Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Zur Kritik der Turbinen-Regulatoren

Kröner, Hermann

1910

Aufstellung der Grundgleichungen

urn:nbn:de:bsz:31-282609

Visual Library

Stellzeuges sei linear. Das von der Maschine ausgeübte Moment sei also der Verstellung des Servomotors proportional.

Auch diese Voraussetzung deckt sich nicht ganz mit der Wirklichkeit, doch ist die Abweichung unbedeutend und wiederum für kleine Intervalle zu vernachlässigen.

6. Es soll abgesehen werden von allen Einflüssen, die sich durch Reibung und Spiel im Regulator-Gestänge ergeben.

7. Der Regulator soll kontinuierlich die Kraftmaschine beeinflussen können. (Trifft bei Kolbendampfmaschinen nicht zu.)

8. Der Einfluss der dynamischen Wirkung der Wassermasse im Zuleitungsrohr bleibt ausser Betracht.

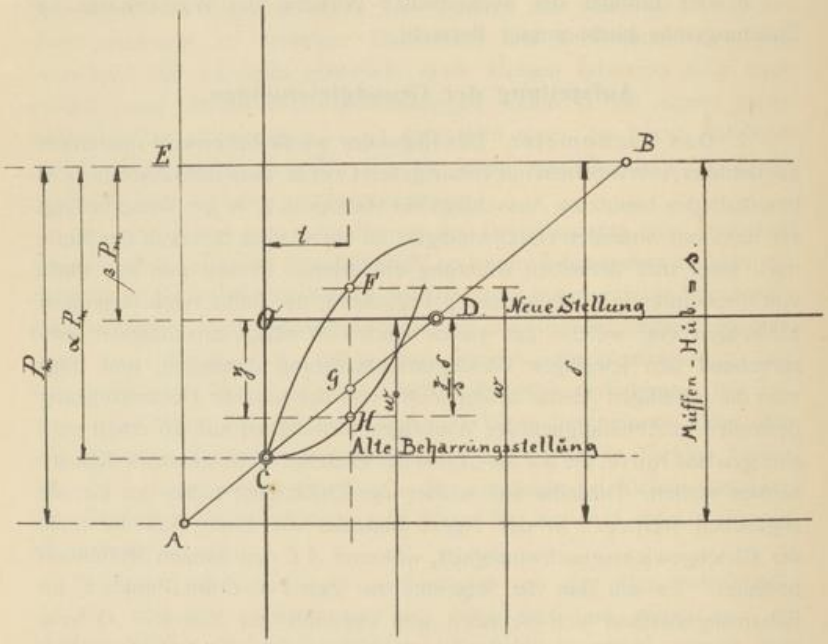
Aufstellung der Grundgleichungen.

1. Das Tachometer. Der Regulator werde beherrscht von einem Tachometer, von welchem nur vorausgesetzt werde, dass sein Gleichgewicht innerhalb des benutzten Ausschlags ein stabiles d. h. in der Weise bedingt sei, dass zunehmenden Geschwindigkeiten ein stetiges Bewegen der Muffe nach einer und derselben Richtung entspricht. Nimmt nun die Muffe von ihrer unteren Hubbegrenzung beginnend, der Reihe nach diejenigen Stellungen ein, welche der zunehmenden Winkelgeschwindigkeit entsprechend den jeweiligen Gleichgewichtszustand darstellen, und trägt man die jeweiligen Abstände der Muffe von der unteren Hubbegrenzung gemessen in Abhängigkeit der Winkelgeschwindigkeit auf, so erhält man eine gewisse Kurve, die wir die „Linie der Gleichgewichtsgeschwindigkeit" nennen wollen. Dieselbe soll wieder der Einfachheit halber als Gerade angesehen werden. In der Fig. 2 bedeutet die Linie $A\,B$ die Linie der Gleichgewichtsgeschwindigkeit, während $A\,E$ den ganzen Muffenhub bedeutet. Es soll nun die Maschine zur Zeit $t = O$ im Punkte C im Beharrungszustand sich befinden und ebenfalls zur Zeit $t = O$ trete eine plötzliche Entlastung ein von der Belastung $\alpha\,P_m$ auf $\beta\,P_m$, Linie $O\,D$ stellt den neuen Beharrungszustand dar und soll gleichzeitig Abscissenachse oder Zeitachse sein. Linie $O\,C$ sei Ordinatenachse.

