

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Zur Kritik der Turbinen-Regulatoren

Kröner, Hermann

1910

Spezialfälle

[urn:nbn:de:bsz:31-282609](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-282609)

Werts von α abnehmen werden. Da nun einerseits der reelle Teil der Wurzel die Grösse der Konvergenz der Schwingungen bestimmt, andererseits die Stabilitätsbedingungen über den absoluten Betrag des reellen Teils der Wurzeln entscheiden, der umso grösser ist, je mehr sich die Ausdrücke von der Grenze entfernt halten, so geben die Stabilitätsbedingungen nur einen Masstab ab für die Grösse der Stabilität d. h. für die Geschwindigkeit, mit der die Schwingungen abklingen.

Die Stabilität ist nun allerdings die allererste Forderung, die an einen brauchbaren Regulator gestellt werden muss, sie ist aber keineswegs allein hinreichend, es muss vielmehr sowohl die grösste auftretende Geschwindigkeitsschwankung, als auch die ganze Dauer des Regulier-spieles — Regulierdauer genannt — innerhalb gewisser Grenzen bleiben, die durch die Eigentümlichkeit der speziellen Betriebe vorgeschrieben sind; von zwei Regulatoren mit der gleichen unter gleichen Voraussetzungen auftretenden grössten Tourenschwankung ist derjenige als der bessere zu bezeichnen, der sich am raschesten dem neuen Beharrungs-zustand anzupassen vermag. Während nun die Grösse der ersten Schwingungsamplituden in der Hauptsache von den Anfangsbedingungen abhängt, wird die Regulierdauer von der Grösse der Stabilität und derjenigen der ersten Amplitude beeinflusst, sodass eine Verbesserung in der einen Richtung auch gleichzeitig eine solche nach dem zweiten Gesichtspunkte bedeutet.

Spezialfälle.

Bevor wir zur Untersuchung der charakteristischen Gleichung vierten Grades gehen, sollen erst einige Spezialfälle behandelt werden.

I) $T_r^2 = 0; T_K = 0; T_s = 0$

d. h. der direkte Regulator ($T_s = 0$), dessen Tachometer mit unendlich kleiner Masse oder unendlich grossem Muffendruck ausgestattet ist, also der ideale direkte Regulator.

Die charakteristische Gleichung lautet:

$$\delta T_n w + 1 = 0 \quad 8)$$

Die einzige Wurzel der charakteristischen Gleichung ist reell und negativ. Der ideale direkte Regulator ist stets stabil, sein Regulier-vorgang ist stets aperiodisch, d. h. er vollzieht sich ohne alle Schwingungen.

II) $T_r^2 = 0; T_K = 0; T_s > 0,$

d. h. der ideale indirekte Regulator. Seine charakteristische Gleichung lautet:

$$\delta T_a T_s w^2 + \delta T_a w + 1 = 0 \quad 9)$$

daraus

$$w = -\frac{1}{2} \frac{1}{T_s} \pm \frac{1}{2} \frac{1}{T_s} \sqrt{1 - \frac{4}{\delta} \frac{T_s}{T_a}}$$

Da die Koeffizienten der charakteristischen Gleichung alle positiv sind, so werden sowohl die reellen Wurzeln, als auch der reelle Teil der komplexen Wurzeln stets negativ. Auch der ideale indirekte Regulator reguliert stets stabil; aber während der ideale direkte Regulator ohne jede Schwingung vom alten Beharrungszustand ausgehend sich stetig dem neuen Zustand nähert, vollführt der ideale indirekte Regulator im allgemeinen Schwingungen um den neuen Zustand; nur für den Fall

$$\frac{4}{\delta} \frac{T_s}{T_a} \leq 1$$

reguliert auch er aperiodisch.

Man überzeugt sich leicht, dass die letztere Forderung sehr schwer zu realisieren ist, und dass also für gewöhnlich die Einschaltung eines Hilfsmotors eine Ursache zu Schwingungen bildet.

$$\text{III)} \quad T_r^2 = 0; \quad T_K > 0; \quad T_s = 0;$$

d. h. der ideale direkte Regulator mit Oelbremse. Charakteristische Gleichung:

$$\left. \begin{aligned} T_a T_K w^2 + \delta T_a w + 1 &= 0 \\ \text{oder} \quad \delta T_a \frac{T_K}{\delta} w^2 + \delta T_a w + 1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad 10)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit derjenigen von Fall II, so sind dieselben identisch, wenn

$$T_s = \frac{T_K}{\delta}$$

Es ergibt sich hieraus das schon von Stodola gefundene Ergebnis, dass die Wirkung einer Oelbremse aufzufassen ist wie diejenige eines langsam wirkenden Servomotors, dessen Schlusszeit $T_s = \frac{T_K}{\delta}$, d. h. das Anbringen einer Oelbremse bedeutet ebenso wie die Verwendung eines langsam wirkenden Hilfsmotors eine Verschleppung des Regulierungsvorganges. Eine Oelbremse gibt jederzeit zu Schwingungen Veranlassung, deren Amplitude unter sonst gleichen Verhältnissen umso grösser ausfallen, je grösser T_K .

Der ideale direkte Regulator reguliert ohne Bremse vollständig aperiodisch, mit Bremse gerät er in Schwingungen. Die Bremse wirkt also hier nur schädlich. Mit dieser Ueberlegung ist Fall III auf Fall II zurückgeführt.

Die Kombination ideales Tachometer mit Bremse ergibt jedoch eine stabile Regulierung. Die Wurzeln der charakteristischen Gleichung sind:

$$w = -\frac{\delta}{2T_K} \pm \frac{\delta}{2T_K} \sqrt{1 - \frac{4T_K}{\delta^2 T_a}}$$

Mit $T_K = 0$ ergibt sich wieder aperiodische Regulierung.

IV) $T_r^2 > 0; T_K > 0; T_s = 0$

d. h. der wirkliche direkte Regulator. Die charakteristische Gleichung lautet:

$$T_a T_r^2 w^3 + T_a T_K w^2 + \delta T_a w + 1 = 0$$

Da die Koeffizienten dieser Gleichung sämtlich positiv sind, so ist stets eine reelle negative Wurzel vorhanden, ob aber der reelle Teil der beiden andern komplex konjugierten Wurzeln negativ wird, lässt sich nicht so ohne weiteres bestimmen.

Um dies zu verfolgen, wenden wir ein Verfahren an, das Wischnegradski *) angegeben hat:

Gegeben sei die Gleichung dritten Grades:

$$a w^3 + b w^2 + c w + d = 0$$

durch Substitution von

$$w = z - \frac{b}{3a}$$

erhält man die sog. reduzierte Gleichung

$$z^3 + A z + B = 0$$

wofern

$$A = \frac{c}{a} - \frac{1}{3} \left(\frac{b}{a} \right)^2 \text{ und } B = \frac{2}{27} \left(\frac{b}{a} \right)^3 - \frac{1}{3} \frac{bc}{a^2} + \frac{d}{a}$$

Setzt man noch der Kürze halber

$$C = \frac{A^3}{27} + \frac{B^4}{4}$$

ferner

$$D = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{C}}; E = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{C}}$$

so lauten die Wurzeln der Gleichung bekanntlich:

$$w_1 = D + E - \frac{b}{3a}$$

$$w_2 = -\frac{1}{2} (D + E) - \frac{b}{3a} + i\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (D - E)$$

$$w_3 = -\frac{1}{2} (D + E) - \frac{b}{3a} - i\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} (D - E)$$

*) Wischnegradski, Zivilingenieur 1877, S. 110.

Die Betrachtung von w_1 und w_2 ergibt:

$$w_1 = -2(D+E) - \frac{b}{a}$$

da b und a positive Werte sind, ist also das zweite Glied von w_1 negativ, und es handelt sich noch um den Wert $(D+E)$, den wir der Kürze halber x bezeichnen wollen.

Setzt man die Wurzel

$$w_1 = -2x - \frac{b}{a}$$

in die gegebene Gleichung dritten Grads ein, so kommt

$$8ax^3 + 8bx^2 + 2\left(\frac{b^2}{a^2} + c\right)x + \left(\frac{bc}{a} - d\right) = 0$$

Nach einem Satze der Algebra hat die einzige mögliche reelle Wurzel (x) einer Gleichung ungeraden Grades ein Vorzeichen entgegengesetzt gleich demjenigen des letzten Gliedes; es wird somit x negativ, wenn

$$\frac{bc}{a} - d > 0$$

Setzen wir hierin die Koeffizienten unserer charakteristischen Gleichung ein so kommt:

$$\frac{T_a T_K \cdot \delta T_a}{T_a T_r^2} - 1 > 0$$

oder:

$$\delta T_a T_K > T_r^2 \quad (12)$$

ist die Stabilitätsbedingung für den direkten Regulator neben der Voraussetzung, dass alle Koeffizienten der charakteristischen Gleichung positive Zahlen sind.

Diese hier gefundene Beziehung ist von grossem Interesse, so dass es sich lohnt, näher auf dieselbe einzugehen.

Nimmt man ein Tachometer von festgelegten Eigenschaften d. h. nimmt man die Grösse $\frac{T_r^2}{\delta}$ als Konstante an, dagegen T_a und T_K als Veränderliche, so scheidet die Hyperbel

$$T_a T_K = \frac{T_r^2}{\delta}$$

den Raum des rechten Winkels zwischen den beiden Koordinatenachsen in zwei Teile. Alle Punkte, die zwischen den Koordinatenachsen und der Hyperbel liegen ergeben zusammengehörige Werte der Zeitgrössen T_a und T_K , die eine Vergrösserung der Schwingungsamplituden verursachen, eine labile Regulierung darstellen würden (Labiles Gebiet).

Alle Punkte, die auf der Hyperbel selbst liegen, ergeben Zeitgrößen T_a und T_K , durch deren Einfluss die Schwingungsamplituden in ihrer Grösse sich gleich gross erhalten würden (Grenzkurve).

Alle Punkte ausserhalb der Hyperbel ergeben Zeitgrößen T_a und T_K , die eine Verkleinerung der Schwingungsamplituden verursachen und stabile Regulierung herbeiführen würden (stabiles Gebiet).

Je grösser T_r , desto mehr rückt die Hyperbel von den Achsen ab, desto grösser wird das labile Gebiet und umgekehrt.

Diese Stabilitätsgrenzkurve hat Wischnegradski zuerst*) und nach ihm A. Stodola**) auf anderem Wege abgeleitet.

Der Stabilitätsbedingung des direkten Regulators ist zunächst zu entnehmen, dass

1. nur ein statisches Tachometer ($\delta > 0$) verwendet werden kann;
2. ohne Bremse oder überhaupt ohne Schwingungsdämpfung ($T_K = 0$) die Regulierung labil wird;
3. dass Schwungmasse vorhanden sein muss ($T_a > 0$);

4. Je grösser der Wert $\frac{T_r^2}{\delta}$, desto grösser muss bei gleichbleibendem T_a der Wert T_K eingestellt werden, desto grösser fällt also die Verschleppung aus, desto grösser wird die auftretende Geschwindigkeitsschwankung. Mit dem Anwachsen von $\frac{T_r^2}{\delta}$ müssen wir immer grössere Schwingungen durch die Bremse künstlich hervorrufen, um eine möglichst stabile Regulierung zu erhalten.

Man kann den Wert von T_K , der sich aus der Grenzbedingung ergibt: $T_K = \frac{T_r^2}{\delta T_a}$ direkt als Güteziffer ansehen, die indes so klein als möglich sein soll. Nach dieser Beziehung ändert sich an der Konvergenz der Schwingungen offenbar nichts, wenn wir T_r^2 und T_a proportional vergrössern oder verkleinern, will man also eine bestimmte Grösse der Konvergenz erreichen, so braucht man hiezu bei kleinerem Wert von T_r^2 auch eine kleinere, also billigere Schwungmasse (T_a).

Soll ein bestimmtes Tachometer verwendet werden ($\frac{T_r^2}{\delta} = \text{gegeben}$), so kann die Güte der Regulierung nur durch eine Vergrösserung von T_a gesteigert werden, denn T_K soll möglichst klein sein.

Kann die Schwungmassengrösse T_a nicht geändert werden, so ist der einzige Weg zur Verbesserung der Regulierung eine Verkleinerung von T_r^2 .

*) Wischnegradski, Zivilingenieur 1877, S. 109.

**) A. Stodola, Zeitschr. d. V. d. I. 1899, S. 512.

Da die Grösse T_r^2 definiert ist nach der Gleichung

$$T_r^2 = \frac{m_r s}{2 Q}$$

so verlangt eine gute Regulierung ein Tachometer mit grossem Muffendruck Q und kleiner Masse m_r . Dies wird erreicht durch hohe Tourenzahl und grossen Abstand der Masse von der Drehachse. Ausserdem ist noch ein kleiner Hub s in Anwendung zu bringen.

$$v) \quad T_r^2 = 0 ; T_K > 0 ; T_s > 0$$

Der ideale indirekte Regulator mit Oelbremse hat die charakteristische Gleichung:

$$T_a T_s T_K w^3 + T_a (\delta T_s + T_K) w^2 + \delta T_a + 1 = 0 \quad 13)$$

Vergleicht man diese Gleichung mit derjenigen von Fall IV, so findet man:

Die Kombination von idealem indirektem Regulator mit Oelbremse ist gleichbedeutend mit einem direkten wirklichen Regulator, dessen Tachometer die Zeitgrösse $T_r^2 = T_s T_K$ und dessen Oelbremse die Zeitgrösse $T_K = \delta T_s + T_K$ besitzt.

Dieser Fall ist also auf Fall IV zurückgeführt. Die Stabilitätsbedingung lautet in diesem Fall V:

$$\delta T_a (\delta T_s + T_K) > T_s T_K.$$

Man sieht sofort, dass hier $T_K = 0$ werden kann.

VI) Wir kommen nun zu dem wirklichen indirekten Regulator, dessen charakteristische Gleichung lautet:

$$T_a T_s T_r^2 w^4 + T_a (T_s T_K + T_r^2) w^3 + T_a (\delta T_s + T_K) w^2 + \delta T_a w + 1 = 0 \quad 14)$$

Um die Stabilitätsbedingung für diesen Regulator zu suchen, wenden wir die sog. „Sturm'schen Reihen“ an. *) Die Algebra hat nämlich nachgewiesen, dass ganz allgemein eine Gleichung n ten Grades

$$c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + c_2 x^{n-2} + \dots + c_n = 0$$

nur Wurzeln besitzt, die, wenn sie in reeller Form auftreten, negativ sind, und wenn sie in komplex-konjugierter Form auftreten, mit negativem reellem Teil ausgestattet sind unter der Voraussetzung, dass

1. sämtliche Koeffizienten der Gleichung grösser als 0 (diese Bedingung soll im folgenden stets mit „Bedingung (1)“ bezeichnet werden);

*) Siehe Stodola, Schw. Bauzeitung 1894, „Ueber die Regulierung von Turbinen“.

2. die nach dem Schema:

$$\begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & c_7 & \dots & c_{2K-1} \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & & c_{2K-2} \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & & c_{2K-3} \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 & & c_{2K-4} \\ 0 & 0 & c_1 & c_3 & & c_{2K-5} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & c_K \end{vmatrix} = \Delta_K$$

gebildeten $(n-2)$ Determinanten sämtlich grösser als 0 sind. Die Determinanten entstehen, wenn K der Reihe nach die Werte 2, 3, 4 . . . etc. annimmt. Die Koeffizienten c_{n+1} etc. sind = 0 zu setzen. (Diese Bedingung soll im folgenden stets mit „Bedingung (2)“ bezeichnet werden.)

In unserem speziellen Fall ist Bedingung (1) ohne weiteres erfüllt, da ja die Zeitgrößen T lauter positive Größen sind, es ist hierbei nur eine Voraussetzung zu machen: $\delta > 0$ d. h. ein statisches Tachometer ist unbedingt erforderlich.

Für die Gleichung vierten Grades:

$$c_0 x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + c_3 x + c_4 = 0$$

ergeben sich die entsprechenden Determinanten zu

$$c_1 c_2 - c_0 c_3 > 0$$

und

$$c_1 (c_2 c_3 - c_1 c_4^2) - c_0 c_3^2 > 0$$

Mit den Koeffizienten T der charakteristischen Gleichung ergibt dies:

$$(T_s T_K + T_r^2) (\delta T_s + T_K) - \delta T_s T_r^2 > 0$$

und

$$T_a (T_s T_K + T_r^2) \left[\delta T_a^2 (\delta T_s + T_K) - T_a (T_s T_K + T_r^2) \right]$$

$$- T_a T_s T_r^2 \cdot \delta^2 T_a^2 > 0$$

oder

$$T_K (\delta T_s^2 + T_s T_K + T_r^2) > 0$$

und

$$\delta T_a T_K > \frac{(T_s T_K + T_r^2)^2}{\delta T_s^2 + T_s T_K + T_r^2} \quad \left. \vphantom{\frac{(T_s T_K + T_r^2)^2}{\delta T_s^2 + T_s T_K + T_r^2}} \right\} 16)$$

Die Bedingung (2) verlangt Schwingungsdämpfung ($T_K > 0$) statisches Tachometer ($\delta > 0$) und Schwungmasse ($T_a > 0$); ist eine dieser Forderungen nicht erfüllt, so ist die Regulierung labil, weil in der Bewegungs-

gleichung Exponentialglieder auftreten mit positiven Zeitexponenten. Die Schwingungen würden theoretisch bis zu unendlich grossen Amplituden anwachsen und nie aufhören, der Regulator würde ständig ganz öffnen und ganz schliessen.

Es ist jedoch im Auge zu behalten, dass diese Kriterien nur für kleine Aenderungen der Variablen strenge Gültigkeit besitzen. Die Kriterien besagen eigentlich nur, dass die Schwingungen desjenigen Regulators, für den dieselben nicht erfüllt sind, eine Amplitude haben, deren Wert die Grenze überschreitet, bei welcher man in der Theorie die Glieder zweiter und höherer Ordnung fallen lassen kann. Da ein Regulator aber nur dann als gut bezeichnet werden kann, wenn die vorkommenden Schwingungsamplituden innerhalb sehr enger Grenzen sich bewegen, so sind für einen guten Regulator die Kriterien streng gültig und ein solcher, der dieselben nicht erfüllt, muss eben als ein schlechter, unbrauchbarer bezeichnet werden, wenigstens für Maschinen, die eine hohe Gleichförmigkeit des Ganges erfordern.

Selbstverständlich wird auch die Tourenzahl bei einem schlechten Regulator nicht ins Unendliche wachsen, da wir ja die oben besprochenen selbstregulierenden Kräfte bei der theoretischen Behandlung ausser acht gelassen haben.

Die Wasserturbine kann z. B. aus Gründen, die mit ihren inneren Konstruktionsverhältnissen zusammenhängen, höchstens eine Tourenzahl annehmen, die das doppelte beträgt von der sog. günstigsten.

Verschwindet in dem Ausdruck

$$\delta T_a T_K > \frac{[T_s T_K + T_r^2]^2}{\delta T_s^2 + T_s T_K + T_r^2}$$

das Glied T_r^2 d. h. haben wir ein masseloses Tachometer, so ergibt sich

$$\delta T_a > \frac{T_s T_K}{\delta T_s + T_K}$$

Die Grösse T_K links ist gefallen, d. h. die Bremse ist nicht mehr absolut notwendiges Erfordernis, im Gegenteil, je kleiner T_K , desto besser, es kann sogar zu 0 werden und wir erhalten ganz in Uebereinstimmung mit den früheren Erörterungen als Stabilitätsbedingung (2) des idealen indirekten Regulators

$$\delta T_a > 0.$$

Zur Kontrolle soll noch aus der Stabilitätsbedingung des indirekten Regulators diejenige des direkten abgeleitet werden.

Mit $T_s = 0$ kommt

$$\delta T_a T_K > T_r^2$$

in vollständiger Uebereinstimmung mit dem oben für den direkten Regulator eigens abgeleiteten Ausdruck.

Schreibt man die Stabilitätsbedingung für den indirekten Regulator in der Form

$$\delta T_a T_K > T_r^2 + \frac{T_s^2 T_K^2 + (T_s T_K - \delta T_s^2) T_r^2}{\delta T_s^2 + T_s T_K + T_r^2} \quad (17)$$

so ist leicht ersichtlich, dass die Bedingung für den indirekten Regulator verschärft ist gegenüber dem direkten.

Während man beim direkten Regulator eine sehr wirksame Verbesserung erzielte durch Verkleinerung von T_r , also Verbesserung des Tachometers, ist beim indirekten auch die Grösse T_s mit in Betracht zu ziehen. Es lässt sich aber zunächst nur soviel aus der Bedingung herauslesen, dass der Einfluss von T_r umsomehr in Hintergrund tritt, je grösser T_s ist.

Dagegen ergibt die Betrachtung der charakteristischen Gleichung vierten Grades, dass die Ausdrücke der Koeffizienten homogene Funktionen der Grössen T darstellen und dass ihr Grad mit dem Exponenten der zugehörigen Potenz von w übereinstimmt. Man kann daher die Gleichung auch in der Form schreiben:

$$\frac{T_a T_s T_r^2}{T_x^4} (T_x w)^4 + \frac{T_a T_s T_K + T_r^2}{T_x^3} (T_x w)^3 + \frac{T_a (\delta T_s + T_K)}{T_x^2} (T_x w)^2 + \frac{\delta T_a}{T_x} (T_x w) + 1 = 0 \quad (18)$$

wobei T_x irgend eine der Grössen T darstellen kann und $(T_x w)$ als Wurzel erscheint. Die Koeffizienten dieser Gleichung sind wiederum homogene Funktionen aber nicht von den einzelnen Grössen T , sondern nur von den Verhältnissen $\frac{T}{T_x}$; diese Eigentümlichkeit hat Stodola in den Satz zusammengefasst:

Der Charakter der Regulierung hängt nicht von den absoluten Beträgen der Grössen T ab, sondern von den Verhältnissen derselben untereinander.

Wir schreiben daher die zweite Forderung der Bedingung (2) in der Form:

$$\delta \frac{T_a}{T_s} \cdot \frac{T_K}{T_s} > \frac{\left\{ \frac{T_K}{T_s} + \left(\frac{T_r}{T_s} \right)^2 \right\}^2}{\delta + \frac{T_K}{T_s} + \left(\frac{T_r}{T_s} \right)^2} \quad (19)$$

Der Abkürzung wegen seien folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$\frac{T_a}{T_s} = \tau_a; \quad \frac{T_K}{T_s} = \tau_K; \quad \frac{T_r}{T_s} = \tau_r$$

Damit schreibt sich obige Bedingung:

$$\delta \tau_a \tau_K > \frac{(\tau_K + \tau_r)^2}{\delta + \tau_K + \tau_r^2} \quad 20)$$

In dieser Beziehung ist allein δ eine Grösse, die von vornherein als festgelegt zu gelten hat. Sie ist in den Garantiebedingungen stets enthalten und soll im Interesse einer kleinen bleibenden Touren Differenz zwischen Vollbelastung und Leerlauf klein ausfallen. Wir wollen δ als Konstante ansehen. Setzen wir nun anstatt des Zeichens $>$ das Zeichen $=$ und betrachten wir die drei Grössen τ_a , τ_K und τ_r als Veränderliche, so stellt die Gleichung eine Fläche dar, die sich in ein dreiaxiges Koordinatensystem einzeichnen lässt.

Diese Fläche wollen wir die „Stabilitätsgrenzfläche“ nennen:

Alle Punkte im Raume des ersten Quadranten — und es kommt nur der erste Quadrant in Frage, da ja sämtliche Zeitverhältnisse τ positive Werte bedeuten — die zwischen den Koordinatenebenen und der Grenzfläche liegen, entsprechen Regulatoren mit labiler Regulierung. Alle Punkte auf der Grenzfläche selbst entsprechen Regulatoren mit sich gleich bleibenden Amplituden der Schwingungen, und alle übrigen Punkte im Raum des ersten Quadranten entsprechen Regulatoren mit stabiler Regulierung.

Die Grenzfläche ist in Fig. 4 dargestellt.

Für eine Ebene parallel der $\tau_a \tau_K$ Ebene d. h. für ein bestimmtes konstantes Zeitverhältnis τ_r ergibt sich die Grenzkurve als Schnitt der Grenzfläche mit der Ebene $\tau_r = \text{konstant} = r$ nach der Gleichung:

$$(\delta + r^2) \delta \tau_a \tau_K + \delta \tau_a \tau_K^2 - \tau_K^2 - 2 r^2 \tau_K - r^4 = 0$$

Diese Kurve dritter Ordnung hat die Asymptote

$$\tau_a = \frac{1}{\delta}$$

und für den Fall $r > 0$ die zweite Asymptote

$$\tau_K = 0$$

Wird $\tau_r = 0$, so kommt

$$\delta^2 \tau_a + \delta \tau_a \tau_K - \tau_K = 0$$

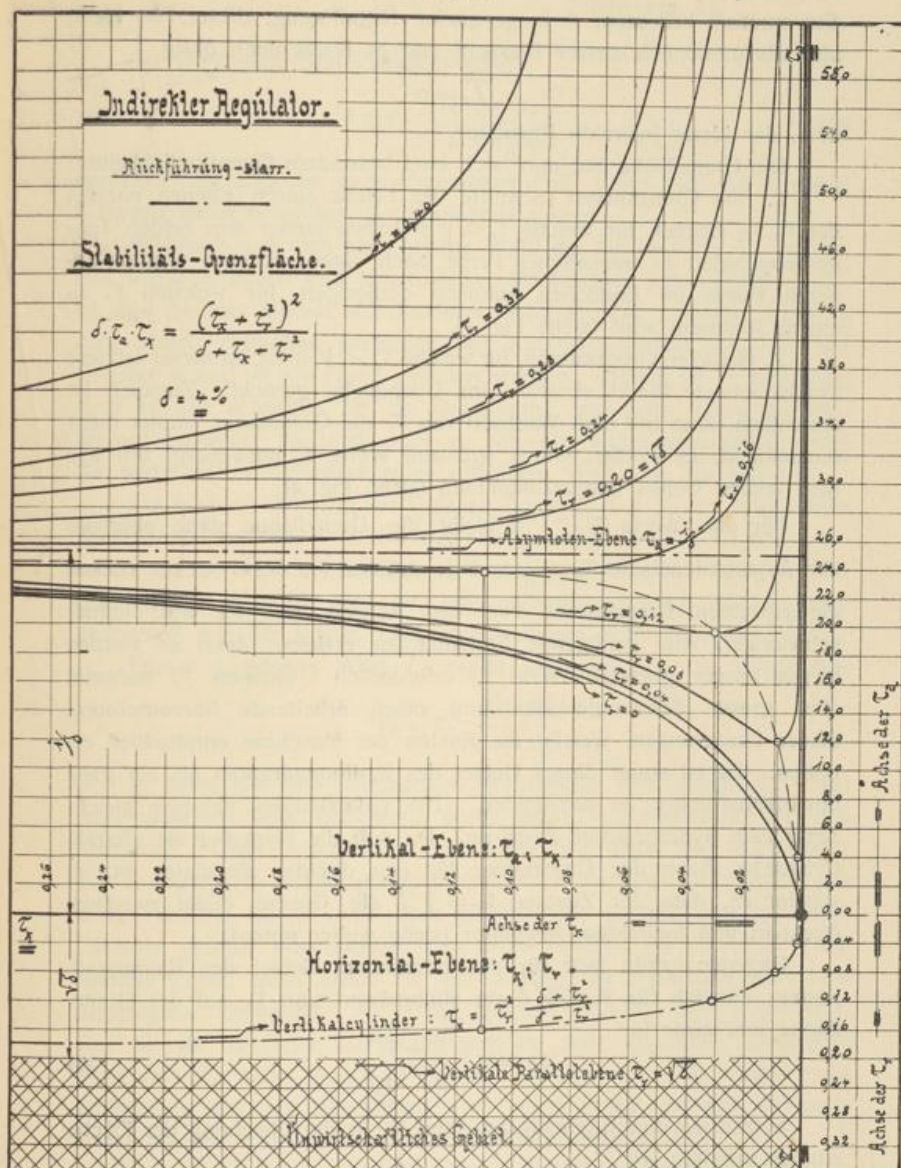
eine Hyperbel mit dem Mittelpunkt

$$\tau_a = \frac{1}{\delta}; \tau_K = -\delta$$

Die Fläche hat also eine Asymptotenebene

$$\tau_a = \frac{1}{\delta}$$

Fig. 4.



und die Koordinatenebene $\tau_K = 0$ ist ebenfalls Asymptotenebene bis $\tau_r = 0$ wird, wo dann im Ursprung die Fläche geschnitten wird.

$$\tau_r = \frac{T_r}{T_s} = 0$$

kann entstehen, wenn $T_s = \infty$. Das würde aber vollständige Ruhe des Servomotors bedeuten, d. h. gar keine Regulierung, dieser Fall bleibt also als unmöglich ausser Betracht und es bleibt noch übrig

$$T_r = 0$$

d. h. der ideale indirekte Regulator.

Die Grenzfläche hat nun noch zwei besondere Eigentümlichkeiten:

1. Alle Grenzkurven (Schnitte der Fläche durch Ebenen parallel der $\tau_a \tau_K$ Ebene), für welche $\tau_r < \sqrt{\delta}$ haben ausser den beiden Tangentenpunkten in unendlicher Ferne noch einen weiteren ausgezeichneten Punkt im Endlichen, nämlich denjenigen, für welchen τ_a zu einem Minimum wird (siehe Fig. 4).

2. Bei allen Grenzkurven, für welche $\tau_r > \sqrt{\delta}$ ist, ist dieser letztere ausgezeichnete Punkt ebenfalls ins Unendliche gerückt. Zugleich ist ersichtlich, dass mit dem Wachsen von τ_r die Grenzkurve immer mehr hinausrückt, es werden immer grössere Werte τ_a notwendig, um aus dem labilen Gebiet herauszukommen (siehe Fig. 4).

Für die Werte $\tau_r \geq \sqrt{\delta}$ bleibt die Grenzfläche ganz oberhalb der Asymptotenebene $\tau_a = \frac{1}{\delta}$ und je grösser τ_r , desto weiter rücken die einzelnen Grenzkurven von den Achsen ab. Es wird immer schwieriger, eine genügende Stabilität zu erzielen, denn es werden hierzu immer grössere Werte τ_a erforderlich. Grosses τ_a bedeutet aber grosse Schwungmassen und rasch arbeitende Servomotoren, beides Forderungen, welche die Kosten der Maschine empfindlich erhöhen. Es ist somit dieses Gebiet des Raumquadranten als ein ganz unwirtschaftliches zu bezeichnen. Die Grenzkurven nehmen gleichzeitig eine hyperbelartige Form an. Da nun die Hyperbel die charakteristische Form der Grenzkurve für den direkten Regulator ist, so scheint es, dass der Zustand $\tau_r = \sqrt{\delta}$ die Grenze bildet zwischen direktem und indirektem Regulator (siehe weiter unten).

Dagegen ergibt sich für das brauchbare Gebiet des Raumquadranten, nämlich für $\tau_r < \sqrt{\delta}$ ein Minimalwert von τ_a auf der Grenzfläche und zwar für

$$\tau_K = \tau_r^2 \frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2} \quad (21)$$

Setzen wir diesen günstigsten Wert τ_K in die Gleichung der Fläche ein, so erhalten wir

$$\tau_a = 4 \frac{\tau_r^2}{(\delta + \tau_r^2)^2} \quad (22)$$

und diese Raumkurve, die wir die „spezielle Stabilitätsgrenzkurve“ nennen wollen, entsteht durch den Schnitt der allgemeinen Grenzfläche mit dem Vertikalzylinder

$$\tau_K = \tau_r^2 \frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2} \quad (\text{siehe Fig. 4}).$$

Die allgemeine Stabilitätsbedingung

$$\delta \tau_a \tau_K > \frac{(\tau_K + \tau_r^2)^2}{\delta + \tau_K + \tau_r^2} \quad 20)$$

berücksichtigt also den ganz allgemeinen Fall, wobei jede der Grössen τ irgend einen beliebigen Wert annehmen kann.

Während man sich aber bei der Wahl der Grössen T_s ; T_r und T_a von wirtschaftlichen und konstruktiven Rücksichten leiten lassen muss, ist dies bei der Grösse T_K durchaus nicht der Fall; dieselbe kann ja doch durch einfaches Verstellen der Kataraktschraube innerhalb der Grenzen 0 und ∞ von Hand geändert werden. Zudem ist zu beachten, dass es nur schädlich für die Regulierung sein kann, wenn die Oelbremse entweder zu stark oder zu schwach angezogen ist, es muss für bestimmte Verhältnisse einen günstigen Wert von T_K geben.

Für bestimmte Werte der Grössen δ und τ_r d. h. für ein bestimmtes Tachometer und einen bestimmten Servomotor, ist nun offenbar diejenige Grösse T_K die günstigste, für welche die rechte Seite der Ungleichung ein Minimum wird. Wie die Ungleichung aussagt, ist das gleichbedeutend mit der Frage, nach der kleinsten Schwungmasse $(T_a)_{min}$.

Dieser günstigste Wert T_K ergibt sich also aus der Beziehung:

$$\tau_K = \tau_r^2 \cdot \frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2}$$

Je mehr wir uns von diesem günstigsten Wert nach der einen oder anderen Seite entfernen, desto mehr verschlechtern wir den Regulator. Ohne Anwendung einer Oelbremse hätte die Regulierung die Tendenz, die Schwingungsamplituden anwachsen zu lassen, und diese Tendenz ist je nach dem Einfluss der übrigen massgebenden Faktoren grösser oder kleiner. Ist diese Tendenz an sich d. h. ohne Bremse gross, dann muss zur Erzwingung der Stabilität eine stark angezogene Oelbremse, T_K gross gewählt werden und umgekehrt. Der für die spezielle Stabilitätsbedingung sich ergebende günstigste Wert von T_K kann direkt als Masstab für die Güte der Regulierung angesehen und zur Beurteilung von ausgeführten Anlagen herangezogen werden. Derselbe muss so klein als möglich sein.

Diese Beziehung

$$T_K = \frac{T_r^2}{T_s} \cdot \frac{\delta + \frac{T_r^2}{T_s}}{\delta - \frac{T_r^2}{T_s}} \quad 21)$$

lässt nun so recht deutlich erkennen, welche Faktoren und in welchem Masse dieselben auf die Güte der Regulierung von Einfluss sind. Eine Verkleinerung des Wertes T_K kann zunächst erzielt werden durch Vergrößerung von δ . Ist nun schon dieser Einfluss von δ sehr klein, so scheidet er praktisch überhaupt aus, wenn man bedenkt, dass man mit δ aus dem schon mehrfach angeführten Grunde nicht hochgehen kann.

Ganz einschneidend ist dagegen der Einfluss von T_r .

Auch diese Beziehung bringt ganz unzweideutig den schon mehrfach angedeuteten Satz zum Ausdruck: die Oelbremse steht und fällt mit der Grösse T_r . Der beste Regulator ist derjenige, der mit einem idealen Tachometer $T_r = 0$ ausgestattet ist, denn für diesen ist der Wert T_K d. h. die Güteziffer $= 0$.

Die Grösse T_K wächst mit T_r^2 d. h. die Regulierung verschlechtert sich mit dem Zunehmen von T_r^2 und zwar derartig, dass schon

$$\text{für} \quad \frac{T_r}{T_s} = \sqrt{\delta}$$

der günstigste Wert $T_K = \infty$ wird.

Insbesondere der Nenner der Gleichung 21 zeigt, dass der Wert T_K um so grösser werden, d. h. dass die Oelbremse um so stärker angezogen werden muss je grösser der Wert $\frac{T_r^2}{\delta}$ gegenüber T_s^2 .

Bringt man die Muffe eines Tachometers gewaltsam aus ihrer Gleichgewichtslage heraus, lässt die Winkelgeschwindigkeit konstant ($\varphi = 0$) und schaltet die Oelbremse ab ($T_K = 0$), so vollführt die Muffe Schwingungen nach der Gleichung

$$T_r^2 \frac{d^2 \eta}{dt^2} + \delta \eta = 0$$

Diese Schwingungen sind bekanntlich harmonische und die Dauer einer einfachen Schwingung beträgt $T_e = \pi \cdot \frac{T_r}{\sqrt{\delta}}$.

Wir können somit den Satz aussprechen:

Ein indirekter Regulator ist um so besser, je kleiner die Eigenschwingungsdauer des Tachometers ist im Verhältnis zur Schlusszeit des Servomotors.

Je grösser die Schlusszeit des Servomotors desto mehr treten die Eigenschwingungen des Tachometers an Bedeutung zurück.

Ist $\frac{T_r^2}{\delta} > T_s^2$, so sind die Eigenschwingungen des Tachometers vorherrschend und umgekehrt; im ersten Fall haben wir einen direkten, im zweiten Fall einen indirekten Regulator.

Es darf indessen nie ausser acht gelassen werden, dass mit jeder Vergrösserung des Wertes T_s eine Erhöhung der grössten auftretenden Geschwindigkeitsschwankung φ verbunden ist.

Wollte man aber bei einem bestimmten Tachometer ($\frac{T_r^2}{\delta} = \text{konstant}$) versuchen, durch Verkleinerung der Schlusszeit T_s allein die Güte der Regulierung zu steigern, so würde man gerade das Gegenteil erreichen, denn durch ausschliessliche Verkleinerung von T_s ändern wir im ungünstigen Sinne das Verhältnis $\frac{T_c}{T_s}$ der Eigenschwingungsdauer des Tachometers zur Schlusszeit des Servomotors.

Hieraus ergibt sich der zweite wichtige Satz:

Unter der Voraussetzung konstant bleibender Schwungmassengrösse ($T_a = \text{konstant}$) ist der Möglichkeit, die Güte der Regulierung zu steigern, ausschliesslich mittelst Verkleinerung der Schlusszeit T_s , eine Grenze gesetzt durch die Güte des zur Verwendung gelangenden Tachometers (T_r).

Will man die Regulierung tatsächlich verbessern, so ist sowohl T_s als auch T_r zu verkleinern, d. h. je rascher die Servomotoren arbeiten, ein desto besseres Tachometer verlangen sie. *)

*) Zu demselben Ergebnis gelangt Ehrlich (siehe „Elektrotechnik und Maschinenbau“, Zeitschrift des elektrotechn. Vereins Wien 1907, S. 25 u. ff.). Er erörtert den Einfluss der Eigenschwingungen des Tachometers an Hand von Tachogrammen und Rechnungsbeispielen.

Zuletzt kommt er zu dem Schluss: es gibt zwei Wege zur Konstruktion guter Regulatoren; gute Regulatoren sind erstens solche, ohne Dämpfung mit kleiner Eigenschwingungszeit des Tachometers und nicht zu kleiner Schlusszeit; zweitens solche mit Dämpfung durch Oelbremse und Gegenbremse auch mit grösserem Zeitverhältnis der beiden Schwingungsdauern von Tachometer und Servomotor. Es kann indes, wie die seitherigen Erörterungen über das Wesen der Oelbremse ergeben, nicht nachdrücklich genug darauf hingewiesen werden, dass alle Versuche den ungünstigen Einfluss eines schlechten Tachometers (grosstes T_r) durch Anwendung eines besonderen Dämpfungsmittels auszuschalten, nicht als gute Lösungen der Regulatorfrage anzusehen sind. Gewiss ist es möglich mittelst besonderer Oelbremsen diesen schädlichen Einfluss auszuschalten d. h. die Neigung zur Abnahme der Amplituden zu vergrössern, aber immer nur auf Kosten der Güte der Regulierung d. h. auf Kosten einer Vergrösserung der grössten auftretenden Geschwindigkeitsschwankung. Man schaltet den ungünstigen Einfluss des Tachometers aus, um den viel ungünstigeren einer stark angezogenen Oelbremse einzuschalten. Es ist vielmehr, das Uebel an der Wurzel zu fassen und gleichzeitig mit T_s auch T_r zu verkleinern. Auch Prof. A. Budau spricht sich an mehreren Stellen, so namentlich in einem Aufsatz: „Ueber die amerikanischen Turbinenregulatoren mit besonderer Berücksichtigung des Lombard- und Sturgess-

Diese Erscheinung gewinnt aber besonders dann an Bedeutung, wenn es sich darum handelt, andere Kraftmaschinen, als gerade Wasserturbinen mit indirekten Regulatoren auszustatten, z. B. Dampfmaschinen und insbesondere Dampfturbinen. Hier läuft der Konstrukteur Gefahr wegen der kleinen auftretenden Stellzeitwiderstände, die Schlusszeit T_s des Servomotors zu klein zu nehmen und hierzu ein ungeeignetes Tachometer zu verwenden.

Bei Dampfmaschinen ist die Gefahr insofern nicht so gross, als hier gewöhnlich reichlich Schwungmasse vorhanden ist, schon aus Gründen der möglichsten Beschränkung der Schwankungen innerhalb einer Drehung. Hier ist nämlich aus demselben Grunde (grosses T_a) nicht einmal notwendig T_s sehr klein zu machen und es dürfte sich daher empfehlen bei Dampfmaschinen in die Druckleitung zum Servomotor Drosselventile einzuschalten, um die Grösse T_s dem jeweils verwendeten Tachometer anzupassen. Ganz ungünstig liegen dagegen die Verhältnisse bei Dampfturbinen, die wegen ihres konstanten Drehmoments mit verhältnismässig wenig Schwungmasse zufrieden sein müssen. Hier ist es notwendig wegen des geringen Betrags von T_a die Grösse T_s sehr niedrig zu halten, um eine gute Regulierung zu erzielen und hier läuft daher der Konstrukteur Gefahr ein ungünstiges Verhältnis $\frac{T_e}{T_s}$ zu wählen.

Indes hat man bei Dampfturbinen infolge der hohen Tourenzahlen ihrer Wellen den Vorteil, ohne Mühe den Wert T_r sehr klein halten zu können.

Es wäre nun erwünscht eine Beziehung zu erhalten, welche uns in den Stand setzt, die für ein bestimmtes T_s passende Grösse T_r zu bestimmen. Offenbar eignet sich hiezu wiederum der Ausdruck

$$\tau_K = \tau_r^2 \frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2}$$

Je mehr der Bruch:

$$\frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2}$$

sich von der Grösse 1 unterscheidet desto grösser muss T_K eingestellt werden, desto schlechter ist die Regulierung.

Wenn also die Grösse τ_r^2 gegen δ verschwindet wird

$$\frac{\delta + \tau_r^2}{\delta - \tau_r^2} = 1$$

und erhält somit den günstigsten Wert.

Regulators“ s. „Elektrotechnik und Maschinenbau“ Zeitschrift des elektrotechn. Vereins Wien 1908 Heft 1 und 2 mit aller Entschiedenheit gegen grosses T_r und Anwendung von besonderen Oelbremsen aus.

Es muss also τ_r^2 nur einen geringen Prozentsatz betragen von δ .

Die Eigenschaften eines für indirekte Regulierung bestimmten Tachometers sind also zu wählen nach der Beziehung:

$$\tau_r^2 = \xi \delta$$

oder

$$\frac{T_r^2}{\delta} = \xi T_s^2$$

Nun ist:

$$T_e^2 = \pi^2 \frac{T_r^2}{\delta} \text{ und damit:}$$

$$\frac{T_e^2}{\pi^2} = \xi T_s^2 \quad (23)$$

wobei ξ eine gewisse Erfahrungszahl bedeutet; T_r muss umso kleiner werden, je kleiner T_s und δ .

Es scheint, dass der Zahlenwert:

$$\xi = 0,002 + 0,0025$$

befriedigende Resultate ergibt.

Mit diesen Werten schreibt sich Gleichung 23.

$$T_e = \frac{1}{6} T_s \text{ bis } \frac{1}{7} T_s$$

d. h. die Eigenschwingungsdauer des Tachometers soll $\frac{1}{6}$ bis $\frac{1}{7}$ der Schlusszeit des Servomotors betragen.

Diese Forderung würde z. B. für einen modernen Regulator mit $T_s = 1$ Sek. und $\delta = 0,02$ ergeben:

$$T_r^2 = 0,02 \cdot 0,002 \cdot 1 = 0,00004 \text{ Sek.}^2$$

Nach Hütte I. 18. Aufl. S. 762 ergibt sich für Federregulatoren nach Tolle

Regulator Nr.	0	6	12
$T_r^2 = \frac{s_r}{2g} =$	$\frac{0,028}{2 \cdot g \cdot 12} = 0,00012$	$\frac{0,055}{2 \cdot g \cdot 12} = 0,00018$	$\frac{0,115}{2 \cdot g \cdot 15} = 0,00038$

oder nehmen wir einen kleineren Hub s der Tachometer an, und zwar für alle gleich gross $s = 20$ mm und $s_r = \frac{1}{15}$ s.

$$T_r^2 = \frac{0,02}{2 \cdot g \cdot 15} = 0,00007 \text{ Sek.}^2$$

Immerhin beträgt das T_r^2 der besten käuflichen Federtachometer rund etwa das Doppelte als verlangt werden muss.

Wenn also die Eigenschwingungen eines bestimmten Tachometers von verschwindend kleiner Bedeutung sein sollen, so darf die Schlusszeit des Servomotors unter eine bestimmte Grenze nicht heruntergehen

$$T_s \geq \sqrt{\frac{T_r^2}{\xi \delta}}$$

Für unser Beispiel wäre also:

$$T_s \geq \sqrt{\frac{0,00007}{0,002 \cdot 0,02}} = 1,9 \text{ Sek.}$$

Der Reguliervorgang des hydraulischen Regulators mit idealem Tachometer ($T_r = 0$; $T_K = 0$) unter besonderer Berücksichtigung des aperiodischen Zustands.

Sämtliche bisherigen Erörterungen haben übereinstimmend das Resultat geliefert, dass eine sehr wirksame Verbesserung der Regulierung vor allen Dingen an der Verbesserung des Tachometers einzusetzen hat, und man muss diesen Weg als den einzig richtigen bezeichnen.

Sind nun durch richtige Wahl der Grösse T_r die Eigenschwingungen des Tachometers unschädlich gemacht, so verschwinden die Grössen T_r und T_K gegenüber den andern und die charakteristische Gleichung vierten Grades geht über in diejenige zweiten Grads und lautet:

$$\delta T_a T_s w^2 + \delta T_a w + 1 = 0$$

und die zugehörige Differentialgleichung ist:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{T_s} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{\delta T_a T_s} q = 0$$

Das ist die Gleichung der gedämpften harmonischen Schwingung. Die Grösse der Dämpfung wird gemessen durch den Faktor $\frac{1}{T_s}$, je grösser dieser Faktor, desto rascher nehmen die Schwingungen ab. Je kleiner T_s desto eher kommt der Regulator zur Ruhe.

Schreiben wir wieder die charakteristische Gleichung in der Form:

$$\delta \frac{T_a}{T_s} (T_s w)^2 + \delta \frac{T_a}{T_s} (T_s w) + 1 = 0$$

oder

$$\delta \tau_a (T_s w)^2 + \delta \tau_a (T_s w) + 1 = 0$$

so ist sofort klar, dass der Charakter dieser Schwingungen allein von dem Zeitverhältnis $\delta \tau_a$ abhängt und nicht von den absoluten Beträgen der Grössen T_a , T_s und δ .