0$ bestimmt werden, womit sich dann ergiebt:

$$a_1 = N_1U_1 - NU \text{ und } a_2 = NU - N_2U_2.$$

Für das im vorigen Paragraph als Beispiel angenommene oberschlächtige Rad findet man auf solche Weise

$$h_2 = NU = 1{,}24 \text{ Mtr.}$$

und mit Rücksicht auf die Krümmung der Wasseroberfläche in den Zellen:

$$N'U' = 1{,}215 \text{ Mtr.}$$

Ferner ergiebt sich

$$N_1U_1 = 1{,}83 \text{ Mtr.}, \; N_2U_2 = 0{,}63 \text{ Mtr.},$$

folglich
$$a_1 = 1{,}83 - 1{,}24 = 0{,}59 \text{ Mtr.}$$
$$a_2 = 1{,}24 - 0{,}63 = 0{,}61 \text{ Mtr.}$$

und somit nach Gl. (5) der mit Rücksicht auf beide Fehler corrigirte Gefällverlust

$$h_2 = 1{,}215 - 0{,}005 = 1{,}21 \text{ Mtr.}$$

Die ursprüngliche Bestimmung hat also h_2 mit $NU = 1{,}24$ Mtr. um nur 3 Centimeter oder 2,5 % zu gross ergeben, wobei bemerkt werden muss, dass hier 3 Centimeter schon deshalb kaum ganz sicher sind, weil die Zeichnung in solchem Massstab ausgeführt wurde, in welchem 3 Centimeter durch 1 Millimeter dargestellt sind, und indem auch wegen

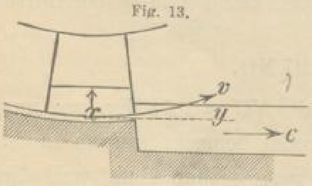
$$\frac{g}{\omega^2} = 56{,}5 \text{ Mtr.}$$

die Verjüngungszahl $\frac{1}{m}$ mit Rücksicht auf die Grösse der Zeichenfläche $= 0{,}1$ angenommen wurde. Die Berücksichtigung der Neigung der Wasseroberflächen wegen der Drehungsgeschwindigkeit des Rades war aber wesentlich. Ohne dieselbe, d. h. einem verschwindend kleinen Werthe von ω entsprechend, wäre h_2 nur $= 1{,}00$ Mtr.

Bei allen freihängenden Zellenrädern ist es besonders wichtig, diesen Gefällverlust h_2, der sich für das Beispiel fast doppelt so gross ergeben hat, als der im vorigen Paragraph bestimmte Gefällverlust $\frac{w_1^2}{2g}$, so viel wie möglich zu verkleinern. Offenbar ist er um so kleiner, je kleiner ω ist, je mehr die Schaufeln im Sinne des Radumfangs gestreckt sind und je kleiner der Füllungsquerschnitt F der einzelnen Zelle, je kleiner also der Füllungscoefficient ε, je kleiner die Kranzbreite a und je kleiner die Theilung e, bezw. je grösser die Schaufelzahl ist. —

Bei Kropfrädern, überhaupt bei Rädern mit einem an den Radumfang sich nahe anschliessenden Gerinne und mit vorwiegend radial gerichteten Schaufeln, ist mit dem Austritte des Wassers auch ein Effectverlust verbunden, welcher als Gefällverlust betrachtet dem Freihängen von Zellenrädern in gewissem Sinne analog und von ähnlicher geringer Grösse ist, deshalb wie jener mit h_1 bezeichnet sei. Indem das Wasser im Abflussgerinne mit einer Geschwindigkeit c fliesst, welche kleiner als die Peripheriegeschwindigkeit v zu sein pflegt, die Erhebung des Unterwasserspiegels über die Oberfläche des Wassers im untersten Schaufelraum aber wegen des durch solches übermässiges sogenanntes Waten des Rades im Unterwasser bedingten Widerstandes thunlichst zu vermeiden ist, pflegt man dem Gerinne an der Uebergangsstelle in den Abflusscanal einen

Fig. 13.



Abfall nach Art von Fig. 13 zu geben, dessen Höhe mit Rücksicht darauf zu bemessen ist, dass die Wassertiefen im untersten Schaufelraume und im Abflussgerinne sich umgekehrt wie die betreffenden Geschwindigkeiten v und c verhalten, dass aber die Höhe y des Unterwasserspiegels über dem tiefsten Radpunkte U höchstens $=$ der Wassertiefe x im untersten Schaufelraume sein soll. Liegt also im Allgemeinen y zwischen 0 und x, so verursacht der über dem Unterwasserspiegel bis zur Höhe $x - y$ befindliche Theil der Füllung eines sich entleerenden Schaufelraumes, indem sein Schwerpunkt von der Höhe $\frac{x-y}{2}$ niederfällt, sobald die vordere Schaufel dieses Raumes die Stelle des Gerinneabfalls überschritten hat, den Effectverlust

$$\gamma Q \frac{x-y}{2}$$

pro Secunde. Der um den Betrag y in das Unterwasser eintauchende untere Theil fraglicher Schaufel erfährt dagegen einen Widerstand, welcher, unter ϑ einen erfahrungsmässigen, hier etwa $= 1{,}5$ zu setzenden Coefficienten verstanden, nach Bd. I., §§. 153 und 154

$$= \vartheta \gamma b y \frac{(v-c)^2}{2g}$$

gesetzt werden kann und einem Effectverlust pro Secunde = dem Produkt dieses Ausdrucks und der Peripheriegeschwindigkeit v entspricht. Die Summe beider Verluste ist also

$$= \gamma Q \frac{x-y}{2} + \vartheta \gamma b y \frac{(v-c)^2}{2g} v$$

oder mit $Q = xbv$ auch

$$= \gamma b v \left[x \frac{x-y}{2} + \vartheta y \frac{(v-c)^2}{2g} \right].$$

Indem dieser Effectverlust auch

$$= \gamma Q h_1 = \gamma x b v h_1$$

ist, ergiebt sich

$$h_1 = \frac{x-y}{2} + \vartheta \frac{y}{x} \frac{(v-c)^2}{2g}$$

$$= \frac{x}{2} + \frac{y}{2} \left[\frac{\vartheta}{x} \frac{(v-c)^2}{g} - 1 \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6).$$

Wäre $v - c = 1$ bis $1{,}15$, also mit $\vartheta = 1{,}5$

$$\vartheta \frac{(v-c)^2}{g} = 0{,}15 \text{ bis } 0{,}2 \text{ Mtr.},$$

so wäre, da die Kranzbreite solcher Räder = 0,3 bis 0,4 Mtr. und der Füllungscoefficient nahe $= \frac{1}{2}$, somit x ungefähr auch = 0,15 bis 0,2 Mtr. zu sein pflegt, das Glied mit y in Gl. (6) = Null und

$$h_1 = \frac{x}{2} = \text{nahe } \frac{a}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

für jeden Werth von y zwischen 0 und x. In der Regel wird freilich

$v - c$ kleiner, als 1 bis 1,15 Sec. Mtr.

und deshalb der Factor von y in Gl. (6) negativ sein. Dann ist h_1 um so kleiner, je grösser y, am kleinsten für $y = x$, nämlich

$$h_1 = \vartheta \frac{(v-c)^2}{2g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (8).$$

Bei der geringen Grösse des Unterschiedes kann es gleichwohl vorgezogen werden, den Abfall so zu bemessen, dass unter normalen Umständen die Radperipherie vom Unterwasserspiegel berührt wird, falls bei Hochwasser eine merkliche Hebung desselben erwartet werden kann.

Der Widerstand kann übrigens noch dadurch etwas vergrössert werden, dass die radialen Schaufeln, indem sie sich in etwas gegen die Verticale geneigter Lage aus dem Unterwasser erheben, dieses theilweise empor drücken und so eine wirbelnde Welle hinter dem Rade bilden. Dieser Uebelstand wird dadurch vermindert, dass man die Schaufeln unter einem stumpfen Winkel bricht (siehe Fig. 8) und dadurch ihre eintauchenden äusseren Theile so gegen den Radhalbmesser etwas neigt, dass sie nahe vertical sich aus dem Wasser erheben.

§. 15. Effectverluste während der Wirkung des Wassers im Rade.

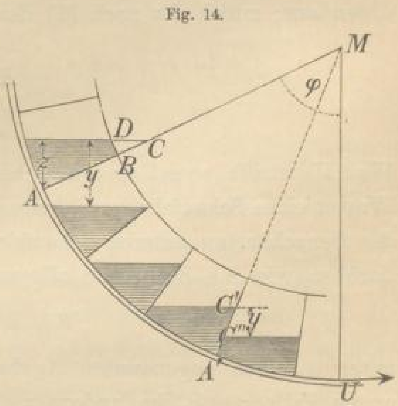
Die hier zu besprechenden Effectverluste sind ein gewisser Gefällverlust bei Kropfrädern und ein Wasserverlust bei unterschlächtigen Rädern.

1) Der fragliche Gefällverlust bei Kropfrädern wird zunächst dadurch verursacht, dass zwischen den Aussenkanten der Schaufeln und dem Boden des Kropfgerinnes ein Spielraum vorhanden ist, dessen Weite selten weniger, als 0,015 Mtr. beträgt und allgemein mit s bezeichnet sei. Dadurch werden rechteckige schmale Oeffnungen $= bs$ längs der ganzen Radbreite gebildet, durch welche, während eine Schaufel sich längs dem Kropf bewegt, beständig Wasser aus dem hinteren in den vorderen (aus dem oberen in den benachbarten unteren) Schaufelraum fliesst und in diesem vorläufig wieder zu relativer Ruhe gegen das Rad gelangt; die Arbeit = dem Product aus dem Gewichte des so ausgeflossenen Wassers und dem Höhenunterschiede der (hier immer als horizontale Ebenen zu betrachtenden) Wasserspiegel in beiden Schaufelräumen ist für den Effect des Rades verloren, indem sie theils durch die Widerstände des Ausflusses selbst, theils durch Wirbelbewegungen im vorderen und unteren der betreffenden zwei Schaufelräume schliesslich in Wärme übergeht. Andere Ausflussöffnungen von gleicher Weite s bieten sich der Wasserfüllung eines Schaufelraums an den Seiten dar zwischen den äusseren Umfängen der Seitenwände des Radkranzes und dem Boden des Kropfgerinnes; diese Oeffnungen sind zwar meistens von viel geringerer Länge, aber es fällt

das durch sie ausgeflossene Wasser, gewöhnlich in den Zwischenräumen zwischen den Seitenwänden des Radkranzes und des Kropfgerinnes abwärts fliessend, nicht nur bis zur Wasseroberfläche im benachbarten unteren Schaufelraum, sondern bis zum Unterwasserspiegel, so dass der Einfluss dieser Seitenspalten auf den in Rede stehenden Effectverlust grösser sein kann, als derjenige der vorerwähnten Hauptspalten. Wäre der Radkranz an den Seiten offen (dann aber der Kropf jedenfalls mit Seitenwänden versehen, was sonst nicht unbedingt nöthig ist), so würden zwar die eben erwähnten Seitenöffnungen wegfallen, aber dafür andere, längere und meistens auch breitere zwischen den Seitenrändern der Schaufeln, ev. auch Theilen der Seitenränder des Radbodens, und den Seitenwänden des Kropfgerinnes sich dem Durchfluss des Wassers darbieten, welches übrigens nach seinem Ausfluss in diesem Falle vorläufig nur bis zur Wasseroberfläche des benachbarten unteren Schaufelraums niederfällt, dessen Wasserfüllung die ganze Breite des Kropfgerinnes einnimmt.

Indem einstweilen nur die Spalten $= bs$ an den Aussenkanten der Schaufeln berücksichtigt werden mögen, sei V das Wasservolumen, welches in einer Secunde aus einem Schaufelraume ausfliessen würde, wenn unterdessen das Rad in Ruhe und die Wasserfüllungen der Schaufelräume unverändert blieben, also Vdt das Wasservolumen, welches in einem Zeitelement dt durch den betreffenden Spalt wirklich ausfliesst. Ist ferner y die Höhe des Wasserspiegels in dem diesem Spalt nachfolgenden über demjenigen in dem vorhergehenden (unteren) Schaufelraume, Figur 14, auf welchem letzteren sich das ausgeflossene Wasser sammelt, so geht dadurch die Arbeit

Fig. 14.



$$\gamma V dt . y = \gamma V \left(-\frac{R d\varphi}{v}\right) y$$

pro Spalt und pro Zeitelement dt für den Effect des Rades verloren, wobei φ den Winkel AMU bedeutet, welchen der nach dem Spalt gezogene Radhalbmesser mit der Verticalen MU bildet, so dass $-Rd\varphi$ das im Zeitelement dt vom Endpunkte A des Schaufelprofils mit der Geschwindigkeit v durchlaufene Wegelement ist. Der durch den betreffenden Spalt bei seinem Durchgange durch den ganzen Kropf verursachte Arbeitsverlust ist also

$$= \gamma \frac{R}{v} \int_0^\vartheta V y \, d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1),$$

wenn $\varphi = \vartheta$ diejenige Lage des Spalts bestimmt, in welcher der Durchfluss durch denselben beginnt. Bei einem mittel- oder tiefschlächtigen Kropfrade mit radialen oder wenig gegen die betreffenden Radien geneigten Schaufeln beginnt der Ausfluss schon allmählich während der Füllung, sobald die Schaufel am oberen Endpunkte des Einlaufbogens vorbeigegangen ist; bei der geringen Grösse des letzteren wird man indessen wenig irren, wenn man den Durchfluss durch den Spalt erst von dem Augenblicke an rechnet, in welchem er mit dem Mittelpunkte J des Einlaufbogens zusammenfällt, also $\vartheta =$ dem Winkel JMU setzt und in dieser Lage von der kaum erst begonnenen Füllung absieht. Wenn übrigens die Schaufeln einigermassen im Sinne des Umfanges gestreckt sind (siehe z. B. Fig. 9, falls das betreffende rückenschlächtige Rad mit einem Kropf versehen wäre), so kann es auch der Fall sein, dass der Winkel $\vartheta = AMU$, bei welchem der Ausfluss durch den Spalt bei A beginnt, wesentlich $< JMU$ ist.

In einer Secunde treten $\frac{v}{e}$ Schaufeln in den Kropf oben ein und unten aus; mithin ist nach (1) der Arbeitsverlust pro Secunde

$$= \gamma \frac{R}{e} \int_0^\vartheta V y \, d\varphi .$$

Was V betrifft, so ist zu unterscheiden, ob der Spalt, durch welchen das Wasser eines Schaufelraumes theilweise ausfliesst, unter dem Wasserspiegel des benachbarten unteren Schaufelraumes liegt, wie A' in Fig. 14, oder darüber, wie A. Setzt man allgemein

$$V = \mu b s \sqrt{2 g z},$$

unter μ einen sogenannten Ausflusscoefficienten verstanden, so ist im ersten Falle $z = y$, im andern $z < y$. Insbesondere bei tiefschlächtigen Rädern kann es der Fall sein, dass nach vollständiger Füllung der betreffenden Schaufelräume überall $z = y$ ist. Durch Einsetzung des Ausdruckes von V ergiebt sich der Arbeitsverlust pro Secunde

$$= \gamma \frac{R}{e} \mu b s \sqrt{2 g} \int_0^\vartheta y \sqrt{z} \, d\varphi$$

und da derselbe auch $= \gamma Q h'$ ist, unter h' den von den Spalten $= bs$ herrührenden Gefällverlust verstanden, so folgt

$$h' = \mu \sqrt{2g} \frac{Rbs}{eQ} \int_0^\vartheta y \sqrt{z}\, d\varphi = \mu \sqrt{2g} \frac{Rs}{Fv} \int_0^\vartheta y \sqrt{z}\, d\varphi \quad \ldots . \; (2).$$

Zur angenäherten Berechnung des Integrals in diesem Ausdrucke kann ϑ (als Bogenlänge für den Halbmesser $= 1$ verstanden) mit einem Mittelwerthe von $y\sqrt{z}$ multiplicirt werden, der hier aber nicht mit ausreichender Berechtigung analog den Bestimmungen in den vorigen Paragraphen einer einzigen mittleren Lage entsprechend zu wählen, sondern besser etwa mit Hülfe der Simpson'schen Regel zu bestimmen ist, indem man ϑ in eine gerade Anzahl $= n$ gleicher Theile theilt und für die Lagen des Spalts, welche den betreffenden Theilpunkten des Umfangsbogens entsprechen, die aus der Zeichnung sich ergebenden Werthe von y, z mit dem Zirkel abgreift. Z. B. mit $n = 4$,

$$\varphi_0 = 0, \quad \varphi_1 = \frac{1}{4}\vartheta, \quad \varphi_2 = \frac{1}{2}\vartheta, \quad \varphi_3 = \frac{3}{4}\vartheta, \quad \varphi_4 = \vartheta$$

wäre mit Rücksicht darauf, dass der Werth y_0 von y, welcher $\varphi = \varphi_0 = 0$ entspricht, sowie der Werth z_4 von z, welcher $\varphi = \varphi_4 = \vartheta$ entspricht, verschwinden, der fragliche Mittelwerth

$$\frac{1}{\vartheta} \int_0^\vartheta y \sqrt{z}\, d\varphi = \frac{1}{12}\left(4 y_1 \sqrt{z_1} + 2 y_2 \sqrt{z_2} + 4 y_3 \sqrt{z_3}\right)$$

$$\int_0^\vartheta y \sqrt{z}\, d\varphi = \frac{\vartheta}{6}\left(2 y_1 \sqrt{z_1} + y_2 \sqrt{z_2} + 2 y_3 \sqrt{z_3}\right) \quad \ldots \ldots \; (3).$$

Da der Ausflusscoefficient für eine rechteckige Mündung um so grösser ist, je kleiner ihre kleinere, hier sehr kleine Dimension ist, und indem hier auch nur an einer Seite des Spalts Contraction stattfindet, wird der Coefficient μ verhältnissmässig gross $= 0{,}75 - 0{,}8$ zu setzen sein, etwa

$$\mu \sqrt{2g} = 3{,}4 \text{ (entsprechend } \mu = 0{,}77\text{)}.$$

Dass, wie der erste Ausdruck (2) von h' erkennen lässt, dieser Gefällverlust der Spaltgrösse proportional ist, war selbstverständlich. In dieser Hinsicht ist nicht nur ein möglichst enger Anschluss des Kropfes an das sorgfältig gelagerte und vor Deformationen thunlichst gesicherte Rad geboten, sondern auch ein grosser Füllungscoefficient ε, sowie eine grosse Peripheriegeschwindigkeit v angemessen, damit in

Verbindung mit einer etwas grösseren Kranzbreite a, als bei frei hängenden Zellenrädern üblich ist, die erforderliche Radbreite b gemäss der Gleichung

$$Q = \varepsilon a b v$$

möglichst klein ausfalle. Wenn der Wirkungsgrad eines gegebenen solchen Rades durch grosse Spaltweite s beeinträchtigt wird, kann es gemäss dem zweiten Ausdrucke (2) dadurch verbessert werden, dass man das Rad schneller umlaufen lässt, falls es nur gleichzeitig so viel mehr beaufschlagt wird, dass der Füllungsquerschnitt F einer Zelle nicht wesentlich abnimmt. Von Vortheil ist auch eine grosse Schaufelzahl oder kleine Theilung e; denn da y und z unter sonst gleichen Umständen ungefähr e proportional sind, ist $\frac{y\sqrt{z}}{e}$ und somit auch h' nach (2) nahe proportional $\sqrt{e}$. Die Form und Stellung der Schaufeln ist besonders insofern von Einfluss, als ihre Streckung im Sinne des Umfangs den Winkel ϑ und dadurch das Integral im Ausdrucke von h' verkleinert. —

Der Gefällverlust, welcher durch die Seitenspalten verursacht wird, sei mit h'' bezeichnet. Er werde zunächst für den gewöhnlichen Fall ermittelt, dass der Radkranz seitlich geschlossen ist und dass somit die Seitenspalten, auch am cylindrischen Boden des Kropfgerinnes liegend, dieselbe Weite s wie die vorbesprochenen Hauptspalten haben, während ihre Länge an jeder Seite für kleinere Werthe von $\varphi = e$ ist, für grössere $< e$, wie Fig. 14 bei A' bezw. bei A erkennen lässt. Bezeichnet für den Schaufelraum, für welchen die Aussenkante seiner vordern (untern) Schaufel dem Winkel φ entspricht, x die Höhe des Wasserspiegels in demselben über dem Unterwasserspiegel, so ist hier x an die Stelle von y in Gl. (1) zu setzen, ebenso dann auch in Gl. (2). Sind ferner z' und z'' die Höhen jenes Wasserspiegels bezw. über dem unteren und oberen Ende einer der betreffenden Seitenspalten, wo $z'' = 0$ ist, wenn für grössere Werthe von φ die Spaltlänge $= \frac{z'}{\sin\varphi} < e$ ist, so ist nach Bd. I., §. 79, Gl. (7) für zwei Seitenspalten zusammen

$$V = 2 \cdot \frac{2}{3} \frac{\mu s \sqrt{2g}}{\sin\varphi} \left(z'\sqrt{z'} - z''\sqrt{z''}\right)$$

$$= \frac{3}{4} \mu s \sqrt{2g} \,.\, D \text{ mit } D = \frac{z'\sqrt{z'} - z''\sqrt{z''}}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots (4)$$

zu setzen und dabei unter φ streng genommen die mittlere Neigung des Seitenspalts gegen den Horizont zu verstehen. Uebrigens wird V nur wenig zu gross gesetzt, wenn, wie es hier geschehen soll, φ im bisherigen

Sinne auf den unteren Endpunkt des Seitenspaltbogens, d. h. auf den zugehörigen Hauptspalt bezogen wird. Durch die Substitutionen

$$x \text{ für } y,\ \frac{4}{3}D \text{ für } b\sqrt{z}$$

wird aus h' nach (2):

$$h'' = \frac{4}{3}\mu\sqrt{2g}\,\frac{Rs}{eQ}\int_0^{\vartheta} x\,D\,d\varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Wenn zur angenäherten Berechnung des Integrals wieder ϑ in 4 gleiche Theile getheilt wird durch die Zwischenwerthe $\varphi_1 = \frac{1}{4}\vartheta$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\vartheta$, $\varphi_3 = \frac{3}{4}\vartheta$, und wenn mit x_1, x_2, x_3 bezw. D_1, D_2, D_3 die den letzteren entsprechenden Werthe von x und D bezeichnet werden, so ergiebt sich analog Gl. (3):

$$\int_0^{\vartheta} x\,D\,d\varphi = \frac{\vartheta}{6}(2x_1 D_1 + x_2 D_2 + 2x_3 D_3) \quad \ldots\ldots (6)$$

mit Rücksicht darauf, dass D_4 (entsprechend $\varphi = \vartheta$) $= 0$ und dass x_0 (entsprechend $\varphi = 0$) klein genug ist, um das betreffende Glied durch die etwas zu reichliche Schätzung der Grösse D als aufgewogen betrachten zu dürfen. Der Vortheil kleiner Radbreite, somit grosser Werthe von ε und v, fällt in Beziehung auf h'' fort; besonders wichtig ist die Verkleinerung von ϑ und damit auch von x.

Dem Ausflusscoefficienten μ ist hier derselbe Werth beizulegen wie bezüglich des Ausflusses durch die Hauptspalten, so dass sich schliesslich der ganze durch die Spielräume verursachte Gefällverlust für ein Kropfrad mit seitlich geschlossenem Radkranz nach (2) und (5):

$$h_3 = h' + h'' = \mu\sqrt{2g}\,\frac{Rs}{eQ}\left[b\int_0^{\vartheta} y\sqrt{z}\,d\varphi + \frac{4}{3}\int_0^{\vartheta} x\,D\,d\varphi\right] \quad \ldots (7)$$

ergiebt, wo $\mu\sqrt{2g} = 3{,}4$ gesetzt werden kann und die Integrale nach (3) und (6) mit genügender Annäherung zu bestimmen sind. —

Bei einem Kropfrade mit seitlich offenem Radkranze und, wie hier ausdrücklich vorausgesetzt werden soll, mit radialen ebenen Schaufeln liegen die Seitenspalten an den Seitenwänden des Kropfgerinnes und haben gewöhnlich eine grössere Weite $= s'$. Bezüglich des Einflusses derselben bleibt Gl. (1) unverändert. Aber was V betrifft, sind die beiden Fälle zu unterscheiden, dass diese Spalten den Verlauf ABD,

Fig. 14 (bei grösseren Werthen von φ) oder den Verlauf $A'C'$ daselbst haben. Im ersten Falle ist, unter z' und z'' die Höhen des Wasserspiegels DC über A und über B verstanden,

$$V = \frac{4}{3}\,\mu s' \sqrt{2g}\left(\frac{z'\sqrt{z'} - z''\sqrt{z''}}{\cos\varphi} + \frac{z''\sqrt{z''}}{\sin\varphi}\right)$$

oder mit Rücksicht auf Fig. 14, wenn

$$\frac{z'}{\cos\varphi} = AC = a', \quad \frac{z''}{\cos\varphi} = BC = a'', \quad \frac{z''}{\sin\varphi} = BD = b''$$

gesetzt wird,

$$V = \frac{4}{3}\,\mu s' \sqrt{2g}\left[a'\sqrt{z'} - (a'' - b'')\sqrt{z''}\right].$$

Im anderen Falle (bei kleineren Werthen von φ, siehe bei A' in Fig. 14) ist mit

$$A'C' = c', \quad A'C'' = c''$$

$$V = 2\,\mu s' \sqrt{2g}\left[\frac{2}{3}(c' - c'')\sqrt{y} + c''\sqrt{y}\right] = \frac{4}{3}\,\mu s' \sqrt{2g}\left(c' + \frac{c''}{2}\right)\sqrt{y}.$$

Somit ist hier

$$V = \frac{4}{3}\,\mu s' \sqrt{2g}\,.\,D' \text{ mit } D' = \left\{\begin{matrix} a'\sqrt{z'} - (a'' - b'')\sqrt{z''} \\ \left(c' + \dfrac{c''}{2}\right)\sqrt{y} \end{matrix}\right\} \quad \ldots (8)$$

zu setzen, und ergiebt sich der betreffende Gefällverlust h'' aus dem Ausdrucke (2) von h' durch Substitution von

$$\frac{4}{3}\,s' D' \text{ für } bs\sqrt{z}: \quad h'' = \frac{4}{3}\,\mu\sqrt{2g}\,\frac{Rs'}{eQ}\int_0^{\vartheta} y D' d\varphi \quad \ldots\ldots (9).$$

Das Integral kann analog Gl. (3), da y für $\varphi = 0$, D' für $\varphi = \vartheta$ verschwindet, gesetzt werden:

$$\int_0^{\vartheta} y D' d\varphi = \frac{\vartheta}{6}\left(2y_1 D'_1 + y_2 D'_2 + 2y_3 D'_3\right) \quad \ldots\ldots (10),$$

während $\mu\sqrt{2g}$ auch hier $= 3{,}4$ gesetzt werden mag. Der resultirende Gefällverlust infolge der Spielräume ist in diesem Falle:

$$h_3 = \mu\sqrt{2g}\,\frac{Rs}{eQ}\left[b\int_0^{\vartheta} y\sqrt{z}\,d\varphi + \frac{4}{3}\,\frac{s'}{s}\int_0^{\vartheta} y D' d\varphi\right] \quad \ldots\ldots (11).$$

Beispielsweise sei für ein mittelschlächtiges Kropfrad mit seitlich geschlossenem Radkranze und radialen ebenen Schaufeln (Meter und Secunde als Einheiten vorausgesetzt)

$$H = 3 \qquad Q = 0{,}6 \qquad R = 2{,}5 \qquad \varepsilon = 0{,}5 \qquad v = 2 \qquad u = 3{,}5$$

$$a = 0{,}4 \qquad b = \frac{Q}{\varepsilon a v} = 1{,}5 \qquad s = 0{,}015 \qquad z = 44 \qquad e = \frac{2\pi R}{z} = 0{,}357.$$

Bei Voraussetzung einer Ueberfall- oder einer Spannschütze ist auf die Erzeugung der Einlaufgeschwindigkeit u das Gefälle

$$h = 1{,}1\,\frac{u^2}{2g} = 0{,}687$$

zu verwenden, und falls der Radumfang vom Unterwasserspiegel berührt wird, ist

$$\vartheta = arc\cos\frac{R-(H-h)}{R} = 85^0\,43' = 1{,}496.$$

Wird dieser Winkel in 4 gleiche Theile getheilt:

$$\varphi_1 \qquad \varphi_2 - \varphi_1 \qquad \varphi_3 - \varphi_2 \qquad \vartheta - \varphi_3,$$

so lassen sich der Zeichnung die folgenden Werthe entnehmen:

	$\varphi = \varphi_1 = \frac{1}{4}\vartheta$	$\varphi = \varphi_2 = \frac{1}{2}\vartheta$	$\varphi = \varphi_3 = \frac{3}{4}\vartheta$
$\frac{1}{\sin\varphi} =$	2,737	1,470	1,110
$y =$	0,122	0,222	0,294
$z =$	0,122	0,222	0,24
$z' =$	0,254	0,266	0,24
$z'' =$	0,104	0	0
$x =$	0,43	0,935	1,66

Hiermit ergiebt sich nach (3), (4) und (6):

$$\int_0^{\vartheta} y\sqrt{z}\,d\varphi = 0{,}1192 \quad \text{und} \quad \int_0^{\vartheta} x D\,d\varphi = 0{,}2106,$$

endlich nach (7) mit $u\sqrt{2g} = 3{,}4$:

$$h_3 = 3{,}4\,\frac{2{,}5\,.\,0{,}015}{0{,}357\,.\,0{,}6}\left(1{,}5\,.\,0{,}1192 + \frac{4}{3}\cdot 0{,}2106\right)$$

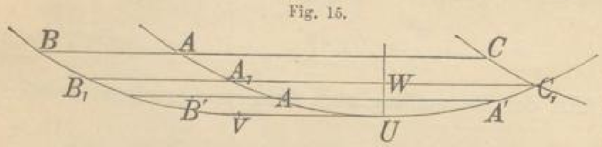
$$= 0{,}5952\,(0{,}1788 + 0{,}2808) = 0{,}274\ \text{Mtr.}$$

$= 9{,}1\,^0/_0$ von H, zum grösseren Theile von den Seitenspalten herrührend.

2) Der Wasserverlust bei unterschlächtigen Stossrädern wird theils dadurch verursacht, dass ein Theil des zufliessenden Aufschlag-

wassers gar nicht in den Radkranz hinein gelangt, sondern durch den Spielraum zwischen ihm und dem Gerinneboden, bezw. den Seitenwänden des Gerinnes vorbeifliesst, theils dadurch, dass das in den Radkranz eingeflossene Wasser denselben zum Theil wieder verlässt, bevor es zum Stoss gegen eine Schaufel gelangt ist. Während jener Verlust im Princip sehr einfach in Anschlag gebracht werden kann, ergiebt sich dieser nach Gerstner durch folgende Betrachtung bei Voraussetzung nahe radial gestellter ebener Schaufeln, wie sie bei solchen Rädern gebräuchlich sind.

Fig. 15.



Es sei, Fig. 15, AUC_1 ein Theil des Radumfangs, AB ein Faden des mit der Geschwindigkeit u zufliessenden Wassers von solcher Länge l, dass er gerade in einem Schaufelraum Platz findet, dass also, wenn sein vorderer Endpunkt A die Aussenkante einer vorbeigehenden Schaufel trifft, der hintere Endpunkt B mit der Aussenkante der folgenden Schaufel zusammentrifft; es ist dann

$$AB = l = e\frac{u}{v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12).$$

Unter der Voraussetzung, dass die zum Stoss gegen eine Schaufel gelangten Wassertheilchen an derselben empor fliessend den nachfolgenden Theilchen des in den betreffenden Schaufelraum einfliessenden, bezw. eingeflossenen Wassers Platz machen und dass sie die Geschwindigkeit u nach Grösse und Richtung bis zum Augenblicke des Stosses (bezw. bis zum Wiederausfluss aus dem Radkranz, falls sie vorher nicht zum Stoss gelangen sollten) beibehalten, wird diejenige Schaufel, deren Aussenkante vom Wassertheilchen A getroffen wird, vom Theilchen B in einem Punkte C getroffen, welcher so liegt, dass, unter S den Schnittpunkt der durch ihn hindurch gehenden Schaufelcurve mit dem Radumfange verstanden,

$$\text{Gerade } BC : \text{Kreisbogen } AS = u : v$$

ist. Indem es sich hier um einen nur flachen Bogen handelt und die Schaufeln nahe radial sind, kann der Kreisbogen AS ohne erheblichen Fehler = der Geraden AC gesetzt werden, so dass aus obiger Proportion zu folgern ist:

$$BC - AC : AC = u - v : v$$

und mit $BC - AC = AB = l$:

$$AC = l\frac{v}{u-v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13).$$

Dasselbe gilt von allen zufliessenden Wasserfäden $AB = l$; ihnen entspricht eine Curve der Stosspunkte C, mit welcher der Kreisbogen AU zusammenfällt, wenn er im Sinne von u um die Strecke AC verschoben wird. Trifft diese Curve der Punkte C den Radumfang in C_1, und ist A_1B_1 der gegen C_1 hin gerichtete Wasserfaden, so können die unterhalb A_1B_1 zufliessenden Fäden nicht mehr vollständig zum Stoss gelangen, sondern nur mit einem Stück AB', dessen Länge sich zu der entsprechenden Sehnenlänge AA' der Radperipherie ebenso verhält, wie l zu AC und welche somit aus (13) sich ergiebt:

$$AB' = AA'.\frac{u-v}{v}.$$

Für alle Werthe von AA' zwischen $A_1C_1 = AC$ und Null ergiebt sich so eine Curve der Punkte B', welche den Punkt B_1 mit dem untersten Punkte U der Radperipherie verbindet. Die Fläche F, welche von dieser Curve, von der Geraden A_1B_1 und vom Bogen A_1U der Radperipherie umgrenzt wird und welche $= \frac{u-v}{v} \times$ dem flachen Kreissegment ist, welches die Sehne A_1C_1 mit dem Radumfange begrenzt, stellt das Wasservolumen dar, welches, unterhalb A_1B_1 in das Rad pro Einheit seiner Breite b in $\frac{e}{v}$ Secunden (während des Weges e jedes Punktes der Radperipherie) einfliessend, noch zum Stoss in ihm gelangt, bevor es wieder ausfliesst. Da jenes Kreissegment, unter w seine Höhe UW verstanden,

$$= \frac{2}{3} w \,.\, AC$$

gesetzt werden kann gleich als ob es ein parabolisches Segment wäre, ist fragliche Fläche F mit Rücksicht auf Gl. (13):

$$F = \frac{2}{3} w \,.\, AC \cdot \frac{u-v}{v} = \frac{2}{3} lw.$$

Indem aber das überhaupt an dieser Stelle in der angegebenen Zeit pro Einheit der Radbreite einfliessende Wasservolumen $= lw$ ist und das oberhalb A_1B_1 einfliessende vollständig zum Stoss gelangt, ist

$$lw - \frac{2}{3} lw = \frac{1}{3} lw$$

das Wasservolumen, welches, pro Einheit der Radbreite in $\frac{e}{v}$ Secunden in den Radkranz einfliessend, mit unveränderter Geschwindigkeit wieder ausfliesst und somit als Wasserverlust zu betrachten ist.

Ist s die Entfernung zwischen dem Gerinneboden und dem Radkranz, so ist ls das gleichfalls verlorene Wasservolumen, welches unter letzterem pro Einheit der Radbreite in der Zeit $\frac{e}{v}$ ganz vorbeifliesst, sofern auch diesem vorbeifliessenden Wasser die Geschwindigkeit u zugeschrieben werden kann. Streng genommen mag es wohl etwas kleiner sein mit Rücksicht auf eine gewisse, übrigens ohne Zweifel nur geringfügige Contraction und weil durch die Reibung am Gerinneboden die Geschwindigkeit etwas $< u$ sein wird; doch kann, falls nicht etwa die Oberfläche des vom Rade wegfliessenden Wassers wesentlich höher liegt, als die des zufliessenden, bei der Unsicherheit jeder Messung oder Schätzung von s im einzelnen Falle der Fehler dadurch genügend als aufgewogen betrachtet werden, dass die Weite des Spielraums zwischen dem Gerinneboden und dem äusseren Rande der gerade untersten Schaufel mit deren Neigung gegen die Verticale periodisch etwas $> s$ wird, und dass auch an den Seiten etwas Wasser zwischen dem Radkranze und den Seitenwänden des Gerinnes hindurch fliesst.

Ist endlich a_1 die Tiefe des im Gerinne dem Rade zufliessenden Wasserstroms, so fliesst im Ganzen pro Einheit der Radbreite in $\frac{e}{v}$ Secunden das Wasservolumen la_1 zu, und es ist folglich der ganze verhältnissmässige Wasserverlust

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{ls + \frac{1}{3}lw}{la_1} = \frac{1}{a_1}\left(s + \frac{1}{3}w\right) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (14),$$

wo Q_1 den Wasserverlust pro Sec. bedeutet.

Die Pfeilhöhe $w = UW$ des von der Sehne A_1C_1 abgeschnittenen Umfangsbogens ist sehr nahe:

$$w = \frac{\overline{A_1W}^2}{2R} = \frac{\overline{AC}^2}{8R}$$

oder weil nach (12) und (13)

$$AC = e\frac{u}{u-v} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15)$$

ist, auch

$$w = \frac{e^2}{8R}\left(\frac{u}{u-v}\right)^2$$

und nach (14) der verhältnissmässige Wasserverlust:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{a_1}\left[s + \frac{e^2}{24R}\left(\frac{u}{u-v}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (16).$$

Er ist bei gegebenen Werthen von a_1 und u um so kleiner, je kleiner e und je grösser R ist, je mehr Schaufeln also gleichzeitig in das Wasser eingetaucht sind, ferner je kleiner s und v sind.

Der dem zweiten Gliede des Ausdrucks (16) entsprechende Verlust kann dadurch fast ganz vermieden werden, dass das Wasser verhindert wird, unterhalb A_1 (Fig. 15) in das Rad einzufliessen und unterhalb C_1 auszufliessen, indem dem Gerinne der Verlauf $B_1 A_1 U C_1$ gegeben wird, so dass es von A_1 bis C_1 das Rad in der kleinen Entfernung s umschliesst. Bei C_1 kann ihm ein Abfall gegeben werden, der passend so zu bemessen ist, dass die Oberfläche des abfliessenden Wassers mit derjenigen des zufliessenden gleiche Höhenlage erhält, dass also, wenn a_2 die Tiefe des Abflussgerinnebodens an seinem Anfange unter der Oberfläche des zufliessenden Wassers an seiner Eintrittstelle in das Rad bedeutet,

$$a_2 = \frac{u}{v} a_1$$

wird, indem v die Geschwindigkeit ist, mit welcher das Wasser nach erfolgtem Stoss in das Abflussgerinne gelangt. Die Bahnen, welche die Wassertheilchen im Rade bis zu diesem Stoss durchlaufen, werden dann nur etwas gekrümmt, so dass der Verlust wegen des Spielraums s keine wesentliche Aenderung erfährt und also

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{s}{a_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17)$$

gesetzt werden kann, falls s mit Vorsicht etwas reichlich im einzelnen Falle geschätzt wird.

Während sich in diesem Falle die obige Voraussetzung erfüllt findet, dass die Oberfläche des vom Rade wegfliessenden Wassers nicht wesentlich höher, als die des zufliessenden gelegen ist, verhält es sich bei den gewöhnlichen unterschlächtigen Stossrädern im eigentlichen Schnurgerinne anders. Sofern letzteres ganz gerade, ein Abfall nicht vorhanden ist, liegt die Oberfläche des abfliessenden Wassers, dessen Tiefe $a_2 = \frac{u}{v} a_1$ ist, um

$$a_2 - a_1 = \left(\frac{u}{v} - 1\right) a_1 = \frac{u - v}{v} a_1$$

höher, als die Oberfläche des zufliessenden, und ist deshalb die Geschwindigkeit des unter dem Rade vorbeifliessenden Wassers nur gleich

$$u_1 = \sqrt{u^2 - 2ga_1 \frac{u-v}{v}} = u\sqrt{1 - \frac{2ga_1}{u^2}\,\frac{u-v}{v}}$$

zu setzen. Wie später erörtert werden wird, ist bei vortheilhaftestem Gange eines solchen unterschlächtigen Stossrades nahe

$$v = 0{,}4\sqrt{2gH},$$

während

$$u = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{2gH}{1{,}15}}, \quad \frac{2g}{u^2} = \frac{1{,}15}{H}$$

gesetzt werden kann. Daraus folgt

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{\sqrt{1{,}15\,.\,0{,}16}} = \frac{1}{0{,}429} = 2{,}33$$

$$u_1 = u\sqrt{1 - 1{,}15\frac{a_1}{H}\,.\,1{,}33} = u\sqrt{1 - 1{,}53\frac{a_1}{H}}.$$

In Gl. (16) kann der hier besprochene Umstand dadurch berücksichtigt werden, dass für s ein im Verhältnisse $u_1 : u$ kleinerer Werth s_1 gesetzt wird, also

$$s_1 = s\sqrt{1 - 1{,}53\frac{a_1}{H}} \text{ nahe } = s\left(1 - 0{,}8\frac{a_1}{H}\right) \;\ldots\ldots\; (18).$$

§. 16. Untergeordnete Effectverluste.

Diejenigen der hierher zu rechnenden Widerstände, welche sich wenigstens noch näherungsweise rationell in Anschlag bringen lassen, sind bei Kropfrädern die Reibung des mit der Geschwindigkeit v am Kropfgerinne entlang sich bewegenden Wassergehalts der Schaufelräume, sowie bei allen Rädern der Widerstand der Luft (insbesondere bei Schaufelrädern mit seitlich offenem Radkranz) und die Reibung der Wasserradwelle in den Lagern.

1) Ist W_1 die Grösse der Wasserreibung pro Einheit der Wandfläche eines Kropfgerinnes, und wird dieselbe mit derjenigen einer geraden Canalstrecke von der Länge l verglichen, die unter dem kleinen Winkel α gegen den Horizont geneigt ist und in welcher sich Wasser mit dem Querschnitte F und dem benetzten Querprofil p mit der mittleren Geschwindigkeit v gleichförmig bewegt, so gilt die Gleichung

$$W_1 lp = \gamma Fl\alpha,$$

welche ausdrückt, dass die ganze Reibung $= W_1 lp$ an der Canalwand der Componente der Schwere längs dem Canal gleich sein muss, wenn weder sie eine Verzögerung, noch die Schwere eine Beschleunigung der strömenden Wasserbewegung verursachen soll. Daraus folgt

$$W_1 = \gamma \frac{F}{p} \alpha = \gamma r \alpha$$

und mit $v = k\sqrt{r\alpha}$ (siehe Bd. I, §. 126, Gl. 3)

$$W_1 = \frac{\gamma}{k^2} v^2 \cdot \dots \dots \dots \dots \dots \quad (1).$$

Was den Erfahrungs-Coefficienten k betrifft, so wäre nach Bestimmungen von Bazin für Canalwände aus gehobelten Brettern (Gl. 12 a. a. O.)

$$\frac{1}{k^2} = 0{,}00015 + \frac{0{,}0000045}{r}$$

zu setzen oder, da hier r durchschnittlich = der halben Kranzbreite von ungefähr 0,4 Mtr. angenommen werden kann,

$$\frac{1}{k^2} = 0{,}00015 + \frac{0{,}0000045}{0{,}2} = 0{,}00017$$

bezw. für Canäle in behauenen Quadersteinen oder ungehobeltem Holz:

$$\frac{1}{k^2} = 0{,}00019 + \frac{0{,}0000133}{0{,}2} = 0{,}00026.$$

Nach älteren Bestimmungen (a. a. O., S. 725), wobei verschiedene Beschaffenheiten der Canalwände nicht ausdrücklich unterschieden waren, wäre gar in runder Zahl:

$$\frac{1}{k^2} = 0{,}0004.$$

Den letzten und grössten Werth hier zu Grunde zu legen, erscheint deshalb gerechtfertigt und rathsam, weil hier eine von relativen Bewegungen längs den Schaufeln begleitete und überhaupt viel weniger regelmässige Bewegung des Wassers, als in einem geraden Canal oder Gerinne stattfindet. Mit $\gamma = 1000$ Kgr. pro Cubikmtr. ist dann nach (1):

$$W_1 = 0{,}4\, v^2 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \quad (2).$$

Wird mit l die gesammte Bogenlänge der Berührungsfläche des Wassers mit dem Kropfgerinne bezeichnet, nach oben hin ev. aus getrennten Bogenstücken bestehend (Fig. 14), so dass die Berührungsfläche selbst $= lb$ und die Wasserreibung an ihr $= lb\, W_1$ ist, so ergiebt sich schliesslich der Effectverlust durch diese Wasserreibung im Kropf:

$$E_w = lb\, W_1 . v = 0{,}4\, lb v^3 \quad \dots \dots \dots \dots \quad (3).$$

Von erheblicher Bedeutung ist er nur bei ungewöhnlich grosser Peripheriegeschwindigkeit. Z. B. für das im vorigen Paragraph besprochene mittelschlächtige Kropfrad mit $v = 2$ Mtr. pro Sec. und $b = 1{,}5$ Mtr. ist l nahe $= 3{,}5$ Mtr. und deshalb

$$E_w = 16{,}8 \text{ Meterkgr. pro Sec.}$$

noch nicht ganz 1 % des absoluten Effects $E_0 = \gamma Q H = 1800$ Meterkgr.

2) Der als tangentiale und dem Bewegungssinne entgegengerichtete Umfangskraft verstandene **Luftwiderstand** kann nach Versuchen von **Piobert, Morin** und **Didion** für **Schaufelräder mit seitlich offenem Radkranz** ungefähr

$$= 0{,}12\, z a b v^2$$

gesetzt werden.* Dabei ist vorausgesetzt, dass die Entfernung benachbarter Schaufeln wenigstens = der Kranzbreite a ist. Anderenfalls wird durch die Bewegung, welche die zwischen den Schaufeln befindliche Luft im Sinne von v dauernd annimmt, der Geschwindigkeitsüberschuss der Schaufeln und somit der widerstehende Druck gegen dieselben erheblich verkleinert. Noch mehr ist das der Fall bei Rädern mit seitlich geschlossenem Radkranz, wobei die in den Schaufelräumen befindliche Luft im Wesentlichen mit dem Rade umläuft, insoweit sie nicht durch die Ventilationsspalten im Radboden allmählich erneuert und nach aussen fortgetrieben wird. Setzt man statt des obigen Zahlenwerths 0,12 diesen Coefficienten im Allgemeinen $= m$ (wo im zuletzt erwähnten Falle m fast bis Null abnehmen könnte, wenn nicht gerade bei Rädern mit seitlich geschlossenem Kranz ein Luftwiderstand anderer Art, eine Art von Luftreibung in erhöhtem Masse in Betracht käme), so ist **der Effectverlust durch diesen Luftwiderstand:**

$$E_l = m z a b v^3 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

---

* Wenn man den Druck auf eine Schaufel

$$= \vartheta \gamma a b \frac{v^2}{2g}$$

setzt, unter γ das specifische Gewicht der Luft verstanden (siehe Bd. I., §. 156), so entspricht obiger Ausdruck der Gleichung:

$$\vartheta \gamma \cdot \frac{1}{2g} = 0{,}12$$

oder mit $\gamma = 1{,}25$ (Kgr. pro Cubikmtr.) dem Werthe $\vartheta = 1{,}88$ in befriedigender Uebereinstimmung mit sonstigen analogen Erfahrungen.

Dieser Luftdruck auf die im Kreise umlaufende Schaufel ist um etwa 20 % grösser, als derjenige auf eine geradlinig und normal bewegte ebene Fläche unter sonst gleichen Umständen, vermuthlich deshalb, weil im letzten Falle die an der Vorderfläche eine Zeit lang fast relativ ruhende verdichtete Luft gewissermassen eine den Widerstand vermindernde Zuspitzung bildet, während die rotirende Fläche die vor ihr befindliche Luft wie ein Ventilator beständig nach aussen treibt und so überhaupt eine grössere lebendige Kraft ihr mittheilt. (Siehe Bd. I., §. 156.)

mit m etwa = 0,06 bis 0,12. Für das oben unter 1) erwähnte Beispiel wäre höchstens mit m = 0,12:

$$E_l = 0{,}12 \,.\, 44 \,.\, 0{,}4 \,.\, 1{,}5 \,.\, 8 = 25{,}4 \text{ Meterkgr.}$$

$= 1{,}4\%$ von $E_0 = 1800$.

Auch dieser Effectverlust wird nur bei grossen Peripheriegeschwindigkeiten von erheblicher Bedeutung. Für Räder mit seitlich geschlossenem Radkranz ist übrigens m so unsicher oder vielmehr schon die Form des Ausdrucks (4) so wenig den Verhältnissen entsprechend, dass es ebenso gerechtfertigt ist, für den Effectverlust durch den Luftwiderstand in diesem Falle einen kleinen aliquoten Theil von E_0 (höchstens etwa 1%) in Rechnung zu bringen, als Gl. (4) mit einem angenommenen Werthe von m zu Grunde zu legen.

3) Der Effectverlust durch die Zapfenreibung der Wasserradwelle ist, wenn G das Gewicht des Rades und r den Halbmesser der Welle in den Lagern (im Mittel, wenn er in beiden Lagern verschieden sein sollte) bedeutet,

$$E_z = \mu G \frac{r}{R} v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5),$$

wo der Reibungscoefficient je nach dem Zustande der Schmierung = 0,06 bis 0,1, im Durchschnitt etwa = 0,08 zu setzen ist.

Sofern man Veranlassung haben kann, diesen Effectverlust für ein erst zu entwerfendes Rad in Anschlag zu bringen, für welches zwar v und R schon angenommen sein mögen, G und r aber noch nicht bekannt sind, kann man

$$G = CbRH \text{ Kgr.}$$

setzen, unter C eine Constante verstanden, die am sichersten durch Vergleichung mit einer grösseren Zahl ausgeführter Räder verschiedener Art und Grösse zu bestimmen sein wird; während nämlich mit b und R, und zwar offenbar nahe proportional diesen Dimensionen, die Flächengrössen der plattenförmigen Bestandtheile des Rades wachsen, wächst mit H ihre Inanspruchnahme, also die ihnen zu gebende Dicke, sowie auch das Gewicht der Wasserfüllung des Radkranzes, während die Masse des Armsystems eher R^2, als R, proportional sein mag, R aber wieder in Verhältniss zu H steht. Zur Bestimmung der Constanten C diene hier in Ermangelung einer genügenden Zahl directer anderweitiger Anhaltspunkte die Formel

$$G = 1400 \frac{N}{\varepsilon n} \text{ Kgr.} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6),$$

welche G. Herrmann aus einigen Erfahrungen für oberschlächtige Räder abgeleitet hat. Setzt man darin

$$N = \eta \frac{1000\,QH}{75} = 10\,QH \text{ mit } \eta = 0{,}75$$
$$= 10\,\varepsilon a b v H$$

und $n = 9{,}55\,\omega$ nahe $= 10 \frac{v}{R}$, so wird

$$G = 1400\,ab\,RH = 400\,b\,RH$$

mit $a = \frac{2}{7} = 0{,}29$ Mtr. als mittlerer Kranzbreite oberschlächtiger Räder. Für kleine Gefälle H (für unterschlächtige Räder) dürfte jedoch diese Formel meistens das Gewicht G zu klein ergeben, und mag zu grösserer Sicherheit schliesslich

$$G = 400\,b\,R\,(H + 1) \text{ Kgr.} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7)$$

gesetzt werden, womit bei grossen Gefällen (bei oberschlächtigen Rädern), denen der Zahlencoefficient und die ganze Formel zunächst angepasst wurde, keine sehr erhebliche Aenderung verbunden ist.

Der Halbmesser r kann für schmiedeeiserne Zapfen

$$= 0{,}55 \sqrt{\frac{G}{2}} = 0{,}39 \sqrt{G} \text{ Millimtr.}$$

nahe $= 0{,}0004 \sqrt{G}$ Mtr. gesetzt werden.

Beispielsweise ergiebt sich in dem unter 1) und 2) erwähnten Falle:

$$G = 400 \,.\, 1{,}5 \,.\, 2{,}5\,(3 + 1) = 6000 \text{ Kgr.}$$
$$r = 0{,}0004 \sqrt{6000} = 0{,}031 \text{ Mtr.}$$
$$E_z = 0{,}08 \,.\, 6000 \,.\, \frac{0{,}031}{2{,}5} \,.\, 2 = 11{,}9 \text{ Meterkgr.}$$

nahe $= 0{,}7\,\%$ von E_0.

4) Schliesslich können noch verschiedene Effectverluste vorkommen, welche sich einer rationellen Grössenbestimmung gänzlich entziehen. Dahin gehört z. B. die Verspritzung von Wasser beim Einfliessen, besonders in freihängende Zellenräder, sowie die Adhäsion desselben an den Schaufeln und sonstigen Wänden, vermöge welcher die Entleerung der Schaufelräume in ihrer tiefsten Lage insofern unvollständig ist, als etwas Wasser haften bleibt und wenn überhaupt, nur allmählich abtropft, während es mit in die Höhe genommen wird. Endlich werden durch die unvollkommene Stabilität des aus vielen Theilen zusammengesetzten Rades relative Bewegungen dieser Bestandtheile verursacht, welche mit Effectverlusten

verbunden sind, besonders wenn sie zu Stössen zwischen gewissen in ihrer Verbindung gelockerten Constructionsgliedern führen. In Betreff aller dieser Verluste, die namentlich bei den weniger sorgfältig gebauten und leichter schadhaft werdenden hölzernen Rädern gewöhnlicher Art von ziemlich erheblicher Grösse sein können, muss man sich damit begnügen, den Nutzeffect in Bausch und Bogen um einige Procente des absoluten Effects kleiner anzunehmen, als er mit Rücksicht auf die berechenbaren und berechneten Effectverluste sich ergeben hat, etwa um 1 bis 2 Procent bei eisernen, um 3 bis 4 Procent bei hölzernen Rädern.

§. 17. Zusammenstellung der Resultate.

Zur Erleichterung des Gebrauchs mögen die Ergebnisse der bisherigen allgemeinen Erörterungen in der Hauptsache übersichtlich zusammengestellt werden. Ist zu dem Ende

Q_1 der Wasserverlust pro Secunde,

H_1 der resultirende Gefällverlust,

E_1 der Effectverlust durch nebensächliche Widerstände, so ist der Nutzeffect

$$E = \gamma (Q - Q_1)(H - H_1) - E_1$$

und der Wirkungsgrad:

$$\eta = \frac{E}{E_0} = \frac{E}{\gamma Q H} = \left(1 - \frac{Q_1}{Q}\right)\left(1 - \frac{H_1}{H}\right) - \frac{E_1}{E_0} \quad \ldots \ldots (1).$$

Hauptsächlich wird η durch den Gefällverlust bedingt, welcher im Allgemeinen

$$H_1 = \zeta \frac{u^2}{2g} + \frac{w_1^{\ 2}}{2g} + \frac{v^2}{2g} + h_1 + h_2 + h_3 \quad \ldots \ldots \ldots (2)$$

ist, wo jedoch die letzten Summanden h_1, h_2, h_3 nicht alle bei demselben Rade zugleich vorkommen.

$\zeta \frac{u^2}{2g}$ ist der durch die Einführung des Wassers in das Rad verursachte Gefällverlust, und zwar kann der Coefficient ζ im Durchschnitt $= 0{,}1$ gesetzt werden, falls diese Einführung durch eine Spannschütze oder durch eine Ueberfallschütze vermittelt und regulirt wird, bezw. $= \frac{1}{3}$ im Falle einer Coulissenschütze.

Der zweite Summand ist der Gefällverlust durch den Stoss des einfliessenden Wassers. Er kann mit ausreichender Näherung:

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g} + k$$

gesetzt werden, nämlich = der Geschwindigkeitshöhe, welche der relativen Geschwindigkeit des im mittleren Eintrittspunkte J zufliessenden Wassers entspricht, vermehrt um die Höhe dieses Punktes über dem Niveau der halben Wasserfüllung eines Schaufelraums in solcher Lage, dass der Mittelpunkt seines Theilbogens mit J zusammenfällt. Wie dieser Verlust genauer gefunden werden kann, ist aus §. 13 zu ersehen.

Das Glied $\frac{v^2}{2g}$ bedarf keiner weiteren Erläuterung.

h_1 ist bei freihängenden Zellenrädern der Betrag des Freihängens und je nach den Umständen (je nach der Veränderlichkeit des Unterwasserspiegels vor Allem) etwa = 0,1 bis 0,3 Mtr. anzunehmen. Bei Kropfrädern bedeutet h_1 einen Gefällverlust, welcher von der Höhe des Wasserspiegels im untersten noch nicht entleerten Schaufelraume über dem Unterwasserspiegel oder auch vom Eintauchen der Schaufeln in das Unterwasser herrührt und in der Regel $\frac{1}{4}$ der Kranzbreite a gesetzt werden kann.

h_2 entspricht der vorzeitigen Entleerung der Zellen bei freihängenden Zellenrädern und ist der Zeichnung wie folgt zu entnehmen. Man trägt ein Schaufelprofil an beliebiger Stelle ein und zieht durch seinen äusseren Endpunkt A eine Gerade AD, welche mit ihm die Fläche $\frac{1}{2} F = \frac{1}{2} \varepsilon a e$ umgrenzt, zieht die Gerade AC senkrecht zu AD bis zum Schnittpunkte C mit dem aus dem Radmittelpunkte M mit dem Halbmesser $\frac{g}{\omega^2}$ beschriebenen Kreise, zieht CM bis zum Schnittpunkte U mit dem Radumfang und endlich AN senkrecht zu MU bis zum Durchschnittspunkte N mit dieser Geraden; dann ist $h_2 = NU$. Wie diese Bestimmung mit Rücksicht auf einige untergeordnete Umstände noch etwas corrigirt werden kann, und wie man zu verfahren hat, wenn der Punkt C in der Zeichnung nicht zugänglich ist, findet sich in §. 14 besprochen.

h_3 ist ein bei Kropfrädern durch die Spielräume verursachter Gefällverlust. In dem gewöhnlichen Falle eines Rades mit seitlich geschlossenem Kranz kann gesetzt werden:

$$h_3 = \mu \sqrt{2g}\, \frac{Rs}{eQ} \left[b \int_0^{\vartheta} y \sqrt{z}\, d\varphi + \frac{4}{3} \int_0^{\vartheta} x D\, d\varphi \right]$$

mit
$$\int_0^{\vartheta} y\sqrt{z}\,d\varphi = \frac{\vartheta}{6}\left(2y_1\sqrt{z_1} + y_2\sqrt{z_2} + 2y_3\sqrt{z_3}\right)$$

$$\int_0^{\vartheta} xD\,d\varphi = \frac{\vartheta}{6}\left(2x_1 D_1 + x_2 D_2 + 2x_3 D_3\right)$$

$$D = \frac{z'\sqrt{z'} - z''\sqrt{z''}}{\sin\varphi};\ \mu\sqrt{2g} = 3{,}4.$$

φ ist in Bogenmass der Winkel zwischen dem nach einem (längs der Radbreite sich erstreckenden) Hauptspalt und dem nach dem untersten Umfangspunkte U gezogenen Halbmesser,

ϑ der Werth von φ, bei welchem der Durchfluss durch die Spalten beginnt,

s die Spaltweite,

x die Höhe des Wasserspiegels in einem Schaufelraume über dem Unterwasserspiegel,

y die Höhe desselben über dem Wasserspiegel im nächst unteren Schaufelraume,

z seine Höhe über dem Hauptspalt zwischen beiden Schaufelräumen, falls dieselbe $< y$ ist, sonst $z = y$,

z' seine Höhe über dem unteren, z'' diejenige über dem oberen Endpunkte jeder der betreffenden Seitenspalten.

Die Indices 1, 2, 3 entsprechen bezw. $\varphi = \frac{1}{4}\vartheta, \frac{1}{2}\vartheta, \frac{3}{4}\vartheta$.

Im Falle eines Rades mit seitlich offenem Kranz ändert sich der Ausdruck von h_3 theilweise, wie aus §. 15 zu ersehen ist. —

Q_1 bezieht sich nur auf unterschlächtige Räder. Das Verhältniss dieses Wasserverlustes zu Q ist höchstens

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{a_1}\left[s + \frac{e^2}{24\,R}\left(\frac{u}{u-v}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3),$$

kann aber durch passende kropfartige Anschmiegung des Gerinnebodens an das Rad längs einem Bogen

$$= e\frac{u}{u-v}$$

bis auf nahe $\frac{Q_1}{Q} = \frac{s}{a_1}$ reducirt werden; a_1 bedeutet die Tiefe des dem Rade unmittelbar zufliessenden Wasserstroms. —

Der Effectverlust E_1 ist im Allgemeinen:

$$E_1 = E_w + E_l + E_z + \alpha E_0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4).$$

Dabei bedeutet E_w den Effectverlust durch die Wasserreibung im Kropf bei Kropfrädern, welcher

$$E_w = 0{,}4\, l b v^3$$

gesetzt werden kann, unter l die gesammte Bogenlänge der Berührungsfläche des Wassers mit dem Kropfgerinne verstanden.

E_l, der Effectverlust durch den Luftwiderstand, ist ungefähr

$$E_l = m z a b v^3$$

mit $m = 0{,}06$ bis $0{,}12$, am grössten bei seitlich offenem Radkranz und radial gerichteten Schaufeln.

Zu vorläufig angenäherter Schätzung des Effectverlustes durch die Zapfenreibung:

$$E_z = \mu G \frac{r}{R} v$$

mit $\mu = 0{,}06$ bis $0{,}1$ kann das Gewicht des Rades

$$G = 400\, b R (H + 1) \text{Kgr.}$$

und der Zapfenhalbmesser

$$r = 0{,}0004 \sqrt{G} \text{ Mtr.}$$

gesetzt werden.

Der Coefficient α der schliesslichen Zugabe αE_0 ist bei eisernen Rädern $= 0{,}01$ bis $0{,}02$, bei hölzernen $= 0{,}03$ bis $0{,}04$ anzunehmen.

§. 18. Wahl der Radelemente.

Nach dem Vorhergehenden lassen sich der Nutzeffect E und der Wirkungsgrad η eines Wasserrades berechnen, dessen Elemente in Betreff seiner Form und Grösse, seiner Lage gegen den Ober- und den Unterwasserspiegel, sowie in Betreff seines Ganges und seiner Beaufschlagung gegeben sind. Auch könnte man sich nun die Aufgabe stellen, diese Radelemente so zu bestimmen, dass unter sonst gegebenen Umständen, insbesondere z. B. für gegebene Werthe von Q und H oder von E bezw. N und H der Wirkungsgrad η ein Maximum wird. Abgesehen davon indessen, dass bei der grossen Zahl zu bestimmender Elemente und bei der Zusammengesetztheit ihrer Beziehungen zu η die strenge Durchführung dieser Aufgabe auf kaum überwindliche Schwierigkeiten führt, würde für die praktische Ausführung nicht viel dadurch gewonnen werden, weil auf diese namentlich der Kostenpunkt von wesentlich mitbestimmendem Einflusse ist, abgesehen von anderweitigen praktischen Erwägungen, die ebenso wenig bei jener Rechnung die ihnen gebührende Berücksichtigung fänden.

So wird man dahin geführt, für die Mehrzahl der fraglichen Radelemente solche Werthe oder Verhältnisse anzunehmen, welche sich bewährt haben. An solche erfahrungsmässige Mittelwerthe darf man sich nur nicht zu streng binden; auf Grund der im Vorhergehenden bestimmten Effectverluste und ihrer Abhängigkeitsgesetze wird man vielmehr beurtheilen können, in welchem Sinne und ungefähren Betrage sie in einem gegebenen Falle zu modificiren sind, jenachdem es gerade mehr darauf ankommt, die Kosten möglichst klein oder η möglichst gross zu erhalten. Auch durch die Localverhältnisse und durch die besondere Art der gewählten Construction können Abweichungen bedingt werden, welche der jeweiligen Beurtheilung anheimgestellt bleiben müssen.

Vor Allem können die fraglichen Radelemente von der Art des Rades, also davon abhängig sein, ob dasselbe als ober- oder rückenschlächtiges freihängendes Zellenrad, als rücken-, mittel- oder tiefschlächtiges Kropfrad, als unterschlächtiges Stossrad oder als Poncelet-Rad gebaut werden soll. Die passende Wahl in dieser Hinsicht hängt von Q und H ab, worüber einige Angaben bei der Besprechung der einzelnen Arten von Rädern werden gemacht werden. Ist ausser H nicht unmittelbar Q, sondern N bezw. $E = 75\,N$ gegeben, so kann Q aus der Gleichung

$$E = \eta \,.\, 1000\, Q H$$

mit einem angenommenen Werthe von η vorläufig gefunden werden; wie solche Werthe für die verschiedenen Arten von Rädern passend anzunehmen sind, wird gleichfalls später besprochen.

1) Der Halbmesser R ist nach getroffener Wahl in Betreff der Art des Rades im Grossen und Ganzen durch H bestimmt.

Bei dem oberschlächtigen Rade pflegt mit Rücksicht auf die passende Anordnung des Einlaufs das Wasser nicht genau an der höchsten Stelle eingeführt, sondern der mittlere Eintrittspunkt J um ungefähr 10^0 vom höchsten Punkte O der Radperipherie im Sinne ihrer Bewegung entfernt angenommen zu werden. Wird dieser Winkel allgemein mit δ bezeichnet, während h das auf die Erzeugung der Einlaufgeschwindigkeit u verwendete Gefälle bedeutet, h_1 den Betrag des Freihängens, so ergiebt sich R aus der Gleichung:

$$R(1 + \cos\delta) = H - h - h_1 \;\ldots\ldots\ldots\ldots \;(1),$$

nachdem die übrigen darin ausser dem gegebenen Gefälle H vorkommenden Grössen angenommen oder bestimmt worden sind.

Für ein rückenschlächtiges Rad kann R etwas $< \frac{2}{3} H$, für ein mittelschlächtiges etwas $< H$, für ein tiefschlächtiges $= 2$ bis 4 Mtr. angenommen werden. Bedeutet in allen diesen Fällen ϑ den Winkel zwischen dem vertical abwärts gerichteten und dem nach dem mittleren Eintrittspunkte J gezogenen Halbmesser, t die Tiefe des Eintauchens in das Unterwasser, so ist

$$R(1 - \cos\vartheta) = H - h + t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

wodurch hier ϑ bestimmt ist, wenn nebst R auch die übrigen Grössen festgesetzt sind.

Bei den unterschlächtigen Rädern steht R noch weniger, als bei tiefschlächtigen, in einer nothwendigen Beziehung zu H; gewöhnlich macht man hier $R = 2 - 3$ Mtr.

2) In Betreff des Verhältnisses der Geschwindigkeiten u und v, durch welches nach der Annahme von v (siehe unter 3) auch u bestimmt ist und somit die u. A. in den Gleichungen (1) und (2) vorkommende Grösse

$$h = (1 + \zeta)\frac{u^2}{2g},$$

kann man von folgender Erwägung ausgehen.

Abgesehen von unterschlächtigen Rädern, welche in dieser wie in anderen Hinsichten einer besonderen Untersuchung bedürfen und später unterzogen werden sollen, kann das Gefälle H im Ganzen als aus zwei Theilen bestehend betrachtet werden:

$$H = H' + H'',$$

von denen der erste zum Einfluss des Wassers in das Rad und zur Stosswirkung in ihm, der zweite zu unmittelbarer Druckwirkung des von dieser Höhe H'' niedersinkenden Wassers verwendet wird. Nur das Ausnutzungsverhältniss des ersteren Gefälletheils H' ist von dem in Rede stehenden Verhältnisse der Geschwindigkeiten u und v abhängig, und zwar kann man sich fragen, bei welchem Werthe dieses Geschwindigkeitsverhältnisses

$$\frac{h'}{H'} = max$$

ist, wenn h' den der Stosswirkung thatsächlich zugutkommenden Theil von H' bedeutet. Dieser Theil ist aber derjenige, welcher von H' übrig bleibt nach Abzug des Stossverlustes $\frac{w_1^2}{2g}$ und der Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$, die der absoluten Ausflussgeschwindigkeit v des Wassers aus dem Rade entspricht, so dass die Forderung auf die Form gebracht werden kann:

$$\frac{h'}{H'} = \frac{H' - \frac{w_1^2}{2g} - \frac{v^2}{2g}}{H'} = max \ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Die verschiedenen Wassertheilchen der Füllung eines Schaufelraums kommen nach und nach zum Stoss, und es entsprechen ihnen also streng genommen verschieden grosse Bestandtheile H' und H'' von H, nach und nach grössere Werthe von H', kleinere von H''; im Durchschnitt kann jedoch H' = der Höhe des Oberwasserspiegels über dem Wasserniveau eines Schaufelraums in dem Augenblicke gesetzt werden, in welchem die Hälfte seiner Füllung in ihm zum Stoss und näherungsweise zu relativer Ruhe gelangt ist, also = der Höhe des Oberwasserspiegels über der Horizontalen CKD in der Fig. 7, welche beispielsweise den Verhältnissen eines oberschlächtigen Rades (mit übertrieben gross gezeichneter Kranzbreite) angepasst ist. Diese Höhe ist = der Geschwindigkeitshöhe $\frac{u_1^2}{2g}$, womit das mittlere Wassertheilchen im Punkte K zum Stosse kommt, vermehrt um die Widerstandshöhe $\zeta\frac{u^2}{2g}$, die durch die Widerstände der Schütze und überhaupt des Einlaufs verloren gegangen ist, und es wäre also in Gl. (3)

$$H' = \frac{u_1^2}{2g} + \zeta\frac{u^2}{2g}$$

zu setzen. Setzt man aber statt dessen

$$H' = \frac{w_1^2}{2g},$$

so setzt man damit den Zähler und den Nenner in der Regel nur unerheblich zu klein, jenen freilich verhältnissmässig mehr zu klein, als diesen, so dass die sich theilweise compensirenden Fehler noch weiter ausgeglichen werden können, indem der Zähler des Bruches (3) dadurch etwas vergrössert wird, dass die Geschwindigkeit v_1 des Radpunktes K an die Stelle der Umfangsgeschwindigkeit v gesetzt wird. So ergiebt sich näherungsweise die Forderung:

$$\frac{h'}{H'} = \frac{u_1^2 - w_1^2 - v_1^2}{u_1^2} = max \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

oder, da in dem Dreieck, dessen Seiten u_1, v_1, w_1 sind, deren erstere den Winkel α_1 ($= \varphi_1 - \psi_1$ in Fig. 7) einschliessen mögen,

$$w_1^2 = u_1^2 + v_1^2 - 2 u_1 v_1 \cos \alpha_1$$

und somit $u_1^2 - w_1^2 - v_1^2 = 2 v_1 (u_1 \cos \alpha_1 - v_1)$ ist,

$$\frac{h'}{H'} = 2 \frac{v_1}{u_1}\left(\cos \alpha_1 - \frac{v_1}{u_1}\right) = max \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Ihr entspricht

$$\frac{v_1}{u_1} = \frac{1}{2} \cos \alpha_1; \quad max \frac{h'}{H'} = \frac{1}{2} \cos^2 \alpha_1 \ldots \ldots \ldots \quad (6).$$

Da $\cos \alpha_1$ nur wenig < 1 zu sein pflegt und v_1 etwas $< v$ ist, kann näherungsweise

$$v = \frac{1}{2} u_1$$

gesetzt werden, also wegen $u_1 > u$:

$$v > \frac{1}{2} u; \quad u < 2v \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (7),$$

und zwar wird es angemessen sein, um so mehr $u < 2v$ zu machen, je kleiner α_1 (je grösser $\cos \alpha_1$) und je mehr $u_1 > u$ ist. Im Durchschnitt ist

$$u = 1{,}75\, v$$

ein passendes und übliches Verhältniss.

Bei freihängenden Zellenrädern mit im Sinne des Umfangs gestreckten Schaufeln kann u_1 erheblich $> u$ sein, weil das Wasser vom mittleren Eintrittspunkte J bis zum Stosspunkte K einen verhältnissmässig grossen Weg zu durchlaufen hat, und es sollte insofern hier u erheblich $< 2v$ sein. Wenn trotzdem gerade bei solchen Rädern oft $u = 2v$ angenommen wird, so hat es, wenigstens bei oberschlächtigen Rädern mit unventilirten Zellen, den Vortheil, dass nach Gl. (8), §. 13 die Länge des Einlaufbogens

$$i = \frac{\varepsilon a v}{w \sin \beta}, \text{ nahe } = \frac{\varepsilon a}{\left(\frac{u}{v} - 1\right) \sin \beta}$$

wegen w nahe $= u - v$, um so kleiner wird, also um so eher, wie es verlangt werden muss, erheblich $< e$ gehalten werden kann, je grösser $\frac{u}{v}$ ist. Uebrigens hat die Veränderung dieses Geschwindigkeitsverhältnisses von beispielsweise 1,75 bis 2 nur sehr geringen Einfluss auf den verhältnissmässigen Effectverlust, wie daraus zu folgern ist, dass die Function

$$f(x) = x(2 - x),$$

welche für $x = 1$ am grössten, und zwar $f(1) = 1$ ist, für $x = \frac{2}{1,75} = \frac{8}{7}$ den Werth annimmt:

$$f\left(\frac{8}{7}\right) = \frac{8}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{48}{49},$$

der um nur 2 % kleiner, als das Maximum ist. Eine solche Differenz kann bei freihängenden Zellenrädern (ober- und rückenschlächtigen Rädern), bei welchen H' einen nur mässigen Theil von H ausmacht, sowie überhaupt mit Rücksicht auf den Genauigkeitsgrad der ganzen hier in Rede stehenden Schätzung kaum in Betracht kommen.

3) Die Umfangsgeschwindigkeit v ist bei unterschlächtigen Rädern in weiterhin näher zu besprechender Weise von u und somit, da bei ihnen das ganze Gefälle $H = (1 + \zeta)\frac{u^2}{2g}$ zur Erzeugung der Eintrittsgeschwindigkeit verwendet wird, von H abhängig.

Bei den übrigen Rädern ist η in geringerem Grade durch v bedingt, und genügt es, schätzungsweise die sich entgegenstehenden Rücksichten bei der Wahl von v gegen einander abzuwägen. Für ein kleineres v spricht der Umstand, dass aus mehreren Gründen der Wirkungsgrad mit abnehmendem v wächst; insbesondere sind stets die Gefällverluste $\frac{w_1^2}{2g}$ (bei entsprechender Wahl von u) und $\frac{v^2}{2g}$ sowie auch die Effectverluste E_w und E_l um so kleiner, je kleiner v. Je kleiner aber v, desto grösser müssen wegen $Q = \varepsilon abv$ unter sonst gegebenen Umständen a und b gemacht werden, womit die Kosten des Rades wachsen. (Dass gleichfalls das Gewicht G und der Zapfenhalbmesser r zunehmen, kann in Beziehung auf den Werth von E_z durch das kleinere v als nahe aufgewogen betrachtet werden.) Wenn ferner, wie gewöhnlich, die zu treibende Arbeitsmaschine schneller umlaufen muss, als das Rad, so wächst die nöthige Uebersetzung mit abnehmendem v, und ist sie dann im Allgemeinen kostspieliger und mit grösseren Arbeitsverlusten durch Reibung verbunden.

Bei freihängenden Zellenrädern ist von wesentlichem Einflusse auf η der Gefällverlust h_2 wegen des vorzeitigen Ausgusses der Zellen, welcher insofern auch von v abhängen kann, als dadurch eine denselben befördernde cylindrische Krümmung des Wasserspiegels in den Zellen bedingt wird. Diese Krümmung ist um so beträchtlicher, je grösser die Winkelgeschwindigkeit ω, also je grösser v bei gegebenem Werthe von R ist. Bei Kropfrädern ist dagegen statt h_2 der Gefällverlust h_3 von erheblichem

Einflusse auf η; er ist unter sonst gleichen Umständen um so grösser, je kleiner v.

Aus diesem Umstande, dass die Verkleinerung von h_2 ein möglichst kleines, die Verkleinerung von h_3 ein möglichst grosses v verlangt, könnte gefolgert werden, dass diese Umfangsgeschwindigkeit bei freihängenden Zellenrädern in der Regel kleiner, als bei Kropfrädern gemacht werden soll, wenn nicht zu bedenken wäre, dass die mit wachsendem v unter allen Umständen zunehmenden Gefällverluste $\frac{w_1^2}{2g}$ und $\frac{v^2}{2g}$, deren Summe mit den Bezeichnungen unter 2) $= H' - h'$ und nach Gl. (6) bei vortheilhaftester Wahl des Geschwindigkeitsverhältnisses $\frac{u}{v}$ wenigstens $= \frac{1}{2} H'$ ist, auf η von um so schädlicherem Einflusse sind, je grösser H' im Verhältnisse zu H ist, somit in der Regel von schädlicherem Einflusse bei mittel- und tiefschlächtigen Kropfrädern, als bei ober- und rückenschlächtigen Zellenrädern.

Unter diesen Umständen lässt man sich vorzugsweise von der Rücksicht auf eine angemessene Winkelgeschwindigkeit ω, bezw. auf eine angemessene Umdrehungszahl $n = 9{,}55\,\omega$ bei der Annahme von v leiten, indem man meistens zwischen den Grenzen 1 Mtr. und 3 Mtr. v um so grösser annimmt, je grösser R und je grösser die Geschwindigkeit der zu treibenden Arbeitsmaschine ist, abgesehen von anderweitigen Umständen, die in besonderen Fällen ausserdem in Betracht kommen können.

Bei kleinen Gefällen ist der Vergrösserung von v durch folgende Erwägung eine Grenze gesetzt. Da bei allen nicht unterschlächtigen Rädern

$$h = (1 + \zeta)\frac{u^2}{2g} < H$$

ist, muss

$$u < \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}, \quad \text{also } v < \frac{v}{u}\sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}}$$

sein, z. B.

$$v < 2{,}4\sqrt{H} \text{ für } \zeta = 0{,}1 \text{ und } u = 1{,}75\,v$$

$$v < 1{,}9\sqrt{H} \text{ für } \zeta = \frac{1}{3} \text{ und } u = 2\,v.$$

4) Der Füllungscoefficient $\varepsilon = \frac{Q}{abv}$ ist, um die Dimensionen a und b, somit die Kosten des Rades möglichst klein zu erhalten, so gross zu nehmen, wie die Rücksicht auf η gestattet. Bei freihängenden Zellenrädern wächst aber h_2 erheblich mit ε, wozu bei oberschlächtigen Rädern mit ihren unventilirten Zellen noch das Bedürfniss eines kleinen, dem

Füllungscoefficient proportionalen, Einlaufbogens i hinzukommt. Bei Kropfrädern ist zwar mit Rücksicht auf h_3 ein grosses ε vortheilhaft, doch setzt die Gefahr des Wasserverlustes durch die Luftspalten im Radboden eine Grenze, um so eher, je höher im Rade das Wasser einfliesst. Unter diesen Umständen sind passende und übliche Mittelwerthe:

bei oberschlächtigen Rädern $\varepsilon = \frac{1}{4}$,

bei rückenschlächtigen $\varepsilon = \frac{1}{3}$, falls sie freihängend sind, $\varepsilon = \frac{2}{5}$, falls der wasserhaltende Theil des Kranzes mit einem Kropf (wenn auch ohne Seitenwände) umgeben ist,

bei mittel- und tiefschlächtigen Rädern $\varepsilon = \frac{1}{2}$ bis $\frac{3}{5}$. Letztere können im Allgemeinen auch für unterschlächtige Räder gelten.

5) Was die Dimensionen a und b betrifft, so ist, nachdem v und ε dem Obigen zufolge angenommen worden sind, zunächst ihr Product ab durch die Gleichung $Q = \varepsilon abv$ bestimmt. Daraus folgt b, wenn auch für a ein erfahrungsmässig passender Werth angenommen wird, gewöhnlich $a = 0{,}25$ bis $0{,}35$ Mtr. bei Zellenrädern, bezw. $= 0{,}35$ bis $0{,}45$ Mtr. bei Schaufelrädern. Auch kann im Anschlusse an empirische Formeln, welche Redtenbacher aus bewährten Ausführungen abgeleitet hat,

$$\frac{b}{a} = 2{,}25\sqrt[3]{N_0} \text{ bezw. } 2\sqrt[3]{N_0} \text{ bezw. } 1{,}75\sqrt[3]{N_0}$$

$$\text{bei } \varepsilon = \frac{1}{4} \quad " \quad \frac{1}{3} \quad " \quad \frac{1}{2}$$

gesetzt, und können dann a und b aus den Werthen von ab und von $\frac{b}{a}$ berechnet werden, wenigstens sofern a zwischen obigen Grenzen liegend gefunden wird, welche nur ausnahmsweise überschritten zu werden pflegen.

Auf das Poncelet-Rad finden diese Regeln keine Anwendung, indem bei ihm die Kranzbreite in später zu besprechender Weise wesentlich vom Gefälle abhängig gemacht werden muss.

6) Die Theilung e des Rades betreffend, durch welche in Verbindung mit dem Halbmesser R auch die Schaufelzahl z bestimmt ist, hat die Untersuchung der Effectverluste eine enge Schaufelung als vortheilhaft ergeben. Insbesondere ist das der Fall bezüglich auf h_2, h_3 und Q_1, während in keiner Hinsicht (mit Ausnahme allenfalls des unerheblichen Luftwiderstandes) ein kleines e, bezw. grosses z von nachtheiligem Einflusse auf den Wirkungsgrad ist. Auch giebt es für jede Schaufel

natürlich eine gewisse vortheilhafteste Lage gegen den einfliessenden Wasserstrahl, und muss es schon deswegen vortheilhaft sein, dass, wenn eine Schaufel jene Lage überschritten hat, möglichst bald die nachfolgende an ihre Stelle tritt. Indessen wird durch constructive und ökonomische Rücksichten, sowie auch durch die Rücksicht auf ε der Vergrösserung von z eine Grenze gesetzt, bei oberschlächtigen Rädern auch durch die Forderung, dass der Einlaufbogen i wesentlich $< e$ sein soll.

Im Allgemeinen wird $e =$ der Kranzbreite oder wenigstens das Verhältniss $\frac{e}{a}$ nur wenig von 1 verschieden gemacht, nämlich um so grösser, je kleiner a, etwa entsprechend der Formel:

$$e = 0{,}75\, a + 0{,}1.$$

b. Die einzelnen Arten von Wasserrädern.

Die im vorigen Paragraph besprochenen Regeln für die Wahl einiger der wesentlichsten Radelemente setzten H und Q, sowie die Art des Rades als gegeben voraus. Statt Q ist aber oft ein verlangter Nutzeffect E, bezw. $N = \frac{E}{75}$ gegeben, vermittels dessen und des Gefälles H zur Anwendung jener Regeln und vielleicht auch behufs passender Wahl in Betreff der Art des Rades die nöthige Aufschlagwassermenge Q erst ermittelt werden muss gemäss der Gleichung:

$$N = \frac{1}{75} \cdot \eta \cdot 1000\, Q H,$$

woraus

$$Q = \frac{0{,}075}{\eta} \frac{N}{H}$$

folgt, jedoch erst gefunden werden kann, wenn ausserdem η genügend bekannt ist. Zur Vermittlung dieser vorläufig genügenden Kenntniss ist es hier hauptsächlich die Aufgabe, den Wirkungsgrad η für die verschiedenen Arten von Rädern näherungsweise als Function einiger Radelemente auszudrücken, von denen er ausser von der Art des Rades hauptsächlich abhängt, nämlich besonders als Function von H und von v.

Erst wenn Q bekannt ist, kann der Entwurf im Einzelnen durchgeführt und darauf endlich der Wirkungsgrad genauer berechnet werden auf Grund der in den Paragraphen 13—16 ermittelten Wirkungsgesetze der verschiedenen Effectverluste. Eine erhebliche Abweichung dieser genauer bestimmten von dem vorläufig der betreffenden Näherungsformel gemäss angenommenen Werthe von η würde zu einer Modification des Entwurfes Veranlassung geben, besonders wenn sich zeigen sollte, dass η zu gross angenommen worden war. Bei der Ableitung fraglicher Näherungsformeln von η werden deshalb besonders zu günstige Annahmen möglichst zu vermeiden sein.

Diese Ableitungen bieten zugleich Gelegenheit, die im vorigen Paragraph unvollständig gebliebene Besprechung der Radelemente für die einzelnen Arten von Rädern zu ergänzen, insbesondere z. B. was die Form und Stellung der Schaufeln, sowie die Einrichtung des Wassereinlaufs betrifft, immer aber nur dem Zweck dieses Buches entsprechend insoweit, als theoretische Erwägungen dabei in Betracht kommen. Nachdem übrigens schon bisher bei verschiedenen Anlässen die unterschlächtigen Räder ausgenommen und einer gesonderten Untersuchung vorbehalten werden mussten, wird hier ausdrücklich unterschieden zwischen

1. Wasserrädern mit theilweise unmittelbarer Druckwirkung der Schwere des niedersinkenden Wassers und

2. unterschlächtigen, nämlich Wasserrädern mit bloss mittelbarer Wirkung des vorher ganz in lebendige Kraft umgesetzten Arbeitsvermögens des Wassers.

1. Wasserräder mit theilweise unmittelbarer Druckwirkung der Schwere des niedersinkenden Wassers.

§. 19. Das oberschlächtige Rad.

Oberschlächtige Räder werden gewöhnlich bei Gefällen H zwischen 4 und 12 Mtr., sowie bei Aufschlagwassermengen Q zwischen 0,1 und 1 Cubikmtr. pro Sec. angewendet, so jedoch, dass das Product QH höchstens etwa $= 6$, entsprechend $N_0 = 80$ Pferdestärken ist.

Der Winkel α zwischen den Richtungen von u und v ist bei diesen Rädern immer so klein, dass ohne erheblichen Fehler $w = u - v$ gesetzt werden kann, oder

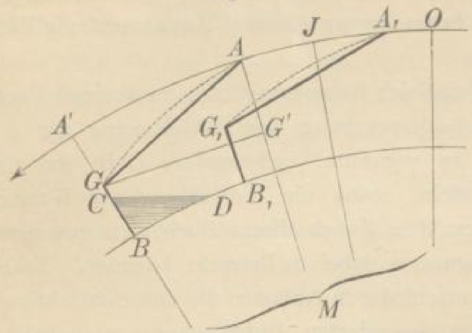
$$w = v, \text{ da } u = 2v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

ein hier durchschnittlich passendes und übliches Verhältniss zwischen u und v ist, wie schon im §. 18 bemerkt wurde. Nach den Gleichungen (7) und (8), §. 13, ist dann

$$\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\beta \text{ und } i = \frac{\varepsilon a}{\sin\beta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Die Grundform der üblichen Schaufeln ist die, wie Fig. 16 andeutet, aus der ebenen Stossschaufel AG und aus der radial bis zur Mitte der Kranzbreite sich erstreckenden gleichfalls ebenen Riegelschaufel BG bestehende einfach gebrochene Schaufel AGB. Bezeichnet e_1 die Bogenlänge ihrer Centralprojection auf den Umfang des Rades (den Bogen AA' in Fig. 16 zum Unterschiede vom Theilungsbogen $AA_1 = e$), und ist G' der Fusspunkt des Perpendikels vom Punkte G auf den Halbmesser AM, so kann für den Winkel $\beta = AGG'$,

Fig. 16.



unter welchem die Stossschaufel den Radumfang schneidet, mit Rücksicht darauf, dass AG' wenig $> \frac{a}{2}$, AG wenig $> e_1$ ist, sehr nahe gesetzt werden:

$$\sin\beta = \frac{a}{2e_1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

(Beispielsweise wäre danach für den im §. 13 besprochenen Fall, in welchem $a = 0{,}32$ und $e_1 = e = 0{,}377$ war, $\beta = 25^0\,7'$, während daselbst genauer fast derselbe Werth $\beta = 25^0\,8'$ gefunden wurde.) Wenigstens ist $e_1 = e$, also höchstens

$$\sin\beta = \frac{a}{2e} = \frac{5}{12}, \text{ da } \frac{e}{a} = 1{,}2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

im Durchschnitt hier zu sein pflegt. Nach (2) ist damit

$$\sin\alpha = \frac{5}{24}, \text{ entsprechend } \alpha = 12^0 \quad \ldots\ldots\ldots (5),$$

und zwar ist auch α ebenso wie β eher kleiner, als grösser. Dieser Winkel α entspricht der Bedingung, dass im Mittelpunkte des Einlaufbogens i die relative Geschwindigkeit w längs der gerade vorbeigehenden Stossschaufel gerichtet sei; damit sie in keinem Punkte des Einlaufbogens die Stossschaufel etwas von vorn treffen könne, ist thatsächlich ein Winkel α passend, der um 1 bis 2^0 noch kleiner ist. Die obige Voraussetzung bezüglich der Kleinheit von α und ihrer Consequenzen wird hierdurch genügend bewahrheitet.

Genauer können der Winkel α und die relative Geschwindigkeit w gefunden werden, nachdem die Geschwindigkeiten u und v angenommen sind und während β durch die gewählte Schaufelform gegeben ist, indem mit den Seiten u und v das Dreieck construirt wird, in welchem der Seite u der Winkel $180^0 - \beta$, bezw. mit β' etwas $< \beta$ der Winkel $180^0 - \beta'$ gegenüberliegt. Die dritte Seite ist dann $= w$, der ihr gegenüberliegende Winkel $= \alpha$. Behufs der Rechnung hat man

$$u : v : w = \sin\beta' : \sin(\beta' - \alpha) : \sin\alpha.$$

Obiger Ausdruck (2) von i ergiebt mit Gl. (3) das Verhältniss

$$\frac{i}{e} = \frac{1}{e} \cdot \varepsilon a \cdot \frac{2 e_1}{a} = 2 \varepsilon \frac{e_1}{e} = \frac{1}{2} \frac{e_1}{e} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots (6)$$

mit durchschnittlich $\varepsilon = \frac{1}{4}$. Dass dieses Verhältniss innerhalb der üblichen Grenzen $e_1 = e$ und $e_1 = \frac{5}{4} e$ wesentlich < 1 ist, sichert allein noch nicht beim Einfliessen des Wassers den ungehinderten Austritt der Luft aus den Zellen, weil diese gegen ihre Mitte hin erheblich enger werden können, wie es namentlich bei der in Figur 16 ausgezogenen üblichen Grundform AGB, $A_1 G_1 B_1$ der Schaufeln der Fall ist. Mit Rücksicht darauf ist vielmehr zu verlangen, dass die kleinste Weite $= w =$ dem Abstande des Eckpunktes G_1 von der benachbarten Stossschaufel AG, die sogenannte Schluckweite, wesentlich grösser sei, als die Dicke des einfliessenden Wasserstrahls. Bezeichnet aber D den Durchschnittspunkt der nach aussen verlängerten Geraden $B_1 G_1$, Fig. 16, mit AG, so erkennt man leicht, dass sehr nahe

$$w = G_1 D \cos\beta = \left[\frac{a}{2} - (e_1 - e)\, tg\,\beta\right] \cos\beta = \frac{a}{2} \cos\beta - (e_1 - e) \sin\beta \quad (7)$$

ist. Insbesondere für $e_1 = e = 1{,}2\,a$, also $\sin\beta = \frac{5}{12}$ nach Gl. (4), findet man

$$w = 0{,}454\,a,$$

für $e_1 = 1{,}25\,e = 1{,}5\,a$, also $\sin\beta = \frac{1}{3}$ nach Gl. (3):

$$w = 0{,}371\,a.$$

Der Austritt der Luft erscheint hiernach zwar in allen Fällen gesichert, weil die Dicke des einfliessenden Strahls am Umfange des Rades nach Gl. (2) nur $i \sin\beta = \varepsilon a = 0{,}25\,a$ ist mit $\varepsilon = \frac{1}{4}$ und dieselbe mit zunehmender Geschwindigkeit durch die Wirkung der Schwere noch etwas kleiner geworden ist, wo er die Verengung bei G_1 erreicht hat. Um aber diesen Luftaustritt besonders im Falle $e_1 > e$ noch mehr zu sichern, werden die Stossschaufeln wohl etwas gekrümmt, wie durch Strichelung in Fig. 16 angedeutet ist. Mit der entsprechenden Verkleinerung von β ist dann zwar eine Vergrösserung von i verbunden, aber $i \sin \beta = \varepsilon a$ bleibt unverändert, während die Schluckweite w offenbar grösser geworden ist. Jene Verkleinerung von β ist ausserdem von Vortheil mit Rücksicht auf den Gefällverlust h_2.

Um das Wasser an der bestimmten Stelle in der bestimmten Richtung in das Rad einfliessen zu lassen, kann es entweder durch eine Schussrinne bis dicht an das Rad heran geleitet werden, oder man kann es in einem parabolischen Strahl frei fallend einfliessen lassen. Im ersten Falle muss der Boden der Schussrinne neben J im Abstande $0{,}5\,i$ von diesem Punkte gegen den Punkt O (den höchsten Punkt des Radumfangs) hin endigen und gegen die Tangente des Radumfangs im Punkte J unter dem Winkel α, gegen den Horizont folglich unter dem Winkel $\alpha + \delta$ geneigt sein, wenn δ den im §. 18 unter 1) ebenso bezeichneten Winkel OMJ bedeutet. Im zweiten Falle ist der Schutzöffnung, deren Mittelpunkt mit S bezeichnet sei, eine solche Lage zu geben, dass die Mittellinie des Strahls durch den Punkt J unter dem Winkel $\alpha + \delta = \varphi$ gegen den Horizont geneigt hindurch geht. Wenn also mit x und mit y bezw. der verticale und der horizontale Abstand der Punkte S und J bezeichnet werden, so muss, wenn z. B. der Strahl in horizontaler Richtung aus der Mündung fliessen soll, S im Scheitelpunkte fraglicher Parabel liegen und

$$x = x_0 = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \varphi \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

= der Geschwindigkeitshöhe sein, welche der Verticalgeschwindigkeit $u \sin \varphi$ entspricht,

$$y = y_0 = 2 x_0 \cot g\, \varphi = \frac{u^2}{2g} \sin 2\varphi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (9).$$

Sollte aber der Strahl unter dem Winkel $\psi\ (< \varphi)$ gegen den Horizont abwärts geneigt aus der Mündung kommen (die Mündungsebene bei gleicher Contraction von oben und unten den Winkel ψ mit der Verticalen bilden), so wäre erforderlich:

$$x = \frac{u^2}{2g} \sin^2 \varphi - \left(\frac{u^2}{2g} - x\right) \sin^2 \psi = \frac{u^2}{2g} \frac{\sin^2 \varphi - \sin^2 \psi}{\cos^2 \psi}$$

$$= \frac{u^2}{g} \frac{\sin(\varphi + \psi) \sin(\varphi - \psi)}{1 + \cos 2\psi} \quad (10)$$

$$y = \frac{u^2}{2g} \sin 2\varphi - \left(\frac{u^2}{2g} - x\right) \sin 2\psi \quad \ldots\ldots\ldots \quad (11).$$

Um nun den Wirkungsgrad eines oberschlächtigen Wasserrades näherungsweise als Function von H und v auszudrücken, mögen im Uebrigen durchschnittliche Verhältnisse angenommen werden, und zwar einfach gebrochene ebene Schaufeln mit

$$e_1 = e = 1{,}2\,a,\ \text{dabei}\ a = 0{,}3\ \text{Mtr.},$$

$$\text{Länge der Riegelschaufel} = \frac{a}{2} = 0{,}15\ \text{Mtr.},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{4},\ u = 2v,\ w = v,\ \delta = 10^0.$$

Für den ganzen Gefällverlust H_1 gilt der Ausdruck (2) im §. 17 ohne den Summand h_3. Mit $\zeta = 0{,}1$ ist dabei

$$\zeta\frac{u^2}{2g} = 0{,}4\frac{v^2}{2g}$$

und ferner ist $$\frac{w_1^{\,2}}{2g} = \frac{w^2}{2g} + k = \frac{v^2}{2g} + k.$$

Was hier k betrifft, so sei $AGBB_1G_1A_1$ (Fig. 16, worin jedoch A in der Geraden B_1G_1 liegend zu denken ist) der Querschnitt einer Zelle von solcher Lage, dass der Mittelpunkt des Theilungsbogens AA_1 mit dem mittleren Einflusspunkte J zusammenfällt, und der Winkel $OMB = \chi$:

$$\chi = \delta + \frac{1{,}5\,e}{R}\frac{180}{\pi}\ \text{Grad.}$$

Eine horizontale Gerade, welche vom Querschnitt der Zelle unterhalb die Fläche $\frac{1}{2}F = \frac{1}{2}\varepsilon a e$ abschneidet, treffe BG in C unterhalb G, das Bogenstück BB_1 in D unterhalb B_1. Es ist dann $k =$ der Höhe von J über CD, also

$$k = p - q,$$

unter p die Höhe von J über B, unter q die Tiefe von B unter CD verstanden; dabei ist (siehe §. 13):

$$p = R\cos\delta - (R-a)\cos\chi \ \text{ und } \ q = \sqrt{\frac{\varepsilon a e}{2}\sin 2\chi}.$$

Mit den obigen Annahmen findet man

für $R = 2$	4	6	Mtr.
$k = 0{,}332$	0,327	0,325	„

und als Bestätigung der dem Ausdrucke von q zu Grunde liegenden Voraussetzung in Betreff der Lage von CD ergiebt sich

$$BC < BG,\quad BD < BB_1,$$

$$\text{nämlich } \frac{q}{\cos\chi} < 0{,}15 \text{ und } \frac{q}{\sin\chi} < e\,\frac{R-a}{R} = 0{,}36\,\frac{R-0{,}3}{R}.$$

Die drei Werthe von k sind so wenig verschieden, dass für vorliegenden Zweck genau genug in allen Fällen $k = 0{,}33$, also

$$\frac{w_1^{\,2}}{2g} = \frac{v^2}{2g} + 0{,}33$$

gesetzt werden kann. Die folgenden Summanden von H_1 sind

$$\frac{v^2}{2g} \text{ und } h_1, \text{ wofür im Mittel } h_1 = 0{,}15 \text{ Mtr.}$$

angenommen werde. Hiernach ist nun

$$H_1 - h_2 = \zeta\frac{u^2}{2g} + \frac{w_1^{\,2}}{2g} + \frac{v^2}{2g} + h_1$$

$$= 2{,}4\,\frac{v^2}{2g} + 0{,}48 = 0{,}122\,v^2 + 0{,}48 \;\ldots\ldots\; (12).$$

Von besonderer Bedeutung ist der Gefällverlust h_2. Seine graphische Bestimmung nach §. 17

z. B. für	$R = 2$	4	6
und	$v = 1{,}5$	2	2,5
ergiebt	$h_2 = 0{,}56$	0,95	1,26

näherungsweise entsprechend der empirischen Formel:

$$h_2 = (0{,}32 - 0{,}05\,R + 0{,}03\,v^2)\,R \;\ldots\ldots\ldots\; (13),$$

welche $h_2 = 0{,}575 \quad 0{,}96 \quad 1{,}245$

für die obigen Werthe von R und v liefert. Nach §. 18, Gl. (1) ist aber

$$R\,(1 + \cos\delta) = H - 1{,}1\,\frac{u^2}{2g} - h_1$$

oder, wenn mit $\cos\delta = 1$ und $h_1 = 0$ beide Seiten der Gleichung sehr wenig zu gross gesetzt werden,

$$R = \frac{1}{2}\,(H - 4{,}4\,.\,0{,}051\,v^2) = \frac{H}{2} - 0{,}112\,v^2 \;\ldots\ldots\; (14).$$

Die Substitution in Gl. (13) ergiebt sehr nahe mit Rücksicht auf den Mittelwerth 0,25 von $\frac{h_2}{R}$:

$$h_2 = \left[0{,}32 - 0{,}05\left(\frac{H}{2} - 0{,}112\,v^2\right) + 0{,}03\,v^2\right]\frac{H}{2} - 0{,}25\,.\,0{,}112\,v^2$$

$$= \left(0{,}16 - \frac{H}{80} + 0{,}018\,v^2\right)H - 0{,}028\,v^2 \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (15).$$

Aus (12) und (15) folgt:

$$H_1 = 0{,}094\,v^2 + 0{,}48 + \left(0{,}16 - \frac{H}{80} + 0{,}018\,v^2\right) H \quad . \; . \; . \; (16).$$

Wenn endlich die Effectverluste durch Zapfenreibung, Luftwiderstand und unberechenbare Umstände zusammen mit durchschnittlich 4% des absoluten Effects veranschlagt werden, d. h. $E_1 = 0{,}04\,E_0$ gesetzt wird, folgt der Wirkungsgrad

$$\eta = 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0}$$

$$= 0{,}8 + \frac{H}{80} - 0{,}018\,v^2 - \frac{0{,}094\,v^2 + 0{,}48}{H} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (17).$$

Er ist um so grösser, je grösser H und je kleiner v. Beispielsweise

für	$H = 4$	8	12
und	$v = 1{,}5$	2	2,5
ist nach (17):	$\eta = 0{,}64$	0,72	0,75.

Erfahrungsmässig kann übrigens der Wirkungsgrad hoher oberschlächtiger Räder bis erheblich über 0,75 gesteigert werden, falls nur die Umfangsgeschwindigkeit v in mässigen Grenzen gehalten wird. Selbst aus der Gleichung (17), welche absichtlich nicht unter den günstigsten Voraussetzungen abgeleitet ist, folgt z. B.

$$\text{für } H = 12 \text{ und } v = 2 : \eta = 0{,}81.$$

Freilich hat dann ein solches Rad einen für manche Zwecke übermässig langsamen Gang; nach (14) ist

$$R = 5{,}55 \text{ für } H = 12 \text{ und } v = 2,$$

folglich die Umdrehungszahl pro Minute nur

$$n = 9{,}55\,\frac{v}{R} = 3{,}44.$$

Zuweilen, insbesondere z. B. zum Betriebe leichter und schnell gehender Hämmer (Schwanzhämmer) erscheint der Vortheil grösstmöglicher Einfachheit der Transmission so überwiegend über den Werth eines grossen Wirkungsgrades, dass man selbst kleine oberschlächtige Räder von etwa $R = 2$ Mtr. Halbmesser mit Umfangsgeschwindigkeiten von $v = 3$ bis 4 Mtr. umlaufen lässt, entsprechend $n = 15$ bis 20, wobei dann freilich η bis 0,30 und darunter abnehmen kann. Die Verhältnisse solcher Räder sind übrigens von den der Gleichung (17) zu Grunde liegenden zu sehr verschieden, als dass von derselben hier noch genügende Brauchbarkeit als Näherungsformel erwartet werden könnte.

§. 20. Das rückenschlächtige Rad.

Rückenschlächtige Räder können unter ähnlichen Umständen wie oberschlächtige angewendet werden, finden sich aber vorzugsweise mit Halbmessern $R = 3$ bis 5 Mtr. ausgeführt, entsprechend Gefällen

$$H \text{ nahe} = R(1 + \cos 45^0) + 0{,}5 = 5{,}6 \text{ bis } 9 \text{ Mtr.},$$

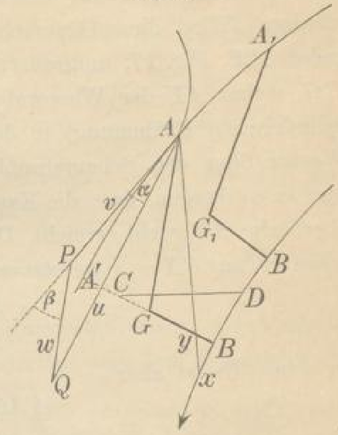
sofern der mittlere Eintrittspunkt des Wassers um ungefähr $\delta = 45^0$ vom Scheitelpunkte O entfernt und der Oberwasserspiegel um ungefähr 0,5 Mtr. höher liegt, während der Unterwasserspiegel gewöhnlich das Rad an seiner tiefsten Stelle U berührt. Indem ihnen das Wasser durch eine Coulissenschütze zugeführt wird, welche gestattet, die Einlaufstelle dem jeweiligen Oberwasserstande anzupassen, und indem die Ablaufrichtung unten mit der Bewegungsrichtung des Rades übereinstimmt, so dass dessen Waten weniger nachtheilig ist, können sie besonders bei sehr veränderlichem Ober- und Unterwasserstande einem oberschlächtigen Rade vorzuziehen sein.

Die Leitschaufeln, welche zwischen die Gleitbahn der Schütze (bezw. beider Theile der Schütze) und dem Radumfange eingefügt werden, sind so anzuordnen, dass sie letzteren überall unter solchen Winkeln α schneiden, welche zur Folge haben, dass von der relativen Einlaufgeschwindigkeit w der Radumfang unter demselben Winkel β geschnitten wird wie von den Schaufeln. Dass diese an ihren Hinterflächen vom einfliessenden Wasser gestossen werden, hat hier zwar nicht denselben Nachtheil wie bei oberschlächtigen Rädern mit unventilirten Zellen, bei welchen der Luftaustritt dadurch beeinträchtigt werden kann; indessen könnte solcher Stoss nur durch überflüssige Verkleinerung von α bewirkt werden, welche aber mit Rücksicht auf die passende Anordnung der Leitschaufeln (um die Leitcanäle an ihrer Ausmündung nicht übermässig zu verengen oder ihre Anzahl nicht allzu sehr zu beschränken) vermieden werden muss. Hierbei ist zu berücksichtigen, dass bei der gegen den Horizont stark geneigten Lage des Einlaufbogens dessen Punkte in merklich verschiedenen Tiefen h unter dem Oberwasserspiegel liegen, und dass ihnen also auch merklich verschiedene Einlaufgeschwindigkeiten

$$u = \sqrt{\frac{2gh}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{3}{4} \cdot 2gh} = \sqrt{14{,}7\,h}$$

entsprechen. Die Bestimmung der Leitschaufelrichtungen ist deshalb für jede besonders auszuführen, indem man in jedem Punkte A, Fig. 17, in welchem eine Leitschaufel endigen soll, die Peripheriegeschwindigkeit $v = AP$ anträgt, an dieselbe unter dem durch die Radschaufelform bestimmten Winkel β die Gerade PQ, und diese aus A mit der Zirkelöffnung $AQ =$ der betreffenden Grösse von u einschneidet; dann ist $PQ = w$, Winkel $PAQ = \alpha$ und AQ die Tangente der fraglichen Leitschaufel in ihrem Endpunkte A.

Fig. 17.



Wenn der Oberwasserspiegel sinkt, also $u = AQ$ kleiner wird, trifft w den Radumfang unter einem Winkel $> \beta$, stösst also das Wasser von vorn gegen die Schaufeln. Damit dies bei veränderlichem Oberwasserstande niemals der Fall sei, muss obige Construction unter Voraussetzung eines so niedrigen Standes ausgeführt werden, dass der betreffende Punkt A durch die entsprechende Regulirung der Schütze zum höchsten Punkte des Einlaufbogens wird. Je kleiner aber dann u bei gegebener Umfangsgeschwindigkeit v (je kleiner $AQ:AP$, Fig. 17) und bei gegebenem Winkel β ist, desto kleiner wird α. Es ist deshalb angemessen, bei mittlerem Wasserstande und für den Mittelpunkt des Einlaufbogens hier ebenso wie bei oberschlächtigen Rädern $u = 2v$ anzunehmen, obschon nach §. 18, 2) aus anderen Gründen ein kleineres Verhältniss $u:v$ besser sein würde.

Die Umfangsgeschwindigkeit v wird passend $= 1{,}5$ bis $1{,}8$ Mtr. pro Secunde angenommen. Ihre Steigerung über 1,8 hinaus ist wenigstens bei frei hängenden Rädern, wie sie hier vorausgesetzt sind, nicht rathsam mit Rücksicht auf den Gefällverlust h_2 und auf das grossentheils verloren zu gebende, mit v entsprechend zu vergrössernde Stossgefälle, sofern solche Räder besonders in Fällen zur Anwendung kommen, in welchen mehr Werth auf Vergrösserung von η, als auf Vereinfachung der Transmission zu legen ist.

Den Schaufeln kann dieselbe Grundform gegeben werden wie bei oberschlächtigen Rädern: siehe AGB, Figur 17, mit durchschnittlich $BG = 0{,}5\,a$ und $AA' = e_1 = 1{,}2\,a$, abgesehen von der hier nicht dargestellten Complikation, welche, wie früher in Fig. 9 angedeutet wurde, durch die Ventilation der Zellen bedingt wird. Nach Gl. (3) im vorigen Paragraph ist dann auch

$$sin\,\beta = \frac{a}{2e_1} = \frac{5}{12}; \quad \beta = 24^0\,38'.$$

Weil aber hier die Rücksicht auf eine ausreichende Schluckweite der Zellen bedeutungslos ist, wird eine engere Schaufelung zulässig, und kann dadurch derselbe hinlänglich kleine Querschnitt $F = \varepsilon a e$ der Wasserfüllung einer Zelle mit einem grösseren Füllungscoefficienten ε erzielt werden. Wird dieser Querschnitt vom Schaufelprofil AGB mit der Geraden AX, Fig. 17, umgrenzt, und ist Y der Schnittpunkt von AX mit BG, wobei AY der Wasseroberfläche in der Zelle (abgesehen von ihrer cylindrischen Krümmung) in der tieferen Lage entspricht, in welcher das Wasser über den Schaufelrand A hinüber auszufliessen anfängt, so ist nur zu verlangen, dass die Kante G_1 der folgenden Schaufel diese Wasseroberfläche AY nicht erreicht. Dieser Forderung gemäss braucht näherungsweise, wenn $BX = x$ gesetzt wird, nur

$$e > e_1 - \frac{e_1 + x}{2}, \text{ d. i. } e > \frac{e_1 - x}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

zu sein. Es ist aber

$$\Delta AGY = F = \varepsilon a e$$

$$\left(\frac{a}{2} - BY\right)\frac{e_1}{2} = \left(\frac{a}{2} - \frac{ax}{e_1 + x}\right)\frac{e_1}{2} = \varepsilon a e$$

$$\frac{e_1 - x}{e_1 + x} = \frac{4\varepsilon e}{e_1}; \quad \frac{e_1 - x}{2e_1} = \frac{4\varepsilon e}{e_1 + 4\varepsilon e}.$$

Dadurch geht die Bedingung (1) über in:

$$e > \frac{e_1 \cdot 4\varepsilon e}{e_1 + 4\varepsilon e} \text{ oder } e > \frac{4\varepsilon - 1}{4\varepsilon} e_1 \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

vorausgesetzt, dass sich für

$$x = e_1 - \frac{8\varepsilon e e_1}{e_1 + 4\varepsilon e} = \frac{e_1 - 4\varepsilon e}{e_1 + 4\varepsilon e} e_1 \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

ein positiver Werth ergiebt, was im Falle der nach (2) kleinsten zulässigen Grösse von e so lange zutrifft, als ε nicht $> \frac{1}{2}$ ist.

Wenn aber bei oberschlächtigen Rädern

$$e = 1{,}2a = e_1, \text{ mit } \varepsilon = \frac{1}{4} \text{ folglich } F = \varepsilon a e = 0{,}3a^2$$

gesetzt wurde, so genügt hier mit $\varepsilon = \frac{1}{3}$, falls $F = 0{,}3a^2$ sein soll, thatsächlich schon

$$e = 0{,}9a = \frac{3}{4}e_1 \text{ mit } e_1 = 1{,}2a.$$

Nach (3) ist dann $x = 0$, fallen also die Punkte X und Y in Fig. 17 mit B zusammen. —

Zur Herleitung eines angenäherten Ausdruckes von η als Function von H und v für ein frei hängendes rückenschlächtiges Rad werde angenommen:

$$e_1 = 1{,}2\,a, \qquad e = 0{,}9\,a, \qquad a = 0{,}3 \text{ Mtr.},$$

Länge der radialen Riegelschaufel $= 0{,}5\,a = 0{,}15$ Mtr. bei Voraussetzung einfach gebrochener Schaufeln;

$$\varepsilon = \frac{1}{3}, \quad u = 2v, \quad w = v \text{ (sehr nahe)}, \quad h_1 = 0, \quad \delta = \sphericalangle OMJ = 45^0.$$

Hiernach ist, falls der Mittelpunkt des Theilbogens AA_1, Fig. 17, mit dem mittleren Eintrittspunkte J zusammenfällt,

$$\chi = \sphericalangle OMB = \delta + \frac{0{,}5\,e + e_1}{R}\,\frac{180}{\pi} = 45 + \frac{1{,}65}{R}\,\frac{180}{\pi} \text{ Grad},$$

und ergiebt sich ebenso wie im vorigen Paragraph unter der Voraussetzung, dass die horizontale Gerade CD, welche mit dem Schaufelprofil AGB die Fläche $\frac{\varepsilon a e}{2}$ umgrenzt, die Gerade BG unterhalb G trifft, mit den dortigen Bedeutungen von p, q, k

$$\begin{array}{lll} \text{z. B. für } & R = 3 & 5 \\ & k = p - q = 0{,}439 & 0{,}442, \end{array}$$

wobei jedoch wegen $BC = \frac{q}{\cos\chi} = 0{,}19 \qquad 0{,}18 > BG$

thatsächlich q etwas zu klein, folglich k etwas zu gross gefunden wurde. Diese Werthe von k sind unter sich so wenig verschieden, dass in allen Fällen $k = 0{,}44$ Mtr. gesetzt werden mag. Dann ist mit $\zeta = \frac{1}{3}$:

$$H_1 - h_2 = \frac{1}{3}\,\frac{u^2}{2g} + \frac{w^2}{2g} + 0{,}44 + \frac{v^2}{2g}$$

$$= \frac{10}{3}\,\frac{v^2}{2g} + 0{,}44 = 0{,}17\,v^2 + 0{,}44 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Da hier dieselbe Schaufelform und derselbe Werth von $\varepsilon a e$ vorausgesetzt sind, wie im vorigen Paragraph, kann auch nach Gl. (13) daselbst

$$h_2 = (0{,}32 - 0{,}05\,R + 0{,}03\,v^2)\,R$$

gesetzt werden, im Durchschnitt $(R = 4, v = 1{,}6) : h_2 = 0{,}2\,R$. Weil ferner hier

$$R(1 + \cos 45^0) = H - \frac{4}{3}\,\frac{u^2}{2g} = H - \frac{16}{3}\,\frac{v^2}{2g} = H - 0{,}272\,v^2,$$

also

$$R = 0{,}586\,H - 0{,}159\,v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

ist, folgt auch mit genügender Annäherung:

$$h_2 = [0,32 - 0,05\,(0,586\,H - 0,159\,v^2) + 0,03\,v^2]\,.\,0,586\,H - 0,2\,.\,0,159\,v^2$$
$$= (0,188 - 0,017\,H + 0,022\,v^2)\,H - 0,032\,v^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

ferner aus (4) und (6):

$$H_1 = 0,138\,v^2 + 0,44 + (0,188 - 0,017\,H + 0,022\,v^2)\,H \quad \ldots (7).$$

Mit $E_1 = 0,042\,E_0$ nach Schätzung ergiebt sich endlich

$$\eta = 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0}$$
$$= 0,77 + 0,017\,H - 0,022\,v^2 - \frac{0,138\,v^2 + 0,44}{H} \quad \ldots (8),$$

z. B. für	H =	6	9
und	v =	1,5	1,8
	η =	0,70	0,75.

Den kleiner angenommenen Umfangsgeschwindigkeiten v ist es hauptsächlich zuzuschreiben, dass η noch etwas grösser gefunden wird, als für oberschlächtige Räder bei gleichen Werthen von H nach Gl. (17) im vorigen Paragraph. Würde das rückenschlächtige Rad mit einem Kropf umgeben, so dass h_3 an die Stelle von h_2 träte, so liessen sich noch grössere Wirkungsgrade erwarten trotz grösseren Werthes von ε und kleineren Verhältnisses $e_1 : a$, wie solche in diesem Falle zulässig wären. —

Auch lässt sich η dadurch vergrössern, dass man das Stossgefälle vermeidet oder wenigstens erheblich vermindert, indem man das Aufschlagwasser mit derselben (oder nur wenig grösseren) Geschwindigkeit in das Rad einfliessen lässt, mit welcher es im Gerinne zufliesst, und welche dann im Allgemeinen erst im Rade, indem von diesem das Wasser mitgenommen wird, in eine mittlere Geschwindigkeit etwas $< v$ übergeht. Das lässt sich erreichen durch Ausdehnung der Seitenwände jenes Gerinnes zu zwei mit sehr kleinem Spielraum das Rad zwischen sich fassenden verticalen Wänden, während an den Gerinneboden sich unmittelbar ein Kropfgerinneboden zwischen jenen Wänden anschliesst. Der zwischen diesem und dem Radboden liegende Raum (der Wasser haltende Theil des Radkranzes) wird, abgesehen von den Schaufeldicken, vollständig vom Wasser erfüllt. Falls das Rad nur etwas über den Wasserspiegel im Zuflussgerinne hinausragt, rühren die Effectverluste unter solchen Umständen fast allein vom Gefällverluste $\frac{v^2}{2g}$ und von dem Wasserdurchfluss durch die Spielräume her, deren Verkleinerung nur Sache einer sorgfältigen Ausführung ist. Auf diesem Gedanken beruhen Wasserräder von

Mary und von Zuppinger, welche hinsichtlich der Einflussstelle des Wassers als rückenschlächtige Räder besonderer Art zu bezeichnen sind, mit welchen sie auch bezüglich der relativen Bewegungsrichtungen des zu- und des abfliessenden Wassers gegen das Rad übereinstimmen. Sie sind auch für kleine Gefälle geeignet, für welche sie noch Wirkungsgrade von ungefähr 0,80 ergeben haben. Wesentlich bei der Disposition solcher Räder ist die passende Annahme der Dicke (Tiefe) a_1 des dem Rade unmittelbar zufliessenden Wasserstroms. Ist u dessen mittlere Geschwindigkeit an fraglicher Stelle unmittelbar vor dem Eintritt in das Rad, und $V = Fb$ das vom Querschnitte $= ab$ des Radkranzes pro Sekunde durchlaufene Volumen mit Zurechnung der Spielräume und Abrechnung der von den Constructionstheilen des Rades erfüllten Räume, so folgt entsprechend der Forderung, dass der so resultirende Raum ganz von Wasser erfüllt sein soll, a_1 aus der Gleichung:

$$\frac{Q}{b} = a_1 u = F$$

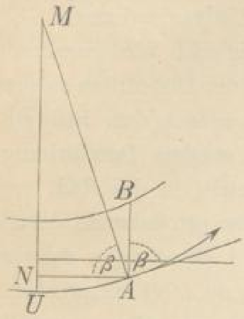
bei der Annahme von $u < v$.

§. 21. Das mittelschlächtige Rad.

Solche Räder werden gewöhnlich bei Gefällen $H = 3$ bis 6 Mtr. und bei Aufschlagwassermengen $Q = 0{,}2$ bis 2 Cubikmtr. pro Sek. angewendet. Bei den grösseren Gefällen kommen sie zwar auch als frei hängende Zellenräder vor, in welchem Falle vor Allem zur Verkleinerung des Gefällverlustes h_2 möglichst viele und lang gestreckte Schaufeln (kleinen Werthen von $e : a$ und grossen von $e_1 : a$ entsprechend) bei kleiner Füllung ε und mässiger Umfangsgeschwindigkeit v rathsam sind; meistens vorzuziehen ist jedoch der Bau dieser Räder als Kropfräder, wobei der Gefällverlust h_3 anstatt h_2 besonders massgebend für den Wirkungsgrad wird und mit Rücksicht darauf zwar eine enge Schaufelung vortheilhaft in Hinsicht auf η bleibt, dagegen grössere Werthe von ε $(= 0{,}5 - 0{,}6)$ und von v $(= 1{,}8 - 2{,}4$ Sek. Mtr.) zulässig oder selbst vortheilhaft werden bei vorwiegend radialer Stellung ebener Schaufeln.

Wenn es auch meistens passend ist, das Rad so zu lagern, dass es bei mittlerer oder tiefer Lage des Unterwasserspiegels von diesem berührt wird, so bleibt es doch zweckmässig, den Widerstand der bei höherer Lage desselben eintauchenden Schaufeln, bezw. das Empordrücken von Wasser durch dieselben dadurch zu vermindern, dass man sie in möglichst verticaler Lage aus dem Wasser sich erheben lässt, indem ihnen eine etwas gegen den Radius geneigte Stellung gegeben wird, oder wenigstens den äusseren Theilen der zu dem Ende unter stumpfem Winkel gebrochenen, nach innen zu radialen Schaufeln. Die ganze und ungebrochene Schaufel geneigt zu stellen, ist übrigens einfacher und zugleich wirksamer behufs Verkleinerung auch von h_3. Wird etwa verlangt, dass eine Schaufel AB, Fig. 18, vertical ist, wenn ihr äusserer Rand A sich um $UN = \frac{a}{4}$ über die tiefste Stelle des Rades erhoben hat, so muss sie den Radumfang unter einem solchen Winkel β schneiden, dass

Fig. 18.



$$\cos\beta = \frac{AN}{R} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{a}{4}\left(2R - \frac{a}{4}\right)} \quad \ldots\ldots\ldots (1),$$

z. B. für $a = 0{,}4$ und $R = 2 \qquad 5$ Mtr.

$$\beta = 71^0 48' \qquad 78^0 31'$$

ist. Im Durchschnitt mag

$$\beta = arctg\, 4 = 75^0 58'$$

genommen werden, entsprechend der Centralprojection $e_1 = \frac{a}{4}$ der ganz ebenen Schaufel auf den Umfang des Rades.

Dem grossen Werthe von β entsprechend kann auch der Winkel α hier viel grösser gemacht werden, als es bei frei hängenden Zellenrädern geschehen darf. Aus

$$\frac{u}{v} = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \alpha)} \text{ (siehe Fig. 17, §. 20)}$$

folgt mit $\frac{u}{v} = 1{,}75$ und $\beta = 75^0 58' : \alpha = 42^0 18'$.

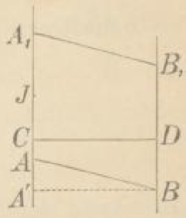
Hiernach macht die Annahme $\alpha = 30^0$ bei diesem Werthe von β jedenfalls einen Stoss des Wassers gegen die Vorderflächen der Schaufeln unmöglich selbst im höchsten Punkte des Einlaufbogens, falls die Annahme $u = 1{,}75 v$ auf den Mittelpunkt desselben bezogen wird. In letzterem ist dann

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2uv\cos\alpha$$

$$= \left(\frac{49}{16} + 1 - 2 \cdot \frac{7}{4} \cdot \cos 30^0\right) v^2 = 1{,}03\, v^2.$$

Wenn ABB_1A_1, Fig. 19, den Querschnitt eines Schaufelraums in solcher Lage bedeutet, dass der Mittelpunkt des Theilbogens $AA_1 = e$ mit dem mittleren Eintrittspunkte J zusammenfällt, wenn ferner letzterer in gleicher Höhe mit der Radaxe liegt, so dass die concentrischen Kreisbögen AA_1 und BB_1 näherungsweise als verticale gerade Linien betrachtet werden können, und wenn die Centralprojection AA' eines Schaufelprofils wieder mit e_1 bezeichnet wird, so entspricht die Tiefe $AC = x$ des Punktes A unter der horizontalen Geraden CD, durch welche die Fläche

Fig. 19.



$$ACDB = \frac{1}{2}F = \frac{\varepsilon a e}{2}$$

abgeschnitten wird, der Gleichung:

$$ax + \frac{a e_1}{2} = \frac{\varepsilon a e}{2}, \text{ also } x = \frac{\varepsilon e - e_1}{2}.$$

Der Summand k im Ausdrucke von $\frac{w_1^2}{2g}$, §. 17, ist also:

$$k = JC = \frac{e}{2} - x = \frac{(1-\varepsilon)e + e_1}{2} \quad \ldots\ldots\ldots (2),$$

insbesondere mit $e = a$ und $\varepsilon = \frac{1}{2}$, wie hier durchschnittlich passend ist,

$$k = \frac{a + 2e_1}{4} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (3).$$

Dadurch, dass k mit e_1 zunimmt, wird der Vortheil der gegen die radiale Richtung geneigten Schaufelstellung eingeschränkt. —

Zur angenäherten Berechnung von η für ein mittelschlächtiges Kropfrad mögen radiale ebene Schaufeln vorausgesetzt werden, der mittlere Eintrittspunkt J als in gleicher Höhe mit der Radaxe liegend. Ferner sei

$$e = a = 0{,}4 \text{ und } \varepsilon = 0{,}5$$
$$u = 1{,}75v \text{ und } w^2 = 1{,}03v^2, \text{ entsprechend } \alpha = 30^0.$$

Nach §. 17 ist dann mit $\zeta = \frac{1}{3}$ (bei Voraussetzung einer Coulissenschütze) und mit $h_1 = \frac{a}{4} = 0{,}1$ Mtr., während h_2 ohne Bedeutung ist:

$$H_1 - h_3 = \frac{1}{3}\frac{(1{,}75v)^2}{2g} + 1{,}03\frac{v^2}{2g} + k + \frac{v^2}{2g} + 0{,}1$$

oder mit $k = \frac{a}{4} = 0{,}1$ nach Gl. (3):

$$H_1 - h_3 = 3{,}051\frac{v^2}{2g} + 0{,}2 = 0{,}156\,v^2 + 0{,}2 \quad \ldots\ldots \quad (4).$$

Mit Rücksicht auf $Q = \varepsilon\,abv$, also $\frac{b}{Q} = \frac{1}{\varepsilon av} = \frac{5}{v}$ ist ferner nach §. 17:

$$h_3 = 3{,}4\frac{Rs}{0{,}4}\left(\frac{5}{v}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{z}\,d\varphi + \frac{4}{3}\frac{1}{Q}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xD\,d\varphi\right) \quad \ldots\ldots \quad (5).$$

Das erste der beiden Integrale kann von R kaum merklich abhängig sein, während das zweite wegen des Factors x nahe proportional R ist. Es genügt deshalb ihre Berechnung auf Grund der Dimensionen, welche sich aus der Zeichnung für irgend einen mittleren Werth von R, etwa $R = 3$ Mtr., abgreifen lassen. Man findet:

$$\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} y\sqrt{z}\,d\varphi = 0{,}1493 \text{ und} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} xD\,d\varphi = 0{,}2966 = 0{,}0989\,R$$

und hiermit nach (5):

$$h_3 = \left(\frac{6{,}35}{v} + 1{,}12\frac{R}{Q}\right)Rs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6).$$

Im Mittel, insbesondere z. B. mit $v = 2$, $\frac{R}{Q} = 5$, $s = 0{,}015$ ist h_3 etwa $= 0{,}13\,R$, so dass wegen

$$R = H - \frac{4}{3}\frac{(1{,}75v)^2}{2g} = H - 0{,}208v^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

und mit Rücksicht darauf, dass hier das Glied mit v^2 von untergeordneter Grösse im Vergleich mit H ist, nach Gl. (6) und (7) auch näherungsweise gesetzt werden kann:

$$h_3 = \left(\frac{6{,}35}{v} + 1{,}12\frac{H - 0{,}208v^2}{Q}\right)sH - 0{,}027\,v^2 \quad \ldots\ldots \quad (8),$$

wo nämlich $0{,}027 = 0{,}13 \,.\, 0{,}208$ ist. Hieraus und aus (4) folgt:

$$H_1 = 0{,}129\,v^2 + 0{,}2 + \left(\frac{6{,}35}{v} + 1{,}12\frac{H - 0{,}208\,v^2}{Q}\right)sH \quad \ldots \quad (9).$$

Der mit E_1 bisher bezeichnete Effectverlust durch Nebenwiderstände, welcher für das oberschlächtige und für das rückenschlächtige Rad $= 0{,}04\,E_0$ geschätzt wurde, begreift hier auch die Arbeit der Wasserreibung am Kropfgerinne in sich, welche nach §. 17:

$$E_w = 0{,}4\,lbv^3$$

gesetzt werden kann. Aus diesem Ausdrucke und aus $E_0 = 1000\,QH$ folgt mit $Q = \varepsilon abv = 0{,}2\,bv$:

$$\frac{E_w}{E_0} = 0{,}002\,\frac{lv^2}{H}.$$

Die Bogenlänge l der Reibungsfläche am Gerinne besteht von $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{\pi}{4}$ in einem zusammenhängenden Bogen, von da bis $\varphi = \frac{\pi}{2}$ aus getrennten Bogenstücken von abnehmender Grösse, so dass ungefähr

$$l = R\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{8}\right) = 1{,}18\,R,$$

somit l wenig von H verschieden ist. Mit entsprechender Näherung ist

$$E_w : E_0 = 0{,}002\,v^2 \quad \ldots\ldots \quad (10)$$
$$= 0{,}0065 \text{ bis } 0{,}0115$$
$$\text{für } v = 1{,}8 \quad \text{"} \quad 2{,}4.$$

Indem auch abgesehen von E_w die unter E_1 begriffenen Effectverluste besonders mit der Grösse des Radius zunehmen, im Verhältniss zu E_0 oder zu H folglich um so grösser sind, je grösser $R:H$, mag hier $E_1 = 0{,}06\,E_0$ gesetzt werden, mit Rücksicht auf (9) also

$$\eta = 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0}$$
$$= 0{,}94 - \frac{0{,}129\,v^2 + 0{,}2}{H} - \left(\frac{6{,}35}{v} + 1{,}12\,\frac{H - 0{,}208\,v^2}{Q}\right)s \quad . . \quad (11).$$

Wäre z. B. $Q = 0{,}75$ und $s = 0{,}015$, so ergäbe sich

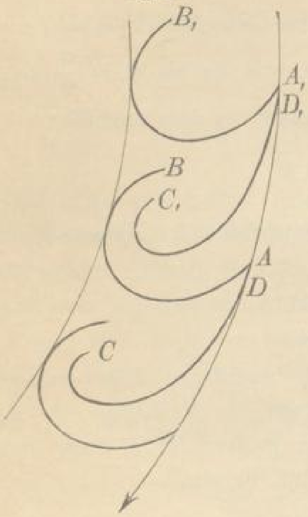
für	$H = 3$	6
und	$v = 1{,}8$	2,4
	$\eta = 0{,}63$	0,64.

Dass hier der Wirkungsgrad nicht wesentlich mit dem Gefälle, also mit der Höhe des Rades zunimmt, rührt besonders vom Wasserdurchfluss durch die Seitenspalten her, dessen schädlicher Einfluss mit R, also mit H wächst. Da man bei grösseren Rädern im Allgemeinen auf eine grössere Weite s der Spielräume wird rechnen müssen, könnte sogar η unter Umständen bei grossen Rädern etwas kleiner ausfallen, als bei kleineren, falls nicht etwa darauf verzichtet wird, ihre Umfangsgeschwindigkeit v etwas grösser anzunehmen, wie es bei obigen Beispielen geschehen und wie es im Allgemeinen zulässig und angemessen ist. —

Wenn das mittelschlächtige Rad als frei hängendes Zellenrad gebaut wird, lässt sich besonders mit Rücksicht auf h_2 nur ein kleinerer Wirkungsgrad, als bei ober- und rückenschlächtigen Rädern erwarten; denn dieser

Gefällverlust, bei gegebener Schaufelform und bei gegebenen Werthen von ε, v und R von bestimmter Grösse, ist ein um so grösserer Theil von H, je kleiner H. Eine erhebliche Vergrösserung von η lässt sich aber von einer eigenthümlichen Form und Anordnung der Schaufeln erwarten, welche von K. Pfister angegeben wurde und ihm patentirt ist (D. R.-P. Nr. 29 199, siehe Ztschr. des Vereins deutsch. Ingenieure, 1884, S. 1000). Der Radkranz, Fig. 20, ist hier mit zweierlei Schaufeln ausgerüstet, mit den Stossschaufeln AB und den Sammelschaufeln CD, beide stetig gekrümmt. Das Wasser, welches gegen AB stossend eingeflossen ist, ergiesst sich theils, längs AB hinfliessend, in die darüber befindliche Sammelschaufel C_1D_1, theils durch schmale Spalten oder sonst kleine Durchbrechungen von AB in die darunter befindliche Sammelschaufel CD. Letztere bildet mit der Stossschaufel AB einen Sammelraum, der nach aussen eine nur schmale und so zu bemessende spaltartige Oeffnung AD hat, dass der Ausfluss des Wassers aus ihr erst dann vollendet ist, wenn sie die tiefste Stelle des Rades erreicht hat.

Fig. 20.



§. 22. Die gewöhnlichen tiefschlächtigen Räder.

Tiefschlächtige Räder finden in der Regel bei Gefällen $H < 3$ Mtr. Anwendung und sind angemessener Weise stets Kropfräder. Der mittlere Eintrittspunkt J des Aufschlagwassers hat bei ihnen eine weniger bestimmte Lage, als bei den übrigen Arten von Rädern, indem der Winkel $JMU = \vartheta$, welchen der nach J gezogene Halbmesser mit der Verticalen bildet, irgend ein spitzer Winkel sein kann, der nur $< 75^0$ zu sein pflegt; anderenfalls könnte das Rad noch als mittelschlächtig betrachtet werden.

Von der Schaufelform gilt das beim mittelschlächtigen Kropfrade Gesagte, auch von der Höhenlage gegen den Unterwasserspiegel. Letzterer soll bei mittlerem Wasserstande nicht tiefer liegen, als der tiefste Punkt U des Rades, und nicht höher, als die Wasseroberfläche im untersten Schaufelraume; zwischen diesen Grenzen ist seine Höhenlage bezüglich des Effectverlustes ziemlich einerlei, wie im §. 14 näher erörtert wurde, und kann der betreffende Gefällverlust h_1 durchweg $= 0{,}25\,a$ bis $0{,}3\,a$ gesetzt werden, sofern $\varepsilon = 0{,}5 - 0{,}6$ zu sein pflegt. Trotz des etwas grösseren Werthes von ε ist hier ein Ueberfliessen von Wasser durch die Luftspalten im Radboden um so weniger zu befürchten, je kleiner ϑ ist.

Wenn nicht etwa die einfachen ebenen Schaufeln ungewöhnlich stark gegen den Radius geneigt sind, und wenn nicht ϑ wesentlich $> 60^0$ ist, pflegt hier der Fall vorzuliegen, dass der mittlere Eintrittspunkt J unter das Niveau der halben Füllung des Schaufelraums fällt, falls dieser sich in solcher Lage befindet, dass der Mittelpunkt seines Theilbogens mit J zusammenfällt*; es verliert dann der mit k bezeichnete Bestandtheil des Gefällverlustes $\frac{w_1^2}{2g}$ seine Bedeutung und wird

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w^2}{2g}.$$

Ebenso ist dann die absolute Geschwindigkeit u_1, mit welcher im Durchschnitt das einfliessende Wasser zum Stoss gelangt, = der mittleren Einlaufgeschwindigkeit u zu setzen. Sofern sich nun im §. 18 unter 2) ergeben hatte, dass das Stossgefälle H', welches hier $= h = (1 + \zeta)\frac{u^2}{2g}$ gesetzt werden kann, nahezu dann am vollständigsten ausgenutzt wird, wenn $u_1 = 2v$ ist, würde sich also hier die Regel $u = 2v$ ergeben, welche bei ober- und rückenschlächtigen Rädern (statt $u < 2v$) aus anderen Gründen als thatsächlich meistens passend empfohlen wurde und welche besonders bei unterschlächtigen Stossrädern ($H' = h = H$) durch die Erfahrung bestätigt wird (sogar ergiebt sich bei ihnen $\eta = max$ im Durchschnitt für u etwas $> 2v$). Indessen ist hier bei den tiefschlächtigen Rädern, bei welchen h nur einen Theil, wenn auch einen erheblichen Theil von H ausmacht, wesentlich zu berücksichtigen, dass dieses Stossgefälle auch im günstigsten Falle nicht in solchem Grade ausgenutzt werden kann, wie das Druckgefälle $H'' = H - h$, und dass es insofern

* Unter e_1 die Centralprojection des Schaufelprofils auf den Umfang des Rades verstanden, findet man als Bedingung dafür:

$$\vartheta < arc\;cotg\left[\frac{(1-\varepsilon)\,e + e_1}{a}\right].$$

Sie liefert z. B. für $a = e$ und

$e_1 = 0,\quad \varepsilon = 0{,}6:\quad \vartheta < 68^0$	$e_1 = \frac{e}{4},\quad \varepsilon = 0{,}6:\quad \vartheta < 57^0$
$e_1 = 0,\quad \varepsilon = 0{,}5:\quad \vartheta < 63^0$	$e_1 = \frac{e}{4},\quad \varepsilon = 0{,}5:\quad \vartheta < 53^0.$

vortheilhaft ist, wenn h einen nur kleineren Theil von H ausmacht, somit u, bei gegebenem Werthe von v also auch das Verhältniss $u:v$, weniger gross ist.

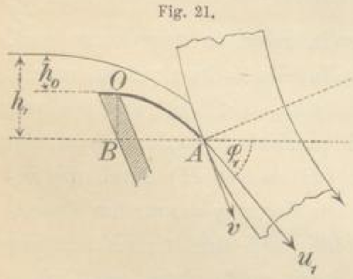
Die Umfangsgeschwindigkeit v pflegt $= 1{,}5$ bis $2{,}25$ Mtr. zu sein bei einem Halbmesser $R = 2$ bis 4 Mtr. Letzterer, wenn auch passend mit H wachsend, wird hier doch nicht wesentlich von H abhängig gemacht, wodurch die so verschiedenen Werthe von ϑ bedingt werden gemäss der Gleichung:

$$R(1 - \cos\vartheta) = H - h + t \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (1),$$

unter t ($< \varepsilon a$) die Tiefe des Eintauchens in das Unterwasser verstanden.

Der Zufluss des Wassers wird bei diesen Rädern meistens durch eine Spannschütze vermittelt und regulirt, bei grösseren Werthen von ϑ und bei sehr veränderlicher Höhenlage des Oberwasserspiegels auch durch eine Ueberfallschütze, deren Brett man als Ueberfallschwelle den Veränderungen des Wasserspiegels folgen lassen kann, um Q und u constant zu erhalten, während eine Spannschütze, wenn sie im gleichen Falle Q constant erhält, die Aenderung von u nicht hindert.

Fig. 21.



1) Bei der Ueberfallschütze wird zur Leitung des Wassers bis dicht an das Rad das Schutzbrett oben mit einer Leitschaufel OA, Fig. 21, verbunden, die nach der parabolischen Bahn gekrümmt ist, welche von den untersten Wassertheilchen bei freier Bewegung verfolgt werden würde. Diese Parabel ist bestimmt durch die Lage ihres Scheitelpunktes O gegen den unteren Endpunkt A des Einlaufbogens, also durch die horizontale und die verticale Entfernung AB und OB dieser beiden Punkte, welche wie folgt gefunden werden.

Die Höhe des Oberwasserspiegels über O sei $= h_0$, über $A = h_1$, die Geschwindigkeit des Wassers in $A = u_1$, ihre Neigung gegen den Horizont $= \varphi_1$. Indem die Dicke des Wasserstrahls im Einlaufbogen i

$$= \frac{Q}{bu} = \frac{\varepsilon a v}{u} \text{ nahe } = 0{,}14 \text{ Mtr.}$$

ist, entsprechend z. B. $u = 1{,}75 v$ und $\varepsilon a = 0{,}245$, ergiebt sich

$$i = \frac{0{,}14}{\sin\alpha} \; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (2),$$

unter α wie bisher den Winkel zwischen u und v im mittleren Eintrittspunkte verstanden, auf welchen auch h und ϑ sich beziehen, womit dann

$$h_1 = h + \frac{i}{2} \sin \vartheta = h + 0{,}07 \frac{\sin \vartheta}{\sin \alpha} \quad \dots\dots\dots \quad (3)$$

gefunden wird. Ferner ist:

$$Q = \mu b_1 h_0 \sqrt{2 g h_0},$$

wobei die Breite b_1 des Ueberfalles etwas (um etwa 0,1 Mtr.) kleiner, als die Radbreite b zu sein pflegt. Wird aber $b_1 = b$ gesetzt, so ist μ etwas zu klein, etwa $= 0{,}4$ zu nehmen, und folgt

$$h_0 = \left(\frac{Q}{0{,}4 b \sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{\varepsilon a v}{0{,}4\sqrt{2g}}\right)^{\frac{2}{3}} = 0{,}683\,(\varepsilon a v)^{\frac{2}{3}} \quad \dots\dots \quad (4).$$

Nun sind OB und AB die Wurfhöhe und halbe Wurfweite, welche der Wurfgeschwindigkeit u_1 und dem Elevationswinkel φ_1 entsprechen, also mit $\zeta = 0{,}1$ als Widerstandscoefficient der Schütze:

$$OB = \frac{u_1^{\,2}}{2g} \sin^2 \varphi_1 = \frac{h_1}{1{,}1} \sin^2 \varphi_1, \qquad AB = \frac{h_1}{1{,}1} \sin 2\varphi_1 \quad \dots\dots \quad (5),$$

während φ_1 dadurch bestimmt ist, dass OB auch $= h_1 - h_0$, folglich

$$\sin \varphi_1 = \sqrt{1{,}1 \frac{h_1 - h_0}{h_1}} \quad \dots\dots\dots\dots \quad (6)$$

ist. Um aber h_1 aus Gl. (3) mit ausreichender Näherung zu finden, während h durch u und ϑ durch Gl. (1) bestimmt ist, muss ausserdem α wenigstens näherungsweise bekannt sein. Dieser Winkel ist aber $= \vartheta - \varphi$, wo φ dieselbe Bedeutung für die mittleren wie φ_1 für die untersten Bahnen der Wassertheilchen hat und analog Gl. (6)

$$\sin \varphi = \sqrt{1{,}1 \frac{h - x_0}{h}}$$

zu setzen ist, wenn mit x_0 die Höhe des Oberwasserspiegels über den Scheitelpunkten jener mittleren Bahnen bezeichnet wird. Nähme die Geschwindigkeit im Querschnitte über O proportional der Quadratwurzel aus der Tiefe x unter der Oberfläche zu, und erstreckte sich letztere auch noch hier bis zur Höhe des Oberwasserspiegels, so würde die Gleichung

$$\int_0^{x_0} \sqrt{x}\, dx = \int_{x_0}^{h_0} \sqrt{x}\, dx$$

zur Bestimmung von x_0 dienen können; sie liefert

$$x_0^{\frac{3}{2}} = h_0^{\frac{3}{2}} - x_0^{\frac{3}{2}} = 0{,}5\, h_0^{\frac{3}{2}}$$

$$x_0 = (0{,}5)^{\frac{2}{3}} h_0 = 0{,}63\, h_0.$$

Wenn aber auch jene Annahme in Betreff der Geschwindigkeitsänderung im Querschnitte über O nicht beanstandet wird, so hat doch in demselben schon eine Senkung der Wasseroberfläche stattgefunden, wodurch x_0 vergrössert werden muss; hier mag $x_0 = \frac{2}{3} h_0$ geschätzt und gesetzt werden:

$$\sin\varphi = \sqrt{1{,}1 \frac{h - \frac{2}{3} h_0}{h}}, \quad \alpha = \vartheta - \varphi \;\ldots\ldots\; (7).$$

Mit gegebenen, bezw. angenommenen Werthen von H, R, t, ε, a, v, u findet man $h = 1{,}1 \frac{u^2}{2g}$, dann h_0 aus (4), ϑ aus (1), φ und α aus (7), h_1 aus (3), φ_1, OB und AB aus (5) und (6).

Dass die Schaufeln von vorn getroffen werden könnten, ist bei ihrer radialen oder fast radialen Stellung nicht zu befürchten, kann übrigens leicht durch die Zeichnung oder Berechnung des Geschwindigkeitsdreiecks u, v, w mittels der Elemente u, v, α geprüft werden. Dagegen ist ein kleiner, mit Rücksicht auf i nach Gl. (2) nur nicht zu kleiner Winkel α insofern erwünscht, als damit auch die durch den Stoss verloren gehende Geschwindigkeit w bei gegebenen Werthen von u und v abnimmt. Die Annahme von α statt R könnte freilich einen unzulässigen Werth von R zur Folge haben; es genügt die Bemerkung, dass R und α unter übrigens gleichen Umständen sich in entgegengesetztem Sinne gleichzeitig ändern.

Wäre z. B. $H = 2$, $R = 3$, $t = 0$, $\varepsilon a = 0{,}24$

$v = 1{,}8$ und $u = 1{,}75 v = 3{,}15$,

so ergäbe sich $h = 0{,}557$, $h_0 = 0{,}390$, $\vartheta = 58^0\,44'$, $\varphi = 49^0\,59'$,

$\alpha = 8^0\,45'$, $h_1 = 0{,}950$, $OB = 0{,}56$ und $AB = 0{,}82$.

Mustergültig für die Ausführung ist dieses Beispiel nicht; OB und AB sind übermässig gross, ebenso $i = 0{,}92$ Mtr. infolge des kleinen Werthes von α. Vergrössert wird α durch Vergrösserung von ϑ (Verkleinerung von R) und durch Verkleinerung von φ; letztere wird bewirkt durch Verkleinerung von h. Entsprechend werden dann auch h_1 und φ_1, somit OB und AB kleiner. Man erkennt, dass solche tiefschlächtigen Räder mit Ueberfalleinlauf mässige Geschwindigkeiten und solche Halbmesser R erfordern, welche nur wenig $> H$ sind.

Wird obiges Beispiel dahin abgeändert, dass unter übrigens denselben Voraussetzungen

$$v = 1{,}5 \quad \text{und} \quad u = 1{,}8v = 2{,}7, \quad \text{entsprechend } h = 0{,}409$$

angenommen wird, so ergiebt sich schon wesentlich brauchbarer:

$$h_0 = 0{,}346, \quad \vartheta = 61^0\,59', \quad \varphi = 43^0\,50', \quad \alpha = 18^0\,9'$$
$$h_1 = 0{,}607, \quad \varphi_1 = 43^0\,27', \quad OB = 0{,}26, \quad AB = 0{,}55$$

und $i = 0{,}45$ Mtr. Wenn auch eine weitere Verkleinerung von v nicht erwünscht ist, könnte doch u noch mehr bis etwa $u = 1{,}6 \,.\, 1{,}5 = 2{,}4$ reducirt werden, entsprechend $h = 0{,}323$ Mtr.

Mit $h = 0{,}4$ und $\cos\vartheta = 0{,}5$ bis $0{,}4$ (entsprechend $\vartheta = 60^0$ bis $66^0\,25'$) lässt sich gemäss Gl. (1) für die Beziehung zwischen R und H zu ungefährem Anhalt die Regel bilden:

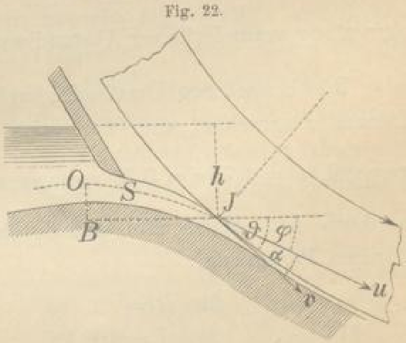
$$\frac{R}{H - 0{,}4} = \frac{1}{0{,}5} \text{ bis } \frac{1}{0{,}6} = 2 \text{ bis } \frac{5}{3} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8).$$

Ihr entspricht $R = 2$ bis 4 Mtr. für

$$H = \frac{1}{2} \cdot 2 + 0{,}4 \text{ bis } \frac{3}{5} \cdot 4 + 0{,}4$$
$$= 1{,}4 \text{ bis } 2{,}8 = 0{,}7\,R.$$

2) Bei der Anwendung einer Spannschütze, Fig. 22, lässt man den Boden des Kropfgerinnes mit parabolischer Krümmung in den Boden des Zuflussgerinnes übergehen und legt das am unteren Rande passend abgerundete Schutzbrett mit entsprechender Neigung gegen den Horizont möglichst nahe an das Rad, so dass es, ganz heruntergelassen, die parabolische Krümmung des Einlaufgerinnes in dem vom Scheitel zum Kropfgerinne abfallenden Zweige trifft. Die Verzeichnung dieser Parabel kann hier für die Mittellinie des einfliessenden Wasserstrahls ausgeführt werden, und zwar unmittelbar so, dass sie den Umfang des Rades im mittleren Eintrittspunkte J unter einem angenommenen Winkel α schneidet; ausser vom Gefälle h für den Punkt J (entsprechend h_1 für A im Falle von Fig. 21) ist nämlich hier die Parabel nicht zugleich von einer anderen Grösse (von h_0 im vorigen Falle) abhängig, durch welche der Elevationswinkel φ in J (bezw. φ_1 in A, Fig. 21) bedingt wird.

Fig. 22.



Ist v gegeben und u entsprechend angenommen, ist ferner β der Winkel, unter welchem die Radperipherie von den Schaufeln geschnitten wird, so muss jedenfalls α der Bedingung

$$\frac{u}{v} > \frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

entsprechend genommen werden. Mit $h = 1{,}1\,\frac{u^2}{2g}$ findet man dann ϑ aus Gl. (1) und $\varphi = \vartheta - \alpha$, wonach der Scheitelpunkt O der Parabel bestimmt ist durch

$$OB = \frac{u^2}{2g}\sin^2\varphi, \quad JB = \frac{u^2}{2g}\sin 2\varphi \ldots\ldots\ldots (10).$$

Wird nun der Mittelpunkt der Schutzöffnung in einem Punkte S der Parabel OJ angenommen, welcher um h' unter dem Oberwasserspiegel liegt, so sind die Strahldicken $= x$ bei S und $= y$ bei J bestimmt durch

$$Q = \mu b x \sqrt{2gh'}, \quad y = x\sqrt{\frac{h'}{h}} \ldots\ldots\ldots (11).$$

Bei gehöriger, die äussere Contraction ausschliessender Abrundung des Schutzbrettes bedeutet hier μ einen Geschwindigkeitscoefficienten, der nur wenig < 1, etwa $= 0{,}96$ anzunehmen ist. Das Profil des Gerinnebodens kann endlich nach Augenmass unter der Parabel OJ so gezeichnet werden, dass sein stetig veränderlicher Abstand von derselben bei $S = \frac{x}{2}$, bei $J = \frac{y}{2}$ ist.

Die besonderen Umstände, welche bei der Ueberfallschütze für ein kleines v sprachen, sind hier nicht vorhanden. Meistens ist hier $v = 2$ passend, $u = 1{,}75v = 3{,}5$, vorausgesetzt, dass H grösser, als $h = 1{,}1\,\frac{u^2}{2g}$ $= 0{,}687$ ist. Wird dann mit durchschnittlich $a = 0{,}45$ nach Gl. (1) im vorigen Paragraph

für $R =$	2	3	4
	$\beta = 70^0\,42'$	$74^0\,15'$	$76^0\,23'$ angenommen,
so müsste nach (9):	$\alpha < 38^0\,4'$	$40^0\,53'$	$42^0\,39'$

sein. In der Regel ist α beträchtlich kleiner anzunehmen um so mehr, je kleiner ϑ, theils mit Rücksicht auf die wünschenswerthe Verkleinerung von w, theils damit nicht $\varphi = \vartheta - \alpha$ zu klein ausfalle und damit nach (10) der Scheitelpunkt O zu nahe am Rade zu liegen komme.

Der Winkel ϑ kann hier zwischen weiten Grenzen verschieden sein. Wäre z. B.

$$R = 2 \text{ und } 4$$
$$\text{bei } H = 1 \quad " \quad 2{,}8 = 0{,}5\,R \text{ bezw. } 0{,}7\,R,$$
$$\text{so folgte } \vartheta = 31^0\,47' \text{ und } 61^0\,38'$$

aus Gl. (1) mit $t = 0$. —

Zur Gewinnung einer Näherungsformel für den Wirkungsgrad ist zunächst eine solche für den Gefällverlust h_3 erforderlich. Nach Gl. (6), §. 21, hatte sich für denselben ein Ausdruck von der Form:

$$h_3 = \left(\frac{A}{v} + B\frac{R}{Q}\right) Rs \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

ergeben, und zwar wurde unter den Voraussetzungen daselbst, insbesondere also für $\vartheta = 90^0$

$$A = 6{,}35 \qquad B = 1{,}12$$

gefunden. Im Allgemeinen sind diese Coefficienten wesentlich Functionen von ϑ; um sie näherungsweise als solche zu finden, mögen sie noch für $\vartheta = 60^0$ und für $\vartheta = 30^0$ im Uebrigen unter den am angeführten Orte zu Grunde liegenden, auch hier gewöhnlich nahe zutreffenden Voraussetzungen (radiale ebene Schaufeln, $e = a = 0{,}4$ und $\varepsilon = 0{,}5$) berechnet werden. Auf dieselbe Weise wie dort findet man

$$\text{für } \vartheta = 60^0\text{: } A = 2{,}93 \text{ und } B = 0{,}61$$
$$" \quad \vartheta = 30^0\text{: } A = 0{,}55 \quad " \quad B = 0{,}20.$$

Werden A und B als Ordinaten zu den betreffenden Werthen von ϑ als Abscissen betrachtet und die Curven verzeichnet, welche durch die je drei bestimmten Punkte mit möglichst stetiger Krümmung hindurch gehen, so lassen sich die Werthe von A und B, welche anderen Werthen von ϑ entsprechen, als Ordinaten dieser Curven zu den betreffenden Abscissen abgreifen. So wurden die folgenden zusammengehörigen Werthe gefunden:

ϑ	A	B	ϑ	A	B
20°	0,03	0,11	60°	2,93	0,61
30°	0,55	0,20	70°	3,93	0,77
40°	1,24	0,32	80°	5,06	0,94
50°	2,03	0,46	90°	6,35	1,12

Kleineren Differenzen von ϑ können diejenigen von A und B einfach proportional gesetzt werden. Sind endlich die thatsächlichen Verhältnisse in Betreff der Schaufelstellung und der Werthe von e, a, ε von den hier vorausgesetzten erheblich verschieden, so kann man bemerken, dass A und B etwas verkleinert werden durch Schrägstellung der Schaufeln, dagegen vergrössert durch Vergrösserung von e; durch Vergrösserung von εa wird A verkleinert, B etwas vergrössert.

Wird nun hier durchschnittlich

$$u = 1{,}75\,v$$

angenommen, so ist

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2\,uv\cos\alpha = (4{,}06 - 3{,}5\cos\alpha)\,v^2$$
$$= 0{,}68\,v^2 \text{ bis } 1{,}03\,v^2 \text{ für } \alpha = 15^0 \text{ bis } 30^0,$$

sei aber im Durchschnitt $= v^2$ gesetzt, um damit

$$\frac{w_1^{\,2}}{2g} = \frac{w^2}{2g} + k = \frac{w^2}{2g}$$

eher etwas zu gross, als zu klein zu veranschlagen. Mit $\zeta = 0{,}1$ und $h_1 = 0{,}11$ ist dann nach §. 17:

$$H_1 - h_3 = 0{,}1\,\frac{(1{,}75\,v)^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} + 0{,}11 = 0{,}118\,v^2 + 0{,}11$$

und mit Rücksicht auf (12):

$$H_1 = 0{,}118\,v^2 + 0{,}11 + \left(\frac{A}{v} + B\,\frac{R}{Q}\right) R\,s \;\ldots\ldots\; (13).$$

Wird der Effectverlust durch Nebenwiderstände ebenso wie beim mittelschlächtigen Rade zu $6\,^0/_0$ des absoluten Effects veranschlagt, so ist schliesslich

$$\eta = 0{,}94 - \frac{H_1}{H} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (14).$$

Bei einem tiefschlächtigen Rade mit Ueberfallschütze kann

$$v = 1{,}5 \text{ und } R = \frac{H}{0{,}7},$$
$$\vartheta = 60^0 - 66^0, \text{ also } A = 3{,}23 \text{ und } B = 0{,}66$$

gesetzt werden. Damit ergiebt sich:

$$\eta = 0{,}94 - \left(3{,}08 + 0{,}94\,\frac{R}{Q}\right) s - \frac{0{,}376}{H} \;\ldots\ldots\; (15),$$

z. B. mit $s = 0{,}015$ für	$H = 1{,}5$	2	2,5
und	$\frac{R}{Q} = 4$	5	6
	$\eta = 0{,}59$	0,64	0,66.

Ist bei einem Rade mit Spannschütze $v = 2$, so ist nach (13) und (14):

$$\eta = 0{,}94 - \left(\frac{A}{2} + B\,\frac{R}{Q}\right)\frac{R}{H}\,s - \frac{0{,}582}{H} \;\ldots\ldots\; (16),$$

und man findet beispielsweise

für	$R = 2$	3	4
und	$H = 1$	1,8	2,8 mit $t = 0$
nach (1):	$\vartheta = 31^0\,47'$	$51^0\,1'$	$61^0\,38'$:
dazu	$A = 0{,}67$	2,12	3,09
	$B = 0{,}22$	0,48	0,64: endlich mit $s = 0{,}015$
und	$\dfrac{R}{Q} = 4$	5	6
	$\eta = 0{,}32$	0,53	0,62.

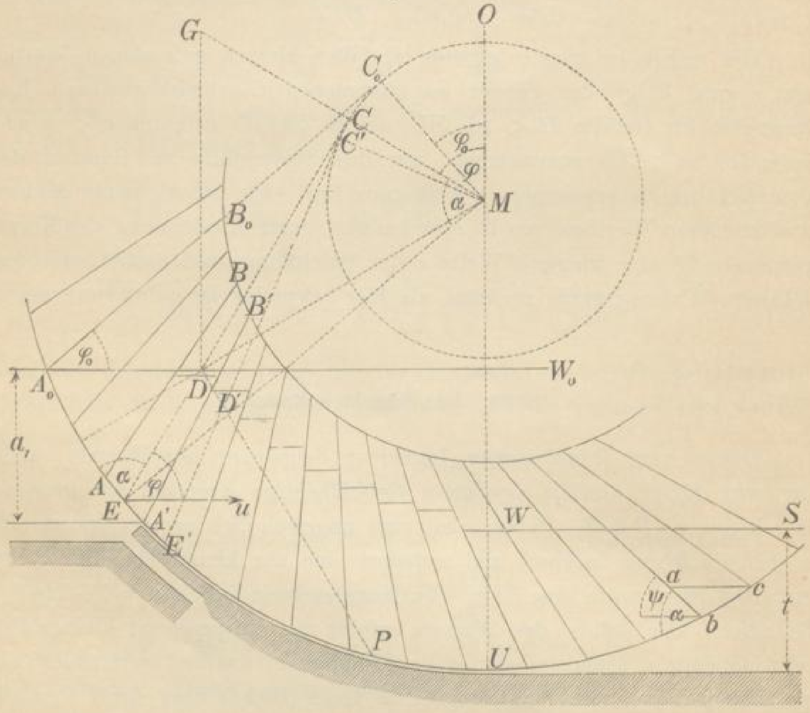
Die selbst bei gleich grossen Gefällen kleiner gefundenen Werthe von η sind Folge der grösser angenommenen Geschwindigkeiten. Insbesondere für Gefälle $H < 1{,}5$ Mtr. ist es deshalb rathsam, $v < 2$ und besonders $u < 3{,}5$ anzunehmen, um das Stossgefälle zu Gunsten des Druckgefälles zu verkleinern. Uebrigens lässt sich bei kleineren Rädern und kleineren Werthen von ϑ, also bei geringerer Ausdehnung des Kropfgerinnes auf eine kleinere Weite s der Spielräume und somit auf etwas grössere Wirkungsgrade rechnen, als hier beispielsweise gefunden wurden.

§. 23. **Das Sagebien-Rad.**

Dieses vom französischen Ingenieur Sagebien herrührende, auch für sehr kleine Gefälle geeignete tiefschlächtige Kropfrad von grossem Durchmesser ($R = 3 - 5$ Mtr.) hat eine ungewöhnlich grosse Kranzbreite a (bis $0{,}5\,R$ und darüber) und trotzdem eine nur kleine Theilung e von etwa 0,3 Mtr., sowie eine kleine Umfangsgeschwindigkeit $v = 0{,}6$ bis 0,8 Sek. Mtr. Der Zufluss des Wassers erfolgt mit entsprechend kleiner Geschwindigkeit u (unmittelbar vor dem Einfluss in das Rad verstanden) als ein Strom von ungewöhnlich grosser Tiefe (Dicke) über der Ueberfallschütze, durch welche dieser Zufluss regulirt wird. Besonders charakteristisch ist diesem Rade endlich eine Neigung der übrigens ebenen Schaufeln gegen die radiale Richtung entgegengesetzt dem sonst üblichen Sinne solcher Neigung, Fig. 23, wodurch freilich die Lage der aus dem Unterwasser sich erhebenden Schaufeln gegen dieses verschlechtert, aber ein solcher Neigungswinkel φ_0 der eintauchenden Schaufel $A_0 B_0$ gegen den Oberwasserspiegel $A_0\,W_0$ erzielt wird, dass die Schaufeln dort, wo während der Füllung und zu Ende derselben ein Ueberfliessen von Wasser über den inneren Rand am leichtesten stattfinden könnte, eine diesem vorbeugende hinlänglich steile Lage haben. Auch kommen dadurch die Schaufeln mehr in die Richtung der relativen Zuflussgeschwindigkeit w, welche hier stark aufwärts gerichtet ist. Der mit dem Halbmesser m um den Mittelpunkt M beschriebene Kreis, welcher von den Verlängerungen aller geradlinigen Schaufelprofile berührt wird, heisse der Kreis (C).

Bei A', Fig. 23, ist ein Schlitz gezeichnet, in welchem das dem Umfange des Rades entsprechend cylindrisch gekrümmte Schutzbrett Platz findet. Dasselbe ist in der Zeichnung weggelassen; indessen wird mit A'

Fig. 23.



im Folgenden die jeweilige Lage des oberen Randes dieses Schutzbrettes, also mit $A_0 A'$ der Bogen bezeichnet, längs welchem das Wasser in das Rad einfliesst als ein Strom von der Stärke (Tiefe) a_1. Dieses Einfliessen findet hier aber in anderer Weise statt, als bei den meist üblichen bisher besprochenen Rädern, und erfordert eine nähere Untersuchung.*

Während ein Schaufelraum sich aus der Lage, in welcher seine vordere Schaufel, mit $A_0 B_0$ zusammenfallend, einzutauchen anfängt, bis

* Siehe einen Aufsatz von C. Bach in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure, 1873, S. 202.

zu der Lage bewegt, in welcher seine hintere Schaufel sich in $A_0 B_0$ befindet, ist die Wasseroberfläche in ihm die Fortsetzung der Oberfläche des zufliessenden Wassers. Bewegt sich aber der Schaufelraum weiter, so fliesst das Wasser schräg aufwärts in ihn ein nach Massgabe der vorhandenen relativen Zuflussgeschwindigkeit, der betreffenden Druckhöhen und Bewegungswiderstände, sowie entgegengesetzt der Centrifugalkraft, und es ist fraglich, ob schliesslich in der Lage, in welcher seine vordere Schaufel mit $A'B'$ zusammenfällt und seine Einmündung sich zu verengen anfängt, die Wasseroberfläche im Schaufelraume über oder unter $A_0 W_0$ liegt. Ersteres würde nicht einem Gewinn an Gefälle entsprechen, vielmehr wäre solche Erhebung der Wasseroberfläche die Folge einer auf Kosten des Gefälles zu grossen absoluten Zuflussgeschwindigkeit u, welche nach der hier zu Grunde liegenden richtigen Idee thatsächlich nicht grösser sein soll, als die Beaufschlagung des Rades erfordert. Bliebe die Wasseroberfläche im Schaufelraume unter $A_0 W_0$, so würde damit die aufzunehmende Wassermenge unerwünschter Weise eingeschränkt. Die Verhältnisse sind also thunlichst so zu wählen, dass für die Lage $A'B'$ einer Schaufel die Oberfläche des Wassers in dem ihr unmittelbar nachfolgenden Schaufelraume in der Höhe des Oberwasserspiegels oder wenigstens nur sehr wenig tiefer liegt. In dieser Lage des Schaufelraumes ist nun aber der Wassereinfluss in denselben einstweilen erst insoweit zu Ende, als er durch seine volle Oeffnung erfolgt; bewegt er sich weiter bis seine hintere Schaufel in die Lage $A'B'$ kommt, so verengt sich die Einflussöffnung allmählich bis Null und sinkt der Wasserspiegel in ihm bis zu einer gewissen Tiefe y' unter $A_0 W_0$. Bei der Weiterbewegung ohne weiteren Zufluss sinkt der Wasserspiegel im Schaufelraume allmählich bis zum Unterwasserspiegel WS.

Zur Gewinnung der Grundlagen für eine passende Construction des Sagebien-Rades handelt es sich zunächst um eine nähere Untersuchung jener beiden Perioden des Wassereinlaufs in einen Schaufelraum, während nämlich dessen Einmündung ganz offen und während sie in allmählicher Verkleinerung begriffen ist, sowie um die Beziehung, welche zwischen dem Aufschlagwasserquantum und den übrigen Radelementen stattfindet. Vom Wasserverlust durch die Spielräume wird dabei einstweilen abgesehen.

$ABA'B'$, Fig. 23, sei ein zwischen den Grenzlagen $A_0 B_0$ seiner hinteren und $A'B'$ seiner vorderen Schaufel in der ersten Periode seiner Füllung begriffener Schaufelraum (den man sich also in der Figur im Allgemeinen mehr links liegend zu denken hat), ED seine

Mittellinie, welche den Kreis (C) im Punkte C berührt und von der Wasseroberfläche im Schaufelraum in D geschnitten wird im Abstande $x = ED$ von E und in der Tiefe y unter $A_0 W_0$; x und y sind Functionen des Winkels φ, unter welchem EC gegen den Horizont oder MC gegen die Verticale MO geneigt ist. Mit $ME = R$ und

$$\alpha = \sphericalangle EMC = arc\,cos \frac{m}{R}$$

sei $r = CE = R\,sin\,\alpha$. Ferner sei

h die Höhe des Oberwasserspiegels $A_0 W_0$ über dem Punkte E,

h_0 die hydraulische Ueberdruckhöhe des Wassers unmittelbar nach seinem Einflusse in den Schaufelraum,

u die horizontale Zuflussgeschwindigkeit des Wassers zum Rade, verstanden als mittlere, in allen Punkten des Bogens $A_0 A'$ gleiche absolute Geschwindigkeit,

w die relative Zuflussgeschwindigkeit, nämlich die Resultante von u und der entgegengesetzt genommenen, mit ED den Winkel α bildenden Umfangsgeschwindigkeit v im Punkte E,

w_0 die (mittlere) relative Geschwindigkeit im Sinne ED unmittelbar nach dem Einflusse in den Schaufelraum,

w_1 die ebenso gerichtete relative Geschwindigkeit an der Oberfläche des einfliessenden Wassers bei D,

v_1 die Geschwindigkeit des Radpunktes D, senkrecht zu $MD = R_1$ und, wenn ω die Winkelgeschwindigkeit des Rades ist, $= R_1\,\omega$;

e und e_1 seien die Weiten des Schaufelraums bei E und bei D, nämlich die aus C als Mittelpunkt mit den Halbmessern CE und CD beschriebenen Bogenlängen zwischen den einander zugekehrten Schaufelflächen.

Wird nun, wie es in analogen Fällen üblich ist und erfahrungsgemäss zu hinlänglich wenig fehlerhaften Ergebnissen führt, der Bewegungszustand des in den Schaufelraum ein- und in ihm weiterfliessenden Wassers in jedem Augenblicke demjenigen gleich gesetzt, welcher eigentlich erst im Beharrungszustande unter gleich bleibenden augenblicklichen Umständen eintreten würde, so ist nach einer Fundamentalgleichung der technischen Hydraulik (siehe Bd. I, §. 78, Gl. 3) einstweilen ohne Rücksicht auf Bewegungswiderstände:

$$\frac{w_1^2}{2g} = \frac{w_0^2}{2g} + h_0 - (h - y) + k.$$

Dabei ist

$$\frac{w_0^{\,2}}{2g} + h_0 = \frac{w^2}{2g} + h;$$

k ist die Arbeit der Centrifugalkraft pro 1 Kgr. Wasser bei der relativen Bewegung von E bis D, also

$$k = \frac{\omega^2}{g}\int_R^{R_1} R_1\,dR_1 = \frac{\omega^2}{g}\,\frac{R_1^{\,2} - R^2}{2} = \frac{v_1^{\,2} - v^2}{2g}.$$

Die Einsetzung dieser Ausdrücke giebt, wenn zur Berücksichtigung von Bewegungswiderständen schliesslich $w_1^{\,2}$ mit $(1 + \zeta)$ multiplicirt wird, unter ζ den resultirenden Widerstandscoefficienten verstanden,

$$(1 + \zeta)\,w_1^{\,2} = w^2 + 2gy + v_1^{\,2} - v^2 \quad \ldots\ldots\ldots (1).$$

Die relative Zuflussgeschwindigkeit w hat zwar im Allgemeinen nicht genau die Richtung ED, doch ist es bei ihrer geringen Grösse hier unerheblich, wenn sie selbst etwas gegen die vorderen Schaufelflächen gerichtet sein sollte. Mit

$$w^2 = u^2 + v^2 + 2uv\cos(\alpha + \varphi) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

und

$$v_1 = v\,\frac{R - x\sin\alpha}{R} = v\left(1 - \frac{x\sin\alpha}{R}\right) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

ergiebt sich w_1 durch Gl. (1) bei gegebenen Werthen von R, α, v, u als Function von x, y und φ, welche Grössen unter sich in einer Beziehung stehen, die aus Fig. 23 durch Gleichsetzung von

$$h = x\sin\varphi + y$$

mit der Differenz der Verticalprojectionen von EC und A_0C_0, vermehrt um die Verticalprojection von C_0C, erhalten wird, nämlich

$$x\sin\varphi + y = r(\sin\varphi - \sin\varphi_0) + m(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)$$

oder

$$x = r - \frac{r\sin\varphi_0 - m(\cos\varphi_0 - \cos\varphi) + y}{\sin\varphi} \quad \ldots\ldots (4).$$

Ein zweiter Ausdruck von w_1 als Function von x, y und φ entspricht dem Aenderungsgesetz des Querschnitts F der augenblicklichen Wasserfüllung des Schaufelraums mit der (zur Radaxe senkrechten) Ebene der Figur. Es ist nämlich

$$F = x\,\frac{c + c_1}{2} \text{ und } \frac{c_1}{c} = \frac{r - x}{r} = 1 - \frac{x}{r},$$

also

$$F = cx\left(1 - \frac{x}{2r}\right);\; dF = c\left(1 - \frac{x}{r}\right)dx.$$

Indem diese Aenderung von F in einem Zeitelement dt auch

$$dF = c_1 w_1 dt = c\left(1 - \frac{x}{r}\right) w_1 \frac{d\varphi}{\omega}$$

ist, folgt durch Gleichsetzung beider Ausdrücke von dF:

$$w_1 = \omega \frac{dx}{d\varphi} \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (5).$$

Durch die Substitution dieses Ausdrucks in der Gleichung (1) wird diese eine Differentialgleichung zwischen x, y und φ, welche integrirt werden müsste, um in Verbindung mit (4) daraus x und y als Functionen von φ zu finden. Diese praktisch nicht ausführbare Bestimmung wird indessen sehr einfach (die Bildung der Differentialgleichung vermieden), wenn man sich erlaubt, statt (5)

$$w_1 = \omega \frac{dx_0}{d\varphi}$$

zu setzen, unter x_0 den Werth von x verstanden, welcher $y = 0$ entspricht, also die von ED nur sehr wenig verschiedene Strecke ED_0, falls D_0 den Schnittpunkt von ED mit $A_0 W_0$ bedeutet. Aus

$$x_0 = r - \frac{r \sin\varphi_0 - m(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{\sin\varphi} \quad \dots\dots\dots \quad (6)$$

folgt dann

$$\begin{aligned}\frac{dx_0}{d\varphi} &= (r\sin\varphi_0 - m\cos\varphi_0)\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi} + \frac{m}{\sin^2\varphi} \\ &= \frac{r\sin\varphi_0 - m(\cos\varphi_0 - \cos\varphi)}{\sin\varphi}\, cotg\,\varphi + m \\ &= (r - x_0)\, cotg\,\varphi + m = MG \quad \dots\dots\dots\dots \quad (7),\end{aligned}$$

wenn G den Schnittpunkt der Geraden MC mit der Verticalen durch D_0 bedeutet. Mit der Annäherung, welche $x = x_0$ entspricht und mit welcher nach (3) jetzt auch

$$v_1 = v\left(1 - \frac{x_0 \sin\alpha}{R}\right)$$

gesetzt werden kann, ist also $w_1 =$ der Geschwindigkeit des Radpunktes G. Wird diese mit v_2 bezeichnet, so findet man y nach (1) durch die Gleichung:

$$2gy = v^2 - v_1^2 + (1 + \zeta) v_2^2 - w^2 \quad \dots\dots\dots \quad (8)$$

unmittelbar als Function von φ, indem

$$\left.\begin{aligned} v^2 - v_1^2 &= \frac{x_0 \sin\alpha}{R}\left(2 - \frac{x_0\sin\alpha}{R}\right) v^2 \\ &= x_0 \sin\alpha\,(2R - x_0 \sin\alpha)\,\omega^2 \\ v_2 &= [(r - x_0)\, cotg\,\varphi + m]\,\omega \\ w^2 &= u^2 + v^2 + 2uv\cos(\alpha + \varphi) \end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots \quad (9)$$

und x_0 durch (6) als Function von φ bestimmt ist.

Es mag bemerkt werden, dass Gl. (3) schon insofern nicht genau war, als $x \sin\alpha$ daselbst für die radiale Strecke von D bis zum Radumfange gesetzt worden ist. Ebenso ist im Ausdrucke (9) von $v^2 - v_1^2$ statt $x_0 \sin\alpha$ richtiger die radiale Strecke von D_0 bis zur Radperipherie zu setzen. Wird also in Fig. 23 die Gerade D_0P normal zu MD_0 gezogen bis zum Schnittpunkte P mit dem Umfang des Rades, so ergiebt sich $v^2 - v_1^2 =$ dem Quadrat der Geschwindigkeit eines Radpunktes im Abstande D_0P von der Axe. Mit Rücksicht auf die Bedeutung von v_2 und weil auch w constructiv durch das Geschwindigkeits-Parallelogramm für den Punkt E zu bestimmen ist, ergiebt sich somit, wie überhaupt die Zeichnung zur Bestimmung aller Bestandtheile von y benutzt werden kann.

Indem übrigens $\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx_0}{d\varphi}$ etwas zu gross, also auch w_1 nach (5) etwas zu gross $= v_2$ gesetzt worden ist, desgleichen $v^2 - v_1^2$ nach (9) etwas zu gross ist, wird auch y durch dieses Näherungsverfahren etwas zu gross gefunden. Das hat aber um so weniger zu bedeuten, als der Coefficient ζ nur ungefähr geschätzt werden kann. Insoweit der Widerstand von der Reibung an den Schaufelflächen herrührt, kann etwa

$$\zeta = 0{,}03\,\frac{x}{d}$$

gesetzt werden, unter d den mittleren Durchmesser des Canals verstanden:

$$d = \frac{4bc}{2(b+c)} = \frac{2bc}{b+c} \text{ nahe } = 2c,$$

sofern hier b sehr gross gegen c ist. Mit durchschnittlich $c = 0{,}25$ Mtr. und $x = 1{,}25$ Mtr. wäre $\zeta = 0{,}075$. Ein weiterer Widerstand wird aber durch den Stoss gegen die Stirnflächen der Schaufeln und durch eine damit zusammenhängende, übrigens gewiss sehr geringfügige innere Contraction verursacht, und mag mit Rücksicht darauf im Ganzen etwa $\zeta = 0{,}15$ zu schätzen sein, entsprechend einem Geschwindigkeitscoefficienten

$$= \sqrt{\frac{1}{1+\zeta}} = 0{,}93.$$

Die Gleichungen (8) und (9) bleiben bis zu Ende der ersten Füllungsperiode des Schaufelraums, d. h. bis zur Lage $A'B'$ seiner vorderen Schaufel gültig. In der dann folgenden zweiten Füllungsperiode nimmt seine im Radumfang gemessene Oeffnungsweite von εe bis Null ab, wenn εe den Theilbogen e nach Abzug des von einer Schaufel eingenommenen Theils bedeutet, bei hölzernen Schaufeln etwa $\varepsilon = 0{,}9$. Dabei nimmt auch w_1 bis Null ab, indem die relative Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser in den Schaufelraum einströmt, durch die plötzliche Querschnittsvergrösserung dieses Wasserstroms in zunehmendem Masse verloren geht. Diese relative Einströmungsgeschwindigkeit selbst ändert sich aber nicht wesentlich und mag für die ganze zweite Füllungsperiode constant = demjenigen Werthe

$$w' = \frac{r-x}{r} w_1 \text{ mit } w_1 \text{ nahe } = v_2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

gesetzt werden, den sie zu Ende der ersten Periode angenommen hatte; ein etwas wachsender Einströmungswiderstand wird in seiner Wirkung theilweise durch die zunehmende, der Einströmung förderliche Druckhöhe y ausgeglichen.

Ist nun q' das Wasservolumen, welches pro Einheit der Radbreite in der zweiten Füllungsperiode in den Schaufelraum einfliesst, also dq' dasselbe für ein Zeitelement dt, und ist der von εe bis Null abnehmende Einmündungsbogen augenblicklich $= z$, somit die Einmündungsweite $= z \sin\alpha$, so ergiebt sich mit einem empirischen Coefficienten μ, der hier etwa $= 0{,}9$ veranschlagt werden mag:

$$dq' = \mu w' z \sin\alpha \, dt = \mu w' z \sin\alpha \frac{-dz}{v}$$

$$q' = \mu \frac{w'}{v} \sin\alpha \int_{\varepsilon e}^{0} z(-dz) = \mu \frac{w'}{v} \frac{(\varepsilon e)^2}{2} \sin\alpha \quad \ldots\ldots \quad (11).$$

Zeichnet man den Schaufelraum in den Lagen, welche dem Anfange und dem Ende dieser zweiten Füllungsperiode entsprechen, wie es in Fig. 23 geschehen ist, und sind $x = ED$, $x' = E'D'$ die im Wasser liegenden Strecken der Mittellinien EC, $E'C'$, so findet man x' aus x und q' (y' aus y und q'), indem aus dem Mittelpunkte M mit dem Halbmesser MD ein Kreisbogen beschrieben wird, welcher $E'C'$ in N schneide, und indem eine Horizontale über N so gezogen wird, dass sie mit der Horizontalen durch N aus der Fläche des Schaufelraums ein Stück $= q'$ ausschneidet; sie schneidet $E'C'$ im Punkte D', dessen Tiefe unter $A_0 W_0$ mit y' bezeichnet wurde.

Die Länge x' oder vielmehr $x' \sin\alpha$ ist aber durch das Aufschlagwasserquantum q pro Sek. und pro 1 Mtr. Radbreite bestimmt. Mit der obigen Bedeutung von ε kann nämlich gesetzt werden:

$$q = \frac{Q}{b} = \varepsilon x' \sin\alpha \frac{v + v_1}{2}$$

$$= \varepsilon x' \sin\alpha \left(1 - \frac{x' \sin\alpha}{2R}\right) v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (12).$$

Bei der grossen Zahl von Radelementen, welche hier in Betracht kommen, ist es kaum zu vermeiden, dieselben wesentlich durch Probiren so zu bestimmen, dass mit Berücksichtigung sonstiger Erfordernisse der Schaufelstellung das verlangte Wasserquantum aufgenommen werden kann, und zwar so aufgenommen wird, dass zu Ende der ersten Füllungsperiode eines Schaufelraums das Wasser in ihm nahe bis zur Höhe des Oberwasserspiegels $A_0 W_0$ reicht. Bei gegebenem Gefälle H und Aufschlagwasserquantum Q werde letzteres hier durch Annahme in die Factoren b und q zerlegt. Angenommen werde ferner v, R, wodurch $\omega = \frac{v}{R}$ bestimmt ist, wogegen die Annahme von m (mit Rücksicht auf den Wasseraustritt nicht grösser, als die Gewinnung eines hinlänglich grossen Eintauchungswinkels φ_0 erfordert) besser vorbehalten bleibt, bis die Lage von $A_0 W_0$ gegen das Rad bestimmt ist. Durch die angenommene Zahl und Dicke der Schaufeln werden aber weiter e und ε festgesetzt. Aus (12) ergiebt sich dann $x' \sin \alpha$, und können in der Zeichnung der Unter- und der Oberwasserspiegel eingetragen werden, ersterer (WS) in noch zu besprechender Höhe t über dem tiefsten Punkt des Rades, letzterer ($A_0 W_0$) um H Mtr. höher als jener, oder richtiger um

$$H - \frac{u^2}{2g} = H - \text{ca. } 2 \text{ Centimtr.}$$

höher. Die Lage von $A_0 W_0$ bestimmt den Punkt A_0 und führt zu passender Annahme von m, wodurch auch α und r, sowie x' bestimmt sind. Jetzt handelt es sich noch um den Punkt A', also um a_1 und $u = \frac{q}{a_1}$. Es ist aber A' bestimmt durch den Schnittpunkt X von $A_0 W_0$ mit der durch A' gehenden Tangente des Kreises (C), welcher Punkt X nahe in der Mitte zwischen den Punkten D_0 und D'_0 liegt, in welchen $A_0 W_0$ von der Mittellinie eines Schaufelraums zu Anfang und zu Ende der zweiten Füllungsperiode geschnitten wird. Zwischen diesen Punkten D_0 und D'_0 muss offenbar auch der Punkt X_0 liegen, in welchem ein aus M mit dem Halbmesser $R_1 = R - x' \sin \alpha$ beschriebener Kreis den Oberwasserspiegel schneidet, und liegt es nahe, den noch unbekannten Punkt X zunächst in diesem schon bekannten Punkte X_0 liegend anzunehmen, wodurch auch EC und $E'C'$ bestimmt sind, sowie der Punkt D' als Schnittpunkt von $E'C'$ mit jenem Kreise zum Halbmesser R_1; die zu messende Tiefe von D' unter $A_0 W_0$ ist $= y'$. Der mit X_0 vorläufig zusammenfallend angenommene Punkt X bestimmt endlich a_1 und u; aber jene Annahme bedarf noch der Controle und ev. der Berichtigung. Wird zu dem Ende y aus (8), q' aus (11) ermittelt, so müsste der hierdurch bestimmte Werth von y' mit dem obigen übereinstimmen, widrigenfalls die beiden entsprechenden horizontalen Geraden aus dem Kreise zum Halbmesser R_1 einen kleinen Bogen herausschnitten, dessen mittlere Punkte corrigirte Lagen des Punktes D' wären, welche in leicht ersichtlicher Weise entsprechend corrigirte Lagen des Punktes A', also corrigirte Werthe von a_1 und u zur Folge haben. Dass übrigens y bei dieser Bestimmung von a_1 als eine sehr kleine Grösse gefunden wird, wie verlangt wurde, ist leicht zu ermessen.

Einen ungünstigen Einfluss hat die Schaufelstellung des Sagebien-Rades auf den Austritt des Wassers. Sollte dieses möglichst widerstandslos in horizontaler Richtung ausfliessen in solchem Masse, dass die Wasseroberflächen aller sich entleerenden Schaufelräume in der Höhe des Unterwasserspiegels WS liegen, wie Fig. 23 andeutet, so müsste zu der durch bc in der Figur dargestellten Umfangsgeschwindigkeit v eine Relativgeschwindigkeit ab hinzutreten. Die absolute Ausflussgeschwindigkeit, dargestellt durch ac, wäre dann

$$u_1 = v \frac{\sin \alpha}{\sin \psi} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13),$$

wo ψ der Nebenwinkel des hier stumpfen Winkels φ ist und während des Ausflusses abnimmt. Ein genügender Mittelwerth von u_1 würde sich mit dem Winkel ψ für eine nach Schätzung mittlere Lage des Austrittspunktes b ergeben. Die dieser mittleren Ausflussgeschwindigkeit u_1 entsprechende Geschwindigkeitshöhe (lebendige Kraft) wäre für den Effect des Rades verloren, und es empfiehlt sich in der That, sie als Gefällverlust statt der kleineren Geschwindigkeitshöhe $\frac{v^2}{2g}$ in Rechnung zu stellen, weil, wenn die zu Grunde liegende Voraussetzung nicht zuträfe, ein anderer, voraussichtlich nicht kleinerer Effectverlust die Folge davon sein würde.

Sehr wesentlich bei der grossen, mit dem ganzen Gefälle vergleichbaren Eintauchungstiefe dieser Räder ist der mit h_1 bezeichnete, am Ende von §. 14 hinsichtlich seiner Bedeutung für Kropfräder besprochene Gefällverlust, mit Rücksicht auf welchen besonders eine passende Wahl der Wassertiefe t im Abflussgerinne wichtig ist, also der Eintauchungstiefe des Rades, da der Boden des Abflussgerinnes angemessener Weise gemäss Fig. 23 die tangentiale Fortsetzung des Kropfgerinnebodens bildet. Damit nämlich das mit der absoluten Geschwindigkeit u_1 aus dem Rade fliessende nicht gegen das abfliessende Wasser stosse und dadurch eine schädliche Welle wirbelnden Wassers hinter dem Rade aufwerfe, würde dem Abflussgerinne zunächst dem Rade eine Neigung zu geben sein, infolge welcher das Wasser in ihm mit derselben Geschwindigkeit u_1 strömt, entsprechend der Wassertiefe

$$t = \frac{q}{u_1},$$

wenn nicht dadurch andererseits eine zu grosse, zur Hälfte als Gefällverlust zu betrachtende Höhe des Wasserspiegels im tiefsten Schaufelraum über WS verursacht würde. Diese Höhendifferenz würde vermieden durch

$$t = x' \sin\alpha,$$

also durch eine mittlere Geschwindigkeit im Abflussgerinne, welche nach (12):

$$\frac{q}{x' \sin\alpha} = \varepsilon\left(1 - \frac{x' \sin\alpha}{2R}\right) v$$

wesentlich $< v$ wäre. Mit Rücksicht auf diese sich widersprechenden Rücksichten wird es am besten sein, die Abflussgeschwindigkeit zwischen der zuletzt bestimmten und u_1 zu wählen, etwa $= \varepsilon v$, entsprechend dem immer noch meistens erheblichen Gefällverluste:

$$h_1 = \frac{1}{2}(x' \sin\alpha - t) = \frac{1}{2}\left(x' \sin\alpha - \frac{q}{\varepsilon v}\right) \quad \ldots\ldots \quad (14).$$

Wollte man ihn dadurch zu vermeiden suchen, dass das Kropfgerinne über U hinaus noch etwas fortgesetzt wird in solchem Betrage, dass der Unterwasserspiegel trotz $t < x' \sin\alpha$ die Höhe $x' \sin\alpha$ über U erhielte, so würde in den von U bis zum Ende des Kropfgerinnes befindlichen Schaufelräumen eine theilweise Wiedererhebung des Wassers stattfinden und somit im Wesentlichen der fragliche Gefällverlust nur an eine andere Stelle verlegt erscheinen. —

Beispielsweise sei $H = 1$ Mtr. gegeben und werde angenommen:

$$q = 0{,}6 \qquad v = 0{,}6 \qquad R = 4.$$

Dann ist $\omega = 0{,}15$ und bei der Annahme von 80 Schaufeln:

$$e = 0{,}314.$$

Hiermit und mit $\varepsilon = 0{,}9$ folgt aus (12):

$$x' \sin\alpha = 1{,}333.$$

Nach der weiteren Annahme:

$$t = \frac{q}{ev} = 1{,}111, \text{ entsprechend } h_1 = 0{,}111$$

nach (14), lassen sich die concentrischen Kreise um M mit den Halbmessern R und $R_1 = R - x' \sin\alpha$ verzeichnen, sowie die Wasserspiegel WS und A_0W_0 eintragen, deren letzterer jene Kreise in A_0 und X_0 schneidet. Der Winkel φ_0 ergiebt sich hinlänglich gross = nahe 40^0 mit

$$m = 0{,}8 \qquad \sin\alpha = 0{,}98 \qquad r = 3{,}92.$$

Hiermit lässt sich auch der Kreis (C) verzeichnen, dessen durch X_0 gehende betreffende Tangente den Punkt A' vorläufig bestimmt und damit

$$a_1 = 1{,}21 \text{ und } u = 0{,}496$$

sowie auch die Mittellinien EC und $E'C'$, in letzterer den Punkt D', dessen Tiefe y' unter A_0W_0 durch Messung = 0,06 Mtr. gefunden wird. Mit den durch Zeichnung gefundenen Grössen

$$MG = 2{,}33 \qquad D_0P = 2{,}90 \qquad w = 0{,}40$$

ergiebt sich jetzt aus (8) und (11):

$$y = 0{,}009 \text{ und } q' = 0{,}014,$$

hiermit $y' = 0{,}10$. Von diesem letzteren Werthe in Betreff der Lage von D' ausgehend findet man auf dieselbe Weise (y und q' ändern sich dabei so wenig, dass sie keine Neuberechnung erfordern) $y' = 0{,}08$. Also die Annahme

$$y' = 0{,}06 \text{ giebt } y' = 0{,}10, \text{ d. i. } 0{,}04 \text{ zu viel,}$$
$$y' = 0{,}10 \text{ giebt } y' = 0{,}08, \text{ d. i. } 0{,}02 \text{ zu wenig,}$$

so dass auf einen wahren (sich selbst reproducirenden) Werth

$$y' = 0{,}087$$

zu schliessen ist. Die ihm entsprechend corrigirte Lage von A' ergiebt

$$a_1 = 1{,}25 \text{ und } u = 0{,}48.$$

Mit Hülfe der Zeichnung findet man auch im Mittel nahe

$$u_1 = 0{,}78. \text{ —}$$

Was den Wirkungsgrad eines Sagebien-Rades betrifft, so ist der Einfluss des Wassers mit einem nur kleinen Effectverluste verbunden. Zu dem hydraulischen Widerstande der Ueberfallschütze, der einen Gefällverlust = ungefähr $0{,}1 \frac{u^2}{2g}$ verursacht, kommt ein Eintrittswiderstand im engeren Sinne, der für die erste Periode des Einfliessens oben durch den Coefficienten $\zeta = 0{,}15$, auf die Geschwindigkeit w_1 bezogen, geschätzt wurde, für die zweite Periode aber erheblich grösser ist. Für beide Perioden zusammen und bezogen auf die absolute Zuflussgeschwindigkeit u mag er zu durchschnittlich 0,3 veranschlagt, also der ganze Gefällverlust infolge des Zu- und Einflusses des Wassers

$$= 0{,}4 \frac{u^2}{2g}$$

gesetzt werden. Um so grösser ist der nach obigen Erwägungen

$$= \frac{u_1^{\,2}}{2g} + h_1$$

zu setzende Gefällverlust infolge der ungünstigen Art des Ausflusses, wo u_1 und h_1 durch (13) und (14) bestimmt sind. Mit Hinzufügung des Verlustes h_3 infolge der Spielräume ist dann der resultirende Gefällverlust:

$$H_1 = 0{,}4 \frac{u^2}{2g} + \frac{u_1^{\,2}}{2g} + h_1 + h_3 \quad \ldots\ldots\ldots\ (15).$$

h_3 besteht aus zwei Theilen, welche, entsprechend den Spalten an den Aussenkanten der Schaufeln und den Seitenspalten längs den Bögen $A'U$ (Figur 23) des Radkranzes, bezw. mit (h_3) und $[h_3]$ bezeichnet seien; bei der Unsicherheit des der Spaltweite s im einzelnen Falle zuzuschreibenden Werthes genügt eine nur mässig angenäherte Bestimmung beider Theile von h_3. Nach §. 17 ist

$$(h_3) = 3{,}4 \frac{Rs}{eq} \int_0^{\vartheta} y \sqrt{z}\, d\varphi$$

zu setzen, wo $\vartheta =$ Winkel UMA' ist und φ nicht den in Fig. 23 ebenso bezeichneten, sondern den Winkel bedeutet, welcher MU mit dem nach irgend einem Punkte des Bogens $A'U$ gezogenen Halbmesser bildet. Hier ist z immer $= y$; wenn also näherungsweise $y = e \sin \varphi$ gesetzt wird, ist das Integral

$$= e \sqrt{e} \int_0^{\vartheta} \sin \varphi \sqrt{\sin \varphi}\, d\varphi.$$

Mit φ statt $\sin \varphi$ wird es

$$= \frac{2}{5} e \sqrt{e}\, \vartheta^{\frac{5}{2}}$$

zu gross gesetzt, der Fehler aber theilweise corrigirt, wenn nachträglich zum Theil wieder $\sin \vartheta$ für ϑ, nämlich das Integral

$$= 0{,}4\, e \sqrt{e} \,.\, \vartheta \sin \vartheta \sqrt{\sin \vartheta}$$

gesetzt wird. Bezeichnet a' den Abstand des Punktes A' von der Verticalen MU, so ist $\sin \vartheta = \frac{a'}{R}$ und somit näherungsweise:

$$(h_3) = 3{,}4 \frac{Rs}{eq} \cdot 0{,}4\, e \sqrt{e} \,.\, \vartheta \frac{a'}{R} \sqrt{\frac{a'}{R}} = 1{,}4 \frac{sa'}{q} \sqrt{\frac{ea'}{R}} \cdot \vartheta \quad \ldots (16).$$

Bei der kleinen Theilung e und der mässigen Grösse von ϑ fallen die Fehler dieser Bestimmung wenig ins Gewicht.

In Betreff des Ausflusses durch die Seitenspalten kann man in dem Falle, dass A' unter dem Unterwasserspiegel WS liegt, also $a_1 > H$ ist, näherungsweise annehmen, dass dieser Ausfluss durch je zwei in gleicher Höhe liegende Seitenspaltenelemente $= R d\varphi . s$ entsprechend derselben Druckhöhe h stattfindet, welche auch die resultirende Fallhöhe des ausgeflossenen Wassers bis WS darstellt, so dass der dadurch pro Sekunde verursachte Arbeitsverlust

$$= \gamma\,(\mu\,.\,2\,R\,d\varphi\,.\,s\sqrt{2\,gh})\,h$$

ist. Der ganze von den Seitenspalten herrührende Arbeitsverlust pro Sek. $= \gamma\,Q[h_3]$ ist das von 0 bis ϑ genommene Integral dieses Ausdrucks, also

$$[h_3] = 2\,\mu\sqrt{2\,g}\,\frac{R\,s}{Q}\int_0^{\vartheta} h\sqrt{h}\,.\,d\varphi.$$

Während φ zwischen Null und ϑ veränderlich ist, ändert sich h zwischen Null und H ungefähr so, dass

$$h = H\,\frac{1-\cos\varphi}{1-\cos\vartheta}$$

gesetzt werden kann, also

$$[h_3] = 2\,\mu\sqrt{2\,g}\,\frac{R\,s}{Q}\left(\frac{H}{1-\cos\vartheta}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\vartheta}(1-\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}\,d\varphi \quad .\ .\ .\ .\ (17).$$

Wird das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral mit J, sowie $\frac{\varphi}{2}$ mit x bezeichnet, so ist

$$J = \int_0^{\vartheta}\left(2\,\sin^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{3}{2}} d\varphi = 4\sqrt{2}\int_0^{\frac{\vartheta}{2}}\sin^3 x\,dx.$$

Bekanntlich ist aber

$$\int_0^{x}\sin^3 x\,dx = -\frac{1}{3}\cos x\,(2+\sin^2 x) + \frac{2}{3}$$

oder, wenn mit grosser Annäherung, sofern x ein kleiner Winkel ist,

$$\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x} = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^4 x$$

gesetzt wird und auch bei der Multiplication nur noch Glieder bis mit $\sin^4 x$ berücksichtigt werden,

$$\int_0^x \sin^3 x\, dx = \frac{1}{3}\left[-\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 x - \frac{1}{8}\sin^4 x\right)(2 + \sin^2 x) + 2\right]$$

$$= \frac{1}{3}\left[-2 + \sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^4 x\right.$$

$$\left. - \sin^2 x + \frac{1}{2}\sin^4 x + 2\right] = \frac{1}{4}\sin^4 x.$$

Hiernach ist $J = \sqrt{2}\,.\sin^4\frac{\vartheta}{2}$

$$\frac{J}{(1-\cos\vartheta)^{\frac{3}{2}}} = \frac{J}{\left(2\sin^2\frac{\vartheta}{2}\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\sin\frac{\vartheta}{2}$$

und nach (17) mit $\mu\sqrt{2g} = 3{,}4$:

$$[h_3] = 3{,}4\,\frac{Rs}{Q}\,H\sqrt{H}\sin\frac{\vartheta}{2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18).$$

Im Falle $a_1 < H$ ist dieser Ausdruck zu gross, indem dann zwar die vom Wasserspiegel im betreffenden Schaufelraume bis zum Unterwasserspiegel zu rechnende gesammte Fallhöhe eines ausfliessenden Wassertheilchens nach wie vor zwischen 0 und H veränderlich ist, dagegen die für die Ausflussmenge massgebende Druckhöhe nur wenig $> a_1$ werden kann, diesen grössten oder einen nur wenig kleineren Werth freilich um so länger behält, je mehr $H > a_1$ ist. Schätzungsweise kann diesen Umständen dadurch Rechnung getragen werden, dass dann

$$H\sqrt{\frac{H+a_1}{2}} \text{ statt } H\sqrt{H}$$

in Gl. (18) gesetzt wird.

Bei obigem Beispiele war

$$v = 0{,}48 \qquad u_1 = 0{,}78 \qquad h_1 = 0{,}111.$$

Also ist nach (15):

$$H_1 = 0{,}147 + h_3.$$

Ferner war

$$H = 1\,(< a_1), \qquad R = 4, \qquad e = 0{,}314, \qquad q = 0{,}6$$

und ergiebt sich aus der Zeichnung:

$$a' = 2{,}47 \text{ und } \vartheta = arc\sin\frac{a'}{R} = 0{,}666\,(38^0\,8').$$

Hiermit folgt aus (16) und (18):

$$(h_3) = 1{,}69\,s \text{ und } [h_3] = 4{,}44\,\frac{s}{Q},$$

also beispielsweise mit $s = 0{,}015$ und $Q = 2$:

$$h_3 = (h_3) + [h_3] = 0{,}059$$
$$H_1 = 0{,}147 + 0{,}059 = 0{,}206.$$

Die Reibung der Wasserradwelle in den Lagern ist des bedeutenden Radgewichtes wegen verhältnissmässig gross, wogegen die sonstigen nebensächlichen Widerstände, insbesondere der Luftwiderstand und die Wasserreibung im Kropf, wegen der kleinen Geschwindigkeiten weniger erheblich sind. Der Effectverlust E_1 durch alle diese Nebenwiderstände zusammen dürfte hier mit $5{,}4\,^0/_0$ des absoluten Effects reichlich veranschlagt sein, entsprechend einem resultirenden Wirkungsgrad:

$$\eta = 1 - \frac{H_1}{H} - \frac{E_1}{E_0} = 0{,}74.$$

Derselbe ist wesentlich grösser, als der nach vorigem Paragraph den gewöhnlichen tiefschlächtigen Rädern bei gleichem Gefälle zukommende. Aber freilich wird dieser Vortheil grossentheils aufgewogen durch die wegen der kleinen Winkelgeschwindigkeit des Rades meistens erforderliche complicirtere Transmission und durch grössere Herstellungskosten des Rades selbst. Zuppinger hat die entgegengesetzten Rücksichten dadurch zu vermitteln und das Rad (in Betreff des Wasseraustritts) zu verbessern gesucht, dass er ihm einen kleineren Durchmesser bei trotzdem etwas grösserer Umfangsgeschwindigkeit gab und etwas nach vorn convex gekrümmte, nach aussen radial verlaufende Schaufeln.

2. Unterschlächtige Wasserräder.

§. 24. Das unterschlächtige Stossrad im Gerinne.

Solche Räder sind die einfachsten, aber auch freilich sehr unvollkommene Motoren zur Verwerthung kleiner Gefälle bis zu etwa 1 Mtr. Die gewöhnlichsten haben radial gestellte ebene Schaufeln und bewegen sich in einem sogenannten Schnurgerinne, d. h. in einem ganz geraden, etwas abwärts geneigten Gerinne, in welchem das Aufschlagwasser, regulirt durch eine Spannschütze, deren Oeffnung bis zum Boden und zu den Seitenwänden des Gerinnes sich erstreckt, mit der Geschwindigkeit u dem Rade zufliesst. Um den dieser verhältnissmässig grossen Geschwindigkeit entsprechenden Effectverlust durch Reibung an der Gerinnewand zu vermindern, ist es zweckmässig, den Weg von der Schütze bis zum Eintritt in das Rad so klein wie möglich zu machen, was besonders durch Schrägstellung der Schütze erzielt werden kann. Indem die Geschwindigkeit u durch den Stoss in die kleinere Geschwindigkeit v = der Umfangsgeschwindigkeit des Rades übergeht, welche nur wenig $> 0{,}4\,u$ zu sein pflegt, geht die Dicke a_1 des zufliessenden Wasserstroms von etwa 0,12 bis 0,15 Mtr. in a_2 nahe $= 2{,}5\,a_1$ über, wodurch das Bedürfniss einer Kranzbreite a von wenigstens etwa $3\,a_1 = 0{,}35 - 0{,}45$ Mtr. bedingt wird. Im Falle des Schnurgerinnes hat diese grössere Stromtiefe a_2 des vom Rade wegfliessenden Wassers eine Erhebung der Oberfläche um $a_2 - a_1$ über die Oberfläche des dem Rade zufliessenden Wassers zur Folge, und es ist unter solchen Umständen, wenn ζ den Widerstandscoefficienten der Schütze mit Schussgerinne von ihr bis zum Rade bedeutet,

$$(1+\zeta)\frac{u^2}{2g} = H + a_2 - a_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1),$$

sowie auch (siehe den Schluss von §. 15) ein gewisser Vortheil hinsichtlich des Wasserverlustes durch den Spielraum zwischen Rad und Gerinneboden damit verbunden ist. Indessen werden doch diese Umstände mehr als aufgewogen durch einen Gegendruck auf die Schaufeln und durch die sonstigen Nachtheile zu tiefen Eintauchens derselben, so dass es besonders dann, wenn bei veränderlichem Wasserstande diese Eintauchungstiefe erheblich wachsen könnte, besser ist, jene Erhebung $= a_2 - a_1$ der Wasseroberfläche durch einen entsprechenden Abfall des Gerinnes hinter dem Rade zu verhindern. Dieser Abfall ist dann passend an einen schwachen Kropf anzuschliessen, der unten das Rad beiderseits vom tiefsten Punkte U längs je einem Bogen = ungefähr dem Theilbogen e umgiebt und welcher aus den in §. 15 erörterten Gründen den Wasserverlust wesentlich verkleinert. Ein solches übrigens gerade Gerinne mit kropfartiger Höhlung seines Bodens unter dem Rade und einem an diese sich unmittelbar anschliessenden Abfall (siehe die später im §. 27 besprochene ähnliche Disposition eines Poncelet-Rades) werde zur Unterscheidung vom eigentlichen Schnurgerinne hier kurz als Kropfgerinne bezeichnet. Die im Falle des Schnurgerinnes zuweilen angewendeten sogenannten Pansterzeuge zur Hebung und Senkung des Rades beim Steigen und Fallen des Wassers sind insofern unvollkommen, als sie zur Zulassung grösserer Spielraumweiten s selbst unter normalen Umständen Veranlassung geben.

Der Wirkungsgrad η eines unterschlächtigen Stossrades ist jedenfalls $< 0{,}5$, da ein Stossgefälle immer nur höchstens zur Hälfte verwerthet werden kann, wie schon im §. 18 unter 2) gefunden wurde, hier aber das ganze disponible Gefälle H Stossgefälle ist; wegen sonstiger

Verluste, wie besonders des Wasserverlustes, ist er thatsächlich viel $< 0{,}5$. Sein vollständiger Ausdruck ist nach §. 17:

$$\eta = \left(1 - \frac{Q_1}{Q}\right)\left(1 - \frac{H_1}{H}\right) - \frac{E_1}{E_0},$$

worin für den verhältnissmässigen Wasserverlust $\frac{Q_1}{Q}$, den verhältnissmässigen Gefällverlust $\frac{H_1}{H}$ und den verhältnissmässigen Effectverlust $\frac{E_1}{E_0}$ durch nebensächliche Widerstände (Zapfenreibung, Luftwiderstand u. a.) die hier zutreffenden Ausdrücke (Functionen bezüglicher Radelemente) oder erfahrungsmässig angemessene Zahlenwerthe zu setzen sind. Zunächst ist

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{a_1}\left[s + \frac{e^2}{24\,R}\left(\frac{u}{u-v}\right)^2\right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2),$$

von welchem Ausdrucke nach §. 15 im Falle eines Kropfgerinnes das zweite Glied gestrichen, dagegen bei einem Schnurgerinne für die Weite s des Spielraums der etwas kleinere Werth

$$s_1 = s\left(1 - 0{,}8\,\frac{a_1}{H}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

gesetzt werden kann. Der Gefällverlust H_1 ist mit obiger Bedeutung von ζ, sowie mit Rücksicht darauf, dass hier das Wasser dem Rade tangential zufliesst, also $w = u - v$, sowie auch, wenigstens bei radial gerichteten Schaufeln, die relative Stossgeschwindigkeit $w_1 = w$ ist,

$$H_1 = \zeta\frac{u^2}{2g} + \frac{(u-v)^2}{2g} + \frac{v^2}{2g} = (1+\zeta)\frac{u^2}{2g} - \frac{uv}{g} + \frac{v^2}{g}.$$

Wenn man aber den Gegendruck des Unterwassers, welcher im Falle des Schnurgerinnes der Erhebung um den Betrag $a_2 - a_1$ entspricht, nicht besonders als Widerstand in Rechnung bringt, ist er auch bezüglich u ausser Acht zu lassen und somit statt (1) in allen Fällen

$$(1+\zeta)\frac{u^2}{2g} = H$$

zu setzen. Damit wird

$$\frac{H_1}{H} = 1 - \frac{(u-v)\,v}{g\,H} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4).$$

Mit der Bezeichnung ϑ für $\frac{E_1}{E_0}$, σ für $\frac{Q_1}{Q}$ ist also

$$\eta = (1-\sigma)\frac{(u-v)\,v}{g\,H} - \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5).$$

Von Wichtigkeit ist die Frage nach dem vortheilhaftesten Gange des Rades, nämlich nach der Umfangsgeschwindigkeit v, bei welcher unter übrigens gegebenen Umständen η am grössten ist; eine mehr oder weniger willkürliche Annahme in dieser Hinsicht, wie bei den in den §§. 19—23 besprochenen Rädern, ist hier ausgeschlossen. Wären σ und ϑ unabhängig von v, so wäre nach (5) der Wirkungsgrad am grössten für

$$(u - v)\,v = max, \text{ also } v = 0{,}5\,u.$$

Indem aber ϑ mit v wächst, wie namentlich die Ausdrücke von E_l und E_z, §. 17, ersehen lassen, im Falle des Schnurgerinnes auch σ gemäss der Form des zweiten Gliedes des Ausdruckes (2) um so grösser ist, je grösser v, lässt sich schliessen und wird es durch die Erfahrung bestätigt, dass thatsächlich das Maximum von η einer Geschwindigkeit v etwas $< 0{,}5\,u$ entspricht. Aus zahlreichen, freilich nur an Modellrädern angestellten Versuchen ergiebt sich im Durchschnitt

$$\eta = max \text{ für } v = 0{,}4\sqrt{2gH} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (6),$$

und da nach Versuchen von Poncelet, über welche im Bd. I, §. 85 unter 2) berichtet wurde,

$$u = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{2gH}{1{,}15}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

gesetzt werden kann (entsprechend einem Geschwindigkeitscoefficienten $= \sqrt{\frac{1}{1{,}15}} = 0{,}933$), folgt

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{\sqrt{1{,}15\,.\,0{,}16}} = \frac{1}{0{,}429} = 2{,}33 \quad \ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\frac{(u-v)\,v}{gH} = 1{,}33\,.\,0{,}32 = 0{,}426,$$

somit nach (5) der Wirkungsgrad bei vortheilhaftestem Gange:

$$\eta = 0{,}426\,(1 - \sigma) - \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (9).$$

Bei einem Rade mit Kropfgerinne kann $\sigma = \frac{s}{a_1}$ gesetzt werden, durchschnittlich etwa

$$\sigma = \frac{0{,}015}{0{,}12} = \frac{1}{8}.$$

Mit $\vartheta = 0{,}06$ ist dann $\eta = 0{,}31$.

Bei einem gemeinen Rade im Schnurgerinne wird die Weite des Spielraums wenigstens $= 0{,}02$ Mtr. zu setzen sein, welche indessen nach

(3) nur theilweise in Rechnung gestellt zu werden braucht, insbesondere z. B. mit

$$s_1 = 0{,}02\left(1 - 0{,}8\,\frac{0{,}12}{0{,}5}\right) = 0{,}016$$

für $a_1 = 0{,}12$ und $H = 0{,}5$ Mtr. Dagegen kommt jetzt noch das zweite Glied im Ausdrucke (2) von σ in Betracht. Hätte z. B. das Rad 40 Schaufeln bei $R = 3$ Mtr. Halbmesser, entsprechend einer Theilung

$$e = \frac{2\pi.3}{40} = 0{,}47 \text{ Mtr.},$$

so ergäbe sich mit $u = 2{,}33\,v$:

$$\sigma = \frac{1}{0{,}12}(0{,}016 + 0{,}009) = 0{,}208$$

und, wenn wieder $\vartheta = 0{,}06$ angenommen wird, nach (9):

$$\eta = 0{,}28.$$

In Folge grösserer Spaltweite ist der Wirkungsgrad oft noch erheblich kleiner. Er kann etwas vergrössert werden durch eine (bis zu etwa 30^0 gehende) Neigung der ebenen Schaufeln gegen die radiale Richtung in solchem Sinne, dass sie sich mehr vertical aus dem Wasser erheben. Diese Neigung vermindert hier nicht nur den Widerstand des Unterwassers, sondern auch den Stossverlust. Letzterer entspricht dann nämlich nur der normal gegen die Schaufel gerichteten Componente von u, während mit der längs derselben gerichteten Geschwindigkeitscomponente das Wasser an ihr emporfliesst und hierbei, sowie beim Zurückfliessen durch stetige Druckwirkung einen Theil seines verbliebenen Arbeitsvermögens an das Rad abgiebt. Es nähert sich somit die Art der Wirkung einigermassen der des Poncelet-Rades. Indessen darf die Neigung der Schaufeln nicht so gross sein, dass das zurückfliessende Wasser erst dann die äussere Schaufelkante erreichen würde, wenn dieselbe sich bereits um eine gewisse Höhe aus dem Unterwasser erhoben hätte: diese Höhe wäre als entsprechender Gefällverlust zu betrachten. Besonders bei geringerer Eintauchungstiefe des Rades mit Gerinneabfall könnte so der Vortheil geneigter Schaufelstellung leicht durch einen grösseren Nachtheil mehr als aufgewogen werden, und ist es überhaupt vorzuziehen, zum Poncelet-Rade mit passend gekrümmten Schaufeln überzugehen, falls die Stosswirkung thunlichst durch stetige Druckwirkung bei unterschlächtigen Rädern ersetzt werden soll und nicht den Umständen gemäss die Einfachheit des Baues Haupterforderniss ist.

§. 25. Theilung der Wasserkraft.

Eine vollständigere Ausnutzung der Wasserkraft (des Arbeitsvermögens, welches der vom Gefälle H herrührenden Ausflussgeschwindigkeit u aus der Schutzöffnung entspricht) lässt sich bei unterschlächtigen Rädern im Schnurgerinne dadurch erzielen, dass deren mehrere hinter einander in demselben Gerinne angeordnet werden. Setzt man nämlich den Nutzeffect eines solchen mit Rücksicht auf Gl. (4) im vorigen Paragraph:

$$E = \gamma (Q - Q_1)(H - H_1) - E_1$$
$$= \mu Q (H - H_1) = \frac{\mu Q}{g} (u - v) v,$$

wo mit der Bezeichnung σ für $\frac{Q_1}{Q}$ der Coefficient μ etwas $< \gamma (1 - \sigma)$ ist, sind ferner $v_1, v_2 \ldots v_n$ die Umfangsgeschwindigkeiten der im Allgemeinen n Räder, und ist das Gerinne so wenig geneigt, dass die dem Gefälle entsprechende Componente der Schwere mit dem Widerstande des Gerinnes im Gleichgewicht ist, also die Ausflussgeschwindigkeit des Wassers aus irgend einem Rade = der Einflussgeschwindigkeit in das folgende gesetzt werden kann, so sind die Nutzeffecte der n Räder:

$$E_1 = \frac{\mu_1 Q}{g} (u - v_1) v_1$$
$$E_2 = \frac{\mu_2 Q}{g} (v_1 - v_2) v_2$$
$$\vdots$$
$$E_n = \frac{\mu_n Q}{g} (v_{n-1} - v_n) v_n.$$

Die Coefficienten μ sind zwar streng genommen Functionen der Geschwindigkeiten, und es ist

$$\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \ldots$$

besonders deshalb, weil die Tiefe des den Rädern zufliessenden Wassers immer grösser und somit σ immer kleiner wird. Sieht man aber hiervon ab, setzt vielmehr alle jene Coefficienten $\mu_1, \mu_2 \ldots$ = einem constanten Mittelwerthe μ, so folgt der Gesammteffect aller Räder:

$$\Sigma E = \frac{\mu Q}{g} [(u - v_1) v_1 + (v_1 - v_2) v_2 + \ldots (v_{n-1} - v_n) v_n] \quad . . (1).$$

Damit er ein Maximum sei, müssen die Differentialquotienten nach v_1, $v_2 \ldots$ einzeln = 0, muss also

$$\begin{aligned} u - 2v_1 + v_2 &= 0 \\ v_1 - 2v_2 + v_3 &= 0 \\ &\vdots \\ v_{n-2} - 2v_{n-1} + v_n &= 0 \\ v_{n-1} - 2v_n \qquad &= 0 \end{aligned}$$

sein, woraus successive folgt:

$$u - v_1 = v_1 - v_2 = v_2 - v_3 = \ldots = v_{n-1} - v_n = v_n,$$

also

$$v_n = \frac{1}{n+1}u, \; v_{n-1} = \frac{2}{n+1}u \ldots v_2 = \frac{n-1}{n+1}u, \; v_1 = \frac{n}{n+1}u$$

$$\Sigma E = \mu Q \frac{u^2}{g}\left[\frac{n}{(n+1)^2} + \frac{n-1}{(n+1)^2} + \ldots + \frac{2}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right]$$

$$= \frac{n}{n+1}\mu Q \frac{u^2}{2g} \ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Bei einem einzigen Rade oder bei mehreren gleichen Rädern neben einander hätte man

$$E = \frac{\mu Q}{g}(u - v)v = \frac{1}{2}\mu Q \frac{u^2}{2g} \text{ mit } v = \frac{u}{2} \ldots\ldots (3),$$

und es ist also der durch n Räder hinter einander höchstens erzielbare verhältnissmässige Gewinn:

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = \frac{n-1}{n+1} = 0{,}33 \qquad 0{,}5 \qquad 0{,}6 \ldots$$
$$\text{für } n = 2 \qquad 3 \qquad 4 \ldots,$$

mit wachsender Zahl n der Grenze 1 sich nähernd.

Die Nutzeffecte $E_1 \ldots E_n$ der einzelnen Räder nehmen hierbei im Verhältnisse der ganzen Zahlen $n \,.\,.\, 1$ successive ab, was aber in der Regel nicht zweckmässig sein wird. Besser selbst auf Kosten der Grösse des Effectgewinnes erscheint eine solche Wahl der Umfangsgeschwindigkeiten, dass die Nutzeffecte aller hinter einander gelagerten n Räder gleich gross sind. Wird dann hier dasjenige dieser Räder als erstes bezeichnet, welchem das Wasser zuletzt zufliesst, so ist nach (1):

$$\Sigma E = \frac{\mu Q}{g}\left[(u - v_n)v_n + \ldots + (v_3 - v_2)v_2 + (v_2 - v_1)v_1\right]$$

mit der Bedingung

$$(u - v_n)v_n = \ldots = (v_3 - v_2)v_2 = (v_2 - v_1)v_1 \quad \ldots\ldots (4),$$

zu welcher, weil sie nur $n - 1$, somit zur Bestimmung der Umfangsgeschwindigkeiten nicht ausreichende Gleichungen liefert, noch

$$v_2 = 2v_1$$

als nahe dem vortheilhaftesten Gange des ersten Rades entsprechend hinzugenommen werde. Der Werth der durch (4) einander gleich gesetzten Producte ist dann $= v_1{}^2$ und

$$\Sigma E = n \mu Q \frac{v_1{}^2}{g} = 4 n \left(\frac{v_1}{u}\right)^2 E \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (5)$$

mit Rücksicht auf (3), während aus (4) successive folgt:

$$v_3 = \frac{v_1{}^2}{v_2} + v_2 = \left(\frac{1}{2} + 2\right) v_1 = \frac{5}{2} v_1$$

$$v_4 = \frac{v_1{}^2}{v_3} + v_3 = \left(\frac{2}{5} + \frac{5}{2}\right) v_1 = \frac{29}{10} v_1$$

$$v_5 = \left(\frac{10}{29} + \frac{29}{10}\right) v_1 = \frac{941}{290} v_1 \text{ u. s. f.}$$

Bei $n = 2$ Rädern ist $v_3 = u$, also

$$v_1 = \frac{2}{5} u, \qquad v_2 = \frac{4}{5} u$$

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = 4 \,.\, 2 \left(\frac{2}{5}\right)^2 - 1 = 0{,}28.$$

Bei $n = 3$ Rädern ist $v_4 = u$, also

$$v_1 = \frac{10}{29} u, \qquad v_2 = \frac{20}{29} u, \qquad v_3 = \frac{25}{29} u$$

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = 4 \,.\, 3 \left(\frac{10}{29}\right)^2 - 1 = 0{,}43.$$

Bei $n = 4$ Rädern ist $v_5 = u$, also

$$v_1 = \frac{290}{941} u, \qquad v_2 = \frac{580}{941} u, \qquad v_3 = \frac{725}{941} u, \qquad v_4 = \frac{841}{941} u$$

$$\frac{\Sigma E - E}{E} = 4 \,.\, 4 \left(\frac{290}{941}\right)^2 - 1 = 0{,}52.$$

Wie man sieht, kommt der mit gleichem Nutzeffect aller Räder erreichbare Effectgewinn dem oben bestimmten Maximum ziemlich nahe. Im Vergleich mit einem einzigen Rade wird er freilich abgeschwächt durch Vergrösserung des Luftwiderstandes, der Zapfenreibung und der Anlagekosten, und tritt er hauptsächlich erst hervor im Vergleich mit mehreren Rädern nebeneinander, wenn nämlich eine Theilung der Wasserkraft an und für sich schon aus anderen Gründen nöthig oder wünschenswerth ist.

Zu solcher Theilung der Wasserkraft kann auch bei anderen Arten von Wasserrädern Veranlassung vorhanden sein, wenn ein Rad zu gross ausfallen würde oder wenn verschiedene Arbeitsmaschinen durch Wasserkraft zu treiben sind, welche unabhänging von einander auf möglichst vortheilhafte Weise sollen in und ausser Betrieb gesetzt werden können. Während bei unterschlächtigen Stossrädern diese Theilung der Wasserkraft, wie sich gezeigt hat, am besten durch Theilung der durch das Gefälle erzeugten lebendigen Kraft geschieht, wäre bei den vorzugsweise unmittelbar durch das Gewicht des niedersinkenden Wassers wirkenden ober- und rückenschlächtigen Rädern der Zweck durch Theilung des Gefälles zu erzielen, wenn nicht bei solchen Rädern stets η um so kleiner wäre, je kleiner H, und wenn nicht bei der Theilung von H eine in den meisten Fällen wohl kaum erwünschte sehr verschiedene Lagerungshöhe der einzelnen Räder erforderlich würde. Es wird deshalb hier am vortheilhaftesten sein, das Gefälle H, wenn es nicht übermässig gross ist, allen Rädern unverkürzt zu erhalten und vielmehr die Wassermenge Q unter sie zu vertheilen. Bei mittel- und tiefschlächtigen Rädern kann es zweifelhafter sein, ob die Theilung von H oder von Q vorzuziehen ist; die Rücksicht auf praktische Anordnung dürfte für letzteres auch hier meistens den Ausschlag geben.

§. 26. Unterschlächtige Räder im freien Strom.

Die vermuthlich ältesten, zum Betriebe von Mühlen und von Wasserschöpfmaschinen schon im frühen Alterthume vorkommenden Wasserräder benutzen das freie Arbeitsvermögen des in Flussbetten strömenden Wassers ohne weiteren Aufstau oder weitere Einengung desselben, als es die Anordnung des Rades bis zu einem gewissen Grade von selbst mit sich bringt. Bei der hauptsächlichsten Verwendung zum Mühlenbetriebe pflegt die Radwelle von zwei prahmartig mit flachen Böden gebauten Schiffen getragen zu werden, von dem grösseren sogenannten Hausschiffe, welches das Mühlwerk enthält, und dem Wellschiffe, welches durch Balken und Laufbrücke mit jenem verbunden ist; beide zusammen liegen im Flusse vor Anker oder sind am Ufer befestigt. Die Bezeichnung solcher Räder als Schiffmühlenräder wird auch auf die ganze Gattung übertragen. Bei $R = 2 - 3$ Mtr. Halbmesser haben sie gewöhnlich eine Breite $b = 2 - 5$ Mtr. und eine Kranzbreite $a = 0{,}25\,R$ ungefähr, also $= 0{,}5 - 0{,}75$ Mtr. Der Radkranz hat dabei nur die früher erklärte und hier stets zu Grunde liegende geometrische Bedeutung, indem die ebenen und meistens radialen Schaufeln von geringerer Zahl (selten mehr als 16 bis 20) abgesehen von geeigneter Verstrebung unter sich nur an den

Radarmen (ohne Boden und Seitenwände des Kranzes) befestigt sind. Da das mit mässiger Geschwindigkeit u strömende und dem Rade zufliessende Wasser nur wenig an den Schaufeln emporsteigen, übrigens auch nach dem Stosse nicht nur nach oben, sondern nach allen Seiten ausweichen kann, ist es zulässig und passend, zur Fassung eines möglichst tiefen Wasserstroms die Schaufeln wesentlich mehr, als bis zur Hälfte ihrer Höhe a eintauchen zu lassen.

In dem allgemeinen Ausdrucke des Nutzeffects:

$$E = \gamma (Q - Q_1)(H - H_1) - E_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

kann, wie beim unterschlächtigen Stossrade im Gerinne (§. 24, Gl. 4),

$$H - H_1 = \frac{(u - v)\,v}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

gesetzt werden unter der (hier freilich weniger vollkommen zutreffenden) Voraussetzung, dass das zum Stoss gelangende Wasser durch diesen Stoss die Umfangsgeschwindigkeit v des Rades annimmt. Ausserdem ist hier

$$Q = Fu = a_1 b u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

zu setzen, unter F die (bei verticaler Stellung) eingetauchte Schaufelfläche, a_1 die Eintauchungstiefe verstanden, während dann der verhältnissmässige Wasserverlust nur = dem zweiten Gliede des Ausdrucks (2) in §. 24:

$$\frac{Q_1}{Q} = \frac{1}{24}\,\frac{e^2}{R a_1}\left(\frac{u}{u - v}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

ist, welcher dem Umstande entspricht, dass das zufliessende Wasserquantum nicht vollständig (wegen grösserer Entfernung e der aufeinander folgenden Schaufeln oft nur ziemlich unvollständig) zum Stosse gelangt. Die Einsetzung dieser Werthe (2)—(4) in Gl. (1) giebt:

$$E = \frac{\gamma F u}{g}\left[1 - \frac{1}{24}\,\frac{e^2}{R a_1}\left(\frac{u}{u - v}\right)^2\right](u - v)\,v - E_1 \quad \ldots\ldots (5).$$

Dem Umstande, dass das am Rande, wo es unbehindert ausweichen kann, gegen die Schaufeln treffende Wasser nicht vollkommen die Geschwindigkeit v durch den Stoss annimmt, kann durch rechnungsmässige Verkleinerung von F oder durch Vergrösserung von E_1 Rechnung getragen werden. Indessen ist, was den Ausdruck (4) betrifft, hier ausserdem (wie die betreffende Untersuchung im §. 15 erkennen lässt) die Länge des unter Wasser befindlichen Umfangsbogens des Rades

$$> e\,\frac{u}{u - v}$$

vorausgesetzt. Dies erfordert eine Eintauchungstiefe

$$a_1 > \frac{1}{2R}\left(\frac{e}{2}\frac{u}{u-v}\right)^2$$

oder eine Schaufelzahl

$$z = \frac{2\pi R}{e} > 2\pi R\left(\frac{1}{2}\frac{u}{u-v}\frac{1}{\sqrt{2Ra_1}}\right)$$

$$z > \pi\frac{u}{u-v}\sqrt{\frac{R}{2a_1}}, \text{ nahe } z > \frac{u}{u-v}\sqrt{\frac{5R}{a_1}} \ldots\ldots (6),$$

indem π^2 nahe $= 10$ ist. Diese Bedingung findet sich mit $z \gtreqless 10$ erfüllt, wenn

$$\frac{u}{u-v}\sqrt{\frac{5R}{a_1}} < 10, \quad \frac{a_1}{R} > 0{,}05\left(\frac{u}{u-v}\right)^2$$

oder bei Voraussetzung des erfahrungsmässig nahe vortheilhaftesten Geschwindigkeitsverhältnisses $v = 0{,}4\,u$, wenn

$$\frac{a_1}{R} > 0{,}05\frac{25}{9}, \text{ d. i. } a_1 > 0{,}14\,R$$

ist, was mit a_1 wesentlich $> 0{,}5\,a$ und $a = 0{,}25\,R$ in der That der Fall sein wird.

Sofern der Gang des Rades von dem vortheilhaftesten nicht erheblich verschieden ist, kann in dem auf den Wasserverlust bezüglichen Factor des Ausdrucks (5) von E

$$v = 0{,}4\,u, \text{ also } \left(\frac{u}{u-v}\right)^2 = \frac{25}{9}$$

gesetzt werden. Mit $e = \dfrac{2\pi R}{z}$ ist er dann

$$= 1 - \frac{4{,}6\,R}{a_1 z^2},$$

und wenn ferner statt der Subtraction von E_1 das Hauptglied mit einem Factor $\mu < 1$ multiplicirt wird, welcher zugleich der unvollkommenen Stosswirkung an den Schaufelrändern Rechnung trägt, ergiebt sich

$$E = \mu\frac{\gamma F u}{g}\left(1 - \frac{4{,}6\,R}{a_1 z^2}\right)(u-v)\,v \ldots\ldots\ldots (7).$$

Mit der Erfahrung scheint dieser Ausdruck in ziemlich guter Uebereinstimmung zu sein, wenn

$$\mu = 0{,}88 \text{ oder } \frac{\mu\gamma}{g} = 90$$

gesetzt wird, also

$$E = 90\left(1 - \frac{4{,}6\,R}{a_1 z^2}\right) F u (u - v) v \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

oder auch

$$E = 90\left(1 - \frac{25}{z^2}\right) F u (u - v) v \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9),$$

entsprechend $a_1 = 0{,}184\,R$ im Durchschnitt. Von der Schaufelzahl z bleibt E in hohem Grade abhängig, indem

$$\text{für } z = 10 \quad \text{bis} \quad 20$$

$$90\left(1 - \frac{25}{z^2}\right) = 67{,}5 \quad „ \quad 84{,}4$$

sich ergiebt. Setzt man in Gl. (7)

$$\mu\left(1 - \frac{4{,}6\,R}{a_1 z^2}\right) = 0{,}88\left(1 - \frac{25}{z^2}\right) = \mu_1$$

und $v = 0{,}4\,u$, so wird

$$E = \mu_1 \frac{\gamma Q}{g} \cdot 0{,}24\,u^2 = 0{,}48\,\mu_1 \gamma Q \frac{u^2}{2g},$$

entsprechend einem Wirkungsgrade

$$\eta = 0{,}48\,\mu_1 = \quad 0{,}32 \quad \text{bis} \quad 0{,}40$$
$$\text{für } z = 10 \qquad „ \quad 20.$$

Dass er etwas grösser ist, als bei unterschlächtigen Stossrädern im Gerinne, liegt an der anderen Auffassung von Q, bei welcher Spielräume nicht in Betracht kommen, sowie daran, dass hier u eine gegebene Grösse und nicht erst mit Verlust aus einem Gefälle H zu gewinnen ist. Uebrigens ist dieses η hier ohne technisch-wirthschaftliche Bedeutung.

§. 27. Das Poncelet-Rad.

Dasselbe bezweckt dadurch eine bessere Verwerthung der durch das Gefälle ausserhalb des Rades erzeugten lebendigen Kraft des Wassers, dass dieses, indem es an der hohlen Seite passend gekrümmter Schaufeln (von Eisenblech) relativ empor- und zurückfliesst, durch stetigen Druck anstatt durch Stoss Arbeit leistet, und dass zugleich dem Wasser nach seinem Ausflusse aus dem Rade eine kleinere lebendige Kraft verbleibt, indem bei entsprechender Schaufelstellung aus der Umfangsgeschwindigkeit v des Rades und der (hier nicht verschwindend kleinen) relativen Ausflussgeschwindigkeit w_1 des Wassers eine absolute Ausflussgeschwindigkeit u_1 desselben resultiren kann, welche erheblich $< v$ ist. Der Wasserzufluss wird durch eine Spannschütze regulirt, deren Mündungshöhe die

Dicke a_1 des zufliessenden Wasserstroms bestimmt, während seine mittlere Geschwindigkeit u, bei passendem Abhange des Schussgerinnes von der Mündung bis zum Einflusse in das Rad nahe gleich bleibend, nach Gl. (7) im §. 24 auch hier

$$u = \sqrt{\frac{2gH}{1+\zeta}} = \sqrt{\frac{2gH}{1{,}15}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

gesetzt werden kann, indem mit $\zeta = 0{,}15$ den Widerständen der Schütze und des durch entsprechende Anordnung derselben möglichst kurz zu haltenden Schussgerinnes zusammen genügend Rechnung getragen wird.

Das Ponceletrad ist besonders für Gefälle $H = 0{,}75$ bis 1,5 Mtr. geeignet, findet sich aber auch bei

$$\begin{array}{rll}
H = & 0{,}5 & \text{bis } 2 \text{ Mtr.} \\
\text{Dabei pflegt } R = & 1{,}5 & \text{„} \ 3 \ \text{„ zu sein} \\
= & 3H & \text{„} \ 1{,}5H \\
\text{und die Schaufelzahl } z = & 32 & \text{„} \ 48, \\
\text{entsprechend der Theilung } e = & 0{,}3 & \text{„} \ 0{,}4 \text{ Mtr.;} \\
\text{ferner } a_1 = & 0{,}12 & \text{„} \ 0{,}24 \ \text{„} \\
= & 0{,}24H & \text{„} \ 0{,}12H = 0{,}08R
\end{array}$$

im Durchschnitt, sofern nicht die Rücksicht auf die Radbreite b einen etwas anderen Werth von a_1 vorziehen lässt; mit der etwas grösseren Breite b_1 des Zuflussgerinnes ist nämlich a_1 durch die Gleichung verbunden:

$$Q = a_1 b_1 u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2).$$

Dem Schussgerinne wird passend ein solcher Abhang α_1 gegeben, dass die das Wasser beschleunigende Componente der Schwere mit der Reibung ungefähr im Gleichgewichte ist und somit u von der Schützenmündung bis zum Rade weder wesentlich zu- noch abnimmt. In der Regel genügt dazu

$$\alpha_1 = 0{,}035 \, (= 2^0),$$

während bei aussergewöhnlichen Verhältnissen α_1 von H und a_1 abhängig zu machen wäre. Wird z. B. nach der von Bazin aus seinen betreffenden Versuchen abgeleiteten empirischen Formel (Bd. I., §. 126, Gl. 12), unter r_1 die mittlere hydraulische Tiefe des Schussgerinnes verstanden,

$$u = \sqrt{\frac{r_1 \alpha_1}{m + \frac{n}{r_1}}}$$

gesetzt mit $m = 0{,}0002$ und $n = 0{,}000012$, ausserdem r_1 näherungsweise $= a_1$, so folgt

$$10000\,\alpha_1 = \frac{u^2}{a_1}\left(2 + \frac{0,12}{a_1}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

und mit $u^2 = \frac{2gH}{1,15} = 17\,H$

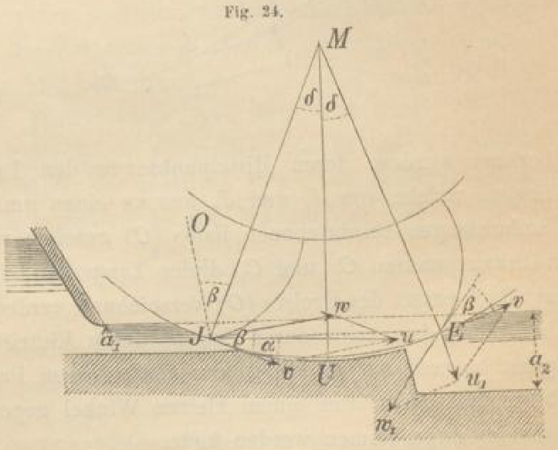
$$\begin{aligned} \text{insbesondere für } H &= 0,5 \text{ bis } 2 \text{ Mtr.} \\ \text{und } a_1 &= 0,12 \quad \text{bezw.} \quad 0,24 \text{ Mtr.} \\ \alpha_1 &= 0,0212 \quad " \quad 0,0354 \\ \text{im Gradmass} &= 1^0\,13' \quad " \quad 2^0\,2'. \end{aligned}$$

Für $H = 2$ und $a_1 = 0,12$ dagegen ergäbe sich

$$\alpha_1 = 0,085\,(= 4^0\,52').$$

Unter dem Rade lässt man den Gerinneboden in eine Kröpfung übergehen, welche mit möglichst kleinem Spielraume s einen Umfangsbogen ungefähr $= 2\,e$ umfasst (Figur 24) und an welche sich ein Abfall anschliesst, der passend sobemessen wird, dass die Oberfläche des Unterwassers nahe in gleiche Höhe mit dem oberen Endpunkte des Einlaufbogens zu liegen kommt, und dass die Tiefe a_2 des abfliessenden Wassers dicht am Rade der horizontalen Componente u_2 der absoluten Austrittsgeschwindigkeit u_1 entspricht gemäss der Gleichung

Fig. 24.



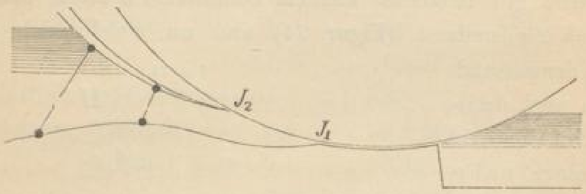
$$a_2 u_2 = a_1 u,$$

sofern nicht etwa u_2 kleiner ist, als die (wenigstens dafür zu setzende) Geschwindigkeit, mit welcher das Wasser im weiteren Verlauf im Abflussgerinne fliessen soll, oder sofern nicht durch Verbreiterung der letztern die nöthige Tiefe a_2 verkleinert wird.

Das gerade Zuflussgerinne, Fig. 24, ist mit dem Nachtheil verbunden, dass die ankommenden Wasserfäden die Peripherie des Rades in den verschiedenen Punkten des Einlaufbogens unter verschiedenen Winkeln schneiden, im unteren Endpunkte unter erheblich kleinerem, als im oberen, während eine bestimmte Grösse α dieses Winkels erforderlich ist, um das

Wasser ohne Stoss gegen die Schaufeln einfliessen zu lassen, nämlich die relative Zuflussgeschwindigkeit w = der Resultanten von u und $-v$ tangential an das betreffende Schaufelprofil zu richten. Diese Verhältnisse werden verbessert durch passende Krümmung des Gerinnebodens (Fig. 25) und des (in solchem Falle eisernen) Schutzbrettes, welches letztere bis dicht an das Rad herangeführt und durch Lenkstangen mit dem Gerinneboden verbunden ist, so dass dadurch zugleich eine sehr leichte Beweglichkeit desselben erreicht wird und eine Führung des Wassers bis zum Rade von oben und unten zwischen Leitflächen. Die Profile der letzteren schneiden die Radperipherie in den Endpunkten J_1 und J_2 des Einlaufbogens unter gleichen Winkeln α, wenn sie in diesen Punkten von Kreisen

Fig. 25.



berührt werden, deren Mittelpunkte in den Tangenten J_1C_1 und J_2C_2 liegen, welche von J_1 und J_2 aus an einen um den Mittelpunkt M des Radumfanges beschriebenen Kreis (C) gezogen werden, z. B. in den Berührungspunkten C_1 und C_2 dieser Tangenten, indem etwa jene Profile als Evolventen des Kreises (C) verzeichnet werden. Letzterer ist dadurch bestimmt, dass seine durch den mittleren Eintrittspunkt J gehende Tangente normal zur Richtung von u in diesem Punkte sein muss, welche horizontal oder unter einem kleinen Winkel gegen den Horizont abwärts geneigt angenommen werden kann. —

Zur Gewinnung eines Ausdruckes für den **Wirkungsgrad** werde vorläufig angenommen, dass **alle Wassertheilchen sich ebenso bewegen, wie ein im Punkte J einfliessendes isolirtes Theilchen, wenn bei seinem Eintritte eine Schaufel eben diesen Punkt J passirt hat.** Damit das Wassertheilchen sich in Berührung mit der concaven Schaufelfläche an dieser entlang bewege, ohne einen Stoss gegen sie ausgeübt und dadurch einen Verlust an äusserem Arbeitsvermögen erlitten zu haben, muss der Radumfang von der relativen Eintrittsgeschwindigkeit w unter demselben Winkel β geschnitten werden wie vom Schaufelprofil, muss also

$$u \sin(\beta - \alpha) = v \sin\beta \quad \text{. . . . . (4)}$$

sein, welche Gleichung unmittelbar ausdrückt, dass die zur Schaufel normal gerichteten Componenten von u und v in gleichem Sinne gleich gross sind. Mit der relativen Geschwindigkeit

$$w = u \cos(\beta - \alpha) - v \cos\beta$$

beginnt dann das Wasser an der Schaufel entlang aufwärts zu fliessen, während sie mit dem Rade sich um dessen Axe dreht, bis die relative Geschwindigkeit $= 0$ geworden ist durch die gleichzeitige Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft als erster Ergänzungskraft der relativen Bewegung. (Die zweite, stets normal zur relativen Geschwindigkeit, ändert ihre Grösse nicht.) Das Zurückfliessen längs der Schaufel wird durch dieselben Kräfte beschleunigt, und wenn nun die Anordnung so getroffen ist, dass der Austrittspunkt E in gleicher Höhe mit dem Eintrittspunkte J liegt, so ist, abgesehen von der Reibung des Wassers an der Schaufel und von der gegenseitigen Störung der Wassertheilchen in ihrer Bewegung, die oben mit w_1 bezeichnete relative Austrittsgeschwindigkeit wieder $= w$. Unter u_1 die entsprechende absolute Austrittsgeschwindigkeit, ferner unter Q_1 den hier nur durch den Spielraum zwischen Rad und Gerinne verursachten Wasserverlust pro Sek. und unter E_1 den Effectverlust durch Nebenwiderstände verstanden, welche hier wesentlich auch die erwähnten Widerstände der relativen Bewegung des Wassers in den Schaufelräumen in sich begreifen, ist der Nutzeffect

$$E = \gamma (Q - Q_1) \frac{u^2 - u_1^2}{2g} - E_1$$

oder wegen

$$u^2 = v^2 + w^2 + 2vw \cos\beta$$
$$u_1^2 = v^2 + w^2 - 2vw \cos\beta$$

also

$$u^2 - u_1^2 = 4vw \cos\beta = 4v(u \cos\alpha - v)$$

und mit den im §. 24 benutzten Bezeichnungen

$$\sigma = \frac{Q_1}{Q} \text{ und } \vartheta = \frac{E_1}{E_0}$$

$$E = \gamma Q (1 - \sigma) \frac{2(u \cos\alpha - v)v}{g} - \vartheta E_0$$

$$\eta = (1 - \sigma) \frac{2(u \cos\alpha - v)v}{gH} - \vartheta \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5).$$

Die Vergleichung mit dem Ausdrucke (5) im §. 24 lässt erkennen, dass ohne ϑ dieser Wirkungsgrad nahe doppelt so gross ist wie beim unterschlächtigen Stossrade, da α so klein gemacht werden kann ($< 20^0$), dass $\cos\alpha$ nahe $= 1$ ist; freilich ist ϑ hier grösser.

Wäre ϑ ebenso, wie es von σ angenommen werden kann, unabhängig von v, so wäre nach (5) bei gegebenen Werthen von H, u, α

$$\eta = max \text{ für } v = \frac{u \cos \alpha}{2}.$$

Aus Versuchen von Poncelet, Morin u. A. ist jedoch zu schliessen, dass thatsächlich hier im Durchschnitt

$$v = 0{,}5\sqrt{2gH} \qquad (6)$$

dem Maximum von η entspricht, nach Gl. (1) also das Geschwindigkeitsverhältniss

$$\frac{u}{v} = \frac{1}{0{,}5\sqrt{1{,}15}} = \frac{1}{0{,}536} = 1{,}866 \qquad (7).$$

Für diesen vortheilhaftesten Gang des Rades ist in (5)

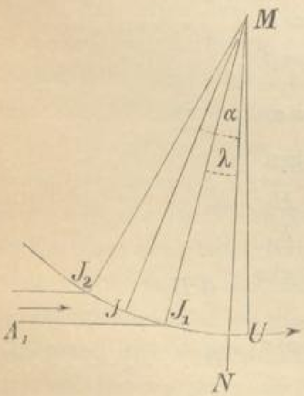
$$\frac{2(u\cos\alpha - v)v}{gH} = 2\left(\frac{u}{v}\cos\alpha - 1\right)\frac{v^2}{gH} = 1{,}866\cos\alpha - 1,$$

etwa $= 0{,}8$ mit $\alpha = 15^0 15'$, somit

$$\eta = 0{,}8(1-\sigma) - \vartheta \qquad (8).$$

Eine nähere theoretische Bestimmung von η ist kaum thunlich. Lässt sich auch σ nahe = dem Verhältnisse der Spaltweite s zur Strahldicke a_1 setzen, so entzieht sich doch ϑ einer zuverlässigen Vorausbestimmung durchaus mit Rücksicht auf die Natur der mancherlei störenden Einflüsse, welchen dieses Glied Rechnung zu tragen hat. Erfahrungsmässig kann bei passender Anordnung und bei nahe günstigstem Gange auf $\eta = 0{,}6$ bis $0{,}65$ gerechnet werden.

Fig. 26.



Wichtig ist aber beim Ponceletrade die Feststellung der Beziehungen zwischen den Radelementen, welche einen möglichst grossen Wirkungsgrad erwarten lassen; diese Elemente sind zu mannichfaltig, als dass ihre besten Verhältnisse lediglich durch Versuche zu finden wären.

1) Eine erste solche Beziehung entspricht der Forderung, dass die Kröpfung des Gerinnebodens einen angemessenen Umfangsbogen des Rades ungefähr $= 2e =$ der doppelten Theilung umfasse. Ist $J_1 J_2$ in Fig. 26 der Einlaufbogen, J sein Mittelpunkt, $A_1 J_1$ das Profil des Schussgerinnebodens, unter dem oben besprochenen kleinen Winkel $\alpha_1 = 2^0$ im

Durchschnitt gegen den Horizont geneigt, MN normal zu $A_1 J_1$ (Winkel $UMN = \alpha_1$), so soll also, wenn MN als Mittellinie der Kröpfung angenommen wird,

$$\text{Winkel } NMJ_1 = \lambda \text{ ungefähr } = \frac{e}{R} = \frac{2\pi R}{z} \quad \ldots\ldots (9)$$

sein, während der Winkel $NMJ = \alpha$ ist, indem seine Schenkel MN und MJ normal bezw. zu den Geschwindigkeitsrichtungen u und v im Punkte J sind. Der Winkel NMJ_2 ist dann

$$= \lambda + 2(\alpha - \lambda) = 2\alpha - \lambda$$

und somit die Dicke a_1 des zufliessenden Wasserstroms = dem Abstande des Punktes J_2 von $A_1 J_1$:

$$a_1 = R\left[\cos\lambda - \cos(2\alpha - \lambda)\right].$$

Mit Rücksicht auf eine bekannte goniometrische Formel folgt daraus

$$\frac{a_1}{R} = 2\sin\alpha \sin(\alpha - \lambda) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (10).$$

2) Die wenigstens erforderliche Kranzbreite a ferner, damit das in einen Schaufelraum eingeflossene Wasser nicht über den inneren Schaufelrand weg fliessen oder im Falle eines Radbodens nicht durch diesen in seiner Bewegung gehemmt werden könne, ergiebt sich durch folgende Ueberlegung, wieder zunächst bezüglich der Bewegung eines isolirten Wassertheilchens, welches im Punkte J einfliesst, nachdem eine Schaufel eben vorbeigegangen ist. Die relative Bewegung dieses Wassertheilchens an der Schaufel wird verzögert durch die vereinigte Wirkung der Schwere und der Centrifugalkraft, deren Richtungen bezw. vertical und radial, und deren Grössen pro Masseneinheit

$$\text{bezw.} = g \text{ und } = \frac{v^2}{R^2} x \cdot$$

sind, unter x die augenblickliche Entfernung des Theilchens von der Radaxe verstanden. Bezeichnet also r den im Augenblicke seiner relativen Ruhe erreichten Minimalwerth von x, ε den Winkel, welchen der nach der betreffenden Stelle gezogene Radius mit der Verticalen MU (Fig. 26) bildet, und δ den Winkel $UMJ = \alpha + \alpha_1$, so ist

$$R\cos\delta - r\cos\varepsilon$$

die von J aus erreichte Höhe, also abgesehen von Reibung und sonstigen Widerständen r bestimmt durch die Gleichung:

$$\frac{w^2}{2} = g(R\cos\delta - r\cos\varepsilon) + \int_r^R \frac{v^2}{R^2} x\,dx.$$

Aus derselben folgt:

$$w^2 = 2\,g\,R\left(\cos\delta - \frac{r}{R}\cos\varepsilon\right) + v^2\,\frac{R^2 - r^2}{R^2}$$

oder wegen $w^2 = u^2 + v^2 - 2\,u\,v\cos\alpha$

$$\frac{w^2 - v^2}{v^2} = \frac{u\,(u - 2\,v\cos\alpha)}{v^2} = \frac{2\,g\,R}{v^2}\left(\cos\delta - \frac{r}{R}\cos\varepsilon\right) - \frac{r^2}{R^2}$$

und mit Rücksicht auf (6) und (7):

$$\frac{r^2}{R^2} + 4\,\frac{R}{H}\cos\varepsilon\,.\,\frac{r}{R} = 4\,\frac{R}{H}\cos\delta - 1{,}866\,(1{,}866 - 2\cos\alpha).$$

Da δ nur wenig $> \alpha$ und ε jedenfalls ein sehr kleiner Winkel ist, setzt man beide Seiten der gewonnenen Gleichung nur sehr wenig zu gross mit

$$\cos\delta = \cos\alpha \text{ und } \cos\varepsilon = 1,$$

was darauf hinauskommt, die von J aus erreichte Höhe des Wassertheilchens

$$= R\cos\alpha - r$$

zu setzen. Die Gleichung für r wird dadurch:

$$\left(\frac{r}{R}\right)^2 + 4\,\frac{R}{H}\cdot\frac{r}{R} = \left(4\,\frac{R}{H} + 3{,}73\right)\cos\alpha - 3{,}48 \;.\;.\;.\;.\;. \quad (11).$$

Der daraus folgende Minimalwerth $= R - r$ der Kranzbreite a genügt indessen noch nicht aus verschiedenen Gründen. Zunächst ist zu bedenken, dass ein bei J_2 (Fig. 26) eintretendes isolirtes Wassertheichen höher hinauf bis zu einer kleineren Entfernung r von der Radaxe gelangt, welche näherungsweise aus (11) gefunden würde, wenn darin α durch den Winkel NMJ_2 (Fig. 26) $= 2\,\alpha - \lambda$ ersetzt wird. Auch werden die bei J_2 zuerst in den Schaufelraum eingetretenen Wassertheilchen, wenn sie für sich allein zu relativer Ruhe gelangt sein würden, thatsächlich an ihrer rückläufigen Bewegung durch das nachfolgende Wasser zunächst noch gehindert; sie werden durch letzteres noch etwas weiter aufwärts in den Schaufelraum hineingedrängt. Dem Ergebnisse dieser zusammengesetzten und theoretischer näherer Prüfung unzugänglichen Umstände wird man voraussichtlich wenigstens nahe kommen mit der Annahme, dass die ganze Wasserfüllung eines Schaufelraums gleichzeitig seine rückläufige Bewegung beginnt in einem Augenblicke, in welchem sie sich zur Hälfte innerhalb, zur Hälfte ausserhalb der mit dem Rade coaxialen Cylinderfläche befindet, deren Halbmesser r durch (11) bestimmt ist. Nun ist abgesehen von Q_1 pro Längeneinheit der Radbreite das Wasservolumen eines Schaufelraumes $= a_1\,u\,\dfrac{e}{v}$, und wenn man selbst günstigsten Falles annimmt, dass im Augenblicke der Bewegungsumkehr die innere Hälfte desselben den Raum zwischen beiden Schaufeln, der hier eine mittlere Weite etwas $< \frac{r}{R} e$ normal zum Radius gemessen besitzt, ganz ausfüllt, so ergiebt sich die Strecke, um welche das Wasser die Cylinderfläche zum Halbmesser r nach radialer Richtung einwärts überschreitet, etwas

$$> \frac{1}{2} a_1 u \frac{e}{v} : \frac{r}{R} e, \text{ d. i.} > \frac{a_1}{2} \frac{u}{v} \frac{R}{r},$$

nach (7) etwas $> 0{,}93\, a_1 \frac{R}{r}$, nahe $= a_1 \frac{R}{r}$. Für die Kranzbreite folgt also schliesslich die Bedingung:

$$a > R - r + a_1 \frac{R}{r} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

mit dem durch (11) bestimmten Werthe von r = der positiven Wurzel dieser Gleichung.

3) Wichtig ist auch die passende Wahl der Schaufelform, bezw. des Krümmungshalbmessers ϱ des, wie üblich, als Kreisbogen anzunehmenden Profils der cylindrischen Schaufelfläche. Er ist davon abhängig zu machen, dass das Wasser, indem es in einem Schaufelraume hin- und zurückfliesst, durch eine resultirende Kraft beständig gegen die hohle Seite der ihn begrenzenden vorderen Schaufel gedrängt und somit, durch sie geführt, eine möglichst regelrechte zwangläufige strömende Bewegung behalte. Solche Unregelmässigkeiten, welche von gegenseitigen Störungen der Wassertheilchen herrühren, sind freilich unvermeidlich, und kann es sich hier wieder nur um die Bewegung eines als materieller Punkt zu betrachtenden isolirten Theilchens handeln, dessen Normaldruck N auf seine Leitfläche beständig positiv, nämlich nach vorn gegen die hohle Seite hin gerichtet bleiben soll.

Ist K die bewegende Kraft eines solchen an einer Fläche beweglichen Punktes (an ihrer concaven Seite, wie dem vorliegenden Falle entsprechend angenommen werde), so ist seine Bewegung abgesehen von Reibung identisch mit der durch die Kräfte K und $-N$ bestimmten freien Bewegung, unter $-N$ eine dem Normaldrucke N entgegengesetzt gleiche Kraft verstanden. Indem die resultirende Kraft $= Res.\,(K, -N)$ des frei beweglichen Punktes auch in eine Centripetalkraft P und Tangentialkraft T zerlegt werden kann, ist

$$Res.\,(K, -N) = Res.\,(P, T),$$

wo das Zeichen $\equiv$ die Aequivalenz, nämlich die Uebereinstimmung nach Grösse und Richtung bedeuten soll. Daraus folgt, dass die Kräfte

$$K, \ -N, \ -P, \ -T$$

an dem materiellen Punkte sich Gleichgewicht halten. Indem dann ede von ihnen, in entgegengesetztem Sinne genommen, den übrigen zusammen äquivalent ist, ergiebt sich, falls mit F die Centrifugalkraft $= -P$ bezeichnet wird,

$$N \equiv Res.(K, \ F, \ -T).$$

Werden K, F in die zur Fläche normalen Componenten K_n, F_n und in tangentiale Componenten zerlegt, so sind also letztere mit $-T$ im Gleichgewicht und ist

$$N = F_n \pm K_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (13).$$

F_n und K_n sind absolut verstanden. Vor K_n gilt das obere oder untere Zeichen, jenachdem diese Kraftcomponente gegen die hohle Seite der Fläche hin oder umgekehrt gerichtet ist, also ohne die stets in ersterem Sinne wirkende Kraftcomponente F_n einem positiven oder negativen Werthe des algebraisch verstandenen Normaldruckes N entsprechen würde.

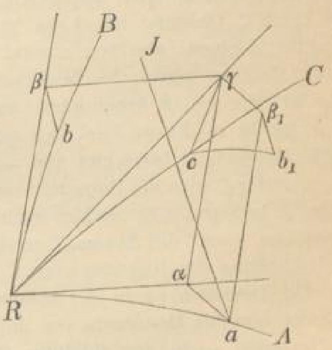
Hat die Leitfläche, wie hier die Schaufelfläche, eine eigene Bewegung, so kann diese in jedem Zeitelement als zusammengesetzt betrachtet werden aus der Translation eines mit der Fläche fest verbundenen Punktes S und aus der Rotation mit einer gewissen Winkelgeschwindigkeit ω um eine durch S gehende augenblickliche Drehaxe (Momentanaxe); je nach der Wahl von S ist die Translation von verschiedener Grösse und Richtung, die Momentanaxe von verschiedener Lage, aber die Richtung der letzteren und die Winkelgeschwindigkeit ω bleiben unverändert. In solchem Falle ist F die relative Centrifugalkraft, K die relative bewegende Kraft des materiellen Punktes. Letztere ist die Resultante der absoluten bewegenden Kraft und von zwei sogenannten Ergänzungskräften, welche nämlich hinzugedacht werden müssen, um die relative Bewegung gerade so zur Folge zu haben, als ob sie eine absolute Bewegung wäre. Pro Masseneinheit des materiellen Punktes ist die erste Ergänzungskraft gleich gross und entgegengesetzt gerichtet der Beschleunigung des mit ihm augenblicklich zusammenfallenden Leitflächenpunktes, die zweite $= 2\,\omega w'$, wenn ω die augenblickliche Winkelgeschwindigkeit der Fläche um die Momentanaxe, w' die Projection der augenblicklichen relativen Geschwindigkeit w des materiellen Punktes gegen die Leitfläche auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene E bedeutet; die Richtung dieser zweiten Ergänzungskraft ergiebt sich, wenn die Richtung von w' in der Ebene E entgegengesetzt dem Drehungssinne von ω um 90^0 gedreht wird.*

---

* Der hier benutzte Satz, betreffend die relative Bewegung eines materiellen Punktes P in Beziehung auf ein selbst in Bewegung begriffenes starres System, ist von so grosser Bedeutung für manche Probleme der Maschinenlehre und wird im Folgenden so oft in Betracht kommen, dass seine Begründung hier beigefügt werden mag.

S sei der Punkt des Systems, mit welchem zur Zeit t der materielle Punkt P im Punkte R des absoluten Raumes zusammenfällt. In diesem sei RA (Fig. 27) die Bahn von S, ihr Bogenelement Ra der Weg im Zeitelement dt, $R\alpha$ der Weg, welchen S in demselben Zeitintervall dt in der Tangente (an RA in R) mit der Geschwindigkeit v durchlaufen haben würde, welche S am Orte R, also zur Zeit t besitzt. Die Gerade αa, unendlich klein zweiter Ordnung, heisst die Deviation in der absoluten Bewegung von S; sie stimmt der Richtung nach mit der Beschleunigung zur Zeit t überein, ihre Grösse ist = dieser Beschleunigung multiplicirt mit $\frac{dt^2}{2}$.

Fig. 27.



RB sei die Lage der relativen Bahn von P im System zur Zeit t, Rb der Weg in ihr während dt, $R\beta$ der Weg, welcher gleichzeitig in der Tangente (an RB in R) mit der augenblicklichen relativen Geschwindigkeit w von P durchlaufen sein würde; βb ist dann die Deviation in der relativen Bewegung von P.

Nun ist die Diagonale $R\gamma$ des Parallelogramms über $R\alpha$ und $R\beta$ der Weg, welchen P während dt mit der augenblicklichen (dem Orte R oder Zeitmoment t entsprechenden) absoluten, aus v und w zusammengesetzten, Geschwindigkeit durchlaufen hätte; sie berührt die absolute Bahn RC von P im Punkte R. Die Gerade γc ist die Deviation in der absoluten Bewegung von P, wenn c der Ort dieses Punktes im absoluten Raume zur Zeit $t + dt$ ist. Derselbe ergiebt sich durch folgende Erwägung.

Denkt man zunächst das System während dt unbewegt, so kommt P im absoluten Raume von R nach b. Dann führe das System, während P mit ihm fest verbunden bleibt, seine Elementarbewegung aus, welche zerlegt werden kann in eine Translation, durch welche S von R nach a kommt, und in eine Drehung = ωdt um die betreffende Momentanaxe aJ; die Richtung der letzteren in Fig. 27 entspricht zugleich dem Sinn der Drehung in üblicher Weise, indem sie nämlich rechtläufig sein soll für ein von J nach a blickendes Auge. Da die Verschiebung Ra in $R\alpha$ und αa zerlegt werden kann, gelangt durch sie β nach β_1, also b (mit P) nach b_1, wenn $\gamma\beta_1$ parallel und = αa, $\beta_1 b_1$ parallel und = βb ist. In Folge der Drehung = ωdt um aJ durchläuft dann noch P einen Kreisbogen $b_1 c$, der als gerade Linie

Im vorliegenden Falle kann von vornherein angenommen werden, dass das Wassertheilchen sich in einem Profil der Schaufelfläche (einem Kreisbogen zum Halbmesser ϱ), also in einer zur Radaxe senkrechten Ebene bewegt; diese ist eine Ebene E, indem die Schaufel um die Radaxe mit der constanten Winkelgeschwindigkeit ω rotirt. Unter diesen Umständen ist F_n identisch mit F, w' identisch mit w; die erste Ergänzungskraft ist radial auswärts gerichtet und pro Masseneinheit $= \omega^2 x$ in der Entfernung x von der Radaxe, die zweite Ergänzungskraft, pro Masseneinheit $= 2\,\omega w$, ist normal zur Schaufel wie F, jedoch nicht wie F stets gegen die Schaufel hin, sondern gegen sie hin oder umgekehrt gerichtet,

---

betrachtet werden kann, senkrecht zur Ebene Jab_1 und in der Figur nach vorn gerichtet. Weil übrigens $a\beta_1 = R\beta$ unendlich klein 1. Ordnung, $\beta_1 b_1 = \beta b$ unendlich klein 2. Ordnung ist, kann mit Vernachlässigung von verhältnissmässig unendlich kleinen, also von absolut unendlich kleinen Grössen 3. Ordnung für den bei der Drehung von b_1 beschriebenen Bogen, welcher selbst unendlich klein 2. Ordnung ist, der von β_1 beschriebene substituirt werden, oder es kann die Gerade $b_1 c$ als senkrecht zur Ebene $J a \beta_1$ (als senkrecht zur Momentanaxe aJ und zur relativen Geschwindigkeit w) betrachtet und $= p\,\omega\,dt$ gesetzt werden, wenn p das Perpendikel von β_1 auf aJ oder die Projection von $a\beta_1 = R\beta = w\,dt$ auf eine zu aJ senkrechte Ebene E bedeutet. Es ist also auch $b_1 c = w'dt\,.\,\omega\,dt = \omega\, w' dt^2$, unter w' die Projection von w auf die Ebene E verstanden, und ergiebt sich die Richtung von $b_1 c$ durch Drehung der Richtung von w' in E um 90^0 im Sinne von ω.

Die Deviation γc in der zusammengesetzten oder absoluten Bewegung von P erscheint nun als Resultante von drei Strecken: 1) $\gamma\beta_1$ gleich und gleich gerichtet der Deviation αa in der absoluten Bewegung des mit P augenblicklich zusammenfallenden Systempunktes S, 2) $\beta_1 b_1$ gleich und gleich gerichtet der Deviation βb in der relativen Bewegung von P, 3) $b_1 c = \omega w' dt^2$, gerichtet wie die Projection w' der relativen Geschwindigkeit w auf eine zur Momentanaxe senkrechte Ebene nach der Drehung in dieser um 90^0 im Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω des Systems um die Momentanaxe. Wegen

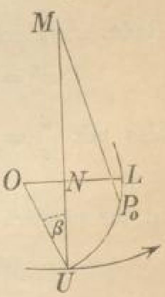
$$\text{Deviation} = \text{Beschleunigung mal } \frac{dt^2}{2}$$

ist die absolute Beschleunigung von P entsprechend zusammengesetzt aus der absoluten Beschleunigung von S, der relativen Beschleunigung von P und aus einer Beschleunigung $= 2\,\omega w'$, gerichtet wie von $b_1 c$ angegeben.

Weil endlich in dem räumlichen Viereck $\gamma\beta_1 b_1 c\gamma$ sich $\beta_1 b_1$ als Resultante von $\beta_1\gamma$, γc und $c b_1$ darstellt, ist die relative Beschleunigung (relative bewegende Kraft pro Masseneinheit) des Punktes P die Resultante der absoluten Beschleunigung dieses Punktes, der entgegengesetzt genommenen Beschleunigung des mit ihm augenblicklich zusammenfallenden Systempunktes und einer Beschleunigung $= 2\,\omega w'$, deren Richtung sich ergiebt, indem die Projection w' der relativen Geschwindigkeit von P auf eine zur Momentanaxe des Systems senkrechte Ebene in dieser um 90^0 gedreht wird entgegengesetzt dem Sinne der Winkelgeschwindigkeit ω des Systems um jene Momentanaxe.

jenachdem das Wassertheilchen sich einwärts oder auswärts an ihr entlang bewegt. Erstere Ergänzungskraft heisse die absolute, letztere die zusammengesetzte Centrifugalkraft. Indem endlich die absolute bewegende Kraft bei Abstraction von Reibungswiderständen lediglich in der Schwerkraft besteht, ist nach (13) hier der Normaldruck eines Wassertheilchens gegen die betreffende Schaufel = der algebraischen Summe der relativen und der zusammengesetzten Centrifugalkraft, sowie der zur Schaufel normal gerichteten Componenten der Schwerkraft und der absoluten Centrifugalkraft. Während das Wassertheilchen an der Schaufel aufwärts fliesst, sind die zwei ersten dieser vier Einzelkräfte normal gegen die Schaufel hin gerichtet, welche auch gegen die Richtungen der Schwerkraft und der absoluten Centrifugalkraft sich noch in günstigerer Lage befindet, als bei der rückläufigen Bewegung des Theilchens. Es genügt deshalb, für letztere durch passende Wahl von ϱ einen positiven (nach vorn gerichteten) Normaldruck zu sichern. Indem sich annehmen lässt, dass dieser Forderung für die ganze rückgängige Bewegung genügt sein wird, wenn es mit einem mässigen Ueberschusse von Sicherheit für den Anfang und das Ende derselben der Fall ist, werde zunächst jener Anfang, nämlich der Augenblick betrachtet, in welchem das Wassertheilchen in relativer Ruhe gegen das Rad sich am meisten dessen Axe genähert hat.

Fig. 28.



Die betreffende Schaufel ist dann nur sehr wenig von ihrer tiefsten Lage UL, Fig. 28, entfernt. In dieser Figur bedeutet P_0 die relative Ruhelage des Theilchens, O den Mittelpunkt des Kreises zum Radius ϱ, von welchem UL ein Bogen ist, ONL eine horizontale, also zu MU senkrechte Gerade. Mit $w = 0$ sind im fraglichen Augenblicke auch die relative und zusammengesetzte Centrifugalkraft = 0. Die Schwerkraft würde einen positiven Normaldruck bewirken, wenn P_0 unter L, die absolute Centrifugalkraft allein, wenn P_0 unter dem Punkte läge, in welchem das Schaufelprofil oberhalb L von einer durch M gehenden Geraden berührt wird. Mit Rücksicht auf beide Kräfte zusammen gewährt also die Forderung

$$MP_0 > ML$$

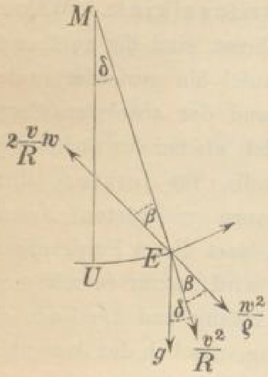
eine überschüssige Sicherheit. Für ein mittleres Theilchen der Wasserfüllung des betreffenden Schaufelraums wäre dabei MP_0 = der durch (11) bestimmten Strecke r zu setzen. Mit Rücksicht auf die vorderen Theilchen ist es aber rathsamer, MP_0 nach (12) nicht grösser als $r - a_1$ zu nehmen, und ergiebt sich so, wie aus Fig. 28 leicht ersichtlich ist, die folgende einer wenigstens erforderlichen Grösse von ϱ entsprechende Bedingung:

$$(r - a_1)^2 > (R - \varrho \cos\beta)^2 + (\varrho - \varrho \sin\beta)^2$$

$$(r - a_1)^2 > R^2 - 2 R \varrho \cos\beta + 2 \varrho^2 (1 - \sin\beta)$$

$$\left(\frac{\varrho}{R}\right)^2 (1 - \sin\beta) - \frac{\varrho}{R} \cos\beta + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r - a_1}{R}\right)^2\right] < 0 \quad \ldots (14).$$

Fig. 29.



Zu Ende der rückläufigen Bewegung des mittleren Wassertheilchens an der Stelle E (Fig. 29) ist seine relative Geschwindigkeit abgesehen von Widerständen wieder $= w$ wie beim Eintritte bei J (Figur 24). Die betreffenden Richtungen der den Normaldruck bedingenden vier Einzelkräfte sind in Fig. 29 durch Pfeile angedeutet und die Grössen pro Masseneinheit beigeschrieben. Es ergiebt sich daraus die Forderung:

$$2 \frac{v}{R} w < \frac{w^2}{\varrho} + \frac{v^2}{R} \cos\beta + g \cos(\beta + \delta),$$

welche übrigens bei günstigem Gange des Rades stets erfüllt ist. Wegen

$$w^2 = u^2 + v^2 - 2 u v \cos\alpha = \left(\frac{u^2}{v^2} + 1 - 2 \frac{u}{v} \cos\alpha\right) v^2,$$

also mit $\frac{u}{v} = 1{,}866$ nach (7) wegen

$$w^2 = (4{,}48 - 3{,}73 \cos\alpha) v^2 = \mu v^2$$

ist ihr nämlich die Form zu geben:

$$\frac{2\sqrt{\mu}}{R} v^2 < \frac{\mu v^2}{\varrho} + \frac{v^2}{R} \cos\beta + g \cos(\beta + \delta)$$

$$2\sqrt{\mu} < \mu \frac{R}{\varrho} + \cos\beta + \frac{g R}{v^2} \cos(\beta + \delta)$$

oder mit $v^2 = \frac{g H}{2}$ nach (6):

$$\frac{R}{\varrho} > \frac{1}{\mu}\left[2\sqrt{\mu} - \cos\beta - 2 \frac{R}{H} \cos(\beta + \delta)\right] \quad \ldots\ldots (15).$$

Durch diese Bedingung wird aber die zulässige Grösse von ϱ, wenn überhaupt, dann um so mehr eingeschränkt, je kleiner

$$\mu, \quad \frac{R}{H}, \quad \cos\beta \text{ und } \cos(\beta + \delta)$$

sind, und da

$$\mu > 0{,}8\,(\alpha > 9^0\,21'),\ \text{nahe}\ \sqrt{\mu} > 0{,}9$$
$$\frac{R}{H} > 1{,}5,\quad \cos\beta > 0{,}8\,(\beta < 36^0\,52'),$$
$$\cos(\beta+\delta) > 0{,}54\,(\beta+\delta < 57^0\,19')$$

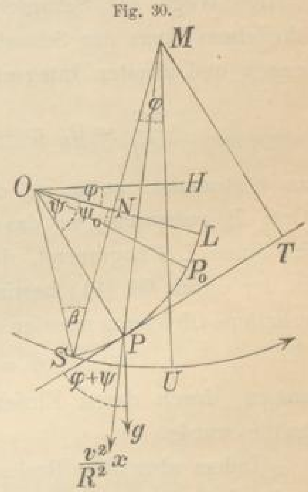
ist, folgt

$$\frac{R}{\varrho} > \frac{1}{0{,}8}(1{,}8 - 0{,}8 - 1{,}62),$$

wodurch thatsächlich ϱ nicht beschränkt wird. Die hier in Rede stehende Rücksicht führt also nur zur Grenzbedingung (14) für die Schaufelkrümmung.

4) Endlich bleibt der den bisherigen Erwägungen zu Grunde liegenden Voraussetzung gleicher Höhenlage der Punkte J und E (Fig. 24), in welchen das mittlere Wassertheilchen einer Schaufelraumfüllung ein- und austritt, durch eine Bedingungsgleichung zu entsprechen. Sie erfordert die Feststellung der Beziehung zwischen gleichzeitigen Wegen des Wassertheilchens längs der Schaufel und eines Schaufelpunktes in Beziehung auf die Erde. Zu dem Ende sei, während das Theilchen (abgesehen von störenden Einflüssen der übrigen, sowie von Reibungswiderständen) an der Schaufel SL emporsteigend sich in P (Fig. 30) befindet,

Fig. 30.



Winkel $UMS = HOL = \varphi$

(OH horizontal, ONL normal zu MS),

Winkel $LOP = \psi$, Strecke $MP = x$, MT parallel OP, PT normal dazu, also Tangente von SL. Die Beschleunigung des Wassertheilchens in seiner kreisförmigen relativen Bahn SL, welche einerseits $=$ Radius mal Winkelbeschleunigung um $O = \varrho \frac{d^2\psi}{dt^2}$ ist (positiv im Sinne LS), ist auch $=$ der Summe der nach TP gerichteten Componenten der vertical gerichteten Beschleunigung der Schwere und der im Sinne MP gerichteten absoluten Centrifugalbeschleunigung, indem die zusammengesetzte Centrifugalbeschleunigung ebenso wie der Bahnwiderstand als senkrecht zur Bahn ohne Antheil sind. Es ist also

$$\varrho\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = g\cos(\varphi+\psi) + \frac{v^2}{R^2}\,x\cos(MPT)$$

oder wegen

$$x\,cos\,(MPT) = MN\,.\,cos\,\psi + NO\,.\,sin\,\psi$$

$$\varrho\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = g\,cos\,(\varphi+\psi) + \frac{v^2}{R^2}\,[(R-\varrho\,cos\,\beta)\,cos\,\psi + \varrho\,sin\,\beta\,sin\,\psi] \quad (16).$$

Von den drei Veränderlichen φ, ψ, t dieser Gleichung wird t durch Multiplication mit

$$\frac{dt^2}{d\varphi^2} = \frac{R^2}{v^2}$$

eliminirt. (Es ist nämlich $v\,dt = -R\,d\varphi$ = dem Wegelement des Schaufelpunktes S.) Sie geht dadurch über in:

$$\varrho\,\frac{d^2\psi}{d\varphi^2} = g\,\frac{R^2}{v^2}\,cos\,(\varphi+\psi) + (R-\varrho\,cos\,\beta)\,cos\,\psi + \varrho\,sin\,\beta\,sin\,\psi \quad (17).$$

Hieraus wäre nun streng genommen durch zweifache Integration eine endliche Gleichung zwischen φ und ψ abzuleiten, welche Winkel gleichzeitige Wege des Schaufelpunktes S gegen die Erde und des Wassertheilchens längs der Schaufel bestimmen; dabei wären die Constanten der ersten und zweiten Integration durch die zusammengehörigen Werthe

$$\frac{d\psi}{d\varphi} = 0, \quad \psi = \psi_0 \quad \text{und} \quad \varphi = \delta, \quad \psi = 90^0 - \beta$$

zu bestimmen, unter ψ_0 den Winkel LOP_0 verstanden, welcher dem Orte P_0 entspricht, wo das Wassertheilchen, seine rückläufige Bewegung im Sinne LS beginnend, sich in relativer Ruhe an der Schaufel befindet in der durch Gl. (11) bestimmten Entfernung r von M. In die dann so erhaltene Gleichung müssten schliesslich auch die zusammengehörigen Werthe

$$\varphi = -\delta, \quad \psi = 90^0 - \beta$$

passen, durch deren Einsetzung die gesuchte Bedingungsgleichung erhalten würde.

Indem aber diese Rechnung mit kaum überwindlichen Schwierigkeiten verbunden wäre, mag näherungsweise in Gl. (16) $\varphi = 0$ gesetzt werden, gleich als ob, was die Wirkung der Schwere betrifft, bei der Bewegung des Wassertheilchens längs der Schaufel dieselbe sich beständig in ihrer tiefsten Lage befände. Die dadurch erhaltene Gleichung:

$$\varrho\,\frac{d^2\psi}{dt^2} = \left[g + \frac{v^2}{R^2}\,(R-\varrho\,cos\,\beta)\right] cos\,\psi + \frac{v^2}{R^2}\,\varrho\,sin\,\beta\,sin\,\psi$$

entspricht einer gleich grossen Zeit des Hinganges und des Herganges des Wassertheilchens; dass damit erstere zu klein, letztere zu gross gefunden wird, ist unerheblich, weil es hier nicht sowohl auf diese einzelnen Zeitintervalle, als vielmehr nur auf ihre durch fragliche Vereinfachung ohne Zweifel nur wenig geänderte Summe ankommt = der Zeit, welche dem Drehungswinkel 2δ des Rades entspricht. Indem nun die angenäherte Differentialgleichung auch geschrieben werden kann:

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{v^2}{R^2}\left(\frac{gR^2}{\varrho v^2} + \frac{R}{\varrho} - \cos\beta\right)\cos\psi + \frac{v^2}{R^2}\sin\beta\sin\psi,$$

hat sie die Form:

$$2\frac{d^2\psi}{dt^2} = A\cos\psi + B\sin\psi$$

oder

$$d\left[\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2\right] = A\,d\sin\psi - B\,d\cos\psi \quad \ldots\ldots\ldots (18)$$

mit

$$A = \frac{v^2}{R^2}m \text{ und } B = 2\frac{v^2}{R^2}\sin\beta,$$

wobei mit Rücksicht auf (6):

$$m = 2\frac{R}{\varrho}\left(\frac{gR}{v^2}+1\right) - 2\cos\beta$$

$$= 2\frac{R}{\varrho}\left(2\frac{R}{H}+1\right) - 2\cos\beta \quad \ldots\ldots\ldots (19)$$

ist. Die Integration von (18) giebt mit Berücksichtigung der zusammengehörigen Werthe

$$\frac{d\psi}{dt} = 0, \quad \psi = \psi_0$$

$$\left(\frac{d\psi}{dt}\right)^2 = A(\sin\psi - \sin\psi_0) + B(\cos\psi_0 - \cos\psi)$$

und weiter, wenn jetzt t insbesondere die halbe Zeitdauer der Hin- und Herbewegung des Wassertheilchens bedeutet,

$$t = \int_{\psi_0}^{90^0-\beta} \frac{d\psi}{\sqrt{A(\sin\psi - \sin\psi_0) + B(\cos\psi_0 - \cos\psi)}}.$$

Weil diese Zeit auch $= \frac{R\delta}{v}$ sein soll, folgt endlich mit Rücksicht auf die Bedeutungen von A und B:

$$\delta = \int_{\psi_0}^{90^0-\beta} \frac{d\psi}{\sqrt{m(\sin\psi - \sin\psi_0) + 2\sin\beta(\cos\psi_0 - \cos\psi)}} \quad \ldots (20).$$

Den gefundenen Bedingungen (4), (7), (10), (11) und (12), (14), (20) muss durch Probiren zu entsprechen gesucht werden. Beispielsweise sei

$H = 1$	1,5	2 Mtr.
$R = 2$	2,5	3 „ $= H + 1$
$z = 40$	44	$48 = 32 + 8\,H$
$\frac{360^0}{z} = 9^0$	$8^0\,11'$	$7^0\,30'$
$a_1 = 0{,}16$	0,20	$0{,}24 = 0{,}08\,R$.

Wird $\alpha = 18^0$ angenommen, so folgt $\lambda = 10^0\,34'$ aus (10) etwas $> \frac{360^0}{z}$, was für die Wirksamkeit der Gerinnekröpfung nur vortheilhaft sein kann. Der weiteren Annahme $\beta = 36^0$ entspricht $\frac{u}{v} = 1{,}9$ nach Gl. (4), hinlänglich nahe = dem nach (7) erfahrungsmässig besten Werthe dieses Geschwindigkeitsverhältnisses. Aus (11) und (12) folgt dann weiter:

$\frac{r}{R} = 0{,}866$	0,852	0,844
$r = 1{,}732$	2,130	2,532 Mtr.
$a > 0{,}453$	0,605	0,752 „

und wenn etwa 0,1 Mtr. zugegeben wird, ergiebt sich

$a = 0{,}55$	0,70	0,85 Mtr.

Ferner muss nach (14)

$\frac{\varrho}{R} > 0{,}275$	0,294	0,304
$\varrho > 0{,}550$	0,735	0,912 Mtr.

sein, und wenn versuchsweise ϱ zunächst um 20% grösser angenommen wird, folgt

$\varrho = 0{,}660$	0,882	1,094 Mtr.
$m = 28{,}682$	22,952	20,318 nach (19)
$\psi_0 = 22^0$	21^0	20^0.

Die Werthe von ψ_0 sind betreffender Zeichnung entnommen. Jetzt bleibt nur noch zu prüfen, ob der Gleichung (20) genügend entsprochen wird mit $\delta = \alpha + \alpha_1$, also gemäss $\alpha = 18^0$ und $\alpha_1 =$ den auf S. 183 aus Gl. (3) gefundenen Werthen nahezu mit

$\delta = 19^0\,30'$	$19^0\,45'$	20^0.

Diese Prüfung erfordert, wenn

$$f(\psi) = \sqrt{m\,(\sin\psi - \sin\psi_0) + 2\sin\beta\,(\cos\psi_0 - \cos\psi)}$$

gesetzt wird, die angenäherte Berechnung des Integrals

$$J = \int_{\psi_0}^{90^0 - \beta} \frac{d\psi}{f(\psi)}.$$

Die Simpson'sche Formel kann dazu im ganzen Umfange nicht benutzt werden wegen

$$f(\psi_0) = 0, \text{ also } \frac{1}{f(\psi_0)} = \infty;$$

vielmehr ist eine Theilung nöthig:

$$J = J_1 + J_2 = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{f(\psi)} + \int_{\psi_1}^{90^0 - \beta} \frac{d\psi}{f(\psi)} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

und anderweitige Berechnung des ersten der beiden Theilintegrale, wobei

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi_1 \text{ als nur wenig } > \psi_0$$

vorausgesetzt sei. Indem aber, wenn

$$\psi_1 = \psi_0 + \Delta\psi \text{ wenig } > \psi_0$$

ist, gesetzt werden kann:

$$\sin\psi = \sin\psi_0 + \cos\psi_0 \,.\, \Delta\psi$$
$$\cos\psi = \cos\psi_0 - \sin\psi_0 \,.\, \Delta\psi$$
$$f(\psi) = \sqrt{(m\cos\psi_0 + 2\sin\beta\sin\psi_0)\,\Delta\psi}$$

und auch $d\psi = d\Delta\psi$ ist, folgt

$$J_1 = \int_{\psi_0}^{\psi_1} \frac{d\psi}{f(\psi)} = \frac{2}{\sqrt{m\cos\psi_0 + 2\sin\beta\sin\psi_0}} \int_0^{\Delta\psi_1} \frac{\frac{1}{2}d\,\Delta\psi}{\sqrt{\Delta\psi}}$$

$$= 2\sqrt{\frac{\Delta\psi_1}{m\cos\psi_0 + 2\sin\beta\sin\psi_0}} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (22).$$

Dabei ist $\Delta\psi_1$ in Bogenmass (als Bogenlänge für den Radius = 1) ausgedrückt vorausgesetzt. Das andere Theilintegral J_2 kann nach der Simpson'schen Formel, etwa

$$J_2 = \int_{\psi_1}^{90^0 - \beta} \frac{d\psi}{f(\psi)}$$

$$= \frac{90^0 - \beta - \psi_1}{12}\left[\frac{1}{f(\psi_1)} + \frac{4}{f(\psi_2)} + \frac{2}{f(\psi_3)} + \frac{4}{f(\psi_4)} + \frac{1}{f(90^0 - \beta)}\right] \quad \ldots \quad (23)$$

gesetzt werden mit

$$\psi_2 - \psi_1 = \psi_3 - \psi_2 = \psi_4 - \psi_3 = 90^0 - \beta - \psi_4.$$

Die Winkel sind hier in Graden ausgedrückt vorausgesetzt.

Mit den versuchsweise vorläufig angenommenen Werthen von ϱ (und entsprechenden Werthen von m, ψ_0) ergiebt sich nach (22), (23) und (21), wenn in allen drei Fällen für $90^0 - \beta = 54^0$:

$$\psi_1 = 28^0, \quad \psi_2 = 34^0\,30', \quad \psi_3 = 41^0, \quad \psi_4 = 47^0\,30',$$

also in den einzelnen Fällen

$$\Delta\psi_1 = 6^0 \qquad 7^0 \qquad 8^0$$
$$= 0{,}1047 \qquad 0{,}1222 \qquad 0{,}1396$$

gesetzt wird,

$$\begin{array}{llll} J_1 = & 7^0\,8' & 8^0\,34' & 9^0\,42' \\ J_2 = & \underline{9^0\,43'} & \underline{10^0\,33'} & \underline{10^0\,42'} \\ J = & 16^0\,51' & 19^0\,7' & 20^0\,24' \\ \text{statt} & 19^0\,30' & 19^0\,45' & 20^0 \quad = \delta. \end{array}$$

Der Unterschied zwischen J und δ ist in den zwei letzten Fällen so klein, dass man erwarten kann, ihn durch mässige Veränderung von ϱ genügend zu beseitigen. In der That, wenn in beiden Fällen $\varrho = 1$ Mtr. genommen wird, wozu sich

$$\begin{array}{rlll} & m & = 20{,}049 \text{ und } & 22{,}382 \\ & \psi_0 & = 23^0\,30' \quad „ & 17^0\,30' \text{ ergiebt,} \\ \text{ferner} & \Delta\psi_1 & = 6^0\,30' \quad „ & 6^0\,30' \\ & & = 0{,}1134 \quad „ & 0{,}1134, \\ \text{also} & \psi_1 & = 30^0 \quad „ & 24^0 \\ & \psi_2 & = 36^0 \quad „ & 31^0\,30' \\ & \psi_3 & = 42^0 \quad „ & 39^0 \\ & \psi_4 & = 48^0 \quad „ & 46^0\,30', \\ \text{so findet man} & J_1 & = 8^0\,53' \quad „ & 8^0\,13' \\ & J_2 & = \underline{10^0\,47'} \quad „ & \underline{11^0\,47'} \\ & J & = 19^0\,40' \quad „ & 20^0. \end{array}$$

Für Gefälle $H = 1{,}5$ bis 2 Mtr. sind also u. A. die folgenden Constructionsverhältnisse passend:

$$R = H + 1 \text{ Mtr.},\ z = 32 + 8\,H,\ a_1 = 0{,}08\,R$$
$$\alpha_1 = \left(1 + \frac{H}{2}\right)^0,\quad \alpha = 18^0 \qquad \beta = 36^0$$
$$a = 0{,}25 + 0{,}3\,H \text{ Mtr.}, \qquad \varrho = 1 \text{ Mtr.}$$

Bei den kleineren Gefällen ist es besser, den Winkel α kleiner zu wählen, um damit auch δ zu verkleinern. Wenn das geschieht, ohne das Verhältniss $\frac{a_1}{R}$ zu ändern, so wird freilich nach Gl. (10) der Winkel $\alpha - \lambda$ vergrössert und um so mehr λ verkleinert. Es werde deshalb mit α zugleich das Verhältniss $\frac{a_1}{R}$ kleiner genommen, und zwar etwa

$$\begin{array}{llll} \text{für} & H = 0{,}5 & 1 & 1{,}5 \text{ Mtr.} \\ \text{und} & R = 1{,}5 & 2 & 2{,}5 \quad „ \\ & a_1 = 0{,}05\,R & 0{,}06\,R & 0{,}07\,R \\ & \quad = 0{,}075 & 0{,}12 & 0{,}175 \text{ Mtr.,} \end{array}$$

$$\text{wozu } \lambda = 9^0\,27' \qquad 9^0\,45' \qquad 10^0\,7' \text{ aus (10)}$$
$$\text{und } \alpha_1 = 2^0\,20' \qquad 2^0\,26' \qquad 2^0\,14' \text{ aus (3)}$$

gefunden wird. Bei der sehr beschränkten Zuverlässigkeit dieser letzten Bestimmung mag übrigens in allen diesen Fällen $\alpha_1 = 2^0$, also $\delta = \alpha + 2^0$ gesetzt werden. Es sei nun hier

$$\alpha = 15^0 \qquad 16^0 \qquad 17^0$$
$$\beta = 30^0 \qquad 32^0 \qquad 34^0,$$
$$\text{also } \frac{u}{v} = 1{,}93 \qquad 1{,}92 \qquad 1{,}91 \text{ nach (4)}$$

immer noch hinlänglich wenig von dem nach (7) vortheilhaftesten Werthe dieses Geschwindigkeitsverhältnisses verschieden, da η als Function von $\frac{u}{v}$ sich in der Nähe ihres Maximums nur sehr allmählich mit $\frac{u}{v}$ ändert. Aus (11) und (12) folgt jetzt

$$a > 0{,}223 \qquad 0{,}381 \qquad 0{,}559;$$
$$\text{es möge } a = 0.35 \qquad 0{,}50 \qquad 0{,}65$$

gewählt werden. Indem ferner nach (14)

$$\varrho > 0{,}255 \qquad 0{,}444 \qquad 0{,}667$$

sein muss, werde versuchsweise vorläufig angenommen:

$$\varrho = \ 0{,}4 \qquad 0{,}6 \qquad 0{,}8.$$

In oben erklärter Weise findet man dann

$$J = 12^0\,57' \qquad 16^0\,45' \qquad 18^0\,46'$$
$$\text{statt } \delta = 17^0 \qquad 18^0 \qquad 19^0.$$

Von der kleinen Differenz im letzten Falle kann man absehen, da der Einfluss der Störungen bei der Bewegung des Wassers längs den Schaufeln ja doch nicht rechnerisch in Anschlag gebracht werden kann. Im zweiten Falle lässt sich die Differenz genügend verkleinern durch eine mässige Vergrösserung von ϱ; in der That findet man

$$J = 17^0\,49' \text{ mit } \varrho = 0{,}8 \text{ Mtr.}$$

Für Gefälle $H = 1$ bis 1,5 Mtr. sind also u. A. die folgenden Constructionsverhältnisse passend:

$$R = H + 1 \text{ Mtr.}, \quad z = 32 + 8\,H, \quad a_1 = (0{,}04 + 0{,}02\,H)\,R$$
$$\alpha_1 = 2^0, \qquad \alpha = (14 + 2\,H)^0, \qquad \beta = 2\,\alpha$$
$$a = 0{,}2 + 0{,}3\,H \text{ Mtr.}, \qquad \varrho = 0{,}8 \text{ Mtr.}$$

Für Gefälle unter 1 Mtr. bleibt den Bedingungsgleichungen, besonders Gl. (20) noch Genüge zu leisten; die bisherigen Annahmen ergaben J wesentlich $< \delta$. Um eine bessere Uebereinstimmung zu erzielen, ist

δ zu verkleinern und J zu vergrössern. Ersteres bedingt eine noch weitere Verkleinerung von α. J wird vergrössert besonders durch Verkleinerung von m, also von $\frac{R}{\varrho}$ und von $\frac{R}{H}$ gemäss Gl. (19). Auch wird J vergrössert durch Vergrösserung des Unterschiedes der Integrationsgrenzen, also durch Verkleinerung von β und von ψ_0; ersteres wird schon durch die Verkleinerung von α herbeigeführt, letzteres durch Verkleinerung von $\frac{r}{R}$, wie Fig. 30 erkennnen lässt, also durch Verkleinerung von $\frac{R}{H}$, wie aus Gl. (11) ersehen werden kann. Der Winkel β könnte zwar auch unabhängig von α verkleinert werden; denn nach Gl. (4) ist

$$\cos\alpha - \cot g\,\beta \sin\alpha = \frac{v}{u},$$

also β bei gegebenem Werthe von α um so kleiner, $\cot g\,\beta$ um so grösser, je kleiner $\frac{v}{u}$ oder je grösser $\frac{u}{v}$ ist. Weil jedoch die Vergrösserung von $\frac{u}{v}$ viel über 1,87 hinaus mit Rücksicht auf (7) nicht vortheilhaft ist, ist es sogar rathsam, für $\alpha < 15^0$ den Winkel β etwas $> 2\,\alpha$ zu nehmen, indem mit $\beta = 2\,\alpha$ einem verschwindend kleinen α entsprechen würde: $u = 2\,v$.

Die Bedingungsgleichung (20) verlangt somit bei kleinen Gefällen thunlichst kleine Werthe von

$$\alpha, \frac{R}{\varrho} \text{ und } \frac{R}{H}.$$

Das letztere Verhältniss, welches nach bisheriger Annahme bis 3 zunehmen sollte, wenn H bis 0,5 Mtr. abnimmt, mag auf höchstens 2,5 beschränkt werden. Die Vergrösserung von ϱ zur Verkleinerung von $\frac{R}{\varrho}$ erscheint höchstens bis $\varrho = 0{,}4\,R$ rathsam, so dass $\frac{R}{\varrho}$ wenigstens $= 2{,}5$ ist, wie es auch den schon gefundenen Regeln entspricht ($\varrho = 0{,}8$ für $R = 2$ bis 2,5 und $\varrho = 1$ für $R = 2{,}5$ bis 3). Die Verkleinerung von α ist nach Gl. (10) durch Verkleinerung von λ, also durch Einschränkung der Kröpfung des Gerinnes unter dem Rade zu erkaufen; jedenfalls muss aber dieser Gleichung zufolge

$$\sin\alpha > \sqrt{\frac{1}{2}\frac{a_1}{R}}$$

sein, z. B. $\alpha > 9^0 6'$ bezw. $9^0 58'$
für $a_1 = 0{,}05\,R$ „ $0{,}06\,R$.

Versuchsweise werde somit für $H = 0{,}5$ Mtr. angenommen:

$$R = 2{,}5\ H = 1{,}25 \text{ Mtr.}, \ \varrho = 0{,}4\ R = 0{,}5 \text{ Mtr.},$$
$$\alpha = 12^0\,30', \ \beta = 26^0, \text{ entsprechend } u = 1{,}88\ v \text{ nach (4).}$$

Um a_1 nicht allzu klein zu erhalten und damit den Vortheil des kleineren Winkels α theilweise zu verlieren durch Vergrösserung von α_1 nach (3), werde a_1 nicht $= 0{,}05\ R$ angenommen, wie vorhin, sondern

$$a_1 = 0{,}06\ R = 0{,}075 \text{ Mtr.},$$

entsprechend $\alpha_1 = 2^0\,20'$ wie oben, obschon dann aus (10) sich λ nur $= 4^0\,32'$ ergiebt.

Mit diesen Annahmen folgt aus (11) und (12):

$$a > 0{,}197 \text{ und mag } a = 0{,}3 \text{ Mtr.}$$

gewählt werden. Mit der Bedingung (14), welcher $\varrho > 0{,}219$ entspricht, sind die Annahmen nicht in Widerspruch. Indem aber schliesslich sich $J = 18^0\,15'$ ergiebt, während hier

$$\delta = \alpha + \alpha_1 = 14^0\,50'$$

ist, folgt, dass α unter den übrigens gegebenen Umständen schon zu klein angenommen wurde, entsprechend natürlich β. Mit Rücksicht zugleich auf die für $H = 1$ Mtr. oben gefundenen Werthe lässt sich schliessen, dass für Gefälle $H = 0{,}5$ bis 1 Mtr. die folgenden Constructionsverhältnisse nahe passend sein werden:

$$R = H + 1 \text{ Mtr., doch höchstens } = 2{,}5\ H$$
$$a_1 = 0{,}06\ R, \ \alpha_1 = 2{,}5^0, \ \alpha = (12 + 4\ H)^0, \ \beta = (2\,\alpha + 1 - H)^0$$
$$a = 0{,}1 + 0{,}4\ H \text{ Mtr.}, \ \varrho = 0{,}2 + 0{,}6\ H \text{ Mtr.}$$

Aus der gemäss Gl. (1) festgestellten Geschwindigkeit

$$u = \sqrt{\frac{2\,g\,H}{1{,}15}} = \sqrt{17\ H}$$

ergiebt sich v mit Hülfe des Verhältnisses beider Geschwindigkeiten, welches der Gleichung (4) entspricht, und bleibt dann nur noch die lichte Breite b des Rades zu bestimmen. Dieselbe kann der Weite des Schussgerinnes gleich gesetzt werden, wenn unter dem Rade das Gerinne entsprechend den Wanddicken des Radkranzes und dem nöthigen seitlichen Spielraume etwas verbreitert wird, so dass sie bei gegebener Nutzpferdestärke N und mit einem angenommenen Wirkungsgrade η aus

$$Q = \frac{0{,}075}{\eta}\,\frac{N}{H} = a_1\,b\,u \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (24)$$

gefunden wird. Wenn endlich unter dem Füllungscoefficienten auch hier das Verhältniss

$$\varepsilon = \frac{Q}{a\,b\,v} = \frac{a_1}{a}\frac{u}{v}$$

verstanden wird, ergiebt sich beispielsweise mit $\frac{u}{v} = 1{,}9$

$$\begin{array}{lllll} \text{für } H = 0{,}5 & 1 & 1{,}5 & 2 \\ \text{mit } a_1 = 0{,}075 & 0{,}12 & 0{,}175 & 0{,}24 \\ \text{und } a = 0{,}3 & 0{,}5 & 0{,}65 & 0{,}85 \\ \varepsilon = 0{,}47 & 0{,}46 & 0{,}51 & 0{,}54 \end{array}$$

durchschnittlich $\varepsilon = 0{,}5$.

III. Turbinen.*

§. 28. Einleitende Erklärungen.

Auch bei den Turbinen ist, ebenso wie bei den Wasserrädern im engeren Sinne, der wesentlichste Bestandtheil des Rades der die Schaufeln enthaltende Radkranz, welcher bei der theoretischen Untersuchung einzig in Betracht kommt (abgesehen zunächst von gewissen minder vollkommenen Turbinen, die eines eigentlichen Radkranzes entbehren); hier wie früher wird darunter der ringförmige Raum verstanden, welcher bei der Umdrehung des Rades von den Schaufeln durchlaufen wird. Nur ist dieser Raum hier nicht immer cylindrisch, nämlich von rechteckigem Querschnitte. Der wesentlichste Unterschied der Turbinen von den Wasserrädern im engeren Sinne besteht aber, wie früher (§. 8) schon bemerkt wurde, darin, dass bei ihnen das Wasser durch den Radkranz in stetigem Strome hindurch fliesst, dass es also an verschiedenen Stellen ein- und austritt. Dem entsprechend werden die zwischen den Schaufeln enthaltenen gleichen Theile des Radkranzes hier nicht als Schaufelräume, sondern als Turbinen-Canäle bezeichnet, und es sind — abgesehen von den unvollkommensten Stossrädern — die Schaufeln stetig gekrümmt, um Verluste an lebendiger Kraft durch Stoss bei der strömenden Bewegung in den Canälen auszuschliessen. Die Dicke der Schaufeln kommt hier

* Von neueren Arbeiten sind hier besonders G. Herrmann's Bearbeitung der fünften Auflage von Weisbach's Lehrbuch der Ingenieur- und Maschinen-Mechanik und Aufsätze von Bernh. Lehmann in der Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure zu Rath gezogen worden. C. Bach's Werk „Die Wasserräder" erschien während der Abfassung des Manuscripts und blieb unberücksichtigt.