Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Erster Teil. Ebene Geometrie

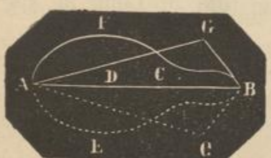
Erster Teil.

Ebene Geometrie.

Erstes Buch.

Von den geraden Linien besonders, von der Ebene und vom Kreise vorläufig die Erklärungen.

1.



Erklärung. Eine gerade Linie ist diejenige, welche nicht aus ihrer Lage kommt, wenn sie sich um zwei in ihr liegenden festen Punkte (z. B. um ihre Endpunkte) dreht.*)

Erläuterung. Zwischen zwei Punkten A und B sind offenbar unzählig viele Linien möglich, z. B. die von A über F nach B, oder die von A durch G nach B gehende. Stellt man sich nun vor: alle diese Linien drehten sich um die beiden als fest gedachten Endpunkte A und B, so daſs sie in andere Lagen, z. B. nach halber Umdrehung in die punktierte kommen, so läſst sich noch eine solche von A nach B gehende Linie denken, welche bei dieser Umdrehung nicht aus ihrer Lage

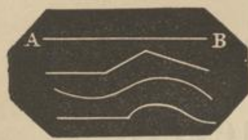
---

*) So hörten wir einmal Gauſs bei der Erklärung des Fernrohrs und dessen richtigem Gebrauche den Begriff der geraden Linie festsetzen. Diese Erklärung ist theoretisch fruchtbar, wie die gleich daraus folgenden Sätze zeigen; auſserdem ist das angegebene Merkmal praktisch wichtig, z. B. bei der Justierung eines Fernrohrs, richtigen Bohrung eines Cylinders etc.

kommt, gleichsam die Umdrehungsachse bildet, in welcher also alle Punkte, wie C, D, ruhen. (Man breche ein Stück Papier, so ist der entstehende Bruch [Falze] eine gerade Linie.)

2.

Erklärungen. Eine gerade Linie (eine Gerade) nennt und bezeichnet man durch zwei an ihre Endpunkte gesetzte Buchstaben (Ziffern). Will man auch den Lauf der Linie andeuten und sich dieselbe durch die fortschreitende Bewegung des einen Endpunkts gegen den andern hin, beschrieben denken, so schreibt man desjenigen Punktes Buchstaben voran, von dem die Bewegung ausgeht. So bedeutet z. B. AB oder nach der neuern Bezeichnung (Carnot) $\overline{AB}$, die von A nach B gehende gerade Linie, und eben so BA oder $\overline{BA}$ dieselbe Linie in umgekehrter Richtung.



Ein aus geraden Linien von verschiedenen Richtungen zusammengesetzter Zug heißt eine gebrochene Linie (AGB in vorletzter Figur oder die 2. Linie in vorstehender Figur).

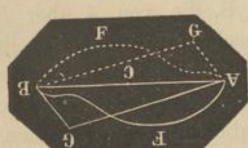
Eine stetig gebrochene Linie, in welcher also kein Teil gerade ist, heißt eine krumme Linie (die 3. Linie in vorstehender Figur).

Ein aus geraden und krummen Linien bestehender Zug heißt eine gemischte Linie (die 4. Linie in vorstehender Figur).

Statt gerade Linie, sagt man gewöhnlich kurzweg: Linie.

3.

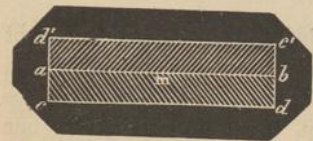
Lehrsatz. Durch zwei Punkte A und B ist nur eine einzige gerade Linie möglich.



Beweis. Dies folgt aus dem § 1 festgesetzten Begriff der geraden Linie. Zufolge der dort gegebenen Erläuterung kann es zwischen A und B offenbar nur eine einzige solche Reihe von Punkten geben, die nicht aus ihrer Lage kommen, indem man die ganze Figur (in Gedanken) um die beiden festen Endpunkte A, B dreht.

Zusatz. Hieraus folgt noch eine andere, jedoch nicht eigentümliche Eigenschaft der geraden Linie. Wird nämlich eine gerade Linie $\overline{AB}$ so umgelegt (um ihre Mitte C in der Bildfläche herumgedreht), dafs das Ende A nach B und dafür B nach A und folglich F nach $\digamma$ kommt, so mufs notwendig (weil zwischen zwei Punkten nur eine gerade Linie möglich ist) die gerade Linie in ihrer jetzigen umgelegten Lage mit der vorigen genau zusammenfallen und mithin jede gerade Linie an der einen Seite genau so beschaffen sein, wie an der andern.

4.



Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Seite ab eines zum Ziehen gerader Linien dienenden Lineals auch wirklich gerade ist.

Auflösung. Man ziehe längs der zu prüfenden Kante ab eine Linie so fein als möglich; lege hierauf das Lineal um (drehe es in der Bildfläche um die Mitte m), so dafs a nach b und b nach a, mithin c nach c' und d nach d' kommt. Schliefst dann dieselbe Kante des Lineals sowohl in dieser Lage als auch, wenn es jetzt längs der gezogenen Linie fortgeschoben wird, an dieselbe immer genau an, so ist das Lineal richtig.

5.

Erklärung. Eine Fläche ist und heifst eben oder eine Ebene, wenn eine gerade Linie, die zwei beliebige Punkte mit ihr gemein hat, auch mit allen ihren übrigen Punkten darin enthalten ist; oder mit andern Worten: eine Fläche heifst eben, wenn man von jedem ihrer Punkte aus, nach allen Richtungen gerade Linien in derselben ziehen kann.

Es sei hier noch ein für allemal daran erinnert, dafs im ersten Teile der Geometrie nur solche Figuren betrachtet werden, die ganz in einer ebenen Fläche (Ebene) liegen, wofür das Papier oder die Tafel, worauf sie gezeichnet sind, stets angenommen wird. Eine dreieckige Figur z. B., welche auf einer krummen Fläche, etwa auf einer Kugelfläche gezeichnet ist, gehört also nicht zur ebenen, sondern zur körperlichen Geometrie.

6.

Aufgabe. Wie kann man erkennen, ob eine Fläche eben oder eine Ebene ist.

Auflösung. Man passe ein richtiges Lineal an verschiedenen Stellen auf die zu prüfende Ebene und sehe zu, ob die Kante des Lineals mit allen ihren Punkten genau anschliefst. (§ 5.)

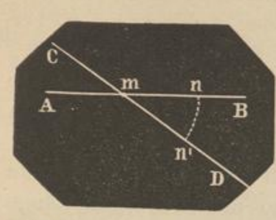
Anmerkung. Aufser diesem einfachen Prüfungsmittel giebt es noch viel schärfere. Vollkommen ebene Flächen existieren übrigens nur in Gedanken. Der feinern Technik wird es schon als Meisterstück angerechnet, wenn sie eine Fläche nur von der Gröfse eines Kartenblattes so eben liefert, dafs sie die erwähnten strengern Prüfungsmittel vertragen kann. Unsere gewöhnlichen Tische, Spiegelgläser etc. werden meistens für eben gehalten, strenge untersucht, finden sich aber immer Erhöhungen und Krümmungen darauf.

7.

Lehrsatz. Durch zwei Punkte A, B, ist die Lage und Richtung der dadurch gehenden geraden Linie $\overline{AB}$, nämlich der Lauf ihrer geradlinigen Verlängerungen (die man sich, nach beiden Seiten hin, bis ins Unendliche denken kann), vollkommen bestimmt.

Beweis. Man stelle sich vor, die Bildebene werde, wie in § 1, um die beiden festen Punkte A, B gebrochen, so entsteht in der ganzen unendlichen Ausdehnung der Bildebene nur eine und eben deshalb durch die beiden Punkte A, B bestimmte Linie (Falze), welche in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung das § 1 erwähnte Merkmal hat. Es ist also nicht möglich, eine gerade Linie auf verschiedene Weise geradlinig verlängert zu denken.

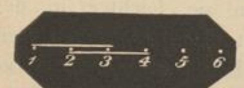
8.



Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien zwei Punkte gemein haben, so bilden sie nur eine einzige gerade Linie.

Beweis. Die beiden Linien AB, CD schneiden sich in dem Punkte m, den sie also gemeinschaftlich haben. Stellt man sich nun vor, die Linie CD drehe sich um den gemeinschaftlichen Punkt m, so daſs noch ein zweiter Punkt n', der Linie CD, mit einem Punkt n der Linie AB zusammenfällt, so haben dann die beiden Linien zwei Punkte m und n gemein. Durch diese beiden Punkte ist aber nur eine gerade Linie möglich (§ 3) und die geradlinige Verlängerung derselben vollkommen bestimmt (§ 7). Mithin müssen auch zwei gerade Linien, wenn sie zwei Punkte gemein haben, in ihrer ganzen unendlichen Ausdehnung zusammenfallen, mithin nur eine einzige gerade Linie bilden.

9.



Lehrsatz. Wenn in einer Reihe von Punkten 1, 2, 3, 4, ... je drei auf einander folgende in gerader Linie sind, so liegen sie alle zusammen in einer geraden Linie (in einerlei Richtung).

Beweis. Erstlich haben die beiden geraden Linien $\overline{123}$ und $\overline{234}$ zwei Punkte, 2 und 3, gemein und bilden folglich eine einzige gerade Linie $\overline{1234}$ (§ 8); dann haben wieder die beiden geraden Linien $\overline{1234}$ und $\overline{345}$ die zwei Punkte 3 und 4 gemein, und bilden mithin wieder eine gerade Linie etc.

Ob eine Reihe von Punkten in gerader Linie liegen, würde man praktisch dadurch ermitteln können, indem man ein Lineal (Schnur) an die Punkte legt, und, wenn es zur Zeit nur über drei hinausreicht, an der ganzen Reihe fortschiebt und achtgiebt, ob die ganze Reihe oder je drei unmittelbar auf einander folgende genau anliegen. Hierauf beruht auch das Verfahren, mittelst eines kurzen Lineals eine gerade Linie beliebig weit zu verlängern, indem man nur darauf achtet, dafs jeder folgende Zug mit dem vorhergehenden zwei Punkte gemein hat.

10.

Erklärung. Unter Entfernung (Abstand) zweier Punkte versteht man die Länge der sie verbindenden geraden Linie.

Ist also der Weg zwischen zwei Punkten nicht gerade (geht er z. B. über einen Berg), so mufs man die Länge desselben nicht mit der Entfernung (Abstand) der beiden Punkte verwechseln.

11.

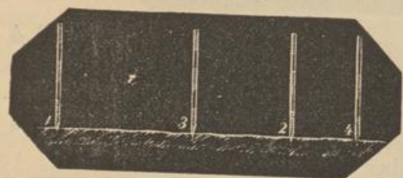
Von den, die gerade Linie betreffenden Lehrsätzen wollen wir nun schliefslich noch einige praktische Anwendungen auf das Feldmessen machen, und uns zu dem Ende auf ein ebenes freies Feld versetzt denken. Wie man in hügeligen und durchschnittenen Gegenden zu verfahren hat, kann erst in der körperlichen Geometrie gelehrt werden. Aus dem höchst einfachen Apparate, welcher zur Feldmefskunst erforderlich ist, entlehnen wir vorläufig nur einige runde Stangen, sogenannte Mefsstäbe. Diese sind etwa 3 cm dick, $2^1/_2$ bis 3 m lang; an einem Ende, um sie leichter in den harten Boden stecken zu können, mit eisernen Spitzen versehen, und um sie besser aus der Ferne wahrnehmen zu können, halbmeterweise abwechselnd, rot und weifs mit Ölfarbe angestrichen. In Ermangelung solcher Stäbe sind für den Privatmann auch andere Stäbe, wenn sie nur ziemlich gleiche Dicke haben, gut genug.

Angenommen nun, es seien (siehe folgende Figur) mehre solcher Mefsstäbe vertikal*) und so in die Erde gesteckt, dafs eine gerade Linie, welche die beiden äufsersten berührt, auch alle mittlern berührt, so würden sie auch alle in einerlei Richtung stehen. Ob dies wirklich der Fall ist, sieht man

*) Vertikal heifst diejenige Richtung, welche ein freifallender Körper einschlägt oder ein frei und ruhig hängendes Lot (Senkblei, d. i. ein Faden mit einer daran hängenden kleinen Kugel) angiebt. Für den hier angegebenen Zweck wird jedoch, ohne Hilfe eines Senkbleies, die vertikale Stellung der Mefsstäbe stets nur nach dem Augenmafse genau genug bewirkt.

aber (nach ein paar Stunden Übung) sehr leicht, indem man nur hinter einen der beiden äuſsersten Meſsstäbe tretend, an beiden Seiten hinsieht (visiert). Für Kurzsichtige, oder wenn die Reihe der Stäbe zu lang ist, wird ein Fernrohr notwendig.

12.



Aufgabe. Auf dem Felde stehen zwei Meſsstäbe, 1 und 2. Zwischen dieselben soll ein dritter, 3, so eingesteckt werden, daſs er mit 1 und 2 in einerlei Richtung steht.

Auflösung. Man muſs erst die Linie $\overline{12}$ verlängern und deshalb in 4 eine Meſsstange so einstecken, daſs beim Visieren 4, 2, 1 in einerlei Richtung erscheinen, alsdann richte man, mit der dritten Meſsstange zwischen 1 und 2 tretend, diese dritte so ein, daſs auch 3, 2, 4 in einerlei Richtung erscheinen. Ist dies der Fall, so haben die beiden geraden Linien $\overline{421}$ und $\overline{324}$ zwei Punkte, 2 und 4, gemein, und bilden mithin eine einzige gerade Linie. (§ 8.)*).

Anmerkung. Zwei Personen brauchen hierzu weniger Zeit. Die eine (4) tritt dann in die Verlängerung von $\overline{12}$ und läſst, auf gegebene Winke, den Gehilfen die dritte Meſsstange mit ausgestrecktem Arm, so lange hin und her rücken, bis sie die Stäbe 1, 3, 2 in einerlei Richtung erblickt, worauf dann der Gehilfe, nach erhaltenem Winke, die dritte Meſsstange fest einsteckt.

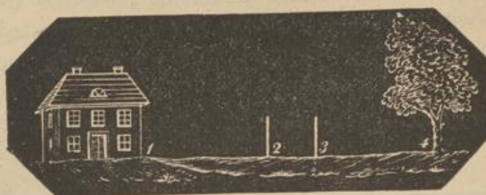
Nachdem erst drei Punkte in einer Linie durch Meſsstäbe bezeichnet sind, kann eine einzige Person leicht noch mehrere Zwischenpunkte durch eingesteckte Meſsstäbe bezeichnen.

Soll eine so ausgesteckte Linie ganz zur Anschauung gebracht werden, um darnach etwa eine Mauer, einen Damm etc. aufzuführen, so kann man von einem Punkt zum andern eine Schnur spannen und längs derselben eine kleine Furche in den Boden reiſsen.

---

*) Anfänger mögen sich dies Verfahren praktisch erläutern und sich im Visieren üben, indem sie auf einen Tisch Stecknadeln einstecken.

13.



Aufgabe. Zwischen zwei gegebenen Punkten, 1 und 4, zwei andere Punkte durch Meſsstäbe zu bezeichnen, so daſs alle vier in einerlei Richtung sind. Es wird hier der Fall angenommen, daſs man wohl zwischen die Punkte 1 und 4, jedoch nicht hinter dieselben treten kann.*)

Auflösung. Zwei Personen (2 und 3) richten sich durch Visieren gegenseitig so ein, daſs gleichzeitig 2, 3, 4 und 3, 2, 1 in gerader Linie sind, welches auf gegenseitiges Zuwinken, nach einigem Hin- und Herrücken leicht bewirkt wird. Ist dies aber der Fall, so haben beide Linien $\overline{234}$ und $\overline{321}$ zwei Punkte, 2 und 3, gemein und folglich einerlei Richtung. (§ 8.)

Soll eine Person dies allein thun, so braucht sie nur, wegen des öftern Hintretens von einem der beiden Stäbe, 2 und 3, zum andern, mehr Zeit. Nachdem aber diese beiden Zwischenpunkte gefunden sind, können leicht noch mehrere bezeichnet werden.

14.

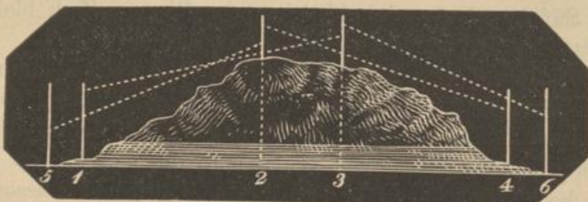
Aufgabe. Von 1 nach 6 soll über zwei Berge eine Bahn, Chaussee etc. geführt, oder dieselbe nach gerader Richtung

*) Der Anfänger möge zum bessern Verständnis dieser Aufgabe einen Tisch mitten ins Zimmer stellen und auf diesen zwei Stecknadeln (2) und (3) so einzustecken suchen, daſs sie mit den beiden gegenüber liegenden Kanten (1) und (4) des Zimmers in einerlei Richtung sind.

durchgegraben und deshalb, um den Arbeitern Richtpunkte zu geben, diese Richtung ausgesteckt werden. Es wird angenommen, daſs man von jedem Berge aus nur das zunächst stehende Signal sehen kann.

Auflösung. Auf jeden Berg treten zwei Personen und richten sich, wie in vorhergehender Aufgabe, durch Visieren so ein, daſs zu gleicher Zeit, $\overline{123}$, $\overline{234}$, $\overline{345}$, $\overline{456}$, gerade Linien sind. Ist dies der Fall und denkt man sich diese vier Linien an den verlängerten Stäben heruntergleitend, so müssen sie notwendig alle (weil dann jede folgende Linie mit der vorhergehenden zwei Punkte gemein bekommt) auf die durch 1 und 6 gehende gerade Linie fallen und mithin die über beide Berge gehende gerade Richtung oder den Durchschnitt bezeichnen. Mehre Zwischenpunkte sind nun leicht aufzufinden.

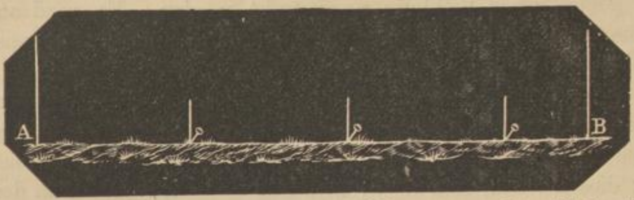
15.



Aufgabe. Es soll von 1 nach 4 ein unterirdischer Gang (Tunnel) unter einem Berge hindurch geführt werden und die Arbeit an beiden Enden (Eingang und Ausgang) zugleich beginnen. Was ist zu thun, damit die Minierer in einerlei Richtung arbeiten und auf einander stoſsen?

Auflösung. Auf dem Berge werden erst zwei Stäbe, 2 und 3, mit 1 und 4 in einerlei Richtung eingesteckt (nach § 13); alsdann noch 5 und 6 in dieselbe Richtung gebracht, so daſs erst 1, 2, 3 und 2, 3, 4, dann 5, 1, 2 und 6, 4, 3 in einerlei Richtung sind, dann haben die beiden Linien $\overline{5123}$ und $\overline{2346}$ zwei Punkte gemein und das Verlangte wird zustande gebracht, wenn die Arbeit nach den durch 1, 5 und 4, 6 bestimmten Richtungen ausgeführt wird. Auf ähnliche Weise lieſse sich auch ein Tunnel unter einem Flusse hindurch führen. Es wäre allerdings noch möglich, daſs die beiden Linien $\overline{51}$ und $\overline{64}$ über und unter einander weggingen, wie sich aber auch dies leicht vermeiden läſst, lehrt später § 213.

16.



Aufgabe. Eine auf ebenem Felde ausgesteckte Linie AB auszumessen.

Verfahren. Zu solchen unmittelbaren Längenmessungen gebraucht man ein 20 (oder 25) m langes Stahlbandmaſs, welches in Centimeter eingeteilt ist. Durch die Endringe desselben werden, um sie bequemer fortziehen und anspannen zu können, 1 bis $1^1/_2$ m lange Stäbe (Kettenstäbe) gesteckt, welche gleich den Meſsstangen eiserne Spitzen haben. Ein paar Stifte verhüten das Abgleiten der Ringe. Zum bloſsen Privatgebrauch kann auch eine hanfene Schnur dienen.

Zwei Personen, I und II, ziehen nun dieses Bandmaſs. No. I zieht zuerst den in *A* stehenden Meſsstab aus, steckt an dessen Stelle ihren Kettenstab und richtet darauf durch Winke No. II, welche das Bandmaſs straff anzieht, so ein, daſs die beiden Kettenstäbe und die in *B* stehende Meſsstange in einerlei Richtung sind. Hierauf ziehen beide Kettenzieher die Kettenstäbe wieder aus, No. I richtet die Meſsstange in *A* wieder auf, No. II bezeichnet die Stelle, wo ihr Kettenstab stand, mit einem kleinen Merkzeichen (Zähl- oder Markierstäbe, auch Sticken, deren sie ein Dutzend in einem Köcher mit sich führt) und geht nun, das Bandmaſs nach sich schleppend, vorwärts, bis die ihr folgende No. I an die bezeichnete Stelle kommt, und an die Stelle des Merkzeichens ihren Kettenstab steckt. Nach diesem Kettenstabe und nach der in *A* wieder aufgerichteten Meſsstange kann No. II sich jetzt selbst einrichten. Diese zweite Stelle wird wieder mit einem Merkzeichen bezeichnet u. s. w. — So viele Merkzeichen No. I einsammelt, so viele ganze Bandlängen hält die ausgemessene Linie. Ein übrig bleibendes Stück wird mit einem Teile des Bandmaſses ausgemessen.

Eine nicht zu groſse Länge kann auch mit einem sogenannten Dreimeterstock ausgemessen werden. In sehr vielen

Fällen genügt es auch, zu manchen militärischen Zwecken z. B., eine Länge durch Abschreiten oder durch bloſse Schätzung nach dem Augenmaſs zu messen, wozu dann aber eine groſse Übung erforderlich ist. Um sich im Zählen der Schritte nicht zu irren, kann man sich eines Schrittzählers (in Form einer Taschenuhr) bedienen. Die Längen krummer Linien und Wege werden oft auch mit einem eigenen, sich den Krümmungen anschlieſsenden Wegemesser gemessen, d. i. ein Rad von 2 bis $2^1/_2$ m im Umfange. Stand der Nullpunkt o unten und ist das Rad auf der krummen Linie so weit fortgeschoben, bis der Nullpunkt wiederum unten steht, so ist offenbar die Länge dieses durchlaufenen Stücks der krummen Linie gleich dem Umfange des Rades. In der Regel befindet sich an einem solchen Wegemesser eine Art Uhr, und man kann darnach, aus der Stellung der Zeiger, die Länge des vom Rade durchlaufenen Weges unmittelbar ablesen. Jeder Uhrmacher kann an einen Wagen, dessen Achsen in ihrer Nabe nicht zu viel Spielraum haben, einen solchen etwa 25 Mark kostenden Mechanismus leicht anbringen.

17.

Erklärungen. 1) Eine nach allen Richtungen hin begrenzte Fläche heiſst Figur. Dieselbe ist eine geradlinige oder krummlinige oder gemischtlinige, je nachdem sie von geraden oder krummen oder gemischten Linien begrenzt ist (z. B. Dreieck, Kreis, Halbkreis).

2) Der von den Grenzen einer Figur eingeschlossene Teil der (unendlichen) Ebene heiſst Inhalt oder Flächeninhalt.

3) Der Kreis ist eine ebene Figur, von einer krummen Linie so begrenzt, daſs alle ihre Punkte, wie A, G, H . . . von einem innerhalb liegenden Punkt C, den man Mittelpunkt oder Centrum nennt, gleich weit entfernt sind.

4) Die den Kreis begrenzende krumme Linie heiſst Kreis-Linie oder auch Peripherie (Umfang) und die davon eingeschlossene Fläche, Kreis oder Kreisfläche. „Kreis" wird wohl auch für „Kreislinie" gebraucht; aus dem Zusammenhange ergiebt sich aber alsdann, ob die Kreisfläche oder die Peripherie (Kreislinie) gemeint ist.

5) Jede vom Mittelpunkt C bis an die Peripherie gehende Linie, wie $\overline{CA}$, $\overline{CD}$, . . heiſst Radius oder auch Halbmesser.

6) Sehne (Chorde) heifst jede irgend zwei Punkte der Peripherie verbindende Gerade; z. B. $\overline{GH}$.

7) Durchmesser (Diameter) heifst die durch den Mittelpunkt gehende Sehne, z. B. $\overline{AB}$.

8) Es folgt aus dem Begriffe des Kreises, dafs alle Radien desselben einander gleich und ebenso, dafs alle Durchmesser einander gleich und jeder derselben doppelt so grofs als ein Radius ist.

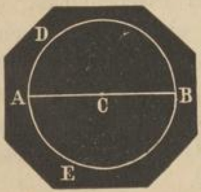
9) Jeder Teil der Kreislinie heifst ein Bogen (Arcus); z. B. $\overline{GH}$ oder arc GH.

Den Kreis kann man sich enstanden denken, indem der Radius $\overline{CA}$ desselben sich um den Mittelpunkt C dreht, alsdann beschreibt der Endpunkt A die in sich zurücklaufende Kreislinie.

18.

Erklärung. Wenn zwei Figuren so beschaffen sind, dafs, wenn man sie (in Gedanken) auf einander legt, sie genau mit einander zusammenfallen, so sagt man: sie decken sich oder sie sind kongruent. Figuren sind gleich, wenn sie gleichen Flächeninhalt haben. So kann z. B. ein Kreis einem Dreieck gleich sein. Das Zeichen der Gleichheit (der gleichen Gröfse ist $=$, das Zeichen der Kongruenz (der Gleichheit nach Gröfse) und Gestalt) $\cong$. Es ist klar, dafs, wenn zwei Figuren sich genau decken (kongruent sind), sie dann notwendig auch vollkommen gleich sind. Der Nachweis der Deckung (Kongruenz) zweier Figuren wird häufig angewandt, um die Gleichheit derselben zu beweisen. Als Erläuterungsbeispiel möge folgender Satz dienen.

19.



Lehrsatz. Ein Kreis wird durch einen beliebig gezogenen Durchmesser AB halbiert, d. h. in zwei gleiche Hälften geteilt.

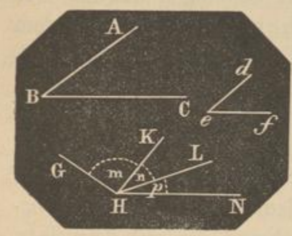
Beweis. Man denke sich den obern Teil ADB aus der Bildebene herausgeschnitten, und (indem man ihn um den Durchmesser AB, wie um eine Achse gedreht denkt) auf den untern Teil AEB gelegt, so müssen, weil dem Begriffe des Kreises zufolge, alle Punkte der Peripherie gleich weit vom Mittelpunkt C entfernt sind, notwendig auch alle Punkte des obern Bogens ADB auf den untern AEB fallen, folglich decken sich beide Teile (Halbkreise), sind also kongruent und jeder die Hälfte des Ganzen.

Zweites Buch.

Von den Winkeln.

20.

Erklärung. Wenn von einem Punkte zwei gerade (unendliche) Linien (Strahlen) nach verschiedenen Richtungen ausgehen, so sagt man: sie seien gegen einander g e n e i g t und bilden einen W i n k e l mit einander, und man versteht daher unter W i n k e l immer die Neigung zweier geraden Linien gegen einander.*) Die beiden, einen Winkel bildenden Linien, wie $\overline{BA}$, $\overline{BC}$, heifsen die S c h e n k e l und der Punkt B, in welchem sie zusammenstofsen, der S c h e i t e l (Spitze, Scheitelpunkt) des Winkels.



Einen Winkel nennt und bezeichnet man entweder blofs durch den am Scheitel stehenden Buchstaben, oder, wenn mehrere an einerlei Scheitel liegen und dadurch Verwechselung entstehen könnte, durch einen in die Öffnung der Schenkel gesetzten Buchstaben, oder auch durch drei Buchstaben, indem man den am Scheitel stehenden zwischen die an den Schenkeln stehenden schreibt. Als Winkelzeichen benutzt man $\angle$ oder $\sphericalangle$. Manche legen auch eine gebrochene Linie über die den Winkel bezeichnenden Buchstaben. So bedeutet z. B. „Winkel B", $\angle$ B, $\sphericalangle$ B, $\widehat{B}$, $\widehat{ABC}$, $\widehat{CBA}$ den Winkel bei B, ebenso: n, KHL, LHK den Winkel, den die beiden Linien $\overline{HK}$ und $\overline{HL}$ bilden.

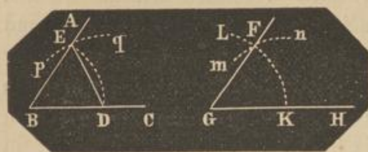
Die Gröfse eines Winkels hängt allein von der Neigung (Öffnung) seiner Schenkel ab, die Länge der Schenkel ist ganz gleichgültig. Denkt man den Winkel e so auf $\widehat{B}$ gelegt, dafs der Scheitel e auf B, der Schenkel ef in die Richtung BC kommt, und es fällt dann der Schenkel ed auf BA, so sind die Winkel B und e gleich grofs, obgleich ihre Schenkel verschiedene Länge haben.

---

*) Denkt man sich unter „Winkel" den Teil der (unendlichen) Ebene, der zwischen zwei von einem Punkte ausgehenden Strahlen enthalten ist, so läfst sich die Gleichheit der korrespondierenden Winkel streng beweisen (Paralleltheorie von Rich. Schurig).

Einen Winkel kann man sich durch Bewegung entstanden denken. Der Schenkel $\overline{BA}$ z. B. habe anfangs auf dem Schenkel BC gelegen, sich dann um den Scheitel B gedreht, so entsteht sogleich ein Winkel, der mit fortgesetzter Drehung immer gröſser wird.

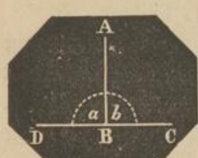
21.



Aufgabe. An die Linie GH im Punkte G einen Winkel zu tragen, der einem gegebenen Winkel B gleich ist.

Auflösung. Aus dem Scheitel B des gegebenen Winkels beschreibe man zwischen den Schenkeln desselben, mit einem beliebigen Radius BD einen Bogen DE, und mit demselben Radius BD aus dem neuen Scheitel G einen Bogen KL, denke die Sehne DE gezogen und beschreibe mit derselben als Radius aus K einen Bogen mn, der den Bogen KL in einem Punkte F schneidet, und ziehe dann nur die Linie GF, so ist der Winkel G = Winkel B. Denn denkt man sich die Winkel gehörig auf einander gelegt, so fallen die mit demselben Radius BD beschriebenen Bögen DE, KL und ebenso die mit demselben Radius DE beschriebenen Bögen pq, mn und, wie leicht einzusehen (wenn man die Bögen zu ganzen Kreisen vollendet denkt), auch deren Durchschnittspunkte E und F auf einander; die Winkel decken sich also und sind folglich gleich, $\angle G = \angle B$.

22.



Erklärungen. 1) Liegen die Schenkel eines Winkels in entgegengesetzter Richtung, bilden sie also eine einzige gerade Linie, so heiſst der Winkel ein **gestreckter** oder flacher; z. B. $\angle DBC$.

2) Der **rechte Winkel** ist die Hälfte des gestreckten. Ist also a die Hälfte des Winkels $\angle DBC$, so ist $\angle a$ ein Rechter. Den rechten Winkel bezeichnet man mit R. Die beiden Geraden, welche einen rechten Winkel bilden, stehen perpendikulär (senkrecht, lotrecht, normal, vertikal*)

*) „Vertikal" bedeutet ursprünglich die Richtung des freien Falles (s. § 11, Anmerkung).

auf einander. „AB steht senkrecht auf DC“ kürzt man durch „AB $\perp$ CD“ ab. B ist der Fuſspunkt des Perpendikels (der Senkrechten) AB. Aus vorstehenden Erklärungen folgt, daſs in einem Punkt B der Linie DC nur ein Perpendikel AB möglich ist, und daſs daher alle rechte Winkel notwendig gleich sind (sich decken müssen).

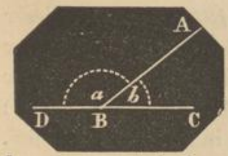
Man breche ein Stück Papier und dann nochmals, so daſs das eine Ende des ersten Bruches auf das andere fällt, so hat man einen rechten Winkel und zwei auf einander senkrechte Linien.

3) Winkel, die kleiner als ein gestreckter, also kleiner, als zwei Rechte sind, heiſsen konkave (hohle oder ausspringende). Die konkaven Winkel sind entweder rechte oder spitze oder stumpfe. Spitz ist ein Winkel, wenn er kleiner ist als ein rechter, z. B. $\angle b$ in der Fig. zu § 23, stumpf, wenn er gröſser ist als ein rechter, z. B. $\angle a$ in der Fig. zu § 23. Zwei Linien, die einen spitzen oder stumpfen Winkel bilden, heiſsen schräg oder schief gegen einander. Spitze und stumpfe Winkel nennt man daher auch schiefe.

4) Der konvexe (überstumpfe, erhabene, einspringende Winkel ist gröſser als ein gestreckter ($< 2\ R$).

5) Der Winkel, welcher durch eine volle Umdrehung entstanden ist, also $= 4\ R$ ist, heiſst ein voller oder kompleter.

23.

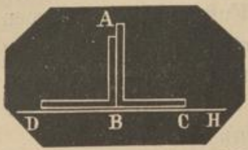


Erklärung. Zwei Winkel, welche einen Schenkel gemein haben und deren beiden andern Schenkel eine gerade Linie bilden, heiſsen Nebenwinkel.

Von zwei Nebenwinkeln, a und b, kann man sich den einen entstanden denken, indem man den Schenkel des andern rückwärts verlängert. Anfänger müssen sich den Begriff Nebenwinkel genau merken. Bei zwei bloſs an einander liegenden Winkeln, wie m und n in § 20, die auch einen Schenkel HK gemein haben, bilden die beiden äuſsern Schenkel HG, HL keine gerade Linie, wie es bei Nebenwinkeln sein muſs.

Ein rechter Winkel ist also auch seinem Nebenwinkel gleich, und umgekehrt: Sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so ist jeder ein Rechter.

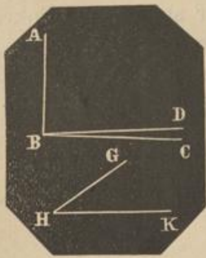
24.



Aufgabe. Zu untersuchen, ob die Schenkel eines sogenannten Winkelhakens (oder Dreiecks), dessen man sich bedient, um rechte Winkel zu zeichnen und Perpendikel zu ziehen, auch genau rechtwinklig auf einander stehen.

Auflösung. Man ziehe eine gerade Linie *DH*, lege an dieselbe den einen Schenkel *BC* des Winkelhakens und ziehe längs des andern *AB* eine gerade Linie. Wäre nun der Winkel *ABC* genau ein rechter, so müfste er seinem Nebenwinkel *ABD* gleich sein; ob er dies ist, würde sich gleich zeigen, indem man den Winkelhaken nur hineinpafst.

25.



Winkelmafs. So wie man, um Linien zu messen, verschiedene Längen-Einheiten (Meter, Centimeter, Millimeter) gebraucht, so ist man auch, um Winkel zu messen, über folgende drei Winkel-Einheiten übereingekommen.

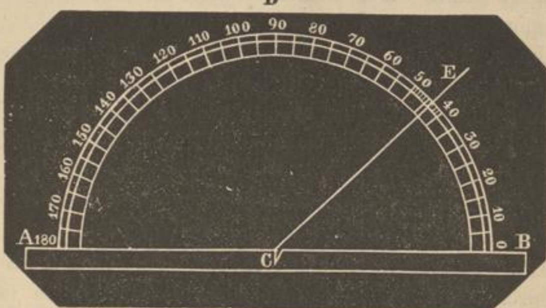
Man denkt sich den rechten Winkel in 90 kleinere gleiche Winkel geteilt, welche man Grade (^{0}) nennt. Sei $\angle DBC$ ein solcher, deren neunzig an einander liegend den rechten Winkel ABC genau ausfüllen, nämlich $\angle DBC = 1^0$, so ist dieser Winkel die gröfste Winkel-Einheit. Diese denkt man ferner in 60 gleiche (ihrer Kleinheit wegen aber auf dem Papier nicht darstellbare) Winkel geteilt, welche man Minuten ($'$) nennt, so dafs also 1 Grad = 60 Minuten, in Zeichen $1^0 = 60'$. Den Winkel von einer Minute denkt man sich wiederum in 60 gleiche Winkel geteilt, welche Sekunden ($''$) heifsen, so dafs also $1' = 60''$. Hiernach ist also der rechte Winkel nämlich:

$$R = 90^0 = 5400' = 324\,000''.$$

Es genügt hier, sich diese weit gehende Teilung des rechten Winkels nur in Gedanken vorzustellen. Gehörigen Orts kann man sich überzeugen, dafs es einem geschickten Mechanikus mittelst einer Teilmaschine und einer künstlichen Vorrichtung (Mikrometer, Nonius) möglich ist, diese feine Teilung zu bewirken und einen Winkelmesser herzustellen, mit dem man, bei gehöriger Handhabung desselben, die Winkel bis auf die Sekunde genau messen kann.

Gesetzt nun, es sei in dem Winkel H die erste Einheit, nämlich 1 Grad, 36 mal, in dem überschüssigen Teil die zweite Winkel-Einheit, nämlich 1 Minute, 40 mal, und in dem jetzt noch übrig bleibenden Teil des Winkels H die dritte Einheit, nämlich eine Sekunde, noch 20 mal enthalten, so betrüge die Gröfse des Winkels H, 36 Grad 40 Minuten und 20 Sekunden, oder kürzer in Zeichen: $\angle H = 36^0\ 40'\ 20''$.

26.



Winkelmesser. Der Kreis dient uns nicht allein als Hilfslinie, um Winkel zu zeichnen, sondern gehörig dazu eingerichtet, auch als Instrument, vermittelst dessen man einen Winkel messen und seine Gröfse in Graden, Minuten und Sekunden angeben kann.

Man denke sich den Durchmesser AB eines Kreises gezogen, wodurch derselbe halbiert ist (§ 19). Auf dem Durchmesser denke man sich im Mittelpunkt C das Perpendikel DC errichtet, so teilt dieses den Halbkreis wieder in zwei gleiche Teile arc $AD =$ arc DB; denn denkt man sich die beiden rechten Winkel ACD und DCB zur Deckung gebracht, so müssen sich auch die Bögen AD und DB decken, weil alle ihre Punkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind. Die Bögen AD und DB sind also gleich und jeder ein Viertelkreis (Quadrant). Denkt man sich nun jeden der beiden rechten Winkel in 90 gleiche Winkel (Winkelgrade) geteilt, so würden die Teilungslinien offenbar auch jeden der beiden Viertelkreise in 90, mithin den Halbkreis in 180 gleiche Bögen (Bogengrade) teilen (§ 18). Würde nun umgekehrt der Halbkreis erst in 180 gleiche Bögen geteilt (welches einem geschickten Mechanismus mittelst einer Teilmaschine desto leichter sein muſs, je gröſser der Halbkreis ist, weil dann die Teilpunkte weiter auseinander liegen und deutlicher hervortreten) und dann von diesen Teilpunkten nach dem Mittelpunkte *C* gerade Linien gezogen, so wären dadurch 180 an einander liegende gleiche Winkel-Grade versinnlicht.

In manchem Besteck findet sich ein solcher eingeteilter metallener Halbkreis, oder vielmehr nur dessen ausgeschnittener Rand, wo man sich dann die Teilstriche bis zum Mittelpunkt verlängert denkt. Der Gebrauch eines solchen Winkelmessers (Transporteurs) ist nun einfach folgender:

Um z. B. den Winkel *ECB* zu messen, lege man das Instrument so: daſs sein Mittelpunkt auf den Scheitel *C* und sein Nullpunkt auf einen Schenkel *CB* des zu messenden Winkels fällt, alsdann sehe man zu, wie viele Grade der andere Schenkel *CE* abschneidet, indem man halbe bis viertel Grade nach dem Augenmaſs schätzt. Nach Andeutung der Figur wäre z. B. Winkel $ECB = 43^0\ 50'$.

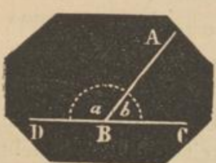
Anmerkung. Dieser eben beschriebene, etwa 6 bis 15 cm im Durchmesser haltende und nur bis auf Grade (seltener halbe Grade) geteilte Winkelmesser wird nur gebraucht, um Winkel in Zeichnungen oder Rissen zu messen und aufzutragen und gewährt für solche Zwecke eine hinreichende Genauigkeit. Die § 25 erwähnten, besonders für die Geodäsie und Astronomie erforderlichen feineren Winkelmesser sind ganze Kreise von 40 cm bis 1 m und darüber im Durchmesser mit einem um den Mittelpunkt drehbaren Fernrohr. Die Teilstriche sind hier so fein, daſs man sie nur mit einem Vergröſserungsglase deutlich sehen und ablesen kann. Nach den hohen Preisen derselben, von 300 bis zu 10 000 Mark und darüber, kann man mutmaſsen, welche Geduld und Geschicklichkeit die Verfertigung solcher Instrumente erfordert.

27.

Aufgabe. Die Anzahl Grade und Minuten, welche ein beliebig gegebener Winkel *C* enthält, bloſs mit Hilfe eines Zirkels und wenigstens eben so genau zu bestimmen, als es mit den gewöhnlichen Winkelmessern möglich ist.

Auflösung. Mit einem möglichst grofsen Radius CA beschreibe man zwischen den Schenkeln des gegebenen Winkels C einen Bogen AB, den man zu einem ganzen Kreise vollendet. Hierauf untersuche man, wie oft der Bogen AB (indem man dessen Sehne $\overline{AB}$ in den Zirkel nimmt) in der ganzen Peripherie enthalten ist, und dividiere mit der gefundenen Zahl in 360^0. Wäre z. B. arc AB $7^1/_2$ mal in der ganzen Peripherie enthalten, so wäre $\angle C = \frac{360^0}{7^1/_2} = 48^0$.

28.



Lehrsatz. Zwei Nebenwinkel betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

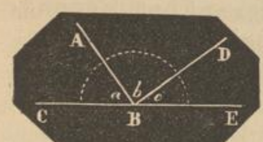
$$a + b = 2\,R = 180^0.$$

Beweis. Denkt man sich aus dem gemeinschaftlichen Scheitel B einen in 180^0 geteilten Halbkreis beschrieben, oder den Winkelmesser angelegt, so ist klar, dafs die beiden Nebenwinkel a und b ihn ganz ausfüllen, und dafs der eine Nebenwinkel a gerade so viel über 90^0 hat, als dem andern b daran fehlen. Dasselbe folgt auch, wenn man in B ein Perpendikel auf DC errichtet denkt.

Aufgabe. Es sei der Winkel $b = 52^0\ 37'\ 49''$. Wie grofs ist der Winkel a?

Antwort. Es ist $\angle a = 127^0\ 22'\ 11''$.

29.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche an einerlei Seite einer geraden Linie liegen und einen Scheitel in derselben gemein haben, betragen zusammen zwei rechte Winkel. In Zeichen:

$$a + b + c = 2\,R = 180^0.$$

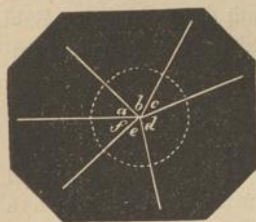
Beweis. Man denke sich wieder im gemeinschaftlichen Scheitel B ein Perpendikel auf CE errichtet (oder den Winkelmesser angelegt), so werden die entstehenden beiden rechten Winkel durch die andern ganz ausgefüllt; letztere haben also zusammen eben so viele Grade, als zwei rechte Winkel.

Aufgabe 1. Es sei $\angle a = 50^0\ 16'\ 20''$; $\angle c = 30^0\ 10'\ 10''$; wie grofs ist $\angle b$?

Aufgabe 2. Es sei $\angle a = 72^0\ 50'\ 6''$; $\angle b = 86^0\ 21'\ 18''$; wie viel mal so grofs ist $\angle a$ als $\angle c$?

Antwort. 1) $\angle b = 99^0\ 33'\ 30''$; 2) $3^1/_2$ mal.

30.



Lehrsatz. Alle Winkel, welche rings um einen gemeinschaftlichen Scheitelpunkt liegen, betragen zusammen immer vier Rechte. In Zeichen:

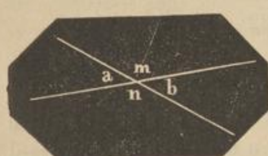
$$a + b + c + d + e + f = 4\,R = 360^0.$$

Beweis. Man denke sich durch den gemeinschaftlichen Scheitel eine gerade Linie gezogen, so betragen die Winkel an jeder Seite derselben 2 R, mithin an beiden Seiten zusammen 4 R. Die Richtigkeit des Satzes ergiebt sich auch, indem man den Mittelpunkt eines in 360^0 geteilten Kreises auf den gemeinschaftlichen Scheitel gelegt denkt.

Aufgabe. Es sei $a = 50^0\ 25'\ 2''$, $b = 68^0\ 0'\ 12''$, $c = 29^0\ 40'\ 48''$, $d = 120^0\ 57'\ 0''$, $e = 60^0\ 9'\ 54''$; wie grofs ist der Winkel f?

Antwort. Es ist $\angle f = 30^0\ 47'\ 4''$.

31.



Lehrsatz. Wenn zwei gerade Linien sich schneiden, so sind je zwei gegenüber liegende Winkel, welche man Scheitelwinkel nennt, einander gleich.

In Zeichen: $a = b$

$m = n$

Beweis. Die Winkel a und m sind zwei Nebenwinkel und betragen zusammen zwei Rechte (§ 28); eben so sind b und m zwei Nebenwinkel und betragen zusammen auch zwei rechte Winkel. Da es nun einerlei ist, ob man a oder b zu m legt, indem in beiden Fällen die Summe gleich zweien Rechten ist, so ist notwendig auch $a = b$. Eben so ist es einerlei, ob man m oder n zu a addiert, mithin auch der Winkel m seinem Scheitelwinkel n gleich. Wäre z. B. $\angle a = 60^0$, so wäre jeder seiner Nebenwinkel m und n, $= 120^0$ und $b = 60^0$.

Drittes Buch.

Von der Kongruenz der Dreiecke.

32.

Zur Bildung einer geradlinigen Figur sind mindestens drei Gerade erforderlich. Diese begrenzenden Geraden werden Seiten, die Summe der Seiten: Umfang (Perimeter), und der vom Umfange eingeschlossene Teil der Ebene: Inhalt der Figur genannt. Die Punkte, in welchen 2 Seiten zusammenstofsen, heifsen Ecken, die also zugleich die Scheitel der Winkel der Figur sind. Nach der Zahl der Seiten (oder Ecken) teilt man die Figuren ein in Dreiecke, Vierecke und Vielecke (Polygone).

Das Dreieck ist offenbar das einfachste unter allen geradlinigen Figuren, zugleich aber auch die wichtigste, weil alle Vielecke in Dreiecke zerlegt werden können. Deshalb mufs man auch alle Lehrsätze über das Dreieck nicht allein gut verstehen, sondern auch gut inne haben. Überhaupt hängt, wie man schon in den beiden vorhergehenden Büchern gemerkt haben wird, die Leichtigkeit und Gewandtheit in den Anwendungen der Geometrie und rasches Fortschreiten in derselben von der leichten und schnellen Erinnerung ihrer Lehrsätze ab.

33.

Erklärungen. 1) Die Seite des Dreiecks, auf welcher man sich dasselbe ruhend denkt, wird Grundlinie oder Basis genannt. Die beiden andern Seiten nennt man Schenkel des Dreiecks oder Scheitelseiten. Die der Grundlinie gegenüberliegende Ecke heifst Spitze des Dreiecks. „Dreieck“ kürzt man durch $\triangle$ ab.

2) Dem Verhältnis seiner Seiten nach ist das Dreieck:

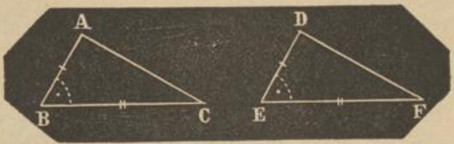
a) ungleichseitig, wenn alle drei Seiten ungleich sind;

b) gleichseitig, wenn alle Seiten gleich sind;
c) gleichschenklig, wenn es nur zwei gleiche Seiten hat. Diese heiſsen dann die Schenkel und die dritte Seite Grundlinie.

3) Der Beschaffenheit der Winkel nach ist das Dreieck:
a) spitzwinklig, wenn alle drei Winkel spitz sind;
b) stumpfwinklig, wenn es einen stumpfen Winkel hat;
c) rechtwinklig, wenn es einen rechten Winkel hat. Im rechtwinkligen Dreieck heiſsen die beiden rechtwinklig auf einander stehenden Seiten die Katheten (Senkrechte) und die dem rechten Winkel gegenüber liegende Seite: Hypotenuse.

Unter den sechs Bestandteilen eines jeden Dreiecks (drei Seiten und drei Winkel) giebt es immer drei von einander unabhängige Stücke, durch deren Gröſse das ganze Dreieck, also auch die übrigen drei Stücke vollkommen bestimmt sind. Diese drei aus den „vier Kongruenzsätzen" erforderlichen Bestimmungsstücke, welche man sich ganz besonders merken muſs, werden nun die folgenden Paragraphen kennen lehren.

34.



1. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den von denselben eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich haben.

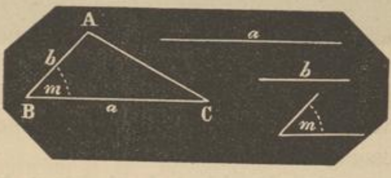
Beweis. Angenommen, es seien für die beiden Dreiecke ABC und DEF die im Lehrsatz erwähnten drei gleichen Stücke beziehlich folgende: Die Seite BC im ersten Dreieck sei $=$ der Seite EF im andern Dreieck, ferner Seite $AB =$ Seite DE und der von den beiden Seiten AB, BC eingeschlossene Winkel B gleich dem von den beiden Seiten DE, EF gebildeten Winkel E.

Man denke sich nun das eine Dreieck DEF aus der Bildebene herausgenommen und übereinstimmend, nämlich so auf das andere Dreieck ABC gelegt, daſs die gleich groſs vorausgesetzten Winkel B und E mit ihren ebenfalls gleich groſs vorausgesetzten Schenkeln sich decken, so daſs also

E auf B, F auf C und D auf A fällt. Notwendig muſs dann auch (§ 3) die Seite DF die Seite AC, Winkel D den Winkel A, und Winkel F den Winkel C decken und folglich auch, wie der Lehrsatz behauptet, $\triangle\ ABC \cong \triangle\ DEF$ sein. (Lies: $\triangle\ ABC$ kongruent $\triangle\ DEF$; s. § 18).

Anmerkung. In kongruenten Dreiecken liegen gleiche Winkel gleichen Seiten und umgekehrt, gleiche Seiten gleichen Winkeln gegenüber Hiernach findet man aus Dreiecken, die kongruent sind, auch leicht die beziehlich gleichen Stücke heraus.

35.



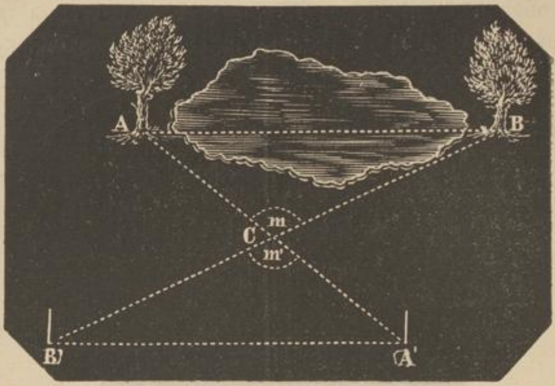
Aufgabe. Es sind zwei Seiten a und b eines Dreiecks und der davon eingeschlossene Winkel m gegeben. Es soll das dadurch bestimmte Dreieck konstruiert werden.

Auflösung. Man nehme eine der beiden gegebenen Seiten (a) in den Zirkel und stecke sie in BC ab, trage an das eine Ende B dieser Linie den gegebenen Winkel m (§ 21), mache den andern Schenkel BA so lang, als die andere Linie b ist und ziehe dann die Linie AC, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man auch den gegebenen Winkel m statt in B, in C, oberhalb oder unterhalb BC angetragen, so würde man doch immer dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage erhalten haben. Anfänger werden wohl thun, diese beiden Konstruktionen noch zu machen.

Statt also zu sagen: zwei (alle) Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den zwischenliegenden Winkel gleich haben, hätte man auch sagen können: ein Dreieck ist bestimmt durch zwei Seiten und den zwischen liegenden Winkel. Die im Lehrsatz beibehaltene frühere Redeform ist aber für den ersten Unterricht besser.

36.



Aufgabe. Durch Anwendung des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Punkte A, B auf dem Felde zu bestimmen, wenn ein zwischenliegendes Hindernis die unmittelbare Messung nicht erlaubt.

Auflösung. Man bezeichne durch einen Meſsstab noch einen dritten Punkt C, von dem man ungehindert mit der Kette nach A und B messen kann. Messe die Linien AC und BC und trage ihre Längen geradlinig nach A' und B' fort, so daſs $A'C = AC$ und $B'C = BC$ wird; messe hierauf nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Länge von $\overline{AB}$. Wäre z. B. $\overline{A'B'} = 400$ m gemessen, so wäre auch $\overline{AB} = 400$ m.

Beweis. Die beiden Dreiecke $A'B'C$ und ABC sind kongruent, weil sie zufolge Konstruktion zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: $A'C = AC$, $B'C = BC$ (gleich gemacht) und $m' = m$ (als Scheitelwinkel, § 31). Stellt man sich vor, das untere Dreieck drehe sich um den Punkt C herum, bis A' auf A fällt, so muſs dann B' auf B, mithin $A'B'$ auf AB fallen.

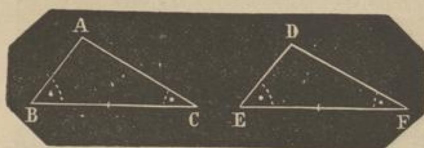
37.

2. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei entsprechende (in Bezug auf die Seite gleichliegende) Winkel gleich haben. Hier sind zwei Fälle zu unterscheiden:

I. Die Dreiecke haben eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich.

In Zeichen:

Es sei	so ist:	
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\overline{AB} = \overline{DE}$	
$\angle B = \angle E$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF.$
$\angle C = \angle F$	$\angle A = \angle D$	

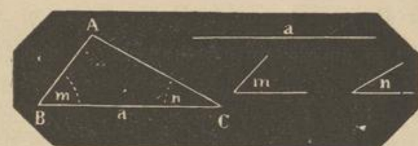


Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF so auf das andere ABC gelegt, daſs die als gleich vorausgesetzten Seiten und Winkel sich decken, also erstlich $\overline{EF}$ auf $\overline{BC}$ fällt, alsdann muſs, weil $\angle E = \angle B$ und $\angle F = \angle C$, der Punkt D notwendig sowohl in die Richtung $\overline{BA}$, als in die Richtung $\overline{CA}$ fallen. Soll aber ein Punkt D (der keine Ausdehnung hat) in zwei verschiedene Richtungen $\overline{BA}$, $\overline{CA}$ zugleich fallen, so liegt er notwendig in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnittspunkt A. Die Dreiecke decken sich also und es ist, wie im Lehrsatz behauptet, $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

II. Die Dreiecke haben eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel gleich.

Dieser Fall findet in § 65 Berücksichtigung.

38.



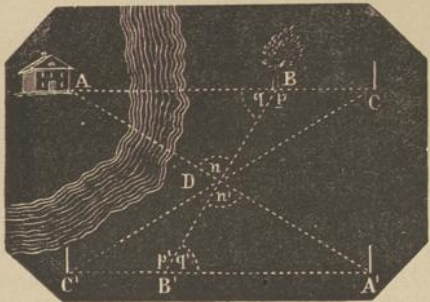
Aufgabe. Es sind eine Seite a und die beiden anliegenden Winkel m und n gegeben; es soll das durch diese drei Stücke bestimmte Dreieck konstruiert werden.

Auflösung. Man stecke die Linie a in $\overline{BC}$ ab, trage daran in B den Winkel m, in C den Winkel n, und verlängere die Sckenkel dieser angetragenen Winkel bis zu ihrem Durchschnittspunkt A, so ist ABC das verlangte Dreieck.

Anmerkung. Hätte man $\angle n$ bei B und $\angle m$ bei C oder beide Winkel unterhalb BC angetragen, so hätte man doch dasselbe Dreieck, nur in anderer Lage, erhalten.

3*

30.



Aufgabe. Mittelst des vorhergehenden Lehrsatzes die Entfernung zweier Punkte A und B zu bestimmen, wenn nur der eine Punkt B zugänglich ist.

Auflösung. Man stecke erst in C einen Meſsstab, der mit A, B in einerlei Richtung ist; dann stecke man einen Meſsstab in D, messe die Linien BD, CD und trage ihre Längen geradlinig nach B' und C' hinaus, so daſs $B'D = BD$, und $C'D = CD$ wird. Jetzt gehe man in der, durch die bezeichneten Punkte C', B' bestimmten Richtung rückwärts fort, bis man an einen Punkt A' kommt, der zugleich auch mit A, D in einerlei Richtung liegt, messe dann nur die Linie $A'B'$, so giebt diese die gesuchte Entfernung von A bis B.

Beweis. Um zu zeigen, daſs zufolge der Konstruktion notwendig $AB = A'B'$ sein muſs, bemerke man zuerst, daſs $\triangle\ B'C'D \cong \triangle\ BCD$ (§ 34) und daſs hieraus die Gleichheit der Winkel p und p' folgt (§ 34, Anmerkung). Ferner sind nun auch die Dreiecke ABD und $A'B'D$ kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: $BD = B'D$ (gleich gemacht), $\angle n = \angle n'$ (als Scheitelwinkel, § 31) und $\angle q = \angle q'$ (als Nebenwinkel von $\angle p$ und $\angle p'$); denn wenn zwei Winkel p und p' gleich sind, so müssen auch ihre Nebenwinkel q und q' gleich sein (§ 28) Daher $\triangle\ ABD \cong \triangle\ A'B'D$ (§ 37) und hieraus: $AB = A'B$ (§ 34, Anmerkung).

40.

Lehrsatz. In jedem gleichschenkligen Dreieck sind die Winkel an der Grundlinie gleich.

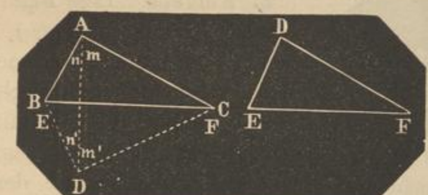
In Zeichen:

Wenn:	so ist auch:
AB = AC	$\angle B = \angle C$.

Beweis. Man kann sich den Winkel BAC an der Spitze durch die Linie AD halbiert denken, so daſs $\angle n = \angle n'$; alsdann würden aber die beiden Dreiecke ABD und ACD kongruent sein wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des zwischen liegenden gleichen Winkels, nämlich: $AB = AC$, nach Voraussetzung; $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$ und $AD = AD$; folglich (§ 34) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle B = \angle C$.

Zusatz. Sind umgekehrt in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, $\angle B = \angle C$, so sind notwendig auch die ihnen gegenüber liegenden Seiten gleich, $AB = AC$, und das Dreieck ist ein gleichschenkliges. Denn dächte man sich in der Mitte D ein Perpendikel auf BC errichtet, so müssen nach § 37 zwei kongruente Dreiecke entstehen ($BD = DC$, $\angle B = \angle C$, $\angle D = \angle D$), mithin die beiden andern Seiten dies Perpendikel in einem gemeinschaftlichen Punkt A schneiden, und folglich $AB = AC$ sein.

41.



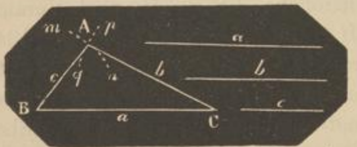
3. Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie alle drei Seiten beziehlich gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:	daher:
AB = DE	$\angle A = \angle D$	
AC = DF	$\angle B = \angle E$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$.
BC = EF	$\angle C = \angle F$	

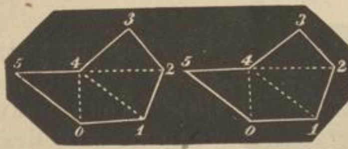
Beweis. Man denke sich das eine Dreieck DEF in umgekehrter Lage so an das andere Dreieck ABC gelegt, daſs Seite EF die als gleich vorausgesetzte Seite BC deckt. Denkt man sich nun in den Dreiecken links die Linie AD gezogen, so ist das Dreieck ABD gleichschenklig, weil nach Voraussetzung $AB = DE$ und daher die Winkel an der Grundlinie AD einander gleich, nämlich $\angle n = \angle n'$ (§ 40). Aus demselben Grunde ist auch Dreieck ACD gleichschenklig und deshalb auch $\angle m = \angle m'$. Die Summe der beiden Winkel m und n ist also gleich der Summe der beiden andern Winkel m' und n', daher ist auch $\angle BAC = \angle DEF$. Das Übrige folgt nun aus § 34, weil beide Dreiecke jetzt zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel beziehlich gleich haben.

42.



1. Aufgabe. Es sind alle drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, es soll das dadurch bestimmte Dreieck gezeichnet werden.

Auflösung. Man stecke eine der gegebenen Seiten, z. B. a in BC ab, beschreibe aus dem einen Endpunkt B mit der Seite c, als Radius, einen Bogen mn, ebenso aus C mit der Seite b, als Radius, einen zweiten Bogen pq, und ziehe von dem Durchschnittspunkt A beider Bögen Gerade nach B und C, so ist ABC das verlangte Dreieck. Vergleiche § 35, Anmerkung.



2. Aufgabe. Eine Figur abzuzeichnen (abzutragen).

Auflösung. Man bezeichne die Winkelpunkte nach einerlei Folge herum mit Ziffern, teile die Figur durch Diagonalen (d. h. solche Linien, welche irgend zwei nicht auf einander folgende Punkte der Figur verbinden) in lauter Dreiecke und zeichne dann diese an einander hängenden Dreiecke ab.

Anmerkung. Die erwähnten Diagonalen brauchen nicht wrklich gezogen, sondern nur gedacht zu werden.

Genauer wird die Kopie, wenn man mit einer und derselben Grundlinie oder Diagonale alle übrigen Punkte des Originals zu Dreieckspunkten verbunden denkt.

Sind krumme Linien abzuzeichnen, so kann man die

Lage der wichtigsten Punkte, je mehr, je genauer, einzeln bestimmen und sie durch freie Handzeichnung verbinden.

Dieses Verfahren, eine Figur abzuzeichnen, ist, obwohl theoretisch richtig, doch nur dann praktisch brauchbar, wenn die Figur nur wenige und lauter gerade Seiten hat.

Aufser andern Methoden, welche in der Zeichenkunst gelehrt werden, bedient man sich auch, um Karten und Pläne abzuzeichnen, mit grofsem Vorteil eines unter dem Namen Pantograph bekannten, aber sehr teuern Instruments (300 Mark), welches nicht mit dem sogenannten Storchschnabel zu verwechseln ist, obgleich er auf demselben Prinzip beruht. (Vergleiche § 124, 3.)

43.

4. (und letzter) Kongruenzsatz. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie 2 Seiten und den der gröfseren dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben.

In Zeichen (s. Fig. zu § 41):

Wenn	so ist	daher
$BC = EF$	$AC = DF$	$\triangle\ ABC \cong DEF.$
$AB = DE$		
BC gröfser als AB		
$\angle A = \angle D$		

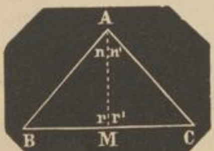
Beweis. Man denke sich das $\triangle\ DEF$ in umgekehrter Lage so an $\triangle\ ABC$ gelegt, dafs sich die gleichen Seiten EF und BC decken. Denkt man sich nun in den Dreiecken links die Linie AD gezogen, so ist $\triangle\ ABD$, wegen $AB = ED$, gleichschenklig, daher nach § 40: $\angle n = \angle n'$. Da aber nach Voraussetzung $\angle A = \angle D$, so mufs nun auch $\angle A - \angle n = \angle D - \angle n'$ d. i. $\angle m = \angle m'$ sein, folglich ist auch $\triangle\ ACD$ ein gleichschenkliges (s. § 40, Zusatz), daher $AC = CD$ d. i. $AC = DE$. Da nun alle 3 Seiten des Dreiecks DEF gleich den 3 Seiten des Dreiecks ABC, so sind beide Dreiecke nach § 41 kongruent.

Anmerkung. Dreiecke sind nicht unbedingt kongruent, wenn sie zwei Seiten und den der k l e i n e r n Seite gegenüberliegenden Winkel gleich haben (s. § 56, 2. Aufgabe).

Viertes Buch.

Von den Perpendikeln.

44.



Lehrsatz. Die von der Spitze eines gleichschenkligen Dreiecks nach der Mitte der Grundlinie gehende Linie steht senkrecht auf der Grundlinie und halbiert den Winkel an der Spitze.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
AB = AC	$\angle r = \angle r' = 90^0$
und BM = MC	$\angle n = \angle n'$.

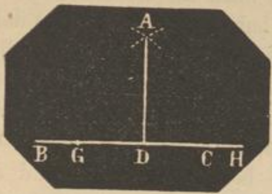
Beweis. Die beiden Dreiecke ABM und ACM sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben; denn die Seite AM ist beiden gemein, und nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und $BM = MC$, daher (§ 41) $\triangle ABM \cong \triangle ACM$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $n = n'$ und $r = r'$.

Weil nun aber die beiden gleichen Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein rechter Winkel und folglich AM perpendikulär auf BC. (§ 23).

45.

Aufgabe. Auf einer Linie BH in einem bestimmten Punkt D eine Senkrechte zu errichten.*)

*) Wer den vorhergehenden Lehrsatz gut verstanden und über die Lösung der hier gestellten Aufgabe, als eine sehr einfache Anwendung des Lehrsatzes, gehörig nachgedacht hat, wird sie ohne Anleitung finden.

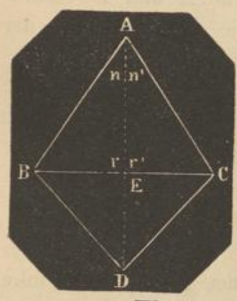


Auflösung. Man schneide von D aus erst rechts und links zwei gleiche Stücke ab, $DC = DG$. Beschreibe jetzt aus C und G mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen und verbinde deren Durchschnittspunkt A mit D, so ist AD das verlangte Perpendikel.

Beweis. Denkt man noch AG und AC gezogen, so ist, zufolge Konstruktion, AGC ein gleichschenkliges Dreieck und D die Mitte der Grundlinie, folglich (§ 44) AD auf GC senkrecht.

Zusatz. Auf gleiche Weise kann man auf dem Felde auf einer ausgesteckten Linie BC in D eine Senkrechte errichten, indem man von D aus, zu beiden Seiten gleiche Stücke $DC = DG$ abmifst, in den Punkten C und G die Enden einer Schnur (Kette) befestigt und sie dann, in der Mitte A fassend, straff anspannt, bis sie mit GC ein gleichschenkliges Dreieck bildet, dessen Spitze A dann notwendig in der auf GC in D zu errichtenden Senkrechten liegt.

46.



Lehrsatz. Die Linie, welche durch die Spitzen zweier gleichschenkligen Dreiecke von gemeinschaftlichen Grund-Linie geht, halbiert 1) die Winkel an den Spitzen, 2) halbiert die Grund-Linie und steht 3) senkrecht auf derselben.

In Zeichen:

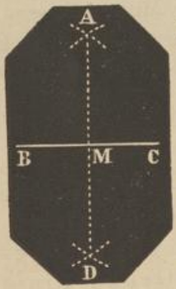
Wenn:	so ist:
AB = AC	1) $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$
DB = DC	2) BE = EC
	3) $\angle r = \angle r' = 90°$.

Beweis. Die beiden Dreiecke ABD und ACD sind kongruent, weil sie alle drei Seiten wechselweise gleich haben, nämlich die Seite AD ist beiden gemein und dann, zufolge Voraussetzung, $AB = AC$ und $DB = DC$, folglich (§ 41) $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle n = \angle n'$.

Jetzt ist es leicht zu beweisen, daſs auch die Dreiecke ABE und ACE kongruent sind; denn sie haben zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel wechselweise gleich, nämlich: die Seite AE ist beiden gemein; nach Voraussetzung ist $AB = AC$ und, wie eben bewiesen, ist $\angle n = \angle n'$, daher (§ 34) $\triangle ABE \cong \triangle ACE$, und hieraus (nach § 34, Anmerkung) $BE = EC$ und $\angle r = \angle r'$. Weil aber die beiden Winkel r und r' zugleich auch Nebenwinkel sind, so ist jeder ein Rechter und folglich steht AD senkrecht auf BC. (§ 23.)

Anmerkung. Satz und Beweis bleiben dieselben, wenn die beiden gleichschenkligen Dreiecke, statt wie hier, an verschiedenen Seiten, über einerlei Seite der gemeinschaftlichen Grundlinie liegen.

47.

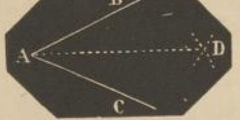


Aufgabe. Eine gegebene Linie BC zu halbieren (die Mitte zu bezeichnen).

Auflösung. Man sehe zuvor § 45, Randanmerkung — beschreibe über BC die Spitzen A und D zweier gleichschenkligen Dreiecke, so muſs die Linie, welche A und D verbindet, die gegebene Linie BC gerade in der Mitte M treffen. (§ 46.)

Zusatz. Dieselbe Konstruktion findet statt, wenn auf einer Linie BC in der Mitte ein Perpendikel errichtet werden soll.

48.



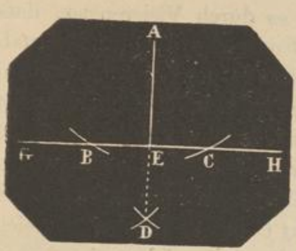
Aufgabe. Einen gegebenen Winkel A zu halbieren.

Auflösung. Siehe § 45, Randanmerkung. Vom Scheitel A aus schneide man auf beiden Schenkeln gleiche Stücke $AB = AC$ ab. Aus B und C beschreibe man mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, ziehe von deren Durchschnittspunkt D nach A; so ist der Winkel A halbiert, $\angle BAD = \angle CAD$. Der Beweis ist ganz wie in § 46, indem man die Linien BD und CD gezogen denkt.

Durch fortgesetztes Halbieren kann man also auch einen Winkel in 4, 8, 16, 32 . . . gleiche Teile teilen.*)

Zusatz. Auf dieselbe Weise kann man mittelst der Meſskette (Schnur) einen Winkel auf dem Felde halbieren.

49.



Aufgabe. Von einem auſserhalb einer Linie *GH* gegebenen Punkt A eine Senkrechte auf dieselbe zu fällen.

Auflösung. Mit einem Radius, der über die Linie *GH* hinausreicht, beschreibe man aus *A* einen Bogen, welcher die (nötigenfalls verlängerte) Linie *GH* in zwei Punkten, *B* und *C*, schneidet. Aus diesen, von *A* gleich weit entfernten Punkten *B* und *C* beschreibe man dann mit einerlei Radius zwei sich schneidende Bögen, und verbinde deren Durchschnittspunkt *D* mit *A*, so ist *AE* auf *GH* senkrecht.

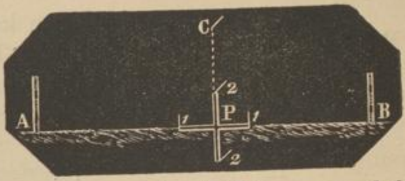
Beweis. Denkt man sich die Linien $AB = AC$ und $DB = DC$ gezogen, so ist der Beweis wie in § 46.

Zusatz 1. Um auf dem Felde von einem Punkt *A* auf eine nicht zu weit davon entfernte Linie *GH* ein Perpendikel zu fällen, befestige man das eine Ende einer Schnur (Kette) in *A*, ziehe sie straff an, so daſs das andere Ende links und rechts an die Linie *GA* reicht, und darin zwei von *A* gleich weit entfernte Punkte *B* und *C* bezeichnen kann, halbiere darauf die Linie *BC* in *E*, so liegt *E* in der verlangten Senkrechten (§ 44).

Zusatz 2. Zur Konstruierung der Perpendikel auf dem Felde bedient man sich bequemer eines sogenannten Winkelkreuzes, bestehend aus zwei auf einen Stab (Stativ) befestigten gegen einander senkrechten Linealen,**) an deren Enden, um

*) Die Aufgabe, einen beliebigen Winkel in 3 gleiche Teile zu teilen, ist zwar nur mit Hilfe der Parabel möglich, dennoch nähert sich die einfache und vollkommen genaue Lösung mittelst Lineals und Zirkels von Rich. Schurig einer mathematischen in hohem Grade.

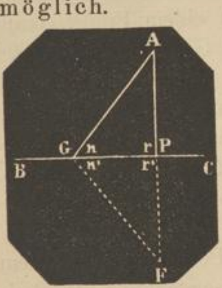
**) In der Regel besteht ein solches Winkelkreuz, das man sich, so wie oben angegeben, leicht selbst verfertigen kann, aus einem runden Körper mit zwei auf einander senkrechten Durchsichten (Diopteren).



scharfe Zielpunkte zu bekommen, gerade aufstehende Stifte (Nadeln) eingesteckt sein können. — Steckt man das Stativ dieses Kreuzes bei P in die Erde und richtet es durch Visieren so, daſs die Nadeln 1 und 1 mit dem in B oder A stehenden Meſsstab in einerlei Richtung sind, und läſst nun in der Richtung, welche die Nadeln 2 und 2 angeben, einen Stab in C stecken, so ist die durch die beiden Punkte P und C bestimmte Linie auf AB perpendikulär. Um von C ein Perpendikel auf die Linie AB zu fällen, trage man das Winkelkreuz so weit in der Linie AB fort, bis der bezeichnete Punkt C mit 2, 2, aber zugleich auch 1, 1 mit AB in einerlei Richtung ist, dann ist der so gefundene Punkt P der gesuchte.

50.

Lehrsatz. Von einem Punkte A auſserhalb einer Linie BC ist nur ein Perpendikel auf diese Linie möglich.



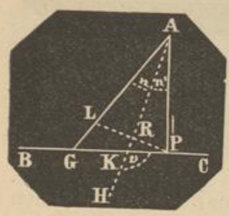
Beweis. Sei AP auf BC perpendikulär. Um nun zu zeigen, daſs jede andere von A an BC gehende Linie, wie AG, schräg gegen BC sein muſs, denke man sich AP um sich selbst nach F verlängert, so daſs $FP = AP$ wird, und verbinde F mit G, so sind die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APG und FPG einander kongruent, weil sie zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich haben, nämlich: Seite PG beiden gemein, FP gleich AP gemacht und nach Voraussetzung ist der eingeschlossene Winkel r, mithin auch sein Nebenwinkel r' ein rechter; daher (§ 34) $\triangle\ APG \cong \triangle\ FPG$ und hieraus $\angle n = \angle n'$. Wäre nun n ein rechter Winkel, so wäre es auch n' und die beiden Linien AG, GF bildeten eine einzige gerade Linie; das ist nun aber nicht möglich, weil durch zwei Punkte, A und F, nur eine einzige gerade Linie AF möglich ist, folglich ist AG schräge gegen BC.

Zusatz 1. Da man sich in jedem Punkt der Linie BC, also auch im Punkte G, ein Perpendikel auf BC errichtet denken kann und dieses, aus eben angeführten Gründen, links von GA fallen mufs, so ist Winkel n notwendig spitz.

Zusatz 2. Wenn ein Dreieck einen rechten oder einen stumpfen Winkel hat, so mufs jeder der beiden andern notwendig spitz sein.

Zusatz 3. Unter Entfernung eines Punktes A von einer Linie IC versteht man allemal das von A an die (nötigenfalls verlängerte) Linie BC gehende Perpendikel.

51.



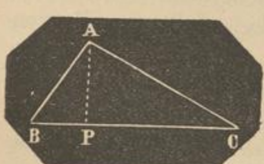
Lehrsatz. Das Perpendikel von einem Punkt A an eine Linie BC ist kürzer, als jede Schräge.

Beweis. Sei AP senkrecht auf BC und AG eine Schräge, so ist zu zeigen, dafs AP kürzer ist, als AG. In Zeichen

$$AP < AG.$$

Man denke sich den Winkel GAP durch die Linie AH halbiert, so dafs also $\angle n = \angle n'$. Von dem Scheitel des rechten Winkels APG denke man sich noch ein Perpendikel PR auf AH gefällt und bis L verlängert. Dafs der Fufspunkt R dieses letztern Perpendikels notwendig zwischen A und K fallen mufs, folgt aus dem vorhergehenden Satz, weil Winkel v stumpf ist. Die beiden bei R rechtwinkligen Dreiecke APR und ALR sind nach § 37 kongruent, und hieraus folgt: $AL = AP$, mithin ist die Schräge AG um ein Stück LG gröfser als AP.

52.



1. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe zweier Seiten grösser, als die dritte.

Beweis. Sei BC die gröfste Seite und darauf von der gegenüber liegenden Spitze das Perpendikel AP gefällt.

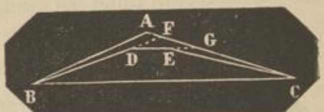
Nach dem vorhergehenden Satze ist nun die gegen AP schräge Linie CA gröfser, als die senkrechte CP. Aus demselben Grunde ist BA gröfser als BP, folglich:

AB + AC > BP + PC oder AB + AC > BC.

2. Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Differenz zweier Seiten kleiner als die dritte.

Beweis. Aus der vorstehenden Ungleichung BC < AB + AC folgt unmittelbar BC — AB < AC.

Zusatz. Wenn in einem beliebigen Vieleck ein anderes Vieleck mit ausspringenden Ecken liegt, so ist der Umfang des äussern Vielecks stets gröſser, als der des innern.



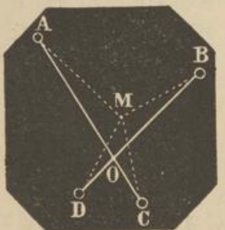
Es sei z. B. das äussere Vieleck ein Dreieck *ABC*, das innere ein Viereck *BDEC*. Verlängert man die Seiten des innern Vielecks nach *F* und *G*, so ist, wie eben bewiesen:

AB + AF > BD + DF
DF + FG > DE + EG
EG + GC > EC.

Addiert man diese Ungleichungen und läſst auf beiden Seiten Gleiches weg, so bleibt:

AB + AF + FG + GC > BD + DE + EC
d. i. AB + AC > BD + DE + EC.

53.



Aufgabe. Es sind vier Punkte, *A B, C, D*, gegeben, man soll die Lage eines fünften Punktes, *O*, so bestimmen, daſs die Summe der von ihm nach *A, B, C, D* gehenden Linien ein Kleinstes (Minimum) werde. (Sollten z. B. von einem Punkte *O* vier Röhren nach vier andern Punkten gelegt werden, so würde die Praxis die Lage des Punktes *O* so zu bestimmen suchen, daſs die Summe der vier Wege und deshalb sowohl die Kosten der ersten Anlage, als auch die der spätern Unterhaltung möglichst klein wird.)

Auflösung. Man ziehe die beiden sich kreuzenden Linien *AC* und *BD*, so ist ihr Durchschnittspunkt *O* der gesuchte.

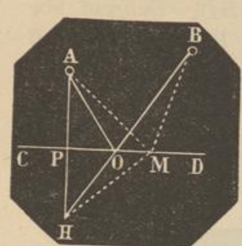
Beweis. Man kann leicht zeigen, daſs die Summe der von jedem andern Punkt, z. B. von M nach A, B, C, D führenden vier Wege gröſser ist, als die vier von O ausgehenden, denn da (nach § 52):

$$AM + MC > AO + OC$$
$$\text{und } BM + MD > BO + OD$$

so ist auch:

$$AM + MC + BM + MD > AO + OC + BO + OD.$$

54.



Aufgabe. In einer gegebenen Linie CD einen Punkt so zu bestimmen, daſs die Summe seiner Abstände von zwei beliebig gegebenen Punkten, A und B, ein Kleinstes werde. (Es sei z. B. CD eine Gas- oder Wasserröhre, aus welcher zwei nach A und B leitende Röhren ausmünden sollen.)

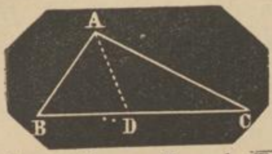
Auflösung. Man fälle von dem einen Punkte A ein Perpendikel AP auf CD und verlängere es um sich selbst bis H, so daſs $AP = PH$; ziehe nun HB, so ist der Durchschnittspunkt O der gesuchte.

Beweis. Um zu zeigen, daſs die Summe der von jedem andern Punkt, z. B. von M nach A und B führenden beiden Wege AM und BM gröſser ist, als die Summe der von O ausgehenden AO und BO, verbinde man noch M mit H. — Zuerst sind nun die beiden bei P rechtwinkligen Dreiecke APO und HPO kongruent, wegen zwei beziehlich gleicher Seiten und des eingeschlossenen rechten Winkels; denn Seite PO ist beiden gemein und, vermöge Konstruktion, das Perpendikel AP gleich dem Perpendikel HP; hieraus (§ 34, Anmerkung) $HO = AO$.

Aus demselben Grunde ist auch $\triangle APM \cong \triangle HPM$, folglich auch $HM = AM$. Die Summe der beiden erstern Wege OA und OB ist also durch die gerade Linie BH, und die Summe der beiden andern Wege MA und MB durch die gebrochene Linie BMH dargestellt, da nun (§ 52) $HM + MB > BH$, so ist auch:

$$MA + MB > OA + OB.$$

55.

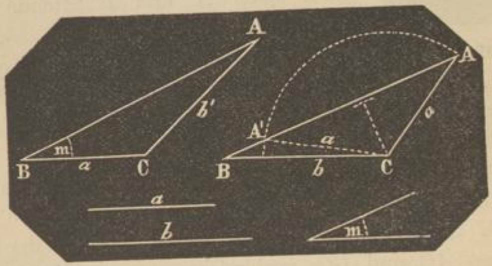


*) **Lehrsatz.** In jedem Dreieck liegt dem gröſsern Winkel auch die gröſsere Seite gegenüber, und umgekehrt.

Beweis. Es sei $\angle BAC$ gröſser als $\angle B$, so soll auch $\overline{BC} > \overline{AC}$ sein.

Denkt man sich von dem gröſsern Winkel BAC einen Winkel $BAD = \angle B$ abgeschnitten, so ist das Dreieck DAB, wegen der beiden gleichen Winkel an der Grundlinie AB gleichschenklig (§ 40), daher $AD = BD$. Da nun aber (§ 52) $AD + DC > AC$, so ist auch $BD + DC > AC$ oder $BC > AC$. Der umgekehrte Satz: daſs der gröſseren Seite auch der gröſsere Winkel gegenüber liegt, ist unmittelbar in vorstehendem enthalten.

56.



*) **Aufgabe.** Es sind zwei Seiten, a und b, und ein Winkel m gegeben.

Man soll 1) ein Dreieck konstruieren, welches die drei Stücke so enthält, daſs der Winkel m der gröſsern Seite b gegenüber liegt, und 2) ein anderes Dreieck zeichnen, in welchem der Winkel m der kleinern Seite a gegenüber liegt.

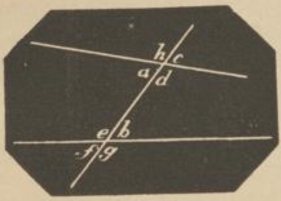
Auflösung 1. Mache (Fig. 1) BC = der kleinern Seite a, trage hieran in B den Winkel m, beschreibe aus C mit der gröſsern Seite einen Bogen, der den andern Schenkel des Winkels m in A schneidet, so ist ABC das durch die gestellte Bedingung (der Winkel m soll der gröſsern Seite gegenüber liegen) völlig bestimmte und verlangte Dreieck.

Auflösung 2. (Fig. 2.) Man nehme jetzt BC = der gröfsern Seite b, trage wieder in B den Winkel m an und beschreibe aus C mit der kleinern Seite a einen Bogen, so mufs dieser jetzt (weil $a < b$) den andern Schenkel des Winkels m zweimal in A und A′ schneiden. Diese letztere Aufgabe führt also auf zwei verschiedene Dreiecke, ABC und A′BC, welche beide die gegebenen Stücke in geforderter Ordnung enthalten. (Vergl. § 43.) Wäre die kleinere Seite a kürzer als das von C an $\overline{BA}$ gehende Perpendikel, so gäbe es gar kein Dreieck. Wäre sie gleich diesem Perpendikel, so wäre das Dreieck wiederum bestimmt.

Fünftes Buch.

Von den Parallellinien.

57.



Erklärung. Wenn zwei Linien von einer dritten geschnitten werden, so entstehen acht Winkel. Je ein Winkel des einen Durchschnittspunktes mit je einem Winkel des andern Durchschnittspunktes geben folgende Winkelpaare:

I. Auf einerlei Seite der Schneidenden.
   1) Innerhalb der Parallelen: Innere Winkel (*a* und *e*, *b* und *d*).
   2) Aufserhalb der Parallelen: Äufsere Winkel (*f* und *h*, *c* und *g*).
   3) Auf einerlei Seite der Parallelen (beide unterhalb oder beide oberhalb): Korrespondierende oder gleichliegende (oder Gegen-) Winkel (*a* und *f*, *d* und *g* u. s. w.).

II. Auf verschiedenen Seiten der Schneidenden:

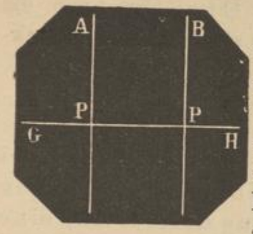
Wechselwinkel,

und zwar
   1) Innere Wechselwinkel (*a* und *b*, *d* und *e*).
   2) Äufsere Wechselwinkel (*h* und *g*, *c* und *f*).
   3) Korrespondierende (oder Gegen-) Wechselwinkel (*a* und *g*, *c* und *e*).

58.

Erklärung. Zwei gerade Linien, welche in einerlei Ebene liegen und nach keiner Seite hin zusammentreffen, wie weit man sie auch verlängert denken mag, heifsen parallel (gleichlaufend).

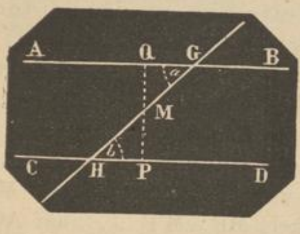
59.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien auf einer dritten senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Seien AP und BP auf GH senkrecht. Weil nun nach § 50 von einem und demselben Punkt nicht zwei Perpendikel auf einer Linie möglich sind, so können auch nicht die Perpendikel AP und BP, weder oberhalb noch unterhalb der Linie GH, in einem Punkt zusammen treffen. Es ist also (§ 58) AP ‖ BP. (Das Zeichen ‖ heifst parallel.)

60.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien gegen eine dritte eine solche Lage haben, dafs die innern Wechselwinkel gleich sind, so sind die Linien parallel.

In Zeichen:

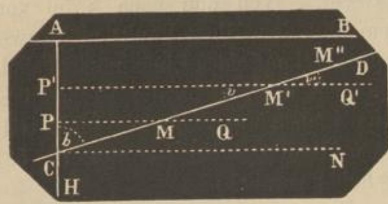
Wenn:	so ist:
$\angle a = \angle b$	AB ‖ CD.

Beweis. Man denke die Linie GH in M halbiert und von M auf CD das Perpendikel MP gefällt, so mufs dieses, rückwärts nach Q verlängert, notwendig auch auf AB senkrecht stehen, denn die beiden Dreiecke MHP und MGQ sind kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben. Es ist nämlich: $\overline{MH} = \overline{MG}$ und $\angle a = \angle b$, nach Voraussetzung, dann $\angle$ HMP $= \angle$ GMQ (§ 31), mithin auch $\triangle$ MHP $\cong \triangle$ MGQ (§ 37) und hieraus (§ 34, Anmerkung) $\angle Q = \angle P$. Da nun, nach Konstruktion, P ein rechter Winkel ist, so ist auch Q ein rechter. Die beiden Linien AB, CD stehen also auf PQ senkrecht und sind folglich parallel. (§ 59.)

Zusatz 1. Wenn die innern Wechselwinkel a, b gleich sind, so sind es offenbar auch die korrespondierenden (weil $a =$ dem Scheitelwinkel von b), und die innern betragen dann zusammen zwei Rechte (§ 57). Statt also zu sagen: zwei Linien sind parallel, wenn die innern Wechselwinkel gleich sind, kann man auch sagen: wenn die korrespondierenden Winkel gleich sind, oder die innern zwei Rechte betragen.

Zusatz 2. Ist AB ∥ CD und ∠ AQP ein rechter Winkel, so ist auch ∠ DPQ ein rechter Winkel. Oder: Eine Linie, die senkrecht auf einer von zwei Parallelen steht, steht auch senkrecht auf der andern.

61.



Lehrsatz. Wenn zwei Linien, AB, CD, gegen eine dritte, AH, eine solche Lage haben, daſs die innern Wechselwinkel nicht gleich sind, so müssen die Linien, hinreichend verlängert, einmal zusammen treffen und zwar nach der Seite hin, wo die beiden innern Winkel zusammen kleiner als 2 R sind.

Erläuterung. Der einfachern Zeichnung wegen, nehmen wir an, daſs die Schneidende AH auf AB in A senkrecht steht, oder durch Drehung um den Punkt C in diese Lage gebracht worden, und daſs also $\angle\, b < 90^{\circ}$.

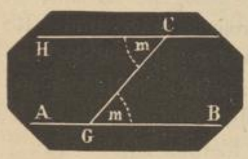
Denkt man sich nun von verschiedenen Punkten, M, M′ . . . der Linie CD, Perpendikel, MP, M′P′ . . . auf AC gefällt, so ist klar, daſs die Fuſspunkte P, P′ . . . dieser Perpendikel immer näher an A rücken, je weiter man die Punkte M, M′ . . . von C entfernt nimmt, und daſs man von keinem der gefällten Perpendikel, z. B. von M′P′ behaupten kann, es sei das letzte, so daſs über dasselbe hinaus keins mehr möglich sei; denn weil die Richtung der Linie CD unbegrenzt ist, so kann man, wo auch ein letzter Punkt, M′, angenommen werden möge, die Linie CM′ immer noch um ein beliebiges Stück, M′M″, verlängert und von diesem Punkt M″ ein neues Perpendikel, M″P″, auf AC gefällt denken. Da nun nach der Natur der geraden Linien kein Teil dieses neuen Perpendikels M″P″ mit einem Teil der Linie CD zusammen fallen kann (§ 8), mithin zwei Scheitelwinkel, v, v', entstehen müssen, so liegt der Punkt M″ auſser der Linie P′Q′ und zwar oberhalb, daher auch das von M″ auf AC gefällte Perpendikel M″P″ oberhalb P′Q′.

Um nun klar einzusehen, daſs die Linien AB und CD sich endlich einmal schneiden müssen, stelle man sich vor:

die Senkrechte QP gleite rechtwinklig an AH hinauf, so muſs sie (hinreichend verlängert) die Linie CD (ebenfalls hinreichend verlängert, von der sie also auch nicht an einem vermeintlichen letzten Punkt abgleiten kann) immer und selbst noch über AB hinaus schneiden, also auch in der Lage von AB.

Zusatz. Sind zwei Linien parallel, so sind notwendig auch alle innern und äuſsern Wechselwinkel oder korrespondierenden Winkel gleich, welche sie mit irgend einer sie schneidenden Linie bilden.

62.

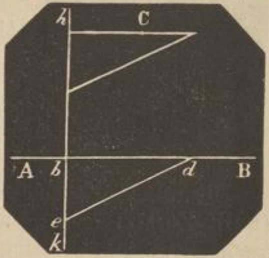


Aufgabe. Durch einen gegebenen Punkt, C, mit einer gegebenen Linie, AB, eine Parallele zu ziehen.

Auflösung. Man ziehe von C nach einem beliebigen Punkt, G, in AB die Linie CG und trage den bei G erhaltenen Winkel *m* auf der andern Seite bei C an, so ist CH ∥ AB. (§ 60.)

Anmerkung. Eine Konstruktion ist eine mathematische (geometrische), wenn sie durch kein anderes Instrument als Lineal und Zirkel ausgeführt ist und ohne alle Versuche notwendig zum Ziele führt. Die nachstehende ist daher keine mathematische, sondern eine mechanische (empirische).

Zusatz 1. Einfacher zieht man Parallelen mit Hilfe eines Lineals und eines Dreiecks. Man legt nämlich die eine Seite *bd* des Dreiecks an die Linie AB, und an die andere Seite *be* des Dreiecks ein Lineal, *hk*, schiebt dann das Dreieck am festgehaltenen Lineal bis an den Punkt C und zieht durch C eine Linie, welche, wegen Gleichheit der korrespondierenden Winkel, mit AB parallel ist.

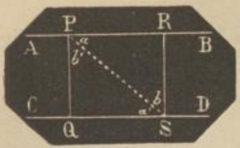


Zusatz 2. Auf dem Felde zieht man durch C eine Parallele mit AB, indem man erst mit Hilfe des Winkelkreuzes von C ein Perpendikel auf AB und dann auf diesem Perpendikel in C wieder ein Perpendikel errichtet (§ 49, Zusatz 2), welches mit AB parallel ist.

63.

Lehrsatz. Zwei Parallellinien sind überall gleich weit von einander entfernt.

Beweis. Unter Abstand zweier Parallellinien versteht man die zwischen beiden gezogene Senkrechte.



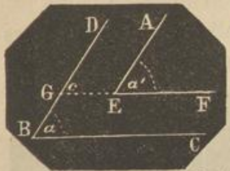
Wir haben also zu beweisen, dafs es einerlei ist, an welcher Stelle man sie zieht.

Sei demnach AB ∥ CD und sowohl PQ als RS auf CD, also auch auf AB senkrecht (§ 61, Zusatz), so ist zu zeigen, dafs PQ = RS.

Man denke noch die Diagonale PS gezogen, so sind die beiden bei Q und R rechtwinkligen Dreiecke PQS und PRS kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich: Seite PS beiden gemein, $\angle a = \angle a'$ (§ 61, Zusatz) also auch $\angle b = \angle b'$. Daher (§ 37) $\triangle PQS \cong \triangle PRS$ und hieraus PQ = RS.

Zusatz. Auch dieser Lehrsatz dient zum Ziehen paralleler Linien. Errichtet man auf dem Papier oder auf dem Felde auf CD zwei gleich lange Perpendikel, PQ, RS. so ist die durch die beiden Endpunkte P und R gehende Linie AB mit CD parallel.

64.



Lehrsatz. Sind die Schenkel zweier Winkel nach einerlei Seite hin beziehlich parallel, so sind die Winkel gleich.

In Zeichen:

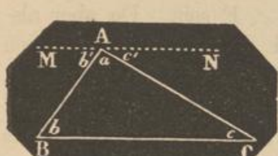
Sei:	so ist
DB ∥ AE	
BC ∥ EF	$\angle a = \angle a'$.

Beweis. Man denke sich EF nach G verlängert, so ist (§ 61, Zusatz) $\angle a = \angle c$ und $\angle a' = \angle c$, folglich auch $\angle a = \angle a'$.

Sechstes Buch.

Summe der innern und äufsern Winkel einer geradlinigen Figur.

65.



Lehrsatz. In jedem Dreieck ist die Summe aller drei Winkel gleich zwei Rechten.

$$a + b + c = 2\mathrm{R} = 180^{0}.$$

Beweis. Man denke sich durch einen Winkelpunkt, A, eine Linie, MN, parallel mit der gegenüber liegenden Seite BC gelegt, so ist (§ 61, Zusatz) $c' = c$ und $b' = b$. Da nun $b' + a + c' = 2\mathrm{R}$ (§ 29), so ist auch $a + b + c = 2$ R.

Zusatz 1. Ein Dreieck kann also nur einen rechten oder nur einen stumpfen Winkel enthalten, die beiden andern Winkel müssen alsdann spitze sein. Der rechte oder stumpfe Winkel ist folglich auch immer der gröfste Winkel im Dreieck. Mittelst dieser Bemerkung läfst sich nun auch der Lehrsatz in § 51 sehr einfach beweisen; denn da $\angle P > \angle G$ (s. Fig. § 51), so mufs auch $AG > AP$ sein (§ 55).

Zusatz 2. Durch zwei Winkel eines Dreiecks ist der dritte bestimmt. Wäre z. B. $\angle a = 110^{0}$, $\angle b = 40^{0}$, so wäre $c = 180^{0} - (110^{0} + 40^{0}) = 180^{0} - 150^{0} = 30^{0}$.

Zusatz 3. In einem gleichseitigen, also auch gleichwinkligen Dreieck ist jeder Winkel $\frac{2}{3}$ R $= 60^{0}$. — In einem rechtwinkligen gleichschenkligen Dreieck ist jeder der beiden spitzen Winkel $= \frac{1}{2}$ R $= 45^{0}$.

Zusatz 4. Wenn zwei Dreiecke zwei Winkel gleich haben, so ist auch der dritte Winkel des einen dem dritten Winkel des andern Dreiecks gleich. [Dafs zwei verschiedene Dreiecke dennoch dieselben Winkel enthalten können, leuchtet ein, wenn man innerhalb eines beliebigen Dreiecks mit den Seiten desselben Parallelen zieht; man erhält ein kleineres Dreieck, welches aber dieselben Winkel hat, wie das grofse. (§ 64.)]

Zusatz 5. Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite, einen anliegenden und einen gegenüberliegenden Winkel gleich haben. (2. Fall des 2. Kongruenzsatzes. S. § 37.)

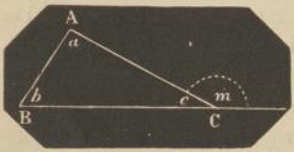
In Zeichen (Fig. zu § 37):

Es sei:	so ist:	daher:
$\overline{BC} = \overline{EF}$	$\angle C = \angle F$	$\triangle ABC \cong \triangle DEF$
$\angle B = \angle E$	$\overline{AC} = \overline{DF}$	
$\angle A = \angle D$	$\overline{AB} = \overline{DE}$.	

Beweis. Da $\angle B = \angle E$, $\angle A = \angle D$, so mufs nach vorstehendem Zus. 4 auch $\angle C = \angle F$ sein. Da aber alsdann beide Dreiecke eine Seite und die beiden anliegenden Winkel gleich haben ($\overline{BC} = \overline{EF}$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$), so müssen sie nach § 37 I kongruent sein.

Zusatz 6. Stehen zwei Linien auf den Schenkeln eines Winkels senkrecht, so schneiden sie sich unter demselben Winkel. (Vergl. § 64.)

66.



Lehrsatz. Der Aufsenwinkel am Dreieck ist gleich der Summe der beiden innern gegenüber liegenden.

In Zeichen:

$$m = a + b.$$

Beweis. Unter Aufsenwinkel, m, einer Figur ist derjenige gemeint, den die Verlängerung einer Seite, BC, mit der daran stofsenden AC bildet. Da nun nach dem vorhergehenden Lehrsatz a und b mit c vereint zwei Rechte geben, und auch die beiden Nebenwinkel m und c zusammen zwei Rechte betragen, es folglich einerlei ist, ob man $a + b$ oder m zu c addiert, so ist auch $m = a + b$. Wäre z. B. $a = 80^0$, $b = 60^0$, so wäre $m = 140^0$.

67.

Lehrsatz. In jedem Vieleck beträgt die Summe aller innern Winkel so viel mal zwei Rechte, als die Figur Seiten hat, weniger vier Rechte.

Beweis. Man denke sich von einem innerhalb beliebig angenommenen Punkt, o, nach allen Ecken Linien gezogen, so erhält man offenbar genau so viele Dreiecke als die Figur Seiten (Ecken) hat. Da nun die Summe der Winkel in jedem Dreiecke 2 R beträgt (§ 65), so enthalten alle Dreiecke zusammen so viel mal 2 R, als die Figur

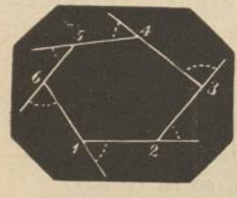
Seiten hat. Werden hievon die vier Rechten abgezogen, welche um den Punkt o liegen (§ 30) und nicht mit zu den Winkeln der Figur gehören, so bleibt die im Lehrsatz angegebene Summe übrig. Es ist hiernach die Summe der innern Winkel in einem

Viereck, = 4 R. Sechseck, = 8 R.
Fünfeck, = 6 R. Siebeneck, = 10 R. u. s. w.

Es ist also nicht möglich, ein Vieleck zu zeichnen, in welchem die Summe der innern Winkel eine ungerade Anzahl rechte Winkel betrüge.

Anmerkung. Dieser Satz ist ganz allgemein, er gilt nämlich auch für Vielecke mit eingehenden Ecken, indem man ein solches in Vielecke mit ausgehenden Ecken zerlegen kann, jedoch muſs man dann überstumpfe oder erhabene Winkel unterscheiden (s. § 22), die dadurch entstehen, daſs sich der eine Schenkel um mehr als zwei Rechte gedreht hat. (Denkt man sich die überstumpfen Winkel um die Endpunkte der Schenkel nach auſsen gedreht, so erhält man für jeden überstumpfen Winkel drei andere, deren Summe ihm gleich ist, und es findet dann derselbe Beweis statt.)

68.



Lehrsatz. Die Summe aller Aussenwinkel eines Vielecks beträgt immer vier rechte Winkel.

Beweis. Jeder Auſsenwinkel macht mit seinem innern Nebenwinkel 2 R. Die Summe aller äuſsern und innern Winkel beträgt also gerade so viel mal 2 R, als die Figur Seiten hat, und da die Summe der innern Winkel um 4 R kleiner ist (§ 67), so muſs die Summe der Auſsenwinkel immer vier Rechte betragen.

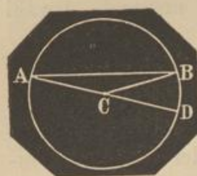
Man kann diesen Satz versinnlichen, indem man durch einen beliebigen Winkelpunkt Parallelen mit allen Seiten des Vielecks gezogen denkt, wodurch dann alle Auſsenwinkel um einen Punkt zu liegen kommen. (§§ 64 und 30.)

Anmerkung. Auch dieser Satz ist ganz allgemein. Denn denkt man sich von einem Eckpunkte aus den Umfang des Vielecks ganz umgangen, so hat man sich um vier rechte Winkel gedreht, indem man bei eingehenden Winkeln die entgegengesetzten Drehungen als subtraktiv betrachtet.

Siebentes Buch.

Vom Kreise.

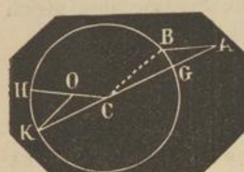
69.



Lehrsatz. Jede Sehne im Kreise ist kürzer, als der Durchmesser. (Siehe § 17.)

Beweis. Sei AB eine beliebige Sehne und AD ein Durchmesser, so ist zu zeigen, daſs $AB < AD$. Denkt man sich noch den Radius CA gezogen, so ist (§ 17, 3) $AC + CB = AD$ und da nun $AC + CB > AB$ (§ 52), so ist auch: $AD > AB$.

70.



Lehrsatz. Die kürzeste Linie, welche von einem Punkt, A, ausserhalb oder von einem Punkt, O, innerhalb eines Kreises an die Peripherie gezogen werden kann, ist diejenige, welche verlängert durch den Mittelpunkt geht.

Beweis. Die Linien AG, OH gehen verlängert durch den Mittelpunkt C. Man denke nun andere Linien, AB, OK, gezogen und B und K mit C verbunden, so ist (§ 52):

$$\begin{array}{lll} & AG + CG < CB + AB & \text{und } OH + CO < CO + OK \\ \text{subtr.} & \underline{CG = CB} & \text{subtr. } \underline{CO = CO} \\ \text{bleibt} & AG < AB & \text{bleibt } OH < OK. \end{array}$$

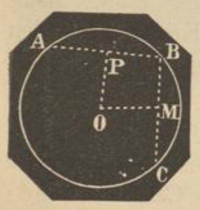
71.

Lehrsatz. Die vom Mittelpunkt auf eine Sehne gefällte Senkrechte halbiert die Sehne und den zugehörigen Bogen.

Beweis. Sei CP senkrecht auf AB und bis G verlängert. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so ist, weil nach Voraussetzung, $\angle r = \angle r' = 90^0$, und $\angle A = \angle B$ (§ 40), notwendig auch $\angle n = \angle m$ (§ 65, Zusatz 4). Daher $\triangle ACP \cong \triangle BCP$ (§ 34 oder 37) und hieraus: $AP = BP$ (§ 34, Anmerkung). Denkt man sich die Figur BCG um CG gedreht und auf ACG gelegt, so müssen, weil die Winkel n und m sich decken, auch die Bögen AG und BG sich decken, weil deren Punkte gleich weit vom Mittelpunkt entfernt sind (§ 17), folglich ist auch arc AG = arc BG.

Zusatz. Weil vom Mittelpunkt C nur ein Perpendikel auf die Sehne AB möglich ist (§ 50) und dieses durch die Mitte geht, so ist auch klar, daſs das auf der Mitte P einer Sehne AB errichtete Perpendikel notwendig durch den Mittelpunkt des Kreises gehen und auch den zugehörigen Bogen AGB halbieren muſs.

72.



Aufgabe. Durch drei ganz beliebig gegebene (jedoch nicht in gerader Linie liegende) Punkte, A, B, C, einen Kreis zu beschreiben.

Auflösung. Man verbinde zwei und zwei Punkte, A, B und B, C, so kann man die Linien AB und BC als Sehnen des zu beschreibenden Kreises betrachten. Errichtet man also auf deren Mitten M und P Perpendikel (§ 47, Zusatz), so muſs jedes derselben durch den gesuchten Mittelpunkt gehen (§ 71, Zusatz) und dieser also der Durchschnittspunkt O sein. Daſs die beiden Perpendikel sich notwendig schneiden müssen, folgt daraus: weil sie auf einer gebrochenen Linie stehen, also nicht parallel sein können.

Anmerkung. Wollte man zuvor die Möglichkeit der Auflösung darthun und zeigen, daſs es immer einen Punkt, O, giebt, der von drei beliebigen, nur nicht in gerader Linie liegenden Punkten, A, B, C, gleich weit entfernt ist, so müſste man die Hilfslinien OA, OB, OC ziehen. Aus den entstehenden, paarweise gleichen, bei M und P rechtwinkligen Dreiecken, nämlich: $\triangle OMC \cong \triangle OMB$ und $\triangle OPB \cong \triangle OPA$ (§ 34) folgt dann $OA = OB = OC$. Der mit OA beschriebene Kreis muſs also auch durch die Punkte B und C gehen. Auch ist leicht einzusehen, daſs durch drei Punkte nur ein einziger Kreis möglich ist.

73.

Aufgabe 1. Den Mittelpunkt eines Kreises oder eines Kreisbogens zu finden.

Aufgabe 2. Einen Kreisbogen zu halbieren.

Aufgabe 3. Um ein Dreieck einen Kreis zu beschreiben, so dafs die Seiten des Dreiecks Sehnen des Kreises werden.

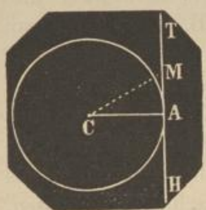
Auflösung 1. Man nehme in dem Bogen drei Punkte beliebig an und verfahre wie im § 72.

Auflösung 2. Die die Sehne halbierende Gerade halbiert zugleich den Bogen (§ 71, Zusatz).

Auflösung 3. Man errichte auf den Mitten zweier Seiten Perpendikel, so ist der Durchschnittspunkt derselben der gesuchte Mittelpunkt.

Man wird hier die merkwürdige Eigenschaft des Dreiecks bemerken, dafs die auf den Mitten seiner Seiten errichteten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punkt, nämlich im Mittelpunkt des umgeschriebenen Kreises schneiden müssen.

74.



Lehrsatz. Eine Linie, TH, welche auf einem Radius, CA, im Endpunkt, A, senkrecht steht, hat nur diesen einen Punkt A mit der Peripherie gemein.

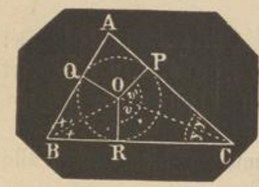
Beweis. Um zu zeigen, dafs jeder andere Punkt, M, in der Linie TH, wie nahe er auch bei A liegen möge, dennoch aufserhalb des Kreises liegt, denke man vom Mittelpunkt nach ihm die Linie CM gezogen, so entsteht ein bei A rechtwinkliges Dreieck CAM, in welchem CM eine Schräge und folglich gröfser, als der Radius CA ist (§ 51). Der Punkt M liegt also weiter, als A vom Mittelpunkt entfernt, mithin aufserhalb des Kreises (§ 17).

75.

Erklärung. Eine gerade Linie, welche nur einen Punkt mit der Peripherie eines Kreises gemein hat, sonst aber ganz aufserhalb desselben liegt, heifst eine Tangente (Berührungslinie)

Um durch einen in der Peripherie gegebenen Punkt, A, eine Tangente an den Kreis zu ziehen, verbinde man A mit dem Mittelpunkt C und errichte auf dieser Linie CA in A eine Senkrechte (§ 74). Es ist leicht einzusehen, dafs durch einen Punkt A nur eine einzige Tangente am Kreise möglich ist, d. h. jede andere durch A gehende Linie mufs notwendig in den Kreis hinein treten und ihn schneiden. Denn dächte man sich auf diese zweite Linie von C eine Senkrechte, CP, gefällt, so müfste diese kürzer sein, als die Schräge CA, mithin der Fufspunkt P der Senkrechten innerhalb des Kreises liegen.

76.



Aufgabe. In ein gegebenes Dreieck, ABC, einen Kreis zu beschreiben, so dafs der Kreis alle drei Seiten berührt, mithin die Seiten des Dreiecks Tangenten des Kreises werden.

Auflösung. Man halbiere zwei beliebige Winkel, B und C (§ 48), fälle vom Durchschnittspunkt O der Halbierungslinien auf eine der drei Seiten eine Senkrechte, OR, so ist OR der Radius und O der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises.

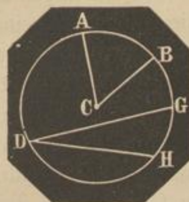
Beweis. Es braucht nur gezeigt zu werden, dafs alle drei von O auf die Seiten des Dreiecks gefällten Perpendikel OR, OP, OQ, gleich sind. Zuvörderst sind nun die beiden bei R und P rechtwinkligen Dreiecke ORC und OPC kongruent, weil sie eine Seite, OC, gemeinschaftlich, ferner einen anliegenden Winkel, $y = y'$, und einen gegenüberliegenden Winkel, R = P, gleich haben, (§ 65, Zus. 5). Mithin ist OR = OP. Eben so beweist man, dafs $\triangle$ ORB $\cong$ $\triangle$ OQB, und hieraus: OR = OQ.

77.

Aufgabe. Es sind drei gleiche Kreise, A, B, C, gegeben, deren Mittelpunkte A, B, C nicht in gerader Linie liegen. Einen vierten Kreis zu beschreiben, der alle drei berührt.

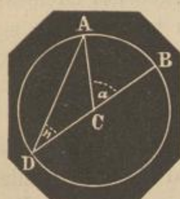
Auflösung. Man verbinde ihre Mittelpunkte, errichte auf die Mitten zweier Verbindungslinien Perpendikel, welche sich in dem gesuchten Mittelpunkt schneiden (§ 70).

78.



Erklärung. Ein Winkel im Kreise, dessen Scheitel im Mittelpunkt liegt, heifst Centriwinkel, zur Unterscheidung von einem solchen, dessen Scheitel in der Peripherie liegt und den man deshalb Peripheriewinkel nennt. — Von jedem dieser Winkel sagt man: er stehe auf dem Bogen, den seine Schenkel zwischen sich fassen. So steht z. B. der Centriwinkel C auf dem Bogen AB und der Peripheriewinkel D auf dem Bogen $\widehat{GH}$.

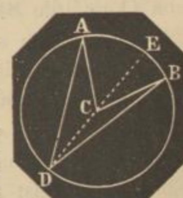
79.



Lehrsatz. Der Centriwinkel ist immer doppelt so grofs, als ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel.*)

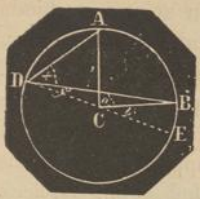
Beweis. Wir müssen hier drei Fälle besonders betrachten.

1. Fall. Wenn der Mittelpunkt auf einem Schenkel des Peripheriewinkels liegt. In diesem Falle ist der Centriwinkel a Aufsenwinkel an dem gleichschenkligen Dreieck CAD, mithin $\angle a = \angle 2n$. (§§ 66, 40 und 17, 3.)



2. Fall. Wenn der Mittelpunkt zwischen die Schenkel des Peripheriewinkels fällt. Man denke jetzt den Durchmesser DE gezogen, so teilt dieser sowohl den Centriwinkel, als den Peripheriewinkel, jeden in zwei Teile und es ist nun, ganz wie im ersten Fall, der links liegende Teil des Centriwinkels doppelt so grofs, als der links liegende Teil des Peripheriewinkels, nämlich: $\angle$ ACE $= 2. \angle$ ADE. Ebenso auf der andern Seite $\angle$ ECB $= 2. \angle$EDB, mithin $\angle$ ACE $+ \angle$ ECB $= 2. \angle$ ADE $+$ $2. \angle$ EDB oder $\angle$ ACB $= 2. \angle$ ADB.

*) Um Raum zu sparen, werden wir von jetzt an, statt die Beweise wie bisher in Worten zu geben, oft nur die zur Führung derselben nötigen Sätze citieren. Auch sollte der Anfänger von nun an versuchen, leichtere Beweise und Auflösungen selber zu finden.



3. Fall. Wenn der Mittelpunkt außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt. Man denke wieder den Durchmesser DE gezogen, so ist am gleichschenkligen Dreieck CAD der Winkel CDA = A (§ 40), der Außenwinkel ACE = 2.CDA oder $a + b = 2x + 2y$, da nun aber (erster Fall) $b = 2y$, so bleibt offenbar, wenn man b gegen $2y$ wegläßt, $a = 2x$.

80.

Lehrsatz. Peripheriewinkel auf einerlei Bogen sind gleich.

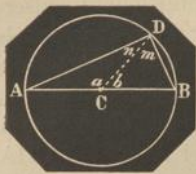
Beweis. Dies folgt unmittelbar aus dem vorhergehenden Lehrsatz, nach welchem jeder auf dem Bogen AB stehende Peripheriewinkel D, D', D''... halb so groß ist, als der auf demselben Bogen stehende Centriwinkel ACB.

Zusatz. Weil ein Centriwinkel, ACB, gerade so viele Winkelgrade hält, als der Bogen AB, worauf er steht, Bogengrade, so ist klar, daß ein auf demselben Bogen stehender Peripheriewinkel, D, D'... gerade halb so viele Grade hält. Man pflegt dies so auszudrücken: Ein Centriwinkel hat den ganzen Bogen, ein Peripheriewinkel den halben Bogen zu seinem Maße, worauf er steht. Kämen z. B. von den 360 gleichen Bögen (Bogengrade), in welche man sich die ganze Peripherie geteilt denkt, 60 solcher Teile auf den Bogen AB, so wäre der Centriwinkel ACB = 60° und der Peripheriewinkel $D = \frac{60^0}{2} = 30^0$.

81.

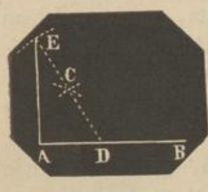
Lehrsatz. Jeder Winkel im Halbkreise ist ein rechter Winkel.

Beweis. Unter Winkel im Halbkreise versteht man einen Peripheriewinkel, der auf dem Halbkreise oder Durchmesser steht und hieraus folgt schon, weil nach § 80, Zusatz, der Peripheriewinkel ADB den halben Bogen AD zu seinem Maße hat, daß $\angle ADB = \frac{180^0}{2} = 90^0$. Um dies jedoch noch



auf eine andere Weise zu zeigen, verbinde man D mit dem Mittelpunkt C, so entstehen zwei gleichschenklige Dreiecke, CAD und CDB, daher $\angle A = \angle n$ und $\angle B = \angle m$ (§ 40). Da nun (§ 66) der Aufsenwinkel a am Dreieck ODB doppelt so grofs als m, und der Aufsenwinkel b am Dreieck CAD doppelt so grofs als n, und a und b, als Nebenwinkel, 2 R betragen, so müssen m und n zusammen, d. i. der Winkel im Halbkreise, nämlich ADB, ein Rechter sein.

82.

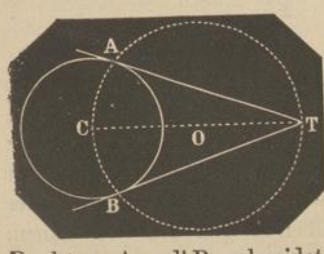


Aufgabe. Auf einer Linie, AB, im Endpunkte A ein Perpendikel zu errichten, ohne die Linie erst zu verlängern.

Auflösung. Man nehme in AB einen Punkt, D, beliebig und beschreibe aus A und D mit einerlei Radius zwei Bögen, die sich in C schneiden. Aus C beschreibe mit demselben Radius einen Bogen, welcher die von D durch C gezogene Linie in E schneidet und ziehe dann EA, welches das verlangte Perpendikel ist.

Beweis. Denkt man sich den aus C beschriebenen Bogen zu einem ganzen Kreise vollendet, so ist, weil DE ein Durchmesser, EAD ein Winkel im Halbkreise, mithin ein rechter Winkel (§ 81).

83.

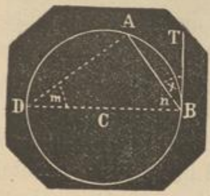


Aufgabe. Von einem aufserhalb eines Kreises, C, gegebenen Punkt, T, eine Tangente an den Kreis zu ziehen.

Auflösung. Ziehe CT und beschreibe über diese, als Durchmesser, einen zweiten Kreis, der den gegebenen in zwei Punkten, A und B, schneidet, ziehe AT und BT, so hat man zwei Tangenten.

Beweis. Denkt man noch die Radien CA, CB gezogen, so sind A und B Winkel im Halbkreise und folglich AT senkrecht auf CA (§§ 81, 74).

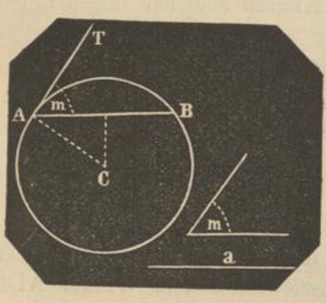
84.



Lehrsatz. Ein Tangentenwinkel, d. i. ein Winkel, den eine Tangente, TB, und eine Sehne, AB, mit einander machen, hat die Hälfte des Bogens AB zu seinem Maſse, den seine Schenkel zwischen sich fassen und ist also gleich einem Peripheriewinkel, der auf demselben Bogen AB steht.

Beweis. Ist B der Berührungspunkt, so muſs der von B gezogene Durchmesser DB auf BT senkrecht stehen (§ 75), also $x + n = 90^0$ sein. Zieht man noch AD, so ist $A = 90^0$ (§ 81), folglich auch $m + n = 90^0$ (§ 65). Da es nun einerlei ist, ob man x oder m zu n addiert, indem man jedesmal 90^0 erhält, so muſs auch $x = m = \frac{\text{arc AB}}{2}$ sein. (§ 80, Zusatz.)

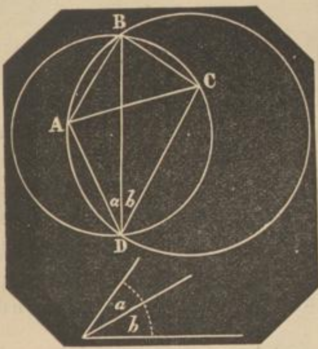
85.



Aufgabe. Über eine als Sehne gegebene Linie, a, einen Kreis zu beschreiben, in welchem alle auf dieser Sehne oder ihrem Bogen stehenden Peripheriewinkel einem gegebenen Winkel, m, gleich sind.

Auflösung. Stecke die gegebene Sehne a in AB ab, trage an das eine Ende derselben den gegebenen Winkel m und betrachte den andern Schenkel AT als Tangente. Errichte nun auf AT in A und auf der Mitte von AB Perpendikel (§ 82, 47, Zusatz und 45), so ist deren Durchschnittspunkt C der gesuchte Mittelpunkt und CA = CB der Radius (§ 71, Zusatz und 75) und alle auf dem Bogen AB stehenden Peripheriewinkel sind dem Winkel m gleich (§ 84).

86.



*) **Aufgabe.** Es sind die Lagen dreier Punkte, A, B, C, oder was dasselbe ist, das Dreieck ABC und zwei Winkel, a und b, gegeben. Es soll die Lage eines vierten Punktes, D, so bestimmt werden, dafs die von ihm nach A und B gehenden Linien den Winkel a und die nach B und C gehenden Linien den Winkel b bilden.

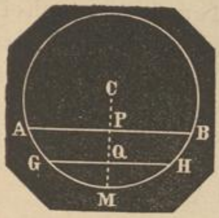
Auflösung. Man beschreibe, wie in vorhergehender Aufgabe, über AB als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf dieser Sehne stehenden Peripheriewinkel dem gegebenen Winkel a gleich sind, so mufs der gesuchte Punkt D notwendig irgendwo in dieser Kreislinie liegen. Beschreibt man also auch über BC als Sehne einen Kreis, in welchem alle auf BC stehenden Peripheriewinkel dem Winkel b gleich sind, so mufs der gesuchte Punkt D auch in diesem Kreise liegen, und mithin (weil er in beiden Kreisen zugleich liegen mufs) in ihrem Durchschnittspunkt D.

Anmerkung 1. Wären zufällig die Winkel A und C des gegebenen Dreiecks den gegebenen Winkeln b und a gleich, so fallen beide Kreise zusammen und die Lage des Punktes D ist dann nicht bestimmt.

Dieses sogenannte Pothenot'sche Problem ist sowohl für die niedere als höhere Geodäsie sehr wichtig.

Anmerkung 2. Beschreibt man über AC als Sehne einen Bogen, in welchem alle Peripheriewinkel dem Winkel ADC $= a + b$ gleich sind, so mufs auch dieser Bogen durch den gesuchten Punkt D gehen. Auch ist klar, dafs die drei gegebenen Punkte, A, B, C, in gerader Linie liegen können, so wie auch, dafs der Punkt D jenseits $\overline{AC}$, innerhalb oder aufserhalb des Dreiecks ABC fallen kann.

87.



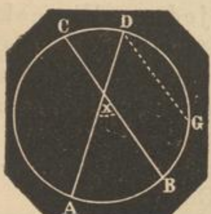
Lehrsatz. Zwei parallele Sehnen fassen gleiche Bögen zwischen sich.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
AB ‖ GH	arc AG = arc BH.

Beweis. Das vom Mittelpunkt auf AB gefällte Perpendikel CP steht auch senkrecht auf GH (§ 61, Zusatz) und halbiert die Sehnen und ihre Bögen (§ 71). Es ist also arc AM = arc BM, und da auch arc GM = arc HM, so ist auch (Gleiches von Gleichem subtrahiert): arc AG = arc BH. Dies folgt auch, wenn man AH zieht, dann sind die Wechselwinkel gleich, und zu gleichen Peripheriewinkeln gehören gleiche Bögen.

88.



Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sehnen gebildet, hat die halbe Summe der beiden Bögen zu seinem Maſse, welche seine*) Schenkel zwischen sich fassen.

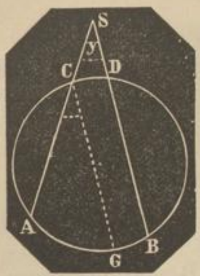
In Zeichen:

$$x = \frac{\text{arc AB} + \text{arc CD}}{2}$$

Beweis. Denkt man DG ‖ CB gezogen, so ist $\angle$ D = $\angle x$ (§ 61, Zusatz). Der Peripheriewinkel D hat nun aber den halben Bogen ABG, d. i. die Hälfte von (arc AB + arc BG), also auch, weil arc CD = arc BG (§ 87), die Hälfte von (arc AB + arc CD) zu seinem Maſse. Dieser Satz ist besonders beim Gebrauch der Winkelmesser wichtig. Kämen z. B. von der in 360 Bogengrade geteilten Peripherie 60^0 auf AB und 40^0 auf CD, so wäre $x = \frac{60^0 + 40^0}{2} = 50^0$.

*) Es sollte heiſsen: seine direkten und entgegengesetzten.

89.



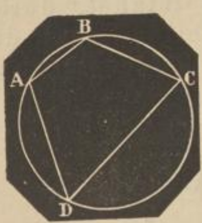
Lehrsatz. Ein Winkel, durch zwei Sekanten (d. i. den Kreis scheidende Linien) gebildet, hat die halbe Differenz der beiden Bögen zu seinem Maſse, welche seine Schenkel zwischen sich fassen.

In Zeichen:

$$y = \frac{\text{arc } AB - \text{arc } CD}{2}$$

Beweis. Denkt man sich $CG \parallel DB$ gezogen, so ist $C = y$, folglich $y = \frac{\text{arc } AG}{2}$; weil aber arc CD = arc GB (§ 87), folglich arc AG = arc AB — arc GB = arc AB — arc CD, so ist auch $y = \frac{\text{arc } AB - \text{arc } CD}{2}$. Kämen z. B. 124 Bogengrade auf arc AB und 40^0 auf arc CD, so wäre $y = \frac{124 - 40}{2} = 42^0$.

90.



Lehrsatz. In jedem Viereck, dessen Ecken in einem Kreise liegen, also in jedem Sehnenviereck, betragen je zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte.

$$\angle A + \angle C = 180^0$$
$$\angle B + \angle D = 180^0$$

Beweis. Der Peripheriewinkel A hat die Hälfte des Bogens BCD, und der gegenüber liegende Winkel C die Hälfte des Bogens DAB, also beide zusammen die Hälfte der ganzen Peripherie zu ihrem Maſse, daher $\angle A + \angle C = \frac{360^0}{2} = 180^0$. Eben so $\angle B + \angle D = 180^0$.

Zusatz. Wenn in einem Viereck zwei gegenüber liegende Winkel zusammen zwei Rechte betragen, so läſst sich um ein solches Viereck immer ein Kreis beschreiben, sonst nicht.

Achtes Buch.

Vom Parallelogramm der Gleichheit und der Berechnung des Flächeninhalts geradliniger Figuren.

91.

Erklärungen. Ein Viereck erhält nach dem Verhältnis und der Lage seiner Seiten folgende besondere Namen. Es heifst:

1) Parallelogramm, wenn je zwei gegenüber liegende Seiten parallel sind.

Rechtwinklige Parallelogramme:

a) Rechteck (Rektangel, Oblongum), wenn nur die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind.

b) Quadrat, wenn alle vier Seiten gleich lang sind. Abgekürzt mit □ oder q.

Schiefwinklige Parallelogramme:

a) Rhomboid, wenn nur die gegenüberliegenden Seiten gleich grofs sind.

b) Rhombus oder Raute, wenn alle 4 Seiten gleich lang sind.

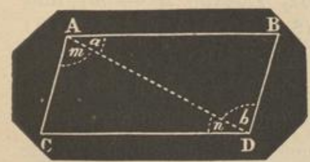
2) Trapez (Paralleltrapez), wenn nur zwei Seiten parallel sind.

3) Trapezoid, oder Viereck schlechtweg, wenn keine Seite einer andern parallel ist.

Anmerkung. Das Viereck in § 90 bezeichnet man mit „Viereck ABCD“ oder kürzer mit „Viereck AC“.

92.

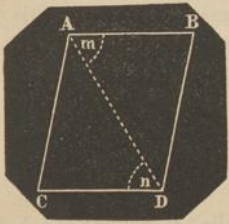
Lehrsatz. In jedem Parallelogramm sind die gegenüber liegenden Seiten und Winkel einander gleich, und eine Diagonale teilt es in zwei kongruente Dreiecke.



Beweis. Weil im Parallelogramm die gegenüber liegenden Seiten parallel sind, so sind erstlich die innern Wechselwinkel gleich, $a = n$, $b = m$, § 61, Zusatz. Die beiden Dreiecke ACD und ABD haben nun eine gemeinschaftliche Seite und beide anliegenden Winkel gleich, daher △ ACD ≌ △ ABD (§ 37) und hieraus folgt AB = CD, AC = BD und ∠ B = ∠ C.

Zusatz. Wenn umgekehrt in einem Viereck jedes Paar gegenüberliegender Seiten gleich sind, so sind sie notwendig auch parallel, und das Viereck ist dann ein Parallelogramm; denn nachdem die Diagonale AD wieder gezogen, folgt nach § 41 die Kongruenz der Dreiecke und daraus die Gleichheit der inneren Wechselwinkel. Diesen Satz kann man zur Konstruierung eines Parallelogramms benutzen, von welchem zwei Seiten, AC, CD, und der eingeschlossene Winkel C gegeben sind.

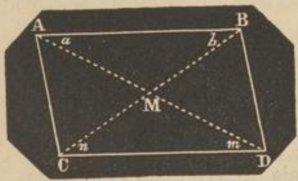
93.



Lehrsatz. Wenn in einem Viereck zwei Seiten parallel und gleich sind, so ist dasselbe ein Parallelogramm.

Beweis. Sei AB gleich und parallel mit CD. Ziehe eine Diagonale, AD, so sind, weil AB ∥ CD, die Wechselwinkel m und n gleich. Da nun auch AB = CD so sind die beiden Dreiecke ACD und ABD kongruent (§ 34) und hieraus folgt $\angle$ CAD = $\angle$ ADB, oder AC ∥ BD. Nun sind beide Paare Gegenseiten parallel, folglich das Viereck ein Parallelogramm.

94.



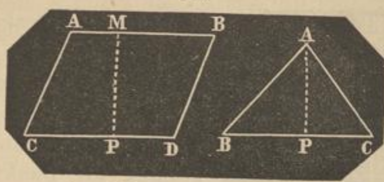
Lehrsatz. Die beiden Diagonalen eines Parallelogramms halbieren sich gegenseitig.

Beweis. Weil AB ∥ CD, so ist (§ 61, Zusatz) $a = m$, und $b = n$, und da auch AB = CD, so ist (§ 37) $\triangle$ MAB $\cong$ $\triangle$ MCD und hieraus folgt: AM = MD und CM = MB.

Aufgabe. Man zeige, dafs die von den Ecken eines beliebigen Dreiecks ABC auf die gegenüber liegenden Seiten gefällten drei Perpendikel sich in einem und demselben Punkte schneiden müssen.

Auflösung. Man ziehe durch die Ecken A, B, C Parallelen mit den gegenüber liegenden Seiten, so bilden diese ein neues Dreieck DEF und der Beweis folgt nun leicht aus: § 61, Zus., § 92 und § 73, Aufg. 3.

95.



Erklärungen 1. Wenn man in einem Parallelogramm eine beliebige Seite, CD, als Grundlinie betrachtet, so heiſst das von einem beliebigen Punkt, M, der gegenüber liegenden parallelen Seite auf die (nötigenfalls verlängerte) Grundlinie gefällte Perpendikel MP (also die Entfernung der beiden parallelen Seiten) die H ö h e des Parallelogramms. Nimmt man daher in einem Rechteck eine Seite zur Grundlinie, so ist die daran stoſsende die Höhe.

In einem Quadrat sind Höhe und Grundlinie gleich.

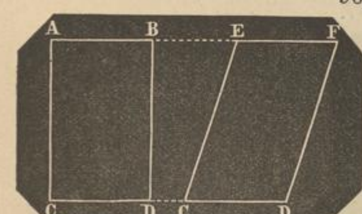
2. Eben so kann man in einem Dreieck eine beliebige Seite, BC, als Grundlinie betrachten, und dann heiſst das von der gegenüber liegenden Spitze auf die Grundlinie gefällte Perpendikel AP die Höhe des Dreiecks. Befindet sich an der Grundlinie ein stumpfer Winkel, so fällt das die Höhe angebende Perpendikel auſserhalb des Dreiecks auf die Verlängerung der Grundlinie.

Nimmt man in einem rechtwinkligen Dreieck eine Kathete zur Grundlinie, so ist die andere Kathete die Höhe.

Die nachstehenden Sätze beziehen sich auf die G l e i c h h e i t geradliniger Figuren (siehe § 17, 2 und § 18) und die daraus entspringenden Sätze.

U m f a n g (§ 32) ist nicht mit Inhalt zu verwechseln.

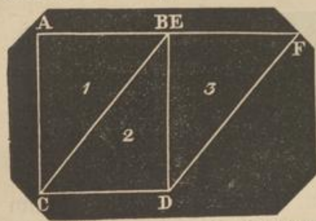
96.



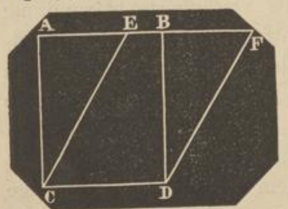
Lehrsatz. P a r a l l e l o g r a m m e v o n g l e i c h e r G r u n d l i n i e u n d H ö h e s i n d i n h a l t s g l e i c h.

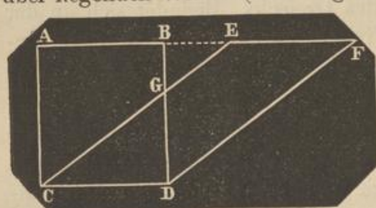
Haben also die beiden Parallelogramme ABDC und EFDC gleiche Grundlinie

(CD = CD) und gleiche Höhe (die Entfernung der Seite AB von CD = der Entfernung der Seite EF von CD), so sind sie inhaltsgleich.

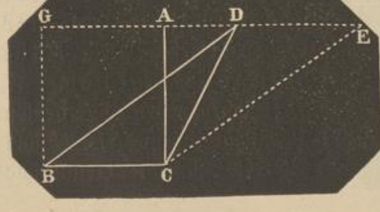


Beweis. Denkt man sich die Grundlinie des 1. Parallelogramm auf die des 2. gelegt, so fällt die Seite EF auf die verlängerte AB und es können alsdann die Punkte B und E zusammenfallen (siehe nebenstehende Figur), oder E fällt zwischen A und B (die folgende Figur), oder endlich E fällt auf die Verlängerung von AB (letzte Figur). In jedem dieser 3 Fälle entsteht ein Trapez ACDF und zwei Dreiecke ACE und BDF. Diese beiden Dreiecke sind nach § 65,5 kongruent, weil sie eine Seite (AC = BD s. § 92), einen anliegenden Winkel (A = B als korrespondierenden Winkel) und einen jener Seite gegenüber liegenden Winkel (E = F gleichfalls als korrespondirenden Winkel) gleich haben. Mithin sind die Dreiecke auch inhaltsgleich. Zieht man daher △ ACE vom Trapez ACDF ab, so mufs man eben so viel erhalten, als wenn man △ BDF vom Trapez ACDF abzieht. Im ersten Falle erhält man aber Parallelogramm CEFD, im zweiten Falle Parallelogramm CABD, die mithin gleich sein müssen.





97.



Lehrsatz. Ein Dreieck ist halb so grofs, als ein Rechteck (oder Parallelogramm) von gleicher Grundlinie und Höhe.

Beweis. Auf der Grundlinie BC des Dreiecks DBC denke man sich das Rechteck GACB von gleicher Höhe errichtet (§ 95, 2). Denkt man sich jetzt das Dreieck DBC zu einem Parallelogramm, DECB, ergänzt, so ist dieses Parallelogramm eben so grofs, als das Rechteck GACB (§ 96), folglich ist auch die Hälfte des Parallelogramms, nämlich das Dreieck DBC gleich dem halben Rechteck GACB (§ 92).

Zusatz. Dreiecke von einerlei Grundlinie und Höhe (oder Dreiecke von gleicher Grundlinie, deren Spitzen in der Parallelen zur Grundlinie liegen) sind inhaltsgleich, weil jedes halb so grofs ist, als das Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

98.

Berechnung des Flächeninhalts. Durch den vorhergehenden Lehrsatz sind wir nun in den Stand gesetzt, die Flächengröfse einer jeden geradlinig begrenzten Figur auszumessen und durch Zahlen bestimmt anzugeben. Da wir nämlich eine jede, in noch so beliebigem Zickzack geradlinig begrenzte Figur durch Diagonalen immer in ein Netz von Dreiecken zerlegen können, und jedes Dreieck halb so grofs ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe, so kommt die so verwickelt scheinende Aufgabe darauf zurück, nur Mittel und Wege zu ersinnen: den Flächeninhalt eines Rechtecks durch Zahlen anzugeben. *)

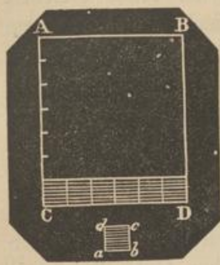
Als die bequemste Form der Flächeneinheit zeigt sich sogleich die quadratförmige.

Quadratförmige Flächeneinheiten giebt es in der Praxis von verschiedener Gröfse und die alle nach der ihnen zum Grunde liegenden Längeneinheit, nur mit dem Beiwort: Quadrat benannt werden. Wäre z. B. (siehe folgende Figur) die Linie $ab = 1$ m, so wäre das darüber stehende Quadrat, d. h. die davon eingeschlossene Fläche $abcd = 1$ qm (d. i. „1 Quadratmeter"). Wäre $ab = 1$ cm, so wäre die Fläche von $abcd = 1$ qcm. Hiernach versteht man nun auch, was eine Quadratmeile, Quadratyard, Quadratfufs etc. bedeutet.

---

*) Die alten Römer unter den Konsuln verstanden noch nicht, den Flächeninhalt eines Dreiecks zu bestimmen.

99.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Rechtecks ist gleich dem Produkt aus Grundlinie und Höhe.

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, die Flächeneinheit $abcd = 1$ qm. Die Längeneinheit $ab =$ 1 m sei sechsmal in der Grundlinie CD und siebenmal in der Höhe AC enthalten, so ist einleuchtend, dafs, wie in der Zeichnung angedeutet, auf der Grundlinie gerade 6 qm neben einander Platz finden, und dafs 7 solche Reihen, von je 6 qm, das ganze Rechteck ausfüllen und folglich dessen Inhalt in Quadratmeter ausgedrückt, 7 mal 6 qm, oder = 42 qm ist, und so in jedem andern Fall. Wäre z. B. CD = $7\frac{1}{2}$ m, AC = 10 m, so wäre der Inhalt des Rechtecks = $7\frac{1}{2} . 10$ oder 75 qm. Die Regel, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, ist also diese: Man mifst mit der, der Flächeneinheit zu Grunde liegenden Längeneinheit erst Grundlinie und Höhe des Rechtecks, multipliziert dann beide (vorläufig als unbenannt zu betrachtenden) Zahlen mit einander und legt dem Produkt die Benennung der Längeneinheit, jedoch mit dem Beiwort „Quadrat“, bei. Wäre z. B. CD = 3 cm, AC = 5 cm, so wäre der Inhalt des Rechtecks = 15 qcm.

Zusatz 1. Eben so findet man den Inhalt eines Parallelogramms, indem man die Grundlinie mit der Höhe multipliziert (§ 95, 1 und § 96).

Zusatz 2. Dividiert man den Inhalt eines Rechtecks durch die Grundlinie oder Höhe, so giebt der Quotient die andere Linie.

100.

Die im vorigen Lehrsatz ausgesprochene Regel, nach welcher man Grundlinie und Höhe mit einander multiplizieren mufs, um den Inhalt eines Rechtecks zu finden, pflegt man kurz in Zeichen anzudeuten, indem man die beiden Linien als Faktoren ansetzt und ihr Produkt (Flächeninhalt) mit F bezeichnet. Für das Rechteck ABCD (§ 99) wäre also dessen Inhalt: F = AC.CD. Gewöhnlich bezeichnet man aber bequemer die Höhe durch h und die Grundlinie (Basis) durch b, nämlich: $F = bh$.

Es versteht sich bei dieser Formel aber von selbst, dafs man die Lineargröfsen b und h mit einer Längeneinheit ausgemessen und als Zahlen denken mufs, weil man keine Linien, als ausgedehnte Gröfsen, mit einander multiplizieren kann.

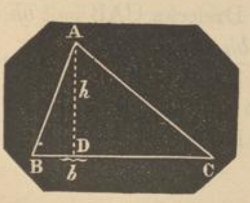
Auch ist klar, dafs beide Faktoren, b und h, einnamig und gleichnamig sein, und nötigenfalls erst auf solche reduziert werden müssen, bevor man sie mit einander multiplizieren kann. In der Regel ist es am bequemsten, mehrnamige Zahlen statt auf die niedere, auf die höhere zu reduzieren. Hierbei wollen wir nur noch bemerken, dafs im Decimalsystem 1 m = 100 cm, 1 cm = 10 mm und folglich 1 Quadratmeter (qm) = 10 000 qcm, 1 qcm = 100 qmm etc.

101.

Aufgabe. Folgende Rechtecke zu berechnen; h bedeutet Höhe, b Grundlinie, F Inhalt, qm Quadratmeter etc.

Gegeben:		Gesucht:
1) $h = 3\frac{2}{3}$ m,	$b = 6\frac{3}{4}$ m;	$F = 24\frac{3}{4}$ qm = 24 qm 7500 qcm;
2) $h = 2$ m,	$b = 87$ cm;	$F = 17400$ qcm = 1 qm 7400 qcm;
3) $h = 104$ m 7 cm,	$b = 90$ m 64 cm;	$F = 9432{,}9048$ qm.
4) $h = 25{,}9$ m,	$b = 37{,}8$ m;	$F = 979{,}02$ qm;
5) $F = 230\frac{7}{8}$ qm,	$h = 13\frac{3}{4}$ m;	$b = 16\frac{87}{110}$ m = 16 m $79\frac{1}{11}$ cm;
6) $F = 4$ qm;	$b = 16$ cm;	$h = 2500$ cm = 25 m.
7) $F = 285$ qm 935 qcm,	$b = 18$ m 90 cm;	$h = 1508{,}431$ cm = 15 m 8,431 cm.
8) $F = 1{,}06$ qm,	$b = 0{,}7$ m;	$h = 1{,}5143$ m = 1 m 51,43 cm.

102.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Dreiecks ist gleich dem halben Produkt aus Grundlinie und Höhe.

In Zeichen:

$$F = \tfrac{1}{2} BC . AD,$$

oder kürzer:

$$F = \tfrac{1}{2} b h.$$

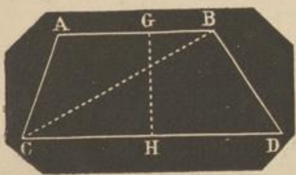
Beweis. Dies folgt aus § 97, wonach ein Dreieck gerade halb so grofs ist, als ein Rechteck von derselben Grundlinie und Höhe.

Um den Inhalt eines Dreiecks zu berechnen, kann man auch erst die Grundlinie oder die Höhe durch 2 dividieren, also die halbe Grundlinie mit der Höhe oder die halbe Höhe mit der Grundlinie multiplizieren.

Umgekehrt findet man die Höhe eines Dreiecks, wenn man den Inhalt durch die halbe Grundlinie dividiert. Beispiele:

Gegeben:		Gesucht:
1) $b = 24$ m 84 cm,	$h = 26$ m 18 cm;	$F = 325,1556$ qm $= 325$ qm 1556 qcm;
2) $F = 77\frac{1}{3}$ qm,	$b = 24$ m 86 cm;	$h = 6,2215$ m $= 6$ m 22,15 cm;
3) $b = 1,2$ m,	$h = 69,3$ cm;	$F = 0,4158$ qm $= 4158$ qcm;
4) $F = 54,3$ qm,	$h = 768$ cm;	$b = 1414,06$ cm $= 14$ m 14,06 cm.

103.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Trapezes ist gleich dem Produkt aus der Höhe und der halben Summe seiner beiden parallelen Seiten.

In Zeichen:

$$F = \frac{AB + CD}{2} . GH,$$

oder kürzer, indem man $CD = a$, $AB = b$, $GH = h$ setzt:

$$F = \frac{a + b}{2} . h.$$

Beweis. Durch eine Diagonale wird das Trapez in zwei Dreiecke geteilt, welche die parallelen Seiten $CD = a$ und $AB = b$ zu Grundlinien und die Höhe des Trapezes $HG = h$, zur Höhe haben (§ 63). Die Flächensumme beider Dreiecke giebt die Fläche des ganzen Trapezes. Nun ist die Fläche des Dreiecks $BCD = \frac{1}{2} ah$ und die des Dreiecks $CAB = \frac{1}{2} bh$, mithin die Summe beider $F = \frac{ah}{2} + \frac{bh}{2} = \frac{a + b}{2} . h$. Wäre z. B. $a = 16$ m 40 cm, $b = 10$ m 75 cm und $h = 9$ m $37\frac{1}{2}$ cm, so wäre $F = \frac{1}{2} . (16\frac{2}{5} + 10\frac{3}{4}) . 9\frac{3}{8} = 127\frac{17}{64}$ qm $= 127$ qm $2656\frac{1}{4}$ qcm.

104.

Um den Flächeninhalt einer jeden andern geradlinigen Figur zu bestimmen, zerlege man sie durch schicklich gezogene Diagonalen in lauter Dreiecke, messe in jedem eine

Grundlinie und die zugehörige Höhe, berechne den Inhalt eines jeden Dreiecks besonders, so giebt die Summe aller den Inhalt der ganzen Figur. Um nicht mehr Linien zu messen, als nötig ist, kann man darauf achten, daſs immer zwei Dreiecke eine gemeinschaftliche Grundlinie haben. Oftmals läſst sich auch eine Figur oder Teile derselben in Parallelogramme, Rechtecke oder Trapeze zerlegen.

Da im Quadrat: Grundlinie und Höhe gleich sind, so findet man den Inhalt eines Quadrats, indem man eine Seite desselben mit sich selbst multipliziert, und umgekehrt findet man die Seite eines Quadrats, wenn man aus dem Inhalt desselben die Quadratwurzel zieht. Wäre z. B. in dem Quadrat ABGF (siehe folgende Figur) die Seite AB = 12 m, so wäre der Inhalt $F = \overline{AB}.\overline{AB}$ = 144 qm. Wäre umgekehrt der Inhalt = 144 qm gegeben, so wäre eine Seite desselben = $\sqrt{144}$ = 12 m.

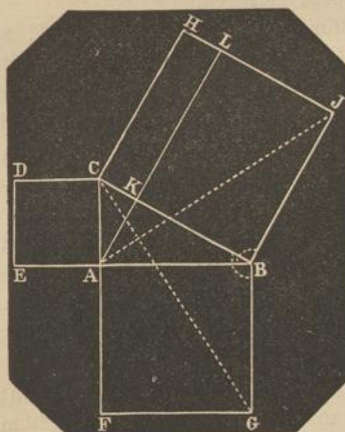
Beispiele. Man suche die Seiten der Quadrate, deren Inhalt 106 929 qm; 604 qm 140 qcm; 2 qm; $1\frac{1}{6}$ qm; 0,6 qm; 2,8 qm; 0,908 qm.

Antwort. Die Seiten sind 327 m; 24,5767 m; 1,414 m; 1,0801 m; 0,7746 m; 1,67332 m = 1 m 67,332 cm; 0,95289 m = 95,289 cm.

Neuntes Buch.

Der Pythagoräische Lehrsatz.

105.



Lehrsatz. In jedem rechtwinkligen Dreieck ist das Quadrat der Hypotenuse so grofs, als die Quadrate der beiden Katheten zusammen genommen.

In Zeichen:*)

$\square BH = \square AG + \square AD$, oder

$\overline{BC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2$.

Beweis. Sei CAB ein bei A rechtwinkliges Dreieck und über seinen drei Seiten Quadrate errichtet, so soll die Fläche des auf der Hypotenuse BC stehenden Quadrats BCHJ allein so grofs sein, als die Flächen der beiden auf den Katheten stehenden Quadrate ABGF und ACDE zusammen genommen.

Aus dem Scheitel A des rechten Winkels sei AL ∥ CH gezogen, so ist dadurch das Quadrat der Hypotenuse in zwei Rechtecke CHLK und LKBJ geteilt, und es läfst sich nun zeigen, dafs jedes der beiden Rechtecke seinem benachbarten Quadrate an Inhalt gleich ist. Zieht man nämlich noch die Hülfslinien AJ und CG, so haben die beiden Dreiecke ABJ und CBG zwei Seiten und den eingeschlossenen Winkel gleich, nämlich: $JB = CB$, $AB = GB$ und $\angle ABJ = \angle CBG = 90^0 + \angle ABC$, daher: $\triangle ABJ \cong \triangle CBG$ (§ 34). (Man denke sich das Dreieck CBG um den Punkt B gedreht, so fällt der Punkt C auf J und G auf A). Das Dreieck ABJ hat nun mit dem Rechteck LKBJ einerlei Grundlinie, BJ, und gleiche Höhe, KB, eben so haben das Dreieck CBG und das Quadrat ABGF einerlei

*) $\overline{BC}^2$ bedeutet so viel als $\overline{BC} \cdot \overline{BC}$ oder das über die Linie $\overline{BC}$ konstruierte Quadrat.

Grundlinie, BG, und gleiche Höhe, AB, daher: (§ 97) △ ABJ = $\frac{1}{2}$ Rechteck KBJL, und △ CBG = $\frac{1}{2}$ Quadrat ABGF. Da nun die beiden Dreiecke ABJ und CBG gleich grofs sind, so ist auch: $\frac{1}{2}$ Rechteck KBJL = $\frac{1}{2}$ Quadrat ABGF, also auch das ganze Rechteck KBJL so grofs, als das Quadrat ABGF. Eben so zeigt man an der andern Seite,*) indem man die Hilfslinien AH und BD zieht, dafs auch das Rechteck CHLK dem Quadrat ACDE an Fläche gleich ist, und folglich auch beide Rechtecke zusammen, d. i. das Quadrat der Hypotenuse, so grofs ist, als die Summe der Quadrate der beiden Katheten.**)

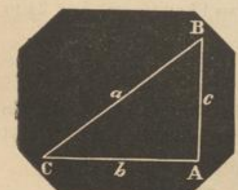
Zusatz. Das Quadrat der einen Kathete ist so grofs als das Quadrat der Hypotenuse weniger dem Quadrat der andern Kathete.

106.

Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches 1) so grofs ist, als die Summe zweier gegebenen Quadrate, 2) welches so grofs ist, als die Differenz derselben, und 3) welches 2, 3, 4 . . mal so grofs ist, als ein gegebenes Quadrat.

Auflösung. Siehe § 45, Randanmerkung.

107.



Dieselbe merkwürdige Beziehung, welche unter den Flächen der, auf den Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks stehenden Quadrate stattfindet, mufs offenbar auch unter den Quadratzahlen dieser Seiten stattfinden, d. h. wenn man die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks mit einerlei Längeneinheit ausmifst, so mufs das Quadrat von der Zahl, welche die Länge der Hypotenuse angiebt,

---

*) Der Anfänger möge sich die Figur gröfser zeichnen.

**) Obgleich man eigentlich von keinem Lehrsatz sagen kann, er sei der wichtigste in der Geometrie, indem alle, als Glieder einer Kette, gleich notwendig sind, so dienen doch einige Sätze nur zur Begründung anderer, von denen mehrere praktische Anwendungen gemacht werden können, und in dieser Hinsicht kann man sagen, dafs obiger, nach seinem Entdecker Pythagoras benannte Satz, der fruchtbarste und wichtigste in der ganzen Geometrie ist. Wir haben deshalb auch, dem Pythagoras zu Ehren, diesem Satze ein eigenes Buch gewidmet, unter andern Umständen würden wir ihm einen Tempel gebaut haben.

so grofs sein, als die Quadrate der beiden Zahlen, welche die Längen der Katheten ausdrücken, zusammen genommen, so dafs man also, vermöge dieses Satzes, aus zwei in Zahlen gegebenen Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks die dadurch bestimmte dritte Seite immer berechnen kann.

Wäre z. E. in dem bei A rechtwinkligen Dreieck ABC die eine Kathete AC $= 4$, die andere AB $= 3$, so wäre das Quadrat der Hypotenuse $= 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, folglich die Hypotenuse BC $= \sqrt{25} = 5$. Bedeutet a die Länge der Hypotenuse, b und c die der Katheten, so ist allgemein:

$$a^2 = b^2 + c^2, \text{ oder } a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

Man findet also die Hypotenuse, wenn man beide Katheten quadriert (jede mit sich selbst multipliziert) und aus der Summe beider Quadrate die Quadratwurzel zieht. Um eine Kathete zu finden, mufs man das Quadrat der andern Kathete vom Quadrat der Hypotenuse abziehen und aus dem Reste die Quadratwurzel ziehen (§ 105, Zusatz). In Zeichen:

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{(a+c)(a-c)}.$$

Beispiele: 1) Gegeben: beide Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks, $b = 16$ m, $c = 21$ m. Gesucht: die Hypotenuse a?

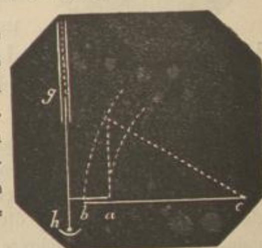
2) Gegeben: die Hypotenuse $a = 34$ m, die Kathete $b = 16$ m. Gesucht: c?

3) Gegeben: zwei Seiten eines Rechtecks, $h = 13$ m 80 cm, $b = 24$ m 25 cm. Gesucht: die Diagonale d?

4) Gegeben: die Seite eines gleichseitigen Dreiecks, $b = 30$ m. Gesucht: die Höhe h?

5) In den Endpunkten einer geraden Linie BC $= 100$ m, sind die beiden Perpendikel AB $= 60$ m und DC $= 90$ m errichtet. Wie weit sind die beiden Endpunkte A und D von einander entfernt?

6) Eine Stange, bc, beschreibt um c einen Kreis und hebt dabei eine andere Stange, gh, indem sie dieselbe, unter einem rechtwinklig daran befindlichen Arm, greift. Die Stange gh ist genötigt, sich zwischen Leisten nach ihrer Längenrichtung zu bewegen. Auf welche Höhe (h) wird dieselbe gehoben, wenn $bc = 2$ m 12 cm und $ab = 33$ cm ist?

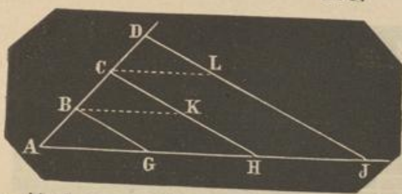


Antwort: 1) $a = 26{,}4$ m; 2) $c = 30$ m; 3) $d = \sqrt{13{,}8^2 + 24{,}25^2} = 27{,}902$ m $= 27$ m $90{,}2$ cm.; 4) $h = 25{,}98$ m. Allgemein: $\sqrt{b^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{2} . \text{b}$; 5) AD $= 104{,}4$ m; 6) h $= 1$ m $13{,}6$ cm.

Zehntes Buch.

Von den Proportionallinien.

108.



Lehrsatz. Wenn man auf dem einen Schenkel eines Winkels gleiche Stücke abschneidet und durch die Teilpunkte Parallelen an den andern Schenkel zieht, so schneiden diese auch auf dem andern Schenkel gleiche Stücke ab. In Zeichen:

Wenn:

$AB = BC = CD = \ldots$

und $BG \parallel CH \parallel DJ \parallel \ldots$

so ist:

$AG = GH = HJ = \ldots$

Beweis. Man denke sich BK, CL parallel mit AJ gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke kongruent, weil sie eine Seite und die beiden anliegenden Winkel beziehlich gleich haben, nämlich:

$AB = BC = CD$, n. V.

$\angle BAG = \angle CBK = \angle DCL$

$\angle ABG = \angle BCK = \angle CDL$

(§ 61, Zusatz, oder § 64.)

folglich ist auch (§ 37):

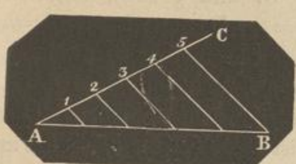
$\triangle ABG \cong \triangle BCK \cong \triangle CDL$

und hieraus:

$AG = BK = CL.$

Nun ist aber (§ 92): $BK = GH$ und $CL = HJ$, mithin ist auch: $AG = GH = HJ.$

109.

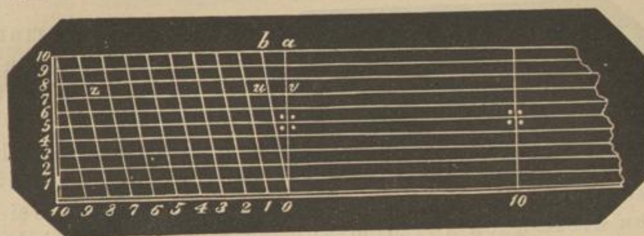


Aufgabe. Eine gegebene Linie, AB, in eine bestimmte Anzahl gleicher Teile zu teilen, z. B. in fünf.

Auflösung. Man ziehe aus A eine Linie, AC, schneide auf dieser von A aus fünf gleiche Teile ab, ziehe von dem letzten Teilpunkt 5 nach B und dann durch 4, 3, 2, 1 die mit $\overline{5B}$ parallelen Linien, so ist dadurch AB in fünf gleiche Teile geteilt (§ 108).

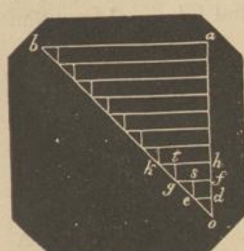
110.

Verjüngter Mafsstab. Zur Einteilung einer geraden Linie kann man sich auch eines sogenannten verjüngten Mafsstabes bedienen. Ein solcher, besonders bei Entwerfung von Zeichnungen, Karten etc. unentbehrlicher Mafsstab, läfst sich folgendermafsen leicht anfertigen.



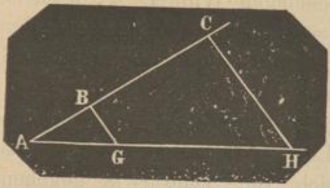
Man trägt nämlich eine beliebige Lineareinheit, *ab*, von 0 nach 10, zehnmal ab, dann diese zehn Teile beliebig oft von 0 bis 10, von 10 bis 20 etc., zieht durch den Endpunkt ein Perpendikel, nur nach Augenmafs, schneidet auf diesem wieder zehn gleiche Stücke ab, zieht durch die Teilpunkte die zehn Parallelen mit $\overline{10,10}$, so wie auch die zehn mit $\overline{9,10}$ parallelen Querlinien, so ist der Mafsstab fertig.

Bedeutet nun in dem Dreieck *oab* die Linie *ab* die Einheit, 1 m z. B., so ist, wie folgendes gröfser gezeichnete Dreieck es deutlicher zeigt, die neunte, damit Parallele $de = \frac{1}{10}$ m $=$ 0,1 m, die achte Parallele $fg = \frac{2}{10} = 0{,}2$ m etc. Denn erstlich sind, weil $od = df = fh$ etc., die Linien oe, eg, gk...gleich (§ 108). Denkt man noch mit *oa* die Parallelen es, gt... gezogen, so sind die entstehenden Dreiecke *oed*, *egs* etc. kongruent (§ 37 und § 108), folglich: $ed = gs = kt = \ldots$ Da nun $ed = sf$, $gf = th$ etc. (§ 92), so ist offenbar *gf* zweimal, *kh* dreimal u. s. f. *ba* zehnmal so grofs, als *ed*, folglich: wenn *ab* einen Meter bedeutet, so ist $ed = 0{,}1$ m, $gf = 0{,}2$ m etc.



Der Gebrauch dieses zehnteiligen Mafsstabes ist nun leicht einzusehen. Wollte man z. B. eine Länge von 8 m 70 cm = 8,7 m in den Zirkel fassen, so setzt man den einen Zirkelfufs auf die siebente Parallele in *v* und öffnet den Zirkel so weit, bis der andere Fufs auf derselben Parallelen die achte Querlinie erreicht, so hat man die Linie $vz = 8{,}7$ m im Zirkel (weil $uz = 8$ m und $uv = 0{,}7$ m). Die unten stehenden Zahlen der Querlinien geben nämlich die ganzen Einheiten und die an den Parallelen stehenden Zahlen die Zehntel an.

111.



Lehrsatz. Parallelen zwischen den Schenkeln eines Winkels schneiden auf denselben proportionale Stücke ab.*)

In Zeichen:

Wenn: BG ∥ CH, so ist: AB : BC = AG : GH,

d. h. AB verhält sich eben so zu BC, wie AG zu GH; mit andern Worten: AB ist so oft in BC enthalten, als AG in GH.

Beweis. Sei, um ein bestimmtes Beispiel zu haben, AB in BC gerade dreimal enthalten. Denkt man sich dann BC in drei gleiche Teile geteilt und durch die Teilpunkte Parallelen zu BG gezogen, so ist, weil AC in vier gleiche Teile geteilt, auch AH in vier gleiche Teile geteilt (§ 108), mithin auch AG in GH gerade dreimal enthalten. — Wäre die Zahl, welche angiebt, wie oft AB in BC enthalten ist, keine ganze Zahl, wäre z. B. AB = 7 und BC gleich 24, also BC nun $3\frac{3}{7}$ mal so grofs, als AB, so kann man sich AB in 7 gleiche Teile und BC in 24 solcher gleichen Teile geteilt, durch die Teilpunkte wieder Parallelen mit GH gezogen denken, so ist dadurch auch AG in 7 und GH in 24 unter sich gleiche Teile geteilt, mithin auch GH dann $3\frac{3}{7}$ mal so grofs, als AG.

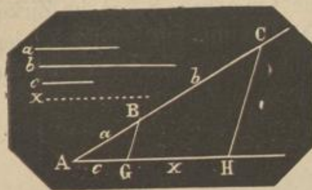
Beispiel. Es sei AB = 2,6 m, BC = 4,5 m, AG = 3,9 m. Wie grofs ist GH?

Antwort. Es ist 2,6 : 4,5 = 3,9 : GH, folglich

$$GH = \frac{4{,}5 \cdot 3{,}9}{2{,}6} = 6{,}75 \text{ m}.$$

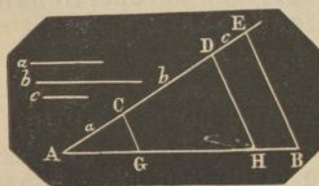
*) Die Lehre von den Proportionen gehört in die Arithmetik und zwar Algebra und mufs hier als bekannt vorausgesetzt werden. S. Algebra § 322.

112.



1. Aufgabe. Zu drei gegebenen Linien, a, b, c, die vierte Proportionale x durch Konstruktion zu suchen, so dafs $a : b = c : x$.

Auflösung. Man zeichne einen beliebigen Winkel, A, schneide auf dem einen Schenkel AB $= a$, BC $= b$ und auf dem andern Schenkel AG $= c$, ab, ziehe BG und dann CH $\parallel$ BG, so ist GH die gesuchte Linie x.

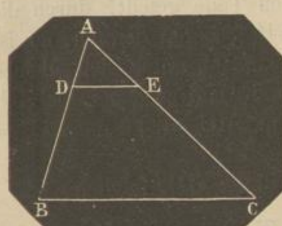


2. Aufgabe. Eine gegebene Linie, AB, so einzuteilen, dafs sich die Teile wie gegebene Linien, $a, b, c \ldots$, verhalten.

Auflösung. Man ziehe aus dem Endpunkt A noch eine Linie, trage auf dieser von A aus, die gegebenen Linien, a, b, c ab, so dafs AC $= a$, CD $= b$ und DE $= c$ ist, verbinde den letzten Teilpunkt E mit B und ziehe dann DH und CG parallel mit EB, so verhalten sich die Teile auf AB, wie die auf AE (§ 111).

Zusatz. Soll eine Linie, AB, in Stücke geteilt werden, die sich wie gegebene Zahlen, z. B. 2, 5, 4, verhalten, so trage man eine beliebige Lineareinheit von A nach C zweimal, von C nach D fünfmal, von D nach E viermal ab, verbinde E mit B und ziehe DH und CG parallel mit EB.

113.



Lehrsatz. Die Linie, welche in einem Dreieck mit einer Seite parallel läuft, schneidet die beiden andern Seiten so, dafs sich die Abschnitte der einen Seite wie die entsprechenden der andern verhalten.

In Zeichen:

Wenn: DE $\parallel$ BC

so ist:

AD : DB = AE : EC,

AD : AB = AE : AC,

AB : BD = AC : CE.

Beweis. Nach § 111 ist erstlich AD : DB = AE : EC und da nun eine Linie in sich selbst einmal enthalten ist, so ist notwendig auch AD : (AD + DB) = AE : (AE + EC), oder was dasselbe ist: AD : AB = AE : AC. Wäre z. B. AD in BD dreimal enthalten, so wäre offenbar AD in AB einmal mehr, also viermal enthalten, und eben so AE in AC viermal.

In gleicher Weise muſs AB : BD = AC : CE sein.

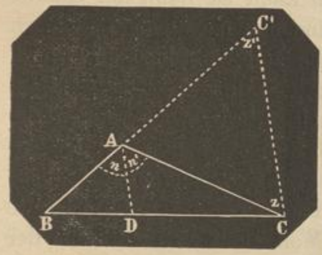
Schneidet umgekehrt eine Linie, DE, von den beiden Schenkeln des Winkels A dēn gleichvielsten, z B. von jedem den fünften Teil ab, mit andern Worten: Ist AD : AB = AE : AC, so muſs auch DE parallel mit BC sein, weil nur die mit BC parallele Linie, welche den fünften Teil von AB abschneidet, auch denselben Teil von AC abschneidet.

114.

Lehrsatz. Ist BC ‖ DE (Fig. zu § 113), so ist AB : BC = AD : DE. Oder: Der Schenkel AB des △ ABC verhält sich zur Grundlinie BC wie der Schenkel AD des △ ADE zur Grundlinie DE.

Beweis. Denkt man sich durch D eine Parallele zu AC, die BC in F schneidet, so verhält sich nach § 113: AB : BC = AD : CF. Da aber CF = DE (s. § 92), so geht diese Proportion über in AB : BC = AD : DE.

115.



*) **Lehrsatz.** Die Linie, welche einen beliebigen Winkel eines Dreiecks halbiert, teilt die gegenüber liegende Seite so: daſs sich die beiden Teile (Abschnitte) derselben wie die beiden anderen Seiten des Dreiecks verhalten.

In Zeichen:

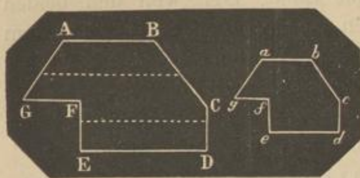
Wenn: $\angle n = \angle n' = \frac{1}{2} \angle BAC$ so ist: BD : DC = AB : AC.

Beweis. Man denke sich BA verlängert, so daſs AC′ = AC und verbinde C′ mit C, dann ist $\angle z = z'$ (§ 40) und da $n + n' = z + z'$ (§ 66), so ist, weil $n = n'$ und $z = z'$, $2n' = 2z$, also auch $n' = z$, daher AD ‖ C′C (§ 60) und folglich (§ 111) BD : DC = AB : AC, weil AC = AC′.

Elftes Buch.

Von der Ähnlichkeit der Figuren.

116.



Erklärung. Zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn sie gleichwinkelig sind und die in gleicher Ordnung, zwischen gleichen Winkeln liegenden Seiten dasselbe Verhältnis zu einander haben. Je zwei solcher Seiten heifsen dann ähnlich liegende oder homologe.

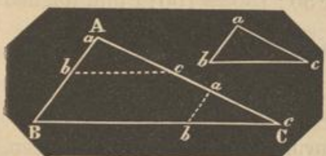
Wären z. B. die beiden Figuren ABCD. .G und *abc. .g* so konstruiert, dafs sie gleichwinkelig ($A = a$, $B = b$, ... $G = g$) und die ähnlich liegenden Seiten proportional, d. h. wenn AB z. B. dreimal so grofs, als *ab* wäre, dann auch jede andere Seite der gröfseren Figur dreimal so grofs, als die ähnlich liegende Seite der kleinern Figur wäre, nämlich BC dreimal so grofs als *bc*; CD dreimal so grofs als *cd* etc., so wären die beiden Figuren ähnlich, und man kann sie dann auf einerlei Weise konstruiert denken, die eine nur nach einem kleinern Mafsstab. Ähnliche Figuren haben nur verschiedene Gröfse, in allem Übrigen, — Form und Eigenschaften — sind sie gleich.

Die zum Begriff der Ähnlichkeit erforderlichen zwei Merkmale, Gleichheit der Winkel und Proportionalität der Seiten, müssen aber, wohl gemerkt, gleichzeitig vorhanden sein, denn es können zwei sehr unähnliche Figuren eines dieser Merkmale ohne das andere gemein haben. Man kann sich z. B. aus der Figur ABC...G, durch die mit AB und ED angedeuteten parallelen Linien, eine andere Figur herausgeschnitten denken, welche vermöge § 60, Zusatz 1, noch dieselben Winkel hat, bei der das Verhältnis der Seiten aber nicht mehr dasselbe ist. Eben so kann man sich die Seiten der einen Figur ABG...G um die Eckpunkte gedreht (verschoben) denken, wobei noch das Verhältnis der Seiten dasselbe bleibt, die Gleichheit der Winkel aber gestört ist.

Nur bei Dreiecken folgt eins dieser zur Ähnlichkeit erforderlichen Merkmale aus dem andern, und, so wie über die Kongruenz ($\cong$) der Dreiecke, haben wir uns hier nun auch über die Ähnlichkeit ($\sim$) derselben die folgenden wichtigen Lehrsätze (die vier Ähnlichkeitssätze) wohl zu merken. weil auf diese alle übrigen, die Ähnlichkeit der Figuren betreffenden, wichtigen Sätze sich gründen, indem alle ähnliche Figuren in Netze von ähnlichen Dreiecken zerlegt werden können.

Anmerkung. Aus der Voraussetzung: $ab : AB = bc : BC = cd : CD =$ etc., folgt: $ab : bc : cd : .. = AB : BC : CD : ...$ Statt also zu sagen: zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn sie gleichwinklig sind und proportionale Seiten haben, könnte man auch sagen: zwei Figuren heifsen ähnlich, wenn die Seiten der einen Figur dieselbe Lage und dasselbe Verhältnis zu einander haben, wie die der andern.

117.



1. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn zwei Winkel des einen gleich zwei Winkel des andern sind.

In Zeichen:

Wenn:	so ist notwendig:
$\angle a = \angle A$	$\angle c = \angle C.$
$\angle b = \angle B$	$ab : AB = ac : AC = bc : BC$
	$\triangle abc \sim \triangle ABC.$
	(Lies: $\triangle$ *abc* ähnlich $\triangle$ ABC.)

Beweis. Zunächst mufs nach § 65, Zusatz 2, $\angle c = \angle C$ sein. Denkt man sich ferner das kleinere Dreieck übereinstimmend so auf das grofse gelegt, dafs zwei gleiche Winkel, a, A, sich decken, so ist, weil $\angle b = \angle B$, die Linie bc parallel mit BC (§ 60, Zusatz), mithin auch (§ 113) $ab : AB = ac : AC$ und (nach § 114) $ab : AB = bc : BC$.

1. Zusatz. Zieht man daher in einem $\triangle$ ABC eine Parallele bc zu einer Seite BC, so entsteht ein $\triangle$ Abc, welches jenem $\triangle$ ABC ähnlich sein mufs.

2. Zusatz. In ähnlichen Dreiecken sind die den gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten proportional.

118 a.

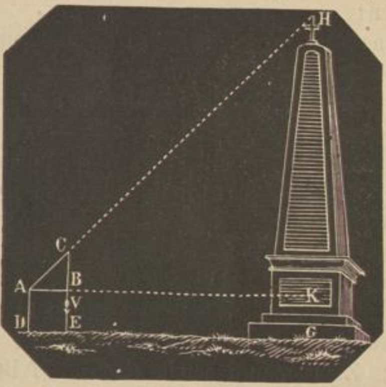
Aufgabe. Die Entfernung eines unzugänglichen Punktes, A, von einem Punkte, B, zu bestimmen.

Auflösung. Von B aus messe 2 beliebige in gerader Linie liegende Längen B*b*, *b*C ab (indem man die Punkte C und *b* mit Meſsstangen bezeichnet). Von *b* aus stecke man eine Linie *ab* so ab, daſs $\angle$ ABC $=$ *abC* (z. B. mittelst des Winkelkreuzes $= 90^0$) und der Endpunkt *a* mit C und A in einerlei Richtung liegt. Miſst man alsdann noch die Linie *ab*, so kann man die Länge von AB durch eine einfache Proportion finden.

Nach Konstruktion ist nämlich: $\triangle\, abC \sim \triangle\, ABC$ (§ 117), daher: $bC : BC = ab : AB$. Hätte man z. B. $BC = 150$ m, $bC = 50$ m, $ab = 100$ m, so wäre $50 : 150 = 100 : x$ und folglich $x = \frac{100 . 150}{50}$ oder $x = 300$ m $=$ AB.

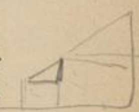
118 b.

Aufgabe. Die Höhe eines Turmes (Baumes) zu bestimmen.



Auflösung. In einerlei Richtung und parallel mit HG stecke in D und E zwei Meſsstangen ein, lege daran eine dritte Meſsstange so, daſs, wenn man über dieselbe hin visiert, die Visierlinie durch den Punkt H geht, messe dann DG, DE, AD und CE, so kann man (AK ∥ DG gedacht) durch eine einfache Proportion, HK, berechnen, welches zu AD addiert, die gesuchte Höhe giebt.

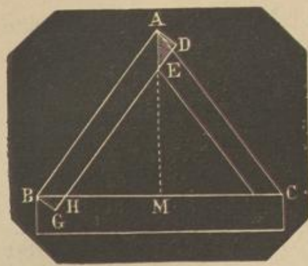
Nach Konstruktion ist $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ AKH (§§ 117 und 61, Zusatz). Wäre z. B. gemessen DG = 100 m, DE = 5 m, AD = 2 m, CE = 6 m, also BC = CE − AD = 4 m, so hat man (§ 117): AB : AK = BC : KH, oder, indem man die Zahlen setzt: $5 : 100 = 4 : x$, woraus $x = \frac{4 \cdot 100}{5} = 80$ = HK, mithin HG = 80 + 2 = 82 m.



Zusatz. Viel bequemer kann man die Höhen zugänglicher Gegenstände messen, indem man sich zu diesem Zweck ein rechtwinkliges Dreieck, ABC, verfertigt, dessen Katheten, AB, BC, gleich lang sind. Dieses Dreieck kann man entweder frei in der Hand halten, oder noch besser an einem Stab, AD, befestigen und dann leicht in eine solche Lage bringen, daſs die Kathete CB mit dem in C befestigten Senkblei CV zusammenfällt, also vertikal und mit HG parallel wird. Hat man sich nun mit diesem einfachen Instrument so weit vom Gegenstande HG entfernt, bis man durch Visieren wahrnimmt, daſs die Hypotenuse AC genau auf die Spitze H zielt, so messe man nur (durch Abschreiten) die Linie DG und addiere hierzu die Höhe des Auges AD, so hat man HG, denn weil nach Voraussetzung AB = BC, $\angle$ B = 90°, also $\angle$ A = $\angle$ C = $\angle$ H = 45°, so ist auch KH = AK = DG, mithin HG = DG + AD. Forstmänner messen auf diese Weise die Höhen der Bäume.

118c.

Aufgabe. Zwei gleich lange viereckige Balken, AB = AC = 10 m, sollen über einen dritten, BC = 12 m, dachförmig aufgerichtet werden. Damit die Balken nun genau an einander passen, muſs offenbar erst von beiden gleich langen Balken, AB, AC, oben ein dreieckiges Stück, ADE, und unten ein dreieckiges Stück, BGH, nach den Linien AE und BH abgesägt werden. Um nun diese Richtungen AE und BH zuvor angeben zu können, kommt es nur darauf an, die Punkte E und H zu bestimmen, oder die Längen DE und GH zu berechnen. Wie findet man diese, wenn die Breite AD = BG = $\frac{1}{3}$ m ist?



Auflösung. Zuerst hat man die Höhe AM $= \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ m (§ 107). Ferner sind die Dreiecke AED und ABM ähnlich, denn jedes hat einen rechten Winkel (D = M), außerdem ist $\angle$ AED $= \angle$ BAM (§ 61, Zusatz); mithin (§ 117):

$$\mathrm{DE} : \mathrm{AD} = \mathrm{AM} : \mathrm{BM}$$

$$\text{oder } \mathrm{DE} : \tfrac{1}{3} = 8 : 6$$

$$\text{und hieraus: } \mathrm{DE} = \frac{8 \cdot \frac{1}{3}}{6} = \tfrac{4}{9}\ \mathrm{m} = 44{,}4\ \mathrm{cm}.$$

$$\text{Ferner ist } \triangle\ \mathrm{BGH} \sim \triangle\ \mathrm{ABM}$$

$$\text{daher } \mathrm{GH} : \mathrm{BG} = \mathrm{BM} : \mathrm{AM}$$

$$\mathrm{GH} : \tfrac{1}{3} = 6 : 8$$

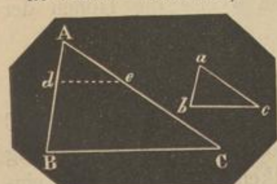
$$\text{folglich: } \mathrm{GH} = \frac{6 \cdot \frac{1}{3}}{8} = \tfrac{1}{4}\ \mathrm{m} = 25\ \mathrm{cm}.$$

119.

2. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seitenverhältnisse gleich haben.

In Zeichen:

Wenn:	so ist:
$ab : \mathrm{AB} = ac : \mathrm{AC}$,	$\mathrm{A} = a$, $\mathrm{B} = b$, $\mathrm{C} = c$.
$ab : \mathrm{AB} = bc : \mathrm{BC}$,	$\triangle\ \mathrm{ABC} \sim \triangle\ abc$.



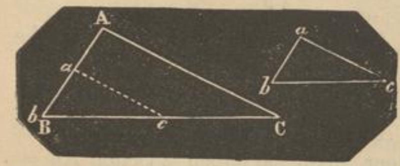
Beweis. Dieser Satz ist die Umkehrung von § 117. Um die Richtigkeit an einem bestimmten Beispiel zu zeigen, mögen die Seiten des größern Dreiecks dreimal so groß, als die des kleinern sein. Denkt man sich nun auf AB ein Stück, A$d = ab$, abgeschnitten und $de \parallel$ BC gezogen, so ist $\triangle$ A$de \sim \triangle$ ABC (§ 117). Weil nun A$d = ab$ der dritte Teil von AB, so ist auch Ae der dritte Teil von AC und de der dritte Teil von BC, mithin A$e = ac$, $de = bc$, daher $\triangle$ A$de \cong \triangle\ abc$. Setzt man nun $\triangle\ abc$ an die Stelle von $\triangle$ Ade in jener Ähnlichkeitsbeziehung $\triangle$ Ade $\sim \triangle$ ABC, so ist auch $\triangle\ abc \sim \triangle$ ABC, $\angle\ a =$ A, $\angle\ b =$ B, $\angle\ c =$ C.

120.

3. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Seitenverhältnis und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel gleich haben.

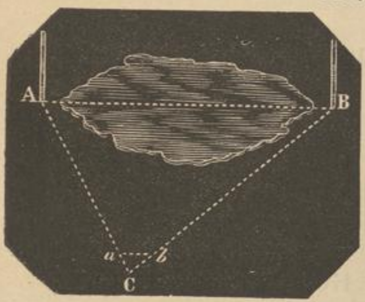
In Zeichen:

Wenn: $\angle b = \angle B$, $ab : AB = bc : BC$, so ist: $\triangle abc \sim \triangle ABC$.



Beweis. Denkt man das kleinere Dreieck so auf das gröſsere gelegt, daſs die als gleich vorausgesetzten Winkel b und B sich decken und ab auf AB, also bc auf BC fällt, so muſs, weil vermöge Voraussetzung $ab : AB = bc : BC$, die Linie ac parallel mit AC sein (§ 114), folglich $a = A$, $c = C$ (§ 61, Zusatz); die Dreiecke sind also gleichwinklig, folglich ähnlich.

121.



Aufgabe. Den Abstand zweier Punkte, A und B, auf kürzere Weise zu bestimmen, als in § 36 gelehrt.

Auflösung. Man bezeichne einen dritten Punkt, C, messe die Linien AC und BC, trage von beiden die gleichvielsten Teile nach b und a ab, so daſs, wenn z. B. bC der zehnte Teil von BC, dann auch ac der zehnte Teil von AC ist, alsdann muſs ab der ebensovielste Teil von AB sein (§ 120). Miſst man also noch ab und multipliziert diese Länge mit 10, so hat man AB.

122.

4. Ähnlichkeitssatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie ein Seitenverhältnis und den der gröſsern dieser beiden Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben. (Fig. zu § 119.)

Wenn:	so ist:
$ab : AB = ac : AC$,	$\angle a = A$, $\angle c = C$
$\angle b = \angle B$,	$\triangle abc \sim \triangle ABC$.
$\angle b > \angle c$,	

Beweis. Mache $Ad = ab$ und ziehe $de \parallel BC$, so ist Ade, $\sim \triangle ABC$ (§ 117 Zusatz). Ist nun

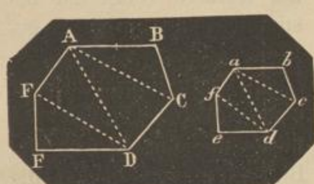
AC $1\frac{1}{2}$ mal so grofs als ac, so ist auch
APb $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ Ab, folglich auch
AB $1\frac{1}{2}$ „ „ „ „ Ad

und da die $\triangle\triangle$ Ade und ABC als ähnliche Dreiecke gleiche Seitenverhältnisse haben müssen, auch

AC $1\frac{1}{2}$ mal so grofs als Ae.

Folglich mufs $ac = Ae$ sein. Nach § 43 sind nun die $\triangle\triangle$ Ade und abc kongruent, denn sie haben 2 Seiten $Ad = ab$, $Ae = ac$ und den der letztern gröfsern Seite (§ 55 und § 43) gegenüberliegenden Winkel gleich ($\angle d = \angle b$). Mithin kann in jener Ähnlichkeitsbeziehung $\triangle Ade \sim \triangle ABC$ an die Stelle von $\triangle Ade$ das $\triangle abc$ gesetzt werden und es ergiebt sich $\triangle abc \sim \triangle ABC$.

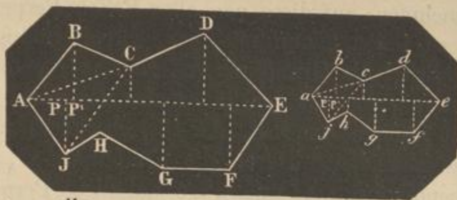
123.



Lehrsatz. Ähnliche Figuren können in ähnliche Dreiecke zerlegt werden, und je zwei ähnlich liegende Diagonalen verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten.

Beweis. Seien die beiden Figuren $abc..f$ und $ABC..F$ ähnlich (§ 116). Dann ist zuerst $\triangle abc \sim \triangle ABC$, weil nach Voraussetzung $\angle b = \angle B$ und $ab : AB = bc : BC$, folglich (§ 120) auch $ac : AC = ab : AB$ und $\angle acb = \angle ACB$, und da nach Voraussetzung $\angle bcd = \angle BCD$, so ist nach Abzug der Winkel acb und ACB auch: $\angle acd = \angle ACD$. Ferner ist nun auch $\triangle acd \sim \triangle ACD$, weil $\angle acd = \angle ACD$ und $ac : AC = cd : CD$, daher auch (§ 120) $ad : AD = cd : CD$. Eben so zeigt man, dafs $\triangle adf \sim \triangle ADF$, $\triangle fde \sim FDE$.

124.



Aufgabe. Über eine gegebene Linie, *ab*, eine Figur zu konstruieren, welche einer andern Figur, ABC...J, ähnlich ist.

Auflösung 1. Man denke sich die Figur ABC..J in zusammenhängende Dreiecke zerlegt, trage dann an die Bildseite *ab* die Winkel *cab* = CAB und *cab* = CBA, so ist △ *abc* ∾ △ ABC (§§ 117 und 65, Zusatz 4); an die Seite *ac* trage man nun die Winkel *caj* = CAJ, *acj* = ACJ, so ist auch △ *acj* ∾ △ ACJ. Auf diese Weise müfste man zwar, wie aus § 123 folgt, eine ähnliche Figur erhalten, weil jedoch das viele Winkelzeichnen zu umständlich und unsicher, so ist dieses Verfahren praktisch nicht anwendbar.

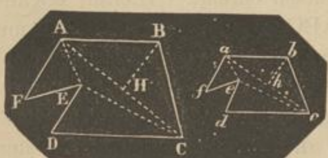
2. Hat man einen sogenannten Reduktionszirkel, d. i. einen Doppelzirkel, dessen Gewinde, in beiden Schenkeln zugleich, verschiebbar, durch eine Schraube festgestellt und mithin die Länge des einen Schenkelpaars in jedem beliebigen Verhältnis zum andern verkürzt werden kann, so stelle man zuerst diesen Zirkel so: dafs, wenn man mit dem einen Schenkelpaar die Originalseite AB fafst, das andere Paar Schenkel die Bildseite *ab* zwischen seinen Spitzen enthält. Hierauf zeichne man alle Dreiecke der Figur ABC...J so ab: dafs man mit dem ersten Schenkelpaar die Seiten der Originaldreiecke abnimmt und mit dem andern Schenkelpaar (umgewandten Zirkel), welches dann jedesmal die ähnlich liegende (reduzierte) Seite fafst, zeichnet; alsdann mufs die zweite Figur der ersten ähnlich werden (§ 119), denn je zwei gleichseitig zwischen beiden Schenkelpaaren enthaltenen Linien verhalten sich immer wie die Längen der Schenkel (§ 120). Enthält die Figur krumme Linien, so mufs man diese durch einzelne Punkte, je mehr, je besser, bestimmen und diese Punkte durch einen freien Handzug verbinden (vergl. § 42, 2. Aufgabe).

3. In vielen Fällen ist es bequemer, statt die ähnlich abzubildende Figur in Dreiecke zu zerlegen, innerhalb oder

aufserhalb derselben eine schickliche Grundlinie, hier z. B. AE, anzunehmen, auf diese von allen Ecken Perpendikel, JP, BP′ etc., zu fällen, dann mit dem, zuvor richtig gestellten Reduktionszirkel die Grundlinie AE zu fassen und ihre durch den Zirkel reduzierte Länge in *ae* abzuschneiden, hierauf die reduzierten Längen von AP, AP′...(Abscissen) nämlich *ap*, *ap′*... abzuschneiden. Durch die Endpunkte *p*, *p′*... ziehe man Perpendikel auf *ae* und trage auf diese Perpendikel die reduzierten Längen der Perpendikel (Ordinaten) JP, BP..., nämlich *jp*, *bp*... ab etc.

4. Statt eines Reduktionszirkels kann man sich auch eben so gut eines verjüngten Mafsstabes bedienen. Man mifst dann nach einem solchen Mafsstabe alle Dreiecksseiten der ähnlich nachzubildenden Figur oder die Perpendikel AP, AP′.. JP, BP′..(Abscissen und Ordinaten), dividiert oder multipliziert ihre Längen mit der Reduktionszahl, welche angiebt, wie viel mal so grofs oder so klein die Seiten der Abbildung sein sollen, als die des Originals, und trägt dann die gefundenen Zahlen, von demselben Mafsstabe abgenommen, gehörig auf. — Konstruiert man noch einen zweiten Mafsstab, auf welchem die Einheit so viel mal so klein oder so grofs ist, als die bestimmte Reduktionszahl vorschreibt, so kann man, ohne erst dividieren oder multiplizieren zu brauchen, die nach ersterem Mafsstab gemessenen Längen unmittelbar vom zweiten abmessen.

125.



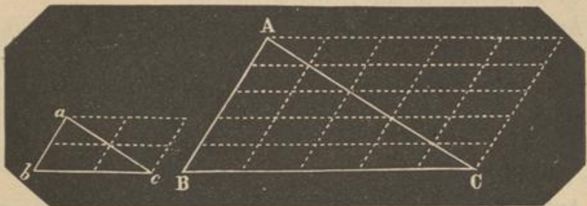
Lehrsatz. Die Umfänge ähnlicher Figuren verhalten sich wie zwei ähnlich liegende Seiten, ihre Inhalte aber wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten.

Ist $abc\ldots f \sim ABC\ldots F$ und bedeuten *u*, U die Umfänge, *f* und F die Flächeninhalte, so ist, in Zeichen:

$$1)\ u : U = ab : AB$$
$$2)\ f : F = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2.$$

Beweis. Sei, um zuerst ein bestimmtes Beispiel zu haben, das Verhältnis der ähnlich liegenden Seiten wie 1 zu 3, d. h. jede Seite der gröfsern Figur sei dreimal so grofs, als die ähnlich liegende der kleinern, alsdann ist offenbar auch die Summe aller Seiten der gröfsern Figur, d. i. ihr Umfang, dreimal so grofs, als der Umfang der kleinern Figur. Verhielten sich die ähnlich liegenden Seiten wie 3 : 7, d. i. wie $1 : 2\frac{1}{3}$, so wäre der Umfang der gröfsern Figur $2\frac{1}{3}$ so grofs als der Umfang der kleinern.

2. Der zweite Teil des Lehrsatzes mufs zuerst für zwei ähnliche Dreiecke bewiesen werden.*) Seien deshalb *abc*, ABC zwei ähnliche Dreiecke, deren Seiten sich z. B. wie 2 zu 5 verhalten mögen. Denkt man sich die Seiten *bc* und *ab* jede in 2 und BC und AB jede in fünf gleiche Teile geteilt,



so sind die Teile auf *bc* und BC einander gleich und eben so die auf *ab* und AB. Denkt man sich nun die Dreiecke zu Parallelogrammen ergänzt, durch die Teilpunkte auf *bc* und BC Parallelen mit *ab*, AB und durch die Teilpunkte auf *ab* und AB Parallelen mit *bc*, BC gezogen, so wird dadurch offenbar das eine Parallelogramm in $2 . 2 = 4$ und das andere in $5 . 5 = 25$ Parallelogramme geteilt, welche alle einander gleich sind. Da sich nun die Inhalte beider Parallelogramme wie 4 zu 25 verhalten, so müssen sich auch ihre Hälften, d. i. die Inhalte der ähnlichen Dreiecke *abc* und ABC wie 4 zu 25 verhalten, mithin der Inhalt des Dreiecks $ABC = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ mal so grofs sein, als der Inhalt von *abc*. Verhielten sich die Seiten zweier ähnlichen Dreiecke wie 1 zu 4, so verhalten sich

*) Am kürzesten ist der Beweis folgendermafsen: Die Perpendikel *bh*. BH gefällt, hat man $\frac{AC}{ac} = \frac{BC}{bc}$ oder $\frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}ac} = \frac{BC}{bc}$ und $\frac{BH}{bh} = \frac{BC}{bc}$; die beiden letztern Gleichungen mit einander multipliziert: $\frac{\frac{1}{2}AC . BH}{\frac{1}{2}ac . bh} = \frac{BC . BC}{bc . bc}$ oder $\frac{\triangle ABC}{\triangle abc} = \frac{BC^2}{bc^2}$ etc. (§ 102.)

ihre Inhalte wie 1 zu 16 etc. Ähnliche Figuren kann man in ähnliche Dreiecke zerlegt denken. Verhielten sich nun die Seiten zweier ähnlichen Figuren, $abc\ldots f$ und ABC...F, z. B. wie 1 zu 3, so wäre offenbar jedes Dreieck der gröfsern Figur 9 mal so grofs, als ein ähnliches der kleinern, und folglich wäre dann auch die Summe aller Dreiecke der gröfsern Figur, d. i. ihr Inhalt 9 mal so grofs, als der der kleinern. Verhielten sich die Seiten wie 2 : 7, so verhalten sich die Inhalte wie 4 : 49 und so bei jedem andern Zahlenverhältnis.

Aufgabe 1. Die ähnlich liegenden Seiten verhalten sich wie 2 : 5, der Inhalt der kleinern Figur ist $f = 560$ qm. Wie grofs ist der Inhalt F der gröfsern?

Aufgabe 2. Der Inhalt der kleinern Figur sei = 400 qm, ihre Grundlinie = 13 m. Wie grofs mufs die Grundlinie x einer ähnlichen Figur genommen werden, damit der Inhalt derselben = 800 qm?

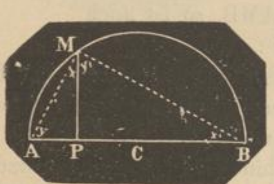
Antwort 1. Aus der Proportion $560 : F = 2^2 : 5^2$ folgt $F = 3500$ qm.

Antwort 2. Aus $13^2 : x^2 = 400 : 800$ folgt $x = 13\sqrt{2} =$ 18,385 m.

Zwölftes Buch.

Proportionen beim Kreise.

126.



Lehrsatz. Das Perpendikel MP von einem beliebigen Punkt der Peripherie auf den Durchmesser ist die mittlere Proportionale zwischen den beiden Abschnitten AP und PB des Durchmessers.*)

Oder: Die vom Scheitel des rechten Winkels eines rechtwinkligen Dreiecks auf die Hypotenuse gefällte Senkrechte MP ist das geometrische Mittel zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

In Zeichen:

$$AP : MP = MP : PB.$$

Beweis. Zieht man die beiden Sehnen AM, BM, so entstehen dadurch drei ähnliche Dreiecke,**) denn weil $\angle AMB = R$ (§ 81) und nach Voraussetzung $\angle MPB = R$, so ist $x + y' = x + y = x' + y' = R$, also $y = y'$ und $x = x'$, daher $\triangle APM \sim \triangle BPM \sim \triangle AMB$. Da nun in ähnlichen Dreiecken die den gleichen Winkeln gegenüber liegenden Seiten proportional sind (§ 117, 2. Zus.), so folgt aus den beiden kleinern Dreiecken die im Lehrsatz behauptete Proportion $AP : MP = MP : PB$.

---

*) Wenn in einer Proportion die beiden innern Glieder gleich sind, wie in $2 : 6 = 6 : 18$, so heifst die Proportion eine **stetige** und eins der gleichen mittlern Glieder die **mittlere Proportionale** oder das **geometrische Mittel** zu den beiden äussern; so ist hier z. B. 6 die mittlere Proportionale zu 2 und 18.

**) Der Anfänger wird wohl thun, diese drei Dreiecke getrennt zu zeichnen.

Zusatz 1. Vergleicht man jedes der kleinern Dreiecke mit dem grofsen, so ergiebt sich noch ein anderer wichtiger Satz, nämlich: jede der beiden Sehnen ist die mittlere Proportionale zwischen dem anliegenden Abschnitt des Durchmessers und dem ganzen Durchmesser. Oder: Jede Kathete ist das geometrische Mittel zwischen dem anliegenden Abschnitt der Hypotenuse (begrenzt durch die Höhe auf derselben) und der Hypotenuse selbst, denn weil $\triangle$ APM $\sim$ $\triangle$ AMB, so ist (§ 117):

$$AP : AM = AM : AB$$

und weil $\triangle$ BPM $\sim$ $\triangle$ AMB, so ist auch

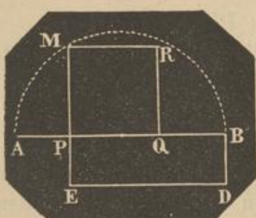
$$PB : BM = BM : AB.$$

Zusatz 2. Aus den beiden letztern Proportionen folgt noch ein anderer und zwar arithmetischer Beweis für den Pythagoräischen Lehrsatz. Man hat nämlich $AP.AB = \overline{AM}^2$; $PB.AB = \overline{BM}^2$. Addiert man mithin beide Gleichungen und berücksichtigt, dafs $AP.AB + PB.AB = (AP + PB) AB = AB.AB$, so folgt $\overline{AB}^2 = \overline{AM}^2 + \overline{BM}^2$.

Aufgabe. Es sei $AP = 9$, $PB = 16$. Wie grofs ist MP?

Antwort. Es ist $MP = \sqrt{9.16} = \sqrt{144} = 12$.

127.



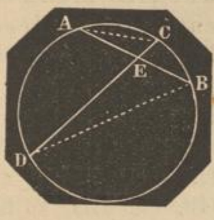
Aufgabe. Ein Quadrat zu zeichnen, welches so grofs ist, als ein gegegebenes Rechteck, mit anderen Worten: ein gegebenes Rechteck, PBDE, in ein an Inhalt gleiches Quadrat zu verwandeln.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, zu den beiden gegebenen Seiten des Rechtecks PE und PB die mittlere Proportionale x zu finden, so dafs $PE : x = x : PB$, denn dann ist $x^2 = PE.PB$. (§ 99).

Man füge also PE geradlinig an PB, so dafs $AP = PE$, beschreibe über AB, als Durchmesser, einen Halbkreis, errichte in P auf AB das Perpendikel MP, so ist das über dieses Perpendikel konstruierte Quadrat MPQR das verlangte, weil nach § 126 $\overline{MP}^2 = AP.PB = PE.PB$.

Zusatz. Um ein Quadrat zu zeichnen, welches beliebig vielmal, z. B. $2\frac{3}{4}$ mal so grofs ist, als ein gegebenes Quadrat, mache man die eine Seite desselben $2\frac{3}{4}$ mal so lang und verwandele das erhaltene Rechteck in ein Quadrat.

128.



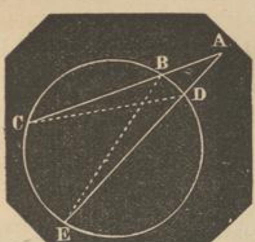
*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sehnen im Kreise sich schneiden, so ist das Produkt aus den beiden Abschnitten der einen Sehne gleich dem Produkt aus den beiden Abschnitten der andern Sehne.

In Zeichen:

$$AE . EB = CE . ED.$$

Beweis. Man ziehe die Hilfslinien AC und BD, so sind die beiden entstehenden Dreiecke gleichwinklig und folglich ähnlich, denn nach § 80 ist $\angle A = \angle D = \frac{\text{arc } BC}{2}$ und $\angle C = \angle B = \frac{\text{arc } AD}{2}$. Daher (§ 117) $\triangle AEC \sim \triangle BED$. Setzen wir nun ähnlich liegende Seiten in Proportion, so ist: $AE : DE = CE : BE$ und hieraus: $AE . BE = CE . DE$. Wäre z. B. $AE = 4\,m$, $EB = 3\,m$, $CE = 2\,m$, so müfste $DE = \frac{3 . 4}{2} = 6\,m$ sein.

129.



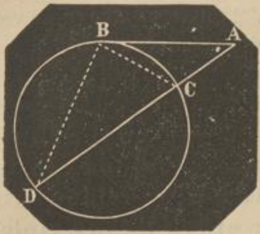
*) **Lehrsatz.** Wenn zwei Sekanten (verlängerte Sehnen) sich aufserhalb des Kreises schneiden, so sind die Produkte aus jeder ganzen Sekante und ihrem aufserhalb liegenden Teile gleich.

In Zeichen:

$$AC . AB = AE . AD.$$

Beweis. Denkt man sich die Hilfslinien CD und BE gezogen, so sind die beiden Dreiecke ADC und ABE ähnlich; beide haben nämlich den Winkel A gemein und dann die auf demselben Bogen BD stehenden Peripheriewinkel C und E gleich (§ 80). Die ähnlichen Dreiecke geben nun die Proportion $AD : AB = AC : AE$ und hieraus $AB . AC = AD . AE$.

130.



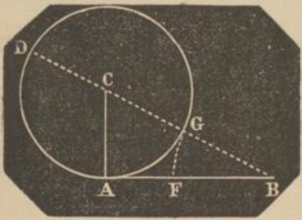
Lehrsatz. Wenn man von einem Punkt A, aufserhalb des Kreises eine Tangente, AB, und eine Sekante, AD, zieht, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zu der ganzen Sekante und ihrem aufserhalb liegenden Teile.

In Zeichen:

$$AC : AB = AB : AD.$$

Beweis. Zieht man die Hilfslinien BC und BD, so ist $\triangle$ ABC $\sim$ $\triangle$ ADB, denn beide haben den Winkel A gemein und aufserdem, nach § 84, $\angle$ D $=$ $\angle$ ABC, daher (§ 117) AC : AB = AB : AD.

131.



*) **Aufgabe.** Eine gegebene Linie, AB, nach stetiger Proportion, nämlich so in F zu teilen, dafs sich die ganze Linie AB zum gröfsern Teile BF, wie dieser zum kleinern Teil AF verhält.

Anmerkung. Diese Teilung nennt man den goldenen Schnitt.

Auflösung. In dem einen Endpunkt A errichte auf AB eine Senkrechte AC $= \frac{1}{2}$ AB, beschreibe aus C mit CA einen Kreis, ziehe BC, welche den Kreis in G schneidet, mache BF = BG, so ist F der verlangte Teilungspunkt.

Beweis. Verlängere BC nach D, so ist (§ 130):

$$BD : AB = AB : BG,$$

also auch: $AB : BD-AB = BG : AB-BG$, d. i.

$$\text{weil } BD-AB = BD-DG = BG = BF$$
$$\text{und } AB-BG = AB-BF = AF,$$
$$AB : BF = BF : AF.$$

Dreizehntes Buch.

Von den regelmäſsigen Vielecken. Berechnung des Umfangs und Inhalts des Kreises.

132.

Erklärung. Ein Vieleck heiſst regelmäſsig, wenn alle Seiten und alle Winkel gleichgroſs sind.

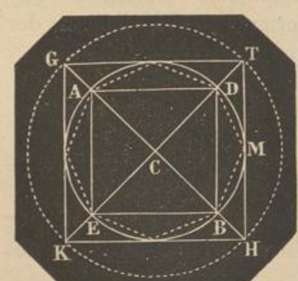
Denkt man sich einen Kreis in eine beliebige Anzahl gleicher Bögen geteilt, so würden die dazu gehörenden Sehnen, sowie auch die Peripheriewinkel, welche je zwei Sehnen mit einander bilden, gleich und somit das dadurch entstehende Vieleck, der Erklärung gemäſs, ein regelmäſsiges sein.

Könnte man also einen Kreis in jede beliebige Anzahl gleicher Bögen teilen, so könnte man auch, indem man nur die Sehnen zöge, ein jedes regelmäſsige Vieleck von beliebiger Seitenzahl zeichnen.

Die allgemeine Lösung dieser Aufgabe aber ist auf streng geometrische Weise, d. h. nicht durch Probieren, sondern durch, auf bestimmte Gesetze und Regeln gegründete Konstruktion, bis jetzt noch keinem Mathematiker gelungen und diese Aufgabe: ein beliebiges regelmäſsiges Vieleck von bestimmter Seitenzahl zu konstruieren, gehört daher zu den bis jetzt noch ungelösten.

In folgenden wenigen Fällen jedoch, wo der Kreis in 3, 4, 5, 15, so wie in die durch wiederholtes Verdoppeln dieser Zahlen angegebenen gleichen Teile geteilt werden soll, ist die Auflösung möglich.

133.



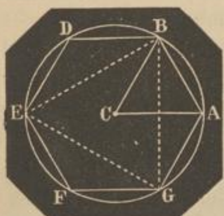
Aufgabe. Einen Kreis in vier gleiche Teile zu teilen, und ein regelmäſsiges Viereck zu konstruieren.

Auflösung. Man ziehe zwei auf einander senkrechte Durchmesser, so teilen diese den Kreis in vier gleiche Bögen. Zieht man die Sehnen, so hat man auch das regelmäſsige Viereck ADBE, welches offenbar ein Quadrat ist. Der Beweis ist leicht.

Zusatz 1. Um ein regelmäſsiges Viereck um den Kreis zu beschreiben, dessen Seiten mit den des eingeschriebenen parallel sind, halbiere man einen der Bögen in M (§ 71), ziehe durch M eine Tangente, welche die verlängerten Radien CD, CB in T und H schneidet, dann ist HT eine Seite des umgeschriebenen Vierecks, welche man nur in dem mit CT beschriebenen zweiten Kreise herumzutragen braucht.

Zusatz 2. Durch fortgesetztes Halbieren der Bögen erhält man die regelmäſsigen Vielecke von 8, 16, 32, . . . Seiten.

134.



Aufgabe. Einen Kreis in sechs gleiche Teile zu teilen und ein regelmäſsiges Sechseck zu zeichnen.

Auflösung. Man trage von einem Punkt, A, aus, den Radius CA, als Sehne, unmittelbar in der Peripherie herum, AB, BD etc., so erreicht man beim sechsten Male den Punkt A wieder und die Aufgabe ist gelöst.

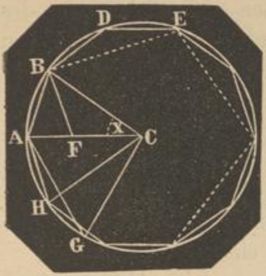
Beweis. Um zu zeigen, daſs der Radius AC = AB wirklich die Seite des Sechsecks ist, denke man noch BC gezogen, so folgt aus dem gleichseitigen und folglich auch gleichwinkligen Dreieck ABC, daſs $\angle C = 60^0$ (§ 65, Zusatz 3), folglich ist $\angle C$ der sechste Teil von 360^0, also auch der über dem Radius AB ausgespannte Bogen AB der sechste Teil vom Kreise.

Zieht man BE, BG, EG, so erhält man das regelmäſsige Dreieck im Kreise, und durch fortgesetztes Halbieren der Bögen die regelmäſsigen Vielecke von 12, 24, 48, . . Seiten.

135.

*) **Aufgabe.** In einem Kreise ein regelmäſsiges Zehneck zu zeichnen.

Auflösung. Man teile den Radius AC in F nach stetiger Proportion (§ 131), so ist der gröſsere Teil FC die Seite des Zehnecks.



Beweis. Nimmt man AB = FC, zieht BF und BC, so kann man zeigen, daſs der Winkel x wirklich der zehnte Teil von vier Rechten oder $= \frac{360^0}{10} = 36^0$ und folglich AB = FC die Seite des Zehnecks ist. Denn nach Voraussetzung ist AF : FC = FC : AC, also, weil AB = FC, auch : AF : AB = AB : AC. Die beiden Dreiecke ABF und ABC haben also, auſser dem gemeinschaftlichen Winkel A, zwei ihn einschlieſsende proportionierte Seiten, sind folglich ähnlich (§ 120) und daher gleichwinklig, mithin $\angle$ ABF des $\triangle$ ABF $= \angle x$ des $\triangle$ ABC und die Winkel A und F des $\triangle$ ABF gleich den Winkeln A und B des $\triangle$ ABC. Da aber diese beiden Winkel A und B einander gleich sind, so müssen es auch jene Winkel A und F sein und folglich ist BF = AB (s. § 40, Zusatz). Weil aber nach der Konstruktion auch CF = AB, so ist BF = CF, daher $\angle$ CBF $= x$. Nun ist $\angle$ ABC $=$ $\angle$ ABF $+$ $\angle$ CBF $= x + x = 2\,x$ und $\angle$ A $=$ $\angle$ ABC $=$ $2\,x$. Die drei Winkel des $\triangle$ ABC betragen mithin $x + 2\,x + 2\,x = 5\,x$, aber auch (s. § 65) $= 180^0$, folglich $x = 36^0$.

Ist BD = DE = AB, so ist BE die Seite des regelmäſsiges Fünfecks. Man kann also ein regelmäſsiges Vieleck von 5, 10, 20, 40, 80...Seiten zeichnen. (§ 195, Anmerkung.)

Zusatz. Ist AG die Seite des regelmäſsigen Sechsecks, AH die des Zehnecks, so ist $\angle$ HCG $= 60^0 - 36^0 = 24^0 = \frac{360^0}{15}$, folglich GH die Seite des regelmäſsigen Fünfzehnecks. Man kann also auch noch regelmäſsige Vielecke von 15, 30, 60... Seiten zeichnen.

136.

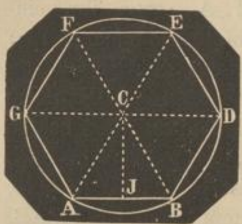
Aufgabe 1. Den rechten Winkel in drei gleiche Teile zu teilen. (NB. Der rechte Winkel ist, auſser den durch stetes Halbieren daraus abgeleiteten Winkeln von 45^0, $22\frac{1}{2}$, $11\frac{1}{4}$..., der einzige, bei dem die Dreiteilung durch Konstruktion bewirkt werden kann. Vergl. die Randbemerkung zu § 48.)

Aufgabe 2. In einem Kreise drei andere gleiche Kreise zu beschreiben, die sich unter einander und zugleich auch den gegebenen Kreis berühren.

Auflösung 1. Beschreibe zwischen den Schenkeln des rechten Winkels einen Bogen und trage darin von beiden Endpunkten aus den Radius als Sehne ab, verbinde die Endpunkte beider Sehnen mit dem Mittelpunkt, so ist dadurch die Dreiteilung vollbracht (§ 134).

Auflösung 2. Beschreibe um den gegebenen Kreis ein regelmäſsiges Dreieck (§ 134 und § 133, Zusatz 1), verbinde dessen Eckpunkte mit dem Mittelpunkt und beschreibe in jedem der entstandenen drei Dreiecke einen Kreis.

137.



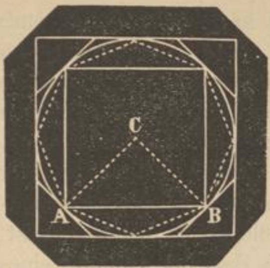
Lehrsatz. Die Fläche eines regelmäſsigen Vielecks ist so groſs, als die eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises, d. i. gleich dem vom Mittelpunkt auf eine der Seiten gefällten Perpendikel CJ ist.

Beweis. Denkt man nach allen Eckpunkten die Radien CA, CB, CD...gezogen, so erhält man eben so viele Dreiecke als das regelmäſsige Vieleck Seiten hat. Weil nun die Höhen dieser Dreiecke, nämlich die vom Mittelpunkt auf die Seiten gefällten Perpendikel alle gleich sind (nämlich = CJ = dem Radius des dem regelmäſsigen Vieleck eingeschriebenen Kreises), so kann man die Grundlinien geradlinig an einander gelegt denken und erhält dann ein einziges Dreieck von der Höhe CJ, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks ist. Arithmetisch ist der Beweis viel kürzer, es ist nämlich der Inhalt $F = \frac{1}{2} CJ.AB + \frac{1}{2} CJ.BD + .. = \frac{1}{2} CJ (AB + BD + ... + GA)$.

Zusatz. Auch der Inhalt eines um den Kreis beschriebenen regelmäſsigen Vielecks ist offenbar gleich der Fläche eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange des Vielecks und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.

137a.

Lehrsatz. Der Flächeninhalt eines Kreises ist so groſs, als der eines Dreiecks, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des Kreises ist.



Beweis. Man denke sich regelmäſsige Vielecke von beliebiger, aber gleicher Seitenzahl. eins in, eins um den Kreis beschrieben, so ist offenbar der Inhalt des innern kleiner, der des äuſsern gröſser, als der des Kreises. Denkt man sich nun die Seitenzahl beider Vielecke immerfort verdoppelt, indem man die jedesmaligen Bögen in Gedanken halbiert, so wird mit jeder folgenden Verdoppelung der Seitenzahl der Kreis in immer engere Grenzen eingeschlossen. Man sieht nämlich, daſs nach jeder Verdoppelung der Seitenzahl der Inhalt eines jeden der beiden Vielecke dem des Kreises immer näher rückt und deshalb ihr Flächenunterschied immer kleiner wird. Könnte man nun durch fortgesetztes Verdoppeln der Seitenzahl beide Vielecke so nahe zusammenrücken lassen, daſs ihr Flächenunterschied = 0 würde, so müssten beide Vielecke notwendig mit einander und mit dem Kreise ganz zusammen fallen. Bei der wirklichen Ausführung dieser Verdoppelung der Seitenzahl z. B. 4, 8, 16, 32 . . . hätten wir allerdings eine unendliche Reihe von Vielecken zu beschreiben und deshalb eine, dem ersten Anschein nach, nie aufhörende Halbierung des jedesmaligen Bogens einer Vielecksseite oder des ihr entsprechenden Centriwinkels vorzunehmen, und das wäre allerdings eine endlose, folglich unmögliche Arbeit. Dessenungeachtet können wir sie aber doch als vollendet denken, ja sie in Gedanken (worauf es hier nur ankommt) selbst schnell vollenden, indem wir uns vorstellen: der Radius CB drehe sich um den Mittelpunkt, um den Winkel BCA zu beschreiben, alsdann beschreibt er erst offenbar die Hälfte dieses Winkels, dann von der übrig bleibenden Hälfte wiederum die Hälfte u. s. w., bis er auf CA fällt, und somit die Unzahl von Halbierungen durchlaufen und die nur endlos scheinende Arbeit wirklich vollbracht hat.*)

Bevor nun aber dieses geschehen, ehe nämlich die immer kleiner werdenden Seiten bis zu Elementen verschwinden und die Vielecke selbst zusammen fallen, sich in stetig gebrochene

---

*) Wegen dieses für Anfänger epineusen Satzes vergleiche man Algebra § 329.

Linien (Kreis) verwandeln, ist immer so nahe an der Grenze (dem Kreise) als man will, der Inhalt eines jeden Vielecks so grofs, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich dem Umfange und dessen Höhe gleich dem Radius des eingeschriebenen Kreises ist, mithin mufs dieser Satz auch in ihrer gröfsten Nähe, für die Grenze, das ist für den Kreis selbst gelten. Der Kreis ist also wirklich so grofs, als ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Peripherie und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

Zusatz. Es folgt zugleich noch: dafs der Umfang eines umgeschriebenen Vielecks gröfser, der eines eingeschriebenen aber kleiner ist, als der Umfang des Kreises, ferner: dafs der Umfang eines eingeschriebenen Vielecks mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl gröfser, der des umgeschriebenen hingegen immer kleiner wird, bis beide ihre Grenze, den Kreis, erreichen und gleich werden (§ 52).

138.

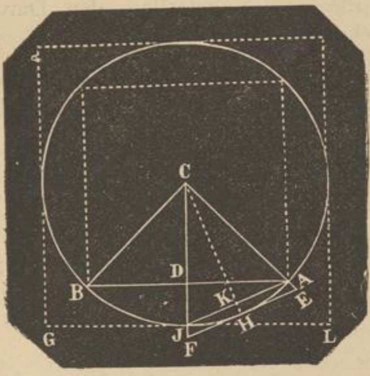
Kreisverhältnis. Berechnung des Umfangs und Inhalts eines Kreises kommt sehr häufig vor, und man mufste deshalb schon frühe darauf sinnen, zur Kenntnis der Zahl zu gelangen, welche angiebt, wie viel mal so grofs der Umfang eines Kreises ist, als sein Durchmesser. Dafs diese Zahl, das sogenannte Kreisverhältnis, zwischen 3 und 4 liegen mufs, folgt schon daraus, dafs der Umfang des eingeschriebenen regelmäfsigen Sechsecks gerade dreimal, der Umfang des umgeschriebenen Vierecks aber viermal so grofs ist, als der Durchmesser (§§ 134 und 133). Nun ist aber der Umfang des Kreises gröfser, als der Umfang des eingeschriebenen Sechsecks und kleiner, als der des umgeschriebenen Vierecks (§ 137, Zusatz). Es kommt also darauf an, den zu 3 hinzukommenden Bruch zu bestimmen, um jenes fragliche Kreisverhältnis zu haben.

Unter den geschichtlich bekannten Mathematikern war Archimedes, 300 v. Chr., der erste, welcher nach einer unvollkommenen, uns nicht geläufigen Arithmetik fand, dafs diese gesuchte Zahl zwischen $3\frac{1}{7}$ und $3\frac{10}{71}$ liegt. Er nahm, als für die damalige Praxis und auch jetzt noch häufig genügend, die erstere ein wenig zu grofse, aber bequemere Zahl $3\frac{1}{7}$. Metius fand diese fragliche Zahl weit genauer $= \frac{355}{113} = 3\frac{16}{113} =$ 3,141592... Durch höhere Mathematik ist dieses Kreisverhältnis noch genauer und schärfer, als je erforderlich, bis auf 1000 Decimalen berechnet worden, die in den ersten Stellen 3,1415926536 lauten.

Wir nehmen von diesem Kreisverhältnis, das irrational ist und als solches sich nie genau durch einen gemeinen Bruch ausdrücken läſst, nur die sieben ersten Decimalen, nämlich: 3,1415927, als für die meisten Fälle vollkommen genügend. In einem Werke der Braminen, betitelt *Ayeen Akbery*, hat man das Verhältnis des Durchmessers zum Umfang wie 1250 : 3927, d. i. wie 1 : 3,1416 gefunden, welches viele Jahrhunderte älter, und genauer ist, als das Archimedische $3\frac{1}{7} =$ 3,142.., welches schon in der dritten Decimale fehlerhaft ist. Das von Metius, $\frac{355}{113} = 3{,}1415929$, weicht erst in der siebenten Decimale von der Wahrheit ab. Das äuſserst mühsame und langweilige Verfahren, durch bloſse Elementar-Arithmetik diese Zahl zu finden, lehrt der folgende Paragraph.

Bei andeutenden Kreisrechnungen in Formeln pflegt man, der Kürze wegen, statt dieser Zahl den griechischen Buchstaben π (sprich: pih) zu setzen, wo man dann, je nachdem es die geringere oder gröſsere Genauigkeit erfordert, statt π die Zahl $3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$ oder 3,1416 oder 3,1415927 nimmt.

139.



Berechnung der Zahl π. Man setze, der bequemeren Rechnung halber, den Radius eines Kreises, AC = 1, so ist, nach § 107, die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks AB $= \sqrt{2} = 1{,}41421356$. Die Seite des umgeschriebenen Vierecks ist offenbar dem Durchmesser gleich, also $GL = 2$. Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Vierecks 2,8284271 mal und der halbe Umfang des umgeschriebenen Vierecks viermal so grofs, als der Radius, und eben so viel mal so grofs sind die ganzen Umfänge der erwähnten Vierecke, als der Durchmesser.

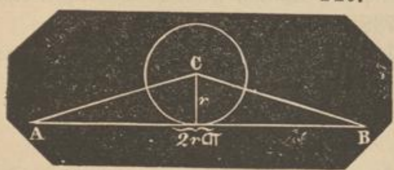
Aus den Seiten der ein- und umgeschriebenen Vierecke berechne man nun die Seiten der ein- und umgeschriebenen Achtecke, indem man zuerst das Perpendikel CD aus $AC = 1$ und $AD = \frac{1}{2} AB = 0{,}7071067\ldots$ berechnet, nämlich $CD = \sqrt{1 - \overline{AD}^2}$, dann hat man auch $DJ = 1 - CD$. Aus den beiden Katheten DJ und AD findet man die eingeschriebene Achteckseite $AJ = 0{,}7653668\ldots$. Um hieraus die umgeschriebene Achteckseite zu erhalten, berechne man erst das Perpendikel $CK = \sqrt{1 - (\frac{1}{2} AJ)^2}$, dann hat man aus den ähnlichen Dreiecken CAJ und CEF die Proportion: $CK : CH = AJ : EF$, und hieraus folgt die umgeschriebene Achteckseite $EF = 0{,}8284271\ldots$ Mithin ist der halbe Umfang des eingeschriebenen Achtecks 3,0614674 .. mal, der des umgeschriebenen Achtecks 3,3137085 ... mal so grofs, als der Radius, also die ganzen Umfänge eben so viel mal so grofs, als der Durchmesser.

Fährt man auf diese mühsame Weise fort und berechnet die Seite des ein- und umgeschriebenen 16-Ecks, 32-Ecks u. s. w., so würde man finden, dafs, den Durchmesser = 1 gesetzt (vergleiche § 194):

Der Umfang des eingeschriebenen regelmäfsigen		Der Umfang des umgeschriebenen regelmäfsigen
4-Ecks,	= 2,8284271 ...	4,
8 „	= 3,0614674 ...	3,3137085 ...
16 „	= 3,1214451 ...	3,1825979 ...
32 „	= 3,1365485 ...	3,1517249 ...
64 „	= 3,1403311 ...	3,1441184 ...
⋮	⋮	⋮
8192 „	= 3,1415925 ...	3,1415928 ...
16384 „	= 3,1415926 ...	3,1415927 ...

Die gesuchte Zahl π, welche angiebt, wie viel mal so grofs der Umfang des Kreises ist, als der Durchmesser, fällt also zwischen 3,1415926...und 3,1415927...(§ 137, Zusatz) und ist folglich bis auf sieben Decimalen genau: $\pi = 3{,}1415927$. Multipliziert man mit dieser Zahl den Durchmesser, so erhält man die Länge der Peripherie bis auf ein Zehnmilliontel des Durchmessers genau, z. B. bis auf $\frac{3}{4}$ mm genau, wenn der Durchmesser 7420,44 m (1 geographische Meile) wäre.

140.



Kreisrechnungen. Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, U den Umfang und F den Inhalt eines Kreises, so findet man Umfang und Inhalt nach folgenden Formeln:

$$\mathrm{U} = 2\pi r = \pi d \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$\mathrm{F} = \pi r^2 = \frac{\pi d^2}{4} \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

Die erste Formel, nach welcher man den Durchmesser d oder $2r$ mit π multiplizieren mufs, um den Umfang des Kreises zu erhalten, folgt schon aus § 139. Da nun die Fläche eines Kreises gleich der eines Dreiecks, CAB, ist, dessen Grundlinie AB gleich dem Umfang $2\pi r$ und dessen Höhe gleich dem Radius r ist (§ 137), so ist, indem man die halbe Grundlinie $\frac{1}{2}\mathrm{AB} = \pi r$ mit der Höhe r multipliziert (§ 102), die Fläche des Kreises $\mathrm{F} = r.\pi r = \pi r^2$ (sprich: „pih r quadrat").

Zusatz 1. Es folgt aus vorstehenden Formeln, dafs sich die Umfänge zweier Kreise wie ihre Radien, oder wie ihre Durchmesser, ihre Inhalte aber sich wie die Quadrate derselben verhalten.

Zusatz 2. Dividiert man den Umfang eines Kreises durch π, so erhält man den Durchmesser d. Dividiert man den Inhalt durch π und zieht aus dem Quotienten die Quadratwurzel, so erhält man den Radius.

In Zeichen:

$$d = \frac{\mathrm{U}}{\pi} \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

$$r = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\pi}} \ldots\ldots\ldots\ldots (4)$$

Aufgabe 1. Man berechne die Umfänge dreier Kreise, deren Radien 5 m 38 cm; $3\frac{2}{3}$ m und $\frac{1}{2}$ m sind.

Bei diesem und allen folgenden Übungsbeispielen ist, der kürzern Rechnung halber, immer das Archimedische Kreisverhältnis genommen, nämlich $\pi = 3\frac{1}{7} = \frac{22}{7}$.

Aufgabe 2. Man berechne die Flächeninhalte der Kreise, deren Radien $3\frac{2}{3}$ m; 0,97 m; 4,05 cm und 1 m sind.

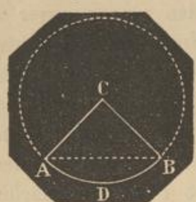
Aufgabe 3. Man suche die Radien zweier Kreise, deren Inhalte 54,62 qm; 5 qm 738 qcm.

Antwort. 33 m $81\frac{5}{7}$ cm; $23\frac{1}{21}$ m; $3\frac{1}{7}$ m; 42,254 qm; 2,9571 qm; 51,5507 qcm; $3\frac{1}{7}$ qm; 4,168823 m; 1,270586 m.

141.

Aus dem Vorhergehenden ergiebt sich nun leicht, wie man Teile von einem Kreise berechnen muſs.

1) Ist die Länge eines in Graden gegebenen Bogens ADB zu berechnen, so muſs man den 360sten Teil vom ganzen Umfange so oft nehmen, als der Bogen Grade enthält.



2) Ist ein Kreisausschnitt, d. i. ein von zwei Radien und einem Bogen eingeschlossener Teil vom Kreise, wie CADB zu berechnen, so nimmt man den 360sten Teil von der ganzen Kreisfläche so oft, als der Winkel am Mittelpunkt oder der Bogen ADB Grade enthält. — Ist der Bogen ADB in Länge gegeben (gemessen), so betrachte man den Ausschnitt wie ein Dreieck, dessen Grundlinie gleich der Länge des Bogens und dessen Höhe gleