Untersuchungen über den Energieverlust des Wassers in Turbinenkanälen

Oesterlin, Hermann

Berlin, 1903

3. Kapitel Aufstellung einer Formel zur Berechnung des Energieverlustes, den das Wasser beim Durchfluß durch Turbinenkanäle erleidet

urn:nbn:de:bsz:31-274039

ist und daß der Wert der Konstanten aus den Gleichungen

$$k' = \frac{r_m}{\varrho_i}$$

$$k'' = \frac{r_m}{\varrho_a}$$

$$r_m = \frac{\varrho_i + \varrho_a}{2}$$

berechnet werden kann, wenn ϱ_i den Krümmungsradius der inneren und ϱ_a den der äußeren Kanalwand angibt. Diese Gleichungen sind für die nun folgenden Betrachtungen wichtig.

3. Kapitel.

Aufstellung einer Formel zur Berechnung des Energieverlustes, den das Wasser beim Durchfluß durch Turbinenkanäle erleidet.

Die theoretische Grundlage einer solchen Formel kann natürlich nur dadurch erlangt werden, daß man wiederum durch vereinfachende Annahmen die verwickelten Wasserbewegungen der Theorie zugänglich macht, besonders da hier der leichten Anwendung der Formel wegen der Kanalinhalt nur durch mittlere Normalschnitte, nicht durch Wasserfaden in einzeln zu betrachtende Teile zerlegt werden soll.

Schon bei der Aufstellung dieser mittleren Normalschnitte ist eine Annäherung nötig.

Von einem Punkte M im Kanal, der von beiden Schaufeln gleich weit entfernt ist, werden Normalen zu den Schaufeln gelegt, und auf diesen die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte A und B der Schaufelkurven aufgesucht. Verbindet man dann die 2 Mittelpunkte durch eine Gerade, so wird der in der Mitte zwischen A und B liegende Punkt C von dem Krümmungsmittelpunkte des durch M gehenden Wasserfadens nicht sehr verschieden sein. Man kann daher einen durch M und C gelegten Schnitt als mittleren Normalschnitt durch den ganzen Kanal annehmen. Nach diesem Verfahren[1]) wurden Querschnitte in alle Kanäle eingezeichnet

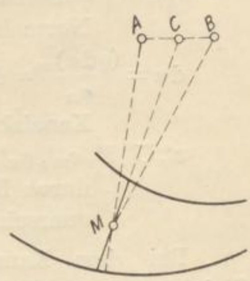

Fig. 9.

[1]) Dasselbe ist einem von Prof. Brauer im Bezirksverein Karlsruhe des Vereines d. Ing. gehaltenen noch nicht veröffentlichten Vortrag entnommen.

und alle Punkte M durch eine Kurve, die Kanalmittellinie, verbund Sucht man dann die mittlere Energie pro kg Wasser in jedem normal Querschnitte auf, so kann man mit der Zuordnung dieser Energie den entsprechenden Punkten M Energiekurven verzeichnen, wie sie Tafel II, III und IV ersichtlich sind. Dabei wird die mittlere Ener pro kg Wasser

$$E = \frac{c_m^2}{2\,g} + h_m$$

gesetzt und

$$c_m = \frac{V}{F}\,^{1)}$$

und h_m, die mittlere aller über den Normalschnitten aufgezeichnet Druckhöhen in m Wassersäule, aus dem Versuch gefunden.

Der Verlauf dieser Energiekurven ist maßgebend für die A stellung der gesuchten Formeln, bei welchen bezeichnen möge:

V = die Wassermenge, die durch den Kanal fließt, in cbm/Sek.,
a = die Weite des Kanales auf der mittleren Normalen $C\,M$ g messen in m,
b = die lichte Höhe des Kanales in m,
F = die mittlere normale Querschnittsfläche in qm,
$c_m = \frac{V}{F}$ die mittlere Wassergeschwindigkeit in m/Sek.,
U = der Umfang des Querschnittes in m,
ϱ_m = der Krümmungsradius der durch die Punkte M gehend Kanalmittellinie in m,
$(\varrho\,d\,\alpha)_m$ = die Länge der Kanalmittellinie in einem durch 2 mittle Normalschnitte begrenzten Kanalabschnitt in m,
$d\alpha = \frac{(\varrho\,d\,\alpha)_m}{\varrho_m}$ = der Ablenkungswinkel der Kanalmittellinie in de Kanalabschnitt,
$a', U', F', c_m', \varrho_m'$ = Mittelwerte in dem Kanalabschnitt, gefund durch Bestimmung des Mittels der in den Begrenzung querschnitten gültigen Werte.

Bei dem Kanal I wurde zunächst eine aus Weisbachsch Gleichungen zusammengesetzte Formel aufgestellt, und der Energi

---

[1]) Es ist eine zur leichteren Anwendung der Formel gemachte Annahm wenn $c_m = \frac{V}{F}$ gleich der in der Kanalmittellinie vorhandenen Geschwindigk gesetzt wird. Da das Wasser innen eine größere Geschwindigkeit als auß besitzt, so fließt zu beiden Seiten der Kanalmittellinie nicht die gleic Wassermenge pro Sek. durch den Kanal.

verlust pro kg Wasser in den einzelnen Abschnitten des Kanales berechnet aus

$$E_v = \left[\zeta_1 (\varrho \, d\,\alpha)_m \cdot \frac{U'}{F'} + \zeta_2 \cdot \frac{d\alpha^\circ}{90^\circ}\right] \cdot \frac{c'^2_m}{2g}$$

mit

$$\zeta_1 = 0{,}0036 + \frac{0{,}00237}{\sqrt{c'_m}}$$

und

$$\zeta_2 = 0{,}074 + 0{,}6\left(\frac{a}{\varrho}\right)^{3,5}.$$

ζ_1 entspricht dem von Weisbach gefundenen Koeffizienten für Rohrreibung, während die Konstanten von ζ_2 so gewählt sind, daß die Formel in allen Abschnitten des Kanales I stimmt.

Wollte man diese Formel auch bei Kanal II anwenden, so müßte zu ihr den hier stattfindenden starken Schwankungen der Energiekurve entsprechend noch ein Glied hinzugefügt werden, das stellenweise auch negativ wird.

Da es jedoch nicht gelang ein solches Glied zu finden, so wurde ein neuer Weg eingeschlagen, der nach vielen mißglückten Rechnungen zum Ziele zu führen scheint.

In der neuen Formel soll, soweit dies möglich ist, eine Trennung der Energieverluste in solche, die durch äußere Wandflächenreibung, und solche, die durch innere Flüssigkeitsreibung entstehen, vorgenommen werden.

Zur Berechnung der Widerstandshöhe infolge Reibung an den Kanalwänden wurde die von Hagen aufgestellte Formel für Leitungswiderstand in Röhren verwandt

$$B_1 = a \cdot \frac{u^2}{d} + b \cdot \frac{u}{d^2},$$

deren Koeffizienten a und b nicht merklich vom Material der Röhre abhängig sind, und die den Vorteil gewährt, daß aus ihr der durch Wandreibung verursachte Widerstand getrennt entnommen werden kann.[1])

Stellt man sich nämlich vor, daß der Einfluß der Wandflächenreibung sich unmittelbar nur auf eine Wasserschicht am Umfang von sehr kleiner mittlerer Dicke δ erstreckt, und daß durch den wiederholten plötzlichen Wechsel dieser Schichtdicke zwischen einem Minimum $= \delta_1$ und einem Maximum $= \delta_2$ eine entsprechende plötzliche Geschwindigkeitsände-

[1]) Grashof, Theoretische Maschinenlehre. I. Bd. § 90.

rung zwischen dem Maximum w_1 und dem Minimum w_2 bedingt wird, so entspricht jedem solchen plötzlichen Übergang der Geschwindigkeit von w_1 in w_2 eine Widerstandshöhe $= \frac{(w_1 - w_2)^2}{2\,g}$ oder, wenn w' die mittlere Geschwindigkeit in der fraglichen Oberflächenschicht in tangentialer Richtung an die Kanalmittellinie bedeutet, eine Widerstandshöhe

$$= \zeta' \cdot \frac{w'^2}{2g} = \frac{(w_1 - w_2)^2}{2\,g},$$

$$\zeta' = \left(\frac{w_1}{w'} - \frac{w_2}{w'}\right)^2 = \left(\frac{\delta}{\delta_1} - \frac{\delta}{\delta_2}\right)^2.$$

Wenn also irgend einer der Wasserfäden, in welche die fragliche Oberflächenschicht des Wassers zerlegt werden kann, pro Längeneinheit im Durchschnitt n solcher plötzlichen Querschnitts- und Geschwindigkeitsänderungen erfährt, so ist die entsprechende spezifische (auf die Längeneinheit bezogene) Widerstandshöhe oder Widerstandsarbeit pro 1 kg des in der Oberflächenschicht fließenden Wassers $= n \cdot \zeta' \cdot \frac{w'^2}{2g}$ und endlich pro 1 kg des in dem ganzen Kanal vom Querschnitt F' mit der mittleren Geschwindigkeit c'_m fliessenden Wassers

$$E_v = \frac{U' \cdot \delta \cdot w'}{F' \cdot c'_m} \cdot n \cdot \zeta' \cdot \frac{w'^2}{2g} = \frac{U'}{F'} \cdot \delta \cdot n \cdot \zeta' \cdot \frac{w'}{c'_m} \cdot \frac{w'^2}{2g},$$

oder mit $\frac{w'}{c'_m} = \varepsilon$ und Konstante $a = \frac{2n \cdot \delta \cdot \varepsilon^3 \cdot \zeta'}{g}$

$$E_v = \frac{U'}{F'} \cdot c'^2_m \cdot \frac{a}{4}$$

für die Längeneinheit. Dieser Wert entspricht dem ersten Glied der Hagenschen Formel.

Setzt man

$$E_v = \zeta \cdot \frac{U'}{F'} \cdot \frac{c'^2_m}{2g},$$

so wird

$$\zeta = \frac{a \cdot 2g}{4},$$

und mit Einsetzung des Hagenschen Wertes $a = 0{,}0012017$

$$\zeta = 0{,}00589, \text{ abgerundet } \zeta = 0{,}006.$$

Der Energieverlust pro kg Wasser infolge Wandflächenreibung beim Durchfluß durch einen Kanalabschnitt von der mittleren Länge $ds = (\varrho\, d\alpha)_m$ ist somit

$$10) \quad \ldots\ldots \quad E_{v_1} = 0{,}006 \cdot \frac{U'}{F'} \cdot (\varrho\, d\alpha)_m \cdot \frac{c'^2_m}{2g}.$$

In einigen Kanalabschnitten des großen Kanales übersteigt dieser Wert E_{v_1} schon den Wert des gesamten aus dem Versuch berechneten Energieverlustes pro kg.

Wir müssen daher in die Formel ein weiteres Glied einführen, das die Krümmung des Kanales berücksichtigend den Wert E_{v_1} korrigiert.

Infolge der Verschiedenheit der Wasserbewegungen in gekrümmten und in geraden Kanälen wird die Wandflächenreibung in einigen Kanalabschnitten des gekrümmten Kanales kleiner oder größer als diejenige äußere Reibung, welche in einem geraden Kanalabschnitt von gleicher mittlerer Länge eintritt. Das Korrekturglied wurde in Abhängigkeit von folgenden Größen gefunden.

Zunächst kehren wir zu den im vorigen Kapitel gefundenen Geschwindigkeiten (Tafel 2) zurück und nehmen zur Vereinfachung der Betrachtung eine geradlinige Veränderung der Geschwindigkeiten in den mittleren Normalschnitten an. Wollten wir aber die beiden aus Gleichung 8) und 9) berechneten Randgeschwindigkeiten durch eine Gerade als Geschwindigkeitskurve verbinden, so würde die mittlere Geschwindigkeit $c_m = \frac{u_i + u_a}{2}$ nicht mit der Geschwindigkeit $c_m = \frac{V}{F}$ übereinstimmen, da

$$\frac{u_i + u_a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{r_m}{\varrho_i} + \frac{r_m}{\varrho_a}\right) c_m$$

oder mit Einsetzung des Wertes

$$r_m = \frac{\varrho_i + \varrho_a}{2}$$

$$\frac{u_i + u_a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_i} + \frac{1}{\varrho_a}\right) \frac{\varrho_i + \varrho_a}{2} \cdot c_m \gtrless c_m$$

ist. Führen wir aber mit genügender Annäherung (s. Tafel II) statt r_m den Wert

$$11) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \varrho_{m_1} = \frac{2 \cdot \varrho_i \cdot \varrho_a}{\varrho_i + \varrho_a}$$

ein, so wird

$$c_i = \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} c_m, \quad c_a = \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} \cdot c_m$$

und

$$c_m = \frac{c_i + c_a}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varrho_i} + \frac{1}{\varrho_a}\right) \cdot \frac{2\,\varrho_i \cdot \varrho_a}{\varrho_i + \varrho_a} \cdot c_m = c_m.$$

Die mit dieser Berechnung aufgestellten geradlinigen Geschwind keitskurven sind in Tafel II über den Normalschnitten eingezeichn (—·—·—) und es kann die Größe der inneren Randgeschwindigk

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad c_i = \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} \cdot c_m$$

und die der äußeren

$$12) \quad \ldots\ldots\ldots \quad c_a = \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} \cdot c_m$$

auch bei Kanälen mit wechselnder Krümmung leicht bestimmt werd Trägt man von den Schnittpunkten der Normalschnitte mit d Schaufelkurven nach beiden Seiten imm das gleiche Stück $\frac{\varrho \Delta \alpha}{2}$ auf die Schaufelkur auf, zeichnet in die Endpunkte Tangent und schlägt um den Schnittpunkt d Tangenten immer mit dem gleichen an si beliebigen Radius b einen Kreis, so ka aus der Bogenlänge $b \Delta \alpha = s$ (in m) d Kreises zwischen den beiden Tangenten d Krümmungsradius ϱ (in m) der Schaufelkur gefunden werden. Es ist

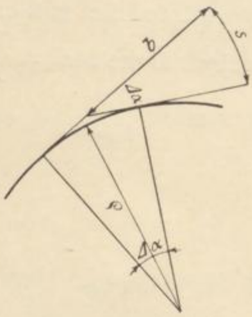

Fig. 10.

$$\Delta \alpha = \frac{b \cdot \Delta \alpha}{b}$$

$$\varrho = \frac{\varrho \Delta \alpha}{\Delta \alpha} = \frac{\varrho \cdot \Delta \alpha \cdot b}{b \cdot \Delta \alpha} = \frac{C}{s}.$$

Man braucht aber ϱ_i und ϱ_a garnicht einzeln zu bestimmen, so dern man erhält mit

$$\varrho_i = \frac{C}{s_i}, \quad \varrho_a = \frac{C}{s_a}$$

und

$$\varrho_{m_1} = \frac{2\,\varrho_i \cdot \varrho_a}{\varrho_i + \varrho_a} = \frac{\dfrac{2\,C^2}{s_i \cdot s_a}}{\dfrac{C}{s_i} + \dfrac{C}{s_a}} = \frac{2\,C}{s_i + s_a}$$

$$\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} = \frac{\dfrac{2\,C}{s_i + s_a}}{\dfrac{C}{s_i}} = \frac{2\,s_i}{s_i + s_a}$$

13) . . . . $$\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} = \frac{2\,s_a}{s_i + s_a}.$$

Für den Sonderfall $\varrho_i = \varrho_a$ ist dann $\varrho_{m_1} = \varrho_i = \varrho_a$ und $\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} = \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} = 1$,

somit

$$c_i = c_m = c_a$$

Für $\varrho_a = \infty$ wird

$$\varrho_{m_1} = \frac{2\,\varrho_i \cdot \infty}{\varrho_i + \infty} = 2\,\varrho_i$$

und

$$\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} = 2, \quad \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} = 0,$$

somit

$c_i = 2\,c_m$ und $c_a = 0$ [1])

Bei Turbinenkanälen ist meist

$$\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} > 1 \quad \text{und} \quad \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} < 1.$$

Das Wasser fließt also innen schneller wie außen.

Dabei entsteht eine größere innere Flüssigkeitsreibung als in geraden Rohrleitungen, für welche das zweite Glied der Hagenschen Formel $b\,\frac{u}{d^2}$ einen so kleinen Wert der inneren Flüssigkeitsreibung angibt, daß sie im Vergleich zur Wandflächenreibung vernachlässigt werden kann. Bei gekrümmten Kanälen wäre diese Vernachlässigung

[1]) Diese Werte geben nicht die wirklichen Größen der Geschwindigkeiten an, sondern dienen nur zur Berechnung der Verluste.

nur dann zulässig, wenn sich das Wasser wie in einer Zentrifuge b wegte, d. h. wenn sich die Geschwindigkeiten verhielten wie die e sprechenden Krümmungsradien der Bahnen. Wir suchen daher d jenigen Geschwindigkeiten v auf, die eintreten müßten, wenn Wasserbewegung im Turbinenkanal der Bewegung in einer Zentrifu entsprechen würde.

Für den inneren Randfaden wäre

$$v_i = c_m - \frac{c_m}{\varrho_m} \cdot \frac{a}{2} = c_m \left(1 - \frac{a}{2\,\varrho_m}\right)$$

und für den äußeren

$$v_a = c_m + \frac{c_m}{\varrho_m} \cdot \frac{a}{2} = c_m \left(1 + \frac{a}{2\,\varrho_m}\right).$$

Durch den Vergleich dieser Geschwindigkeiten v mit den Geschwindi keiten c wurde nach vielen Rechnungen folgender Weg zur A leitung des Korrekturgliedes der Wandflächenreibung aus den Versuc werten gefunden.

Bestimmt man in einem Kanalabschnitt von einem bis zu anderen mittleren Normalschnitt die Zunahmen der Geschwindigkeit c und v, sie seien dc und dv, und setzt deren Differenz $dc - dv = d$ so wird das Korrekturglied positiv, wenn dw positiv, und umgekeh Ferner entspricht der Geschwindigkeitszunahme dw eine Beschleu gung φ, der Beschleunigung eine Kraft K, der Kraft eine Arbeit u dieser Arbeit ist das Korrekturglied proportional.

Die Ausführung der Berechnung geschieht in der Weise, daß

$$\varphi_i = \frac{d\,w_i}{d\,t} \text{ mit } d\,t = \frac{(\varrho\,d\,\alpha)_i}{c'_i},$$

also

$$\varphi_i = \frac{c'_i \,.\, d\,w_i}{(\varrho\,d\,\alpha)_i}$$

und

$$\varphi_a = \frac{c'_a \,.\, d\,w_a}{(\varrho\,d\,\alpha)_a}$$

gesetzt wird und die entsprechenden beschleunigenden Kräfte für e an den betreffenden Rändern fließendes kg Wasser sich aus de Gleichungen

$$K_i = \frac{1}{g} \cdot \varphi_i$$

$$K_a = \frac{1}{g} \cdot \varphi_a$$

ergeben. Machen wir nun weiter die Annäherung,[1]) daß die beschleunigende Kraft K pro kg (verzögernde Kraft bei φ negativ) von einer bis zu der anderen Schaufel sich proportional der Breite ändert, so kann die mittlere Arbeit A der den Geschwindigkeitszunahmen dw entsprechenden Kräfte K pro kg Wasser gefunden werden. Die Summe der Kräfte K ist

$$\Sigma K = \frac{a}{2} (K_i + K_a),$$

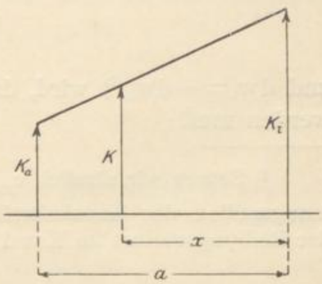

Fig. 11.

und der Weg für ein durch den ganzen Normalschnitt fließendes kg Wasser sei $(\varrho d \alpha)$, so dass $a \cdot b \, (\varrho d \alpha) \cdot \gamma = 1$ kg, dann wird

$$\frac{a \cdot b \cdot (\varrho d \alpha) \cdot \gamma}{a \cdot b \cdot (\varrho d \alpha)_m \cdot \gamma} = \frac{1}{a \cdot b \cdot (\varrho d \alpha)_m \cdot \gamma} = \frac{(\varrho d \alpha)}{(\varrho d \alpha)_m}$$

und

$$A = \Sigma K \cdot (\varrho d \alpha) = \frac{a}{2} (K_i + K_a) \cdot \frac{(\varrho d \alpha)_m}{a \cdot b \cdot (\varrho d \alpha)_m \cdot \gamma}$$

$$A = \frac{1}{2} (K_i + K_a) \frac{1}{b \cdot \gamma}$$

oder mit Einsetzung aller Werte

$$A = \frac{1}{2 \cdot g \cdot \gamma} \cdot \left(\frac{c'_i \cdot d w_i}{(\varrho d \alpha)_i} + \frac{c'_a \cdot d w_a}{(\varrho d \alpha)_a} \right) \frac{1}{b}.$$

Dieser Wert A giebt in den einzelnen Abschnitten der Kanäle mit einem konstanten Faktor versehen Werte an, wie sie zur Korrektur der Wandflächenreibung nach Formel 10) nötig erscheinen. Aus den Tabellen 11) und 12) geht das deutlich hervor. Der Faktor erhielt mit $\frac{2}{2 \cdot \gamma \cdot g}$ multipliziert die Größe

$$\frac{k}{2 \cdot \gamma \cdot g} = 0{,}000004$$

und das weitere Glied der neuen Formel lautet

$$E_{v_{II}} = 0{,}000004 \left(\frac{c'_i \cdot d w_i}{(\varrho d \alpha)_i} + \frac{c'_a \cdot d w_a}{(\varrho d \alpha)_a} \right) \frac{1}{b}.$$

[1]) Diese Annäherung ist erlaubt, da bei der Ausrechnung der Kraft K an beliebiger Stelle x des Querschnittes der Koeffizient des Gliedes, das x^2 enthält, sehr klein im Verhältnis zu x wird.

Die Berechnung dieses Ausdruckes ist dadurch sehr vereinfach daß bei der Voraussetzung der Gleichung 11)

$$\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} + \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} = 2$$

und $d w_i = - d w_a$ [1]) wird, daß also nur einer der beiden Werte bestimm werden muß.

---

[1]) Setzen wir nämlich $c_m \cdot \frac{a}{2} = C$ = Konstante und ϱ_1 und ϱ_2 = Krüm mungsradien der Kanalmittellinie im Querschnitt 1 und 2, zwischen welche der Reibungsverlust im Kanal untersucht werden soll, so ist

$$v_{i_1} = c_{m_1} - \frac{C}{\varrho_1} \qquad v_{i_2} = c_{m_2} - \frac{C}{\varrho_2},$$

$$v_{a_1} = c_{m_1} + \frac{C}{\varrho_1} \qquad v_{a_2} = c_{m_2} + \frac{C}{\varrho_2}.$$

folglich

$$d v_i = c_{m_2} - c_{m_1} - C\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right),$$

$$d v_a = c_{m_2} - c_{m_1} + C\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Ferner wird

$$d c_i = \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)_2 c_{m_2} - \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)_1 \cdot c_{m_1}$$

und

$$d c_a = \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right)_2 c_{m_2} - \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right)_1 \cdot c_{m_1}.$$

Soll nun

$$d w_i = - d w_a$$

also

$$d w_i + d w_a = 0$$

sein, so muß

$$d c_i - d v_i + d c_a - d v_a = 0$$

werden. Also

$$\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)_2 c_{m_2} - \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)_1 c_{m_1} - c_{m_2} + c_{m_1} + C\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) +$$

$$+ \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right) c_{m_2} - \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right) c_{m_1} - c_{m_2} + c_{m_1} - C\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1}\right) = 0,$$

$$c_{m_2}\left[\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)_2 + \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right)_2 - 2\right] - c_{m_1}\left[\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)_1 + \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right)_1 - 2\right] +$$

$$+ C\left(\frac{1}{\varrho_2} - \frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_1}\right) = 0.$$

Diese Gleichung stimmt nach obiger Voraussetzung

$$\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} + \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} = 2.$$

Noch ein drittes Glied ist in die Formel einzuführen, das auch von der Krümmung abhängig, die innere Flüssigkeitsreibung zu umfassen scheint. Es wurde aus den Versuchsresultaten durch Eintragen der Differenzen der Versuchswerte und der bis jetzt berechneten E_v in ein rechtwinkliges Koordinatensystem entnommen zu

$$14) \quad \ldots \ldots \quad E_{v_{III}} = 0{,}0025 \sqrt{\frac{c'_m}{\varrho'_m}}\, d\alpha.$$

Dabei gibt $\frac{c'_m}{\varrho'_m} = \omega'$ die Winkelgeschwindigkeit der mittleren Normallinien an[1]).

Die Zusammenstellung der letzten 3 Gleichungen zeigt nun den Energieverlust $\varDelta E_v$ pro kg des durch einen Kanalabschnitt fließenden Wassers

$$15) \quad \ldots \quad \varDelta E_v = 0{,}006\, \frac{U'}{F'} \cdot (\varrho\, d\alpha)_m \cdot \frac{c'^2_m}{2g} + 0{,}0025 \sqrt{\frac{c'_m}{\varrho'_m}}\, d\alpha +$$

$$+ 0{,}000004 \left(\frac{c'_i\, dw_i}{(\varrho\, d\alpha)_i} + \frac{c'_a\, dw_a}{(\varrho\, d\alpha)_a} \right) \cdot \frac{1}{b}.$$

In der Tabelle 10, 11, 12 und 13 ist zu sehen, daß diese Formel trotz ganz verschiedener Weite, Breite und Krümmung der Kanäle I und II und trotz Anwendung verschiedener Gefälle in allen Abschnitten Werte ergibt, welche den aus den Versuchen entnommenen gut entsprechen.

Nur bei Versuch 1 und 3 (Tabelle 10 und 12) zeigten sich die gefundenen Werte kurz vor dem Normalschnitt, hinter welchem das Wasser, sei es durch Ausfluß ins Freie, sei es durch gerade parallele Schaufeln, eine gerade Bahn beschreiben kann, als zu klein. Es fehlte hier noch die Berechnung eines Energieverlustes, der den am Schluß des vorigen Kapitels erwähnten Geschwindigkeitsänderungen vor dem Ausfluß entspricht und zunächst bei Kanal I folgendermaßen erhalten wurde.

Könnten im Ausflußquerschnitt die Druckhöhen noch verschieden sein, so wäre die Geschwindigkeitshöhe innen

$$\frac{u_i^2}{2g} = \left(\frac{\varrho_{m_i}}{\varrho_i}\right)^2 \frac{c_m^2}{2g} \quad ^{2)}$$

und außen

$$\frac{u_a^2}{2g} = \left(\frac{\varrho_{m_i}}{\varrho_a}\right)^2 \frac{c_m^2}{2g} \quad ^{2)}$$

---

[1]) Brauer, Turbinentheorie. Kap. XI.

[2]) Diese Geschwindigkeit u ist nicht zu verwechseln mit den Geschwindigkeiten u der Gleichungen 8 und 9.

bei entsprechenden Druckhöhen h'_i und h'_a. Da aber die Druckhöh über dem Ausflußquerschnitt konstant $h = 0$ ist, so beträgt die G schwindigkeitshöhe im Ausfluß im Mittel für alle Wasserfäden

$$\frac{c_m^2}{2g} = H - \zeta \cdot \frac{c_m^2}{2g},$$

für den inneren Randfaden

$$\frac{c_i^2}{2g} = H - \zeta \cdot \frac{c_m^2}{2g} \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)^2 \text{mittel}$$

und für den äußeren Randfaden

$$\frac{c_a^2}{2g} = H - \zeta \cdot \frac{c_m^2}{2g} \left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right)^2 \text{mittel},$$

wenn $H = \frac{c_m^2}{2g} + \zeta \cdot \frac{c_m^2}{2g}$ mit Annäherung die im Eintrittsquerschnitt zu Verfügung stehende mittlere Gesamtenergie pro kg Wasser, $\zeta \cdot \frac{c_m^2}{2g}$ de mit Formel 15) bestimmten Energieverlust pro kg und $\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right)$ mitt und $\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right)$ mittel Mittelwerte[1]) über die ganze Kanallänge bezeichne

Zieht man dann $\frac{u_i^2}{2g}$ von $\frac{c_i^2}{2g}$ ab, so erhält man h'_i und en sprechend auch $h'_a = \frac{c_a^2}{2g} - \frac{u_a^2}{2g}$. h'_i wird dabei negativ, d. h. es würd bei angenommener Druckverschiedenheit im Ausfluß innen Unterdru entstehen. Mit Berücksichtigung dieses Vorzeichens findet sich d mittlere Energieverlust aller Wasserfäden infolge Geschwindigkeit änderungen vor dem Ausfluß pro kg Wasser

$$16) \quad \ldots\ldots\ldots \quad E_{v_a} = -k\,(h'_i + h'_a)$$

unter k einen Koeffizienten verstanden, welcher sich zu 0,25 e geben hat.

[1]) Diese Mittelwerte sind aus

$$\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i}\right) \text{mittel} = \frac{\Sigma \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_i} (\varrho\, d\alpha)_i}{\Sigma (\varrho\, d\alpha)_i},$$

$$\left(\frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a}\right) \text{mittel} = \frac{\Sigma \frac{\varrho_{m_1}}{\varrho_a} (\varrho\, d\alpha)_a}{\Sigma (\varrho\, d\alpha)_a}$$

gefunden.

Wie schon erwähnt, tritt auch bei Kanal II dieser Energieverlust ein, denn auch hier wird durch den Versuch innen im Kanal Unterdruck und im ausfließenden Strahl außen größere Geschwindigkeit als innen festgestellt. Ferner zeigen die Druckkurven der Normalschnitte (Tafel IV, Querschnitt 9 und 10) gegen Ende des Kanales eine Abnahme der Druckhöhe auf der Außenseite, also eine Zunahme der Geschwindigkeiten. Da aber bei diesem Kanal, abgesehen von der Reibung, der Druck schon in dem Querschnitte konstant wäre, hinter welchem die beiden geraden Schaufeln einander parallel laufen, so ist der Vorgang der Geschwindigkeitsverschiebung schon kurz vor jenem Querschnitt anzunehmen.

Die Berechnung von E_{v_a} wird bei geradliniger Verlängerung bedeutend vereinfacht, da

$$\frac{u_i^2}{2g} = \frac{c_m^2}{2g} = \frac{u_a^2}{2g}$$

ist und

$$E_{v_a} = 0{,}25\left(\frac{c_m^2}{2g} - \frac{c_m^2}{2g} - \zeta\cdot\frac{c_m^2}{2g} + \zeta\cdot\frac{c_m^2}{2g}\left(\frac{\varrho_{m_i}}{\varrho_i}\right)^2 \text{mittel} + \right.$$

$$\left. + \frac{c_m^2}{2g} - \frac{c_m^2}{2g} - \zeta\cdot\frac{c_m^2}{2g} + \zeta\cdot\frac{c_m^2}{2g}\left(\frac{\varrho_{m_i}}{\varrho_a}\right)^2 \text{mittel}\right).$$

Oder

17) . . . $$E_{v_a} = 0{,}25\,\zeta\cdot\frac{c_m^2}{2g}\left[\left(\frac{\varrho_{m_i}}{\varrho_i}\right)^2 \text{mittel} + \left(\frac{\varrho_{m}}{\varrho_a}\right)^2 \text{mittel} - 2\right]$$

$$\text{mit } \zeta\cdot\frac{c_m^2}{2g} = \Sigma\varDelta E_v \text{ nach Gleichung 15).}$$

Soll nun der Energieverlust E_v bestimmt werden, den 1 kg Wasser bei dem Durchfluß durch einen Turbinenkanal erleidet, so zerlegt man diesen durch mittlere Normalschnitte[1]) in einzelne Abschnitte und berechnet für jeden derselben nach Gleichung 15) den Wert $\varDelta E_v$ dann ist

18) . . $$E_v = \Sigma\varDelta E_v + E_{v_a} =$$

$$= \Sigma\left[0{,}006\,\frac{U'}{F'}\cdot(\varrho\,d\,\alpha)_m\cdot\frac{c'^2_m}{2g} + 0{,}0025\sqrt{\frac{c'_m}{\varrho'_m}}\cdot d\alpha + \right.$$

$$\left. + 0{,}000004\left(\frac{c'_i\,dw_i}{(\varrho\,d\alpha)_i} + \frac{c'_a\,dw_a}{(\varrho\,d\alpha)_a}\right)\cdot\frac{1}{b}\right] - 0{,}25\,(h'_i + h'_a).$$

[1]) Bei Kanälen mit veränderlicher Krümmung muß einer der Normalschnitte in den Punkt der inneren Schaufel gelegt werden, in welchem der Krümmungsradius am kleinsten ist.