Infolge des beschleunigenden Moments von der Grösse $(\alpha\text{-}\beta)\,P_m$ muss die Maschine eine Geschwindigkeitssteigerung erfahren, deren zeitlicher Verlauf durch die Kurve $C\,F$ dargestellt sei. Wäre nun das Tachometer vollständig masselos, so könnte die Kurve $C\,F$ auch den Weg der Muffe darstellen, denn bei masselosem Tachometer müsste die Muffe stets die der momentan herrschenden Geschwindigkeit entsprechende Gleichgewichtsstellung einnehmen. Da nun aber das Tachometer eine gewisse Masse besitzt, die erst beschleunigt werden muss, so wird die Muffenweglinie im Punkt C eine horizontale Tangente besitzen und eine Form annehmen, wie etwa Kurve $C\,H$. In dem Zeitpunkt t

Sekunden nach Störung des Gleichgewichts entspricht also weder die Geschwindigkeit der Maschine derjenigen der Gleichgewichtslinie, sonst müsste Punkt F mit Punkt G zusammenfallen, noch hat die Muffe eine Stellung, die dem Gleichgewicht des Tachometers entspricht, sonst müsste Punkt H mit Punkt G zusammenfallen. Aus ersterer Unstimmigkeit entsteht die sog. „Stellkraft durch falsche Geschwindigkeit", auch dynamische Stellkraft genannt, aus der zweiten Unstimmigkeit, die sog. „Stellkraft durch falsche Stellung", auch statische Stellkraft genannt.

Fig. 2.



Wenn ein Tachometer bei gleichbleibender Stellung seiner Muffe seine Winkelgeschwindigkeit ω um den Betrag $\Delta\,\omega$ erhöht, so entsteht eine Stellkraft:

$$Q.\frac{(\omega+\triangle\omega)^2-\omega^2}{\omega^2}=Q.\frac{2\,(\triangle\omega)\,\omega,+(\triangle\omega)^2}{\omega^2}$$

wobei Q den an der Muffe in Richtung der Muffenbewegung wirkenden Druck den sog. Muffendruck bezeichnet. Setzt man $(\triangle\omega)$ so klein voraus, dass $(\triangle\omega)^2$ vernachlässigt werden kann, so kommt

$$Q.\frac{(\omega+\triangle\omega)^2-\omega^2}{\omega^2}=2\frac{\triangle\omega}{\omega}Q.$$

Es soll nun mit

$$\varphi=\frac{\triangle\omega}{\omega}$$

die verhältnismässige Geschwindigkeitsschwankung bezeichnet werden, und damit schreibt sich der Ausdruck für die dynamische Stellkraft ganz allgemein

$$P_\varphi = 2\varphi Q.$$

Hierin ist φ positiv, wenn es sich um eine Erhöhung, negativ, wenn es sich um eine Erniedrigung der Tourenzahl handelt.

Wir wollen jetzt das Tachometer zur Zeit t nach der Gleichgewichtsstörung betrachten und feststellen, mit welcher Kraft die Muffe in die neue Beharrungsstellung gezogen wird.

Die Winkelgeschwindigkeit entsprechend der neuen Beharrungsstellung sei ω_0.

Würde sich die Muffe in der Entfernung $y = o$ von der neuen Beharrungsstellung befinden und wäre die Geschwindigkeit des Tachometers $\omega_0 (1 + \varphi)$, dann würde auf die Muffe eine Kraft wirken

$$P_\varphi = 2\varphi Q$$

nach oben gerichtet. Wir denken uns jetzt das Tachometer mit der Winkelgeschwindigkeit ω_0 laufend, die Muffe aber aus der neuen Beharrungsstellung um den Betrag y gegen die alte zurückverschoben. Diese Verschiebung hat nun bezüglich der Stellkraft genau dieselbe Wirkung, wie wenn die Hülse in der Entfernung $y = o$ sich befände, das Tachometer aber mit einer Winkelgeschwindigkeit laufen würde von

$$\omega_0 \left(1 - \delta \frac{y}{s}\right) = \omega_0 (1 - \delta\eta)$$

wobei

$$\eta = \frac{y}{s}$$

Dies ergibt also eine Stellkraft:

$$P_\eta = -2\delta\eta Q$$

nach unten gerichtet. Die ganze Stellkraft ergibt sich also zu:

$$P = P_\varphi + P_\eta = 2Q(\varphi - \delta\eta)$$

Hierin bedeutet also φ die vorübergehende verhältnismässige Geschwindigkeitsänderung, δ die bleibende verhältnismässige Geschwindigkeitsänderung für den ganzen Hub des Tachometers, η den verhältnismässigen Muffenhub.

Während der Bewegung der Muffe soll nun ausser dieser Stellkraft P noch eine Kraft von der Form $K\frac{dy}{dt}$ an der Muffe angreifen und zwar in einem der Kraft P entgegengesetzten Sinn. Eine solche Kraft ist die Bremskraft einer Oelbremse.

Bekanntlich ist bei Oel als Flüssigkeit die Widerstandshöhe der Oelgeschwindigkeit direkt proportional, eine Erfahrungstatsache, die erst

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

neuerdings durch Versuche wieder erhärtet wurde.*) Bedeutet nun m_r die bezüglich der lebendigen Kraft und bezüglich der Relativbewegung in der Pendelebene auf die Muffe reduzierte Masse des Tachometers, so dass also

$$m_r \cdot \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = \Sigma\, m.\, v_r^2$$

(v_r = die für jedes Massenteilchen verschiedene relative Geschwindigkeit) so ergibt sich als Bewegungsgleichung der Muffe:

$$m_r \cdot \frac{d^2y}{dt^2} = 2Q(\varphi - \delta\eta) - K\frac{dy}{dt}$$

mit:

$$\eta = \frac{y}{s};\quad \frac{dy}{dt} = s.\frac{d\eta}{dt};\quad \frac{d^2y}{dt^2} = s.\frac{d^2\eta}{dt^2}$$

$$\frac{m_r \cdot s}{2Q}\cdot\frac{d^2\eta}{dt^2} + \frac{K\cdot s}{2Q}\cdot\frac{d\eta}{dt} + \delta\eta - \varphi = 0$$

Es soll nun gesetzt werden: **)

$$T_r^{\,2} = \frac{m_r \cdot s}{2Q};\quad T_K = \frac{K\cdot s}{2Q}$$

so kommt

$$T_r^{\,2}\frac{d^2\eta}{dt^2} + T_K\frac{d\eta}{dt} + \delta\eta - \varphi = 0 \qquad 1)$$

Bezüglich der Bedeutung von T_r und T_K sei folgendes bemerkt:

Es ist $$s = \frac{Q}{m_r}\cdot\frac{(2\,T_r)^2}{2}$$

darnach ist $2\,T_r$ diejenige Zeit, während welcher die Masse m_r unter Einwirkung des Muffendrucks Q den Hub s des Tachometers zurücklegt. (Fallzeit des Tachometers.) Es ist ferner:

$$s = \frac{Q}{K}\cdot(2\,T_K)$$

hierin bedeutet $\frac{Q}{K}$ diejenige Geschwindigkeit des Oelbremsenkolbens, die einen Widerstand gleich dem Muffendruck Q hervorbringen würde, und $2\,T_K$ ist diejenige Zeit, die zum Zurücklegen des Hubes s bei dieser Geschwindigkeit notwendig ist (Fallzeit der Oelbremse). Unter der Voraussetzung, dass Q über den Muffenhub konstant ist, sind diese Zeitgrössen ebenfalls konstante Werte. Der Muffendruck Q wird zwar

*) Siehe Cammerer, Zeitschrift für das gesamte Turbinenwesen, Jahrgang 1907, Seite 461.

**) Prof. A. Stodola Zürich ist der erste, der die Einführung dieser Zeitkonstanten befürwortet hat; s. Schweiz. Bauzeitung 1893 Bd XXII Nr 17—26 und 1894 Bd XXIII Nr 17 und 18. Ferner Zeitschr. d. V. d. I. 1899, S. 512.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

in der Regel nicht konstant sein, doch ist die Aenderung dieses Wertes bei kleinen Ungleichförmigkeitsgraden δ, wie solche eben bei guten Regulatoren vorkommen sollen, sehr klein, zudem lassen sich auch Tachometer bauen mit konstantem Muffendruck Q.

2. Der Servomotor. Bezüglich des Steuerkolbens des Krafteinschalters sei eine hinreichend grosse Dimensionierung vorausgesetzt, so dass ohne jede Verspätung die Einschaltung erfolge. Der Servomotor sei an Kraft dem zu überwindenden Widerstand so sehr überlegen, dass eine Verzögerung oder Störung des Reguliervorganges durch Beschleunigung der hier auftretenden Massen nicht eintrete. Diese Voraussetzungen können jedenfalls erfüllt werden.*)

Die Bewegungsgleichung des Servomotorkolbens ergibt sich durch die Annahme, dass seine Geschwindigkeit proportional ist der Ausweichung des Steuerkolbens aus seiner Mittellage. Servomotor ist in Ruhe, wenn der Steuerkolben in der Mittellage ist, er bewegt sich umso rascher, je mehr Pressflüssigkeit der Steuerkolben hinter den Druckkolben strömen lässt. Die Annahme der Proportionalität zwischen Ausweichung des Steuerkolbens und Servomotorkolbengeschwindigkeit ist umso eher richtig und berechtigt, je mehr der Servomotor dem zu überwindenden Widerstand überlegen ist. In Wirklichkeit werden auch die Servomotoren mit einer Arbeitsfähigkeit ausgestattet, welche diejenige des Widerstandes um mehr als das $2^1/_2$ bis 3 fache übersteigen.**) Der Weg der Tachometermuffe werde von der unteren Hubbegrenzung aus, derjenige des Servomotorkolbens von der Stellung „ganz offen" und die Ausweichung des Steuerkolbens von der Deckstellung aus gemessen. Zur Zeit t soll sich die Hülse in der Entfernung y, der Servomotorkolben in der Entfernung m und der Steuerkolben in der Entfernung x von der Nullstellung befinden.

Um nun von Anfang an alle Hebelübersetzungen aus der Rechnung auszuschalten, werde die Annahme gemacht, dass der Hub der Tachometermuffe, derjenige des Servomotors und derjenige des Rückführpunktes C alle von gleichem Betrag $= s$ seien, womit natürlich die Güte des Regulators in keiner Weise beeinträchtigt wird.

Hiermit wird der kinematische Zusammenhang ein derartiger, dass der Rückführpunkt C sich jeweils mit der gleichen Geschwindigkeit bewegt, wie der Servomotorkolben. Der Punkt D wird zum Mittelpunkt zwischen M und C und die maximale Ausweichung des Krafteinschalters

---

*) Brauchbare praktische Werte über diese Verhältnisse sind angegeben in dem Werke: R. Thomann, „Die Wasserturbinen" S. 254—258.

**) Siehe hierüber R. Thomann, Wasserturbinen, S. 286 ff.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

aus seiner Mittellage beträgt $\frac{1}{2}s$. Damit die Rechnung auch noch von der absoluten Grösse des Hubs s und $\frac{1}{2}s$ unabhängig wird, führen wir folgende Veränderliche ein:

Es bedeute:

$\eta = \frac{y}{s}$ den verhältnismässigen Muffenweg,

$\mu = \frac{m}{s}$ „ „ Weg des Servomotorkolbens,

oder „ „ „ „ Rückführpunktes C,

$\sigma = \frac{x}{\frac{1}{2}s}$ die verhältnismässige Ausweichung des Steuerkolbens aus seiner Mittellage.

Die Bewegung des Steuerkolbens ist infolge seiner mechanischen Kuppelung mit Muffe M und Rückführpunkt C eine Differenzbewegung und setzt sich zusammen aus den beiden gegensinnigen Bewegungen von Muffe und Rückführung. Es beträgt daher zu irgend einem Zeitpunkt der Bewegung die verhältnismässige Ausweichung

$$\sigma = \eta - \mu$$

Diese Beziehung gilt nur für den Bewegungszustand. Ist $\eta = \mu$, dann ist $\sigma = O$ der Steuerkolben in der Mittellage, $\sigma = O$ bedeutet den Ruhezustand des Servomotors.

Indem wir nun die Geschwindigkeit des Servomotors proportional der Ausweichung des Steuerkolbens setzen, erhalten wir:

$$\frac{dm}{dt} = c \,.\, x = c(y - m)$$

oder

$$\frac{d\mu}{dt} = c \,.\, (\eta - \mu)$$

Die mechanische Bedeutung der Grösse C ergibt sich aus folgender Betrachtung:

Die verhältnismässige Geschwindigkeit $\frac{d\mu}{dt}$ wird zu einem Maximum, wenn $(\eta - \mu)$ ein Maximum ist. Da nun die Zahlen η und μ zwischen den Werten o und 1 schwanken, so ist $(\eta - \mu)$ ein Maximum, wenn z. B. $\mu = o$ und $\eta = 1$. Damit erhalten wir:

$$\left(\frac{d\mu}{dt}\right)_{max} = c.$$

und es ist somit c die grösste mögliche Geschwindigkeit, die auftreten kann, nämlich diejenige, welche z. B. entsteht, wenn der Rückführpunkt C in seiner Nullstellung $(\mu = o)$, die Tachometermuffe dagegen in ihrer obersten Stellung $(\eta = 1)$ sich befindet. Hierbei gibt der Steuerkolben

die grösste Oeffnung, und die grösste Geschwindigkeit kann entstehen. $\frac{1}{c}$ muss dann diejenige Zeit bedeuten, welche der Servomotor brauchen würde, um mit dieser maximalen Geschwindigkeit seinen Hub zu durchlaufen.

Wir wollen $$\frac{1}{c} = T_s$$

die „Schlusszeit des Servomotors" nennen. Mit dieser Bezeichnung erhalten wir als Bewegungsgleichung des Servomotorkolbens:

$$T_s \frac{d\mu}{dt} + \mu - \eta = o \qquad 2)$$

3. Kraftmaschine mit Schwungrad. Es sei P_m das maximale Drehmoment entsprechend der maximalen Belastung der Maschine. $P = \gamma P_m$ das vom Servomotor zur Zeit t eingestellte und βP_m das der neuen Belastung, der neuen Beharrungsstellung entsprechende; dann besteht zur Zeit t ein Ueberschuss an Drehmoment (s. Fig. 3) von der Grösse

$$(\gamma - \beta)\ P_m$$

Nach der Voraussetzung 5 Seite 4 soll ein linearer Zusammenhang bestehen zwischen der Stellung des Servomotorkolbens und der Leistung der Maschine. Demgemäss gilt die Beziehung:

$$\frac{(\gamma - \beta) P_m}{m} = \frac{P_m}{s}$$

und hieraus:

$$(\gamma - \beta) P_m = \mu . P_m$$

Die Bewegungsgleichung des Schwungrades ergibt sich somit zu:

$$M . \frac{d\omega}{dt} = -\mu \cdot P_m .$$

Hierin ist M die auf Radius 1 m reduzierte Masse sämtlicher rotierender Teile. Das negative Zeichen erklärt sich aus der Ueberlegung, dass einer Zunahme der Winkelgeschwindigkeit eine Abnahme des treibenden Moments entspricht und umgekehrt.

Mit der Grösse φ, die bereits oben Seite 6 eingeführt wurde

$$\varphi = \frac{\omega - \omega_0}{\omega_0}; \quad \frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{d\omega}{dt}$$

kommt

$$\frac{M . \omega_0}{P_m} \frac{d\varphi}{dt} + \mu = o$$

Wir setzen den Wert

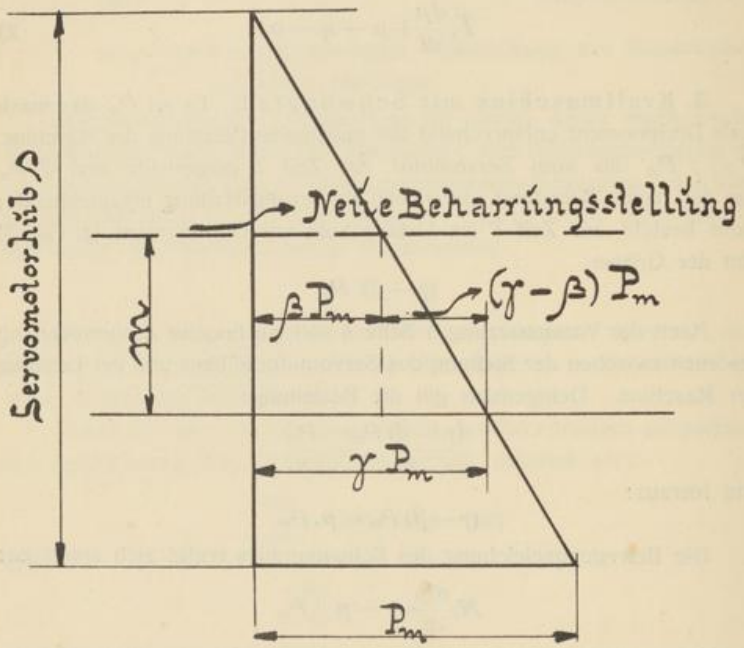
$$\frac{M \omega_0}{P_m} = T_a$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

und können aus dieser Gleichung ablesen, dass T_a diejenige Zeit ist, welche das maximale Drehmoment P_m brauchen würde, um die Masse M von der Ruhe auf die Winkelgeschwindigkeit ω_o zu beschleunigen. T_a wird Anlaufzeit genannt. Es ergibt sich damit die Bewegungsgleichung des Schwungrades zu

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} + \mu = o \qquad 3)$$

Fig. 3.



Stellen wir die drei massgebenden Bewegungsgleichungen zusammen, so haben wir folgende drei Gleichungen:

$$T_r^2 \frac{d^2\eta}{dt^2} + T_K \frac{d\eta}{dt} + \delta\eta - \varphi = o \qquad 1)$$

$$T_s \frac{d\mu}{dt} + \mu \quad - \eta = o \qquad 2)$$

$$T_a \frac{d\varphi}{dt} + \mu \qquad = o \qquad 3)$$

Diese drei Differentialgleichungen sollen zu gleicher Zeit bestehen, sie bilden daher ein sog. simultanes System.

Bekanntlich führt die Lösung dieser Gleichungen auf die sog. charakteristische Gleichung, die wir jetzt aufstellen wollen: *)

Es werde gesetzt:

$$\eta = a\, e^{wt};\ \mu = b \cdot e^{wt};\ \varphi = c\, e^{wt}$$

Nach Kürzung mit e^{wt} kommt:

$$\begin{aligned} O &= (T_r^{\,2} w^2 + T_K w + \delta)\, a + O \cdot b - 1 \cdot c \\ O &= -1 \cdot a + (T_s w + 1)\, b + O\, c \\ O &= O \cdot a + 1 \cdot b + T_a w \cdot c \end{aligned}$$

Damit diese drei für a, b und c homogene Gleichungen gleichzeitig bestehen können, muss die Determinante ihrer Koeffizienten zu O werden, d. h. es muss

$$(T_r^{\,2} w^2 + T_K w + \delta)\left[(T_s w + 1) \cdot T_a w\right] + 1 = O$$

oder

$$(T_r^{\,2} w^2 + T_K w + \delta)\left(T_a T_s w^2 + T_a w\right) + 1 = O$$

Das ist die charakteristische Gleichung, welche nach Potenzen von w geordnet lautet:

$$T_a T_s T_r^{\,2} w^4 + T_a (T_s T_K + T_r^{\,2}) w^3 + \qquad \textbf{4)}$$
$$T_a (\delta T_s + T_K) w^2 + \delta T_a w + 1 = O$$

Sind nun w_1 w_2 w_3 w_4 die Wurzeln dieser charakteristischen Gleichung, so ist bekanntlich das allgemeine Integral des simultanen Systems der drei Differentialgleichungen:

$$\varphi = A_1 e^{w_1 t} + B_1 e^{w_2 t} + C_1 e^{w_3 t} + D_1 e^{w_4 t} \qquad \textbf{5)}$$

$$\eta = A_2 e^{w_1 t} + B_2 e^{w_2 t} + C_2 e^{w_3 t} + D_2 e^{w_4 t} \qquad \textbf{6)}$$

$$\mu = A_3 e^{w_1 t} + B_3 e^{w_2 t} + C_3 e^{w_3 t} + D_3 e^{w_4 t} \qquad \textbf{7)}$$

Die Formen dieser Integrale zeigen, dass die Art der Regulierung einzig und allein von den Wurzeln w der charakteristischen Gleichung abhängt, sie ist eine grundverschiedene, je nachdem die Wurzeln reell oder imaginär sind, im Falle reeller Wurzeln treten keine Schwingungen auf, die Werte von φ, η und μ nähern sich stetig einem bestimmten Grenzwert und zwar ist dieser Grenzwert ∞, wenn die Wurzeln positiv sind, dagegen endlich, wenn sie negativ sind. Im Falle imaginärer Wurzeln treten Schwingungen auf: der Uebergang von einem Beharrungszustand in den andern ist ein Schwingungsvorgang.

---

*) Siehe Stodola „Ueber die Regulierung der Turbinen", Schw. Bauzeitung 1893.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

Von einem richtig arbeitenden Regulator muss verlangt werden, dass er nach Störung des Gleichgewichts zwischen zugeführter und abgegebener Leistung der von ihm beherrschten Maschine mit möglichst geringer Geschwindigkeitsänderung in möglichst kurzer Zeit den Gleichgewichtszustand herzustellen vermag. Als vollständig unbrauchbar ist daher ein Regulator zu bezeichnen, der mit zunehmenden Amplituden der Schwingungen reguliert und das kann offenbar der Fall sein:

1. beim Auftreten von reellen Wurzeln der charakteristischen Gleichung, wenn auch nur eine derselben positiv ist;

2. beim Auftreten komplexer Wurzeln, wenn auch nur einer der reellen Teile positiv ist.

Man nennt einen solchen Zustand der Regulierung einen labilen, im Gegensatz zum stabilen Zustand, bei dem die Schwingungsamplituden mit der Zeit abnehmen.

Die Stabilität der Regulierung ist also das erste Erfordernis an einen brauchbaren Regulator und man kann die Stabilitätsbedingungen zusammenfassen in:

1. keine der reellen Wurzeln darf positiv sein;

2. von komplexen Wurzeln muss der reelle Teil negativ sein.

Die Algebra hat nun einfache Regeln aufgestellt, mit Hilfe deren man bei einer gegebenen Gleichung entscheiden kann, ob diese Bedingungen, wie sie das richtige Funktionieren eines Regulators für die charakteristische Gleichung seiner Bewegungsdifferentialgleichungen verlangt, erfüllt sind oder nicht. Diese Regeln ergeben die Stabilitätsbedingungen. Sie stellen Beziehungen dar zwischen den Koeffizienten der Gleichung, d. h. sie setzen eine untere Grenze fest für gewisse Funktionen gebildet aus den Koeffizienten. Wird diese Grenze unterschritten, so sind die Bedingungen der Stabilität nicht erfüllt, die Wurzeln erhalten positive Werte und die Schwingungsamplituden nehmen zu.

Bleiben die Funktionen in ihrem Wert über der Grenze, so sind die Bedingungen erfüllt, der Regulator ist brauchbar und das umsomehr, je grösser der Abstand von der Grenze ist.

Die Wurzeln einer Gleichung haben für den Fall, dass sie komplex sind, alle die Form

$$w = \alpha \pm \beta i.$$

Der von einem solchen Wurzelpaar stammende Anteil des Integrals ist

$$e^{\alpha t} \left(A \cos(\beta t) + B \sin(\beta t)\right)$$

und das ganze Integral besteht aus einer Summe ähnlicher Ausdrücke.

Der Klammerausdruck bedeutet eine Sinusschwingung mit sich gleichbleibender Amplitude, während der Faktor $e^{\alpha t}$ das Mass angibt, nach welchem diese Amplituden unter der Voraussetzung eines negativen

Werts von α abnehmen werden. Da nun einerseits der reelle Teil der Wurzel die Grösse der Konvergenz der Schwingungen bestimmt, andererseits die Stabilitätsbedingungen über den absoluten Betrag des reellen Teils der Wurzeln entscheiden, der umso grösser ist, je mehr sich die Ausdrücke von der Grenze entfernt halten, so geben die Stabilitätsbedingungen nur einen Masstab ab für die Grösse der Stabilität d. h. für die Geschwindigkeit, mit der die Schwingungen abklingen.

Die Stabilität ist nun allerdings die allererste Forderung, die an einen brauchbaren Regulator gestellt werden muss, sie ist aber keineswegs allein hinreichend, es muss vielmehr sowohl die grösste auftretende Geschwindigkeitsschwankung, als auch die ganze Dauer des Regulierspieles — Regulierdauer genannt — innerhalb gewisser Grenzen bleiben, die durch die Eigentümlichkeit der speziellen Betriebe vorgeschrieben sind; von zwei Regulatoren mit der gleichen unter gleichen Voraussetzungen auftretenden grössten Tourenschwankung ist derjenige als der bessere zu bezeichnen, der sich am raschesten dem neuen Beharrungszustand anzupassen vermag. Während nun die Grösse der ersten Schwingungsamplituden in der Hauptsache von den Anfangsbedingungen abhängt, wird die Regulierdauer von der Grösse der Stabilität und derjenigen der ersten Amplitude beeinflusst, sodass eine Verbesserung in der einen Richtung auch gleichzeitig eine solche nach dem zweiten Gesichtspunkte bedeutet.

Spezialfälle.

Bevor wir zur Untersuchung der charakteristischen Gleichung vierten Grades gehen, sollen erst einige Spezialfälle behandelt werden.

I) $$T_r^2 = o;\ T_K = o;\ T_s = o$$

d. h. der direkte Regulator $(T_s = o)$, dessen Tachometer mit unendlich kleiner Masse oder unendlich grossem Muffendruck ausgestattet ist, also der ideale direkte Regulator.

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\delta T_a w + 1 = 0 \qquad 8)$$

Die einzige Wurzel der charakteristischen Gleichung ist reell und negativ. Der ideale direkte Regulator ist stets stabil, sein Reguliervorgang ist stets aperiodisch, d. h. er vollzieht sich ohne alle Schwingungen.

II) $$T_r^2 = o;\ T_K = o;\ T_s > o,$$

d. h. der ideale indirekte Regulator. Seine charakteristische Gleichung lautet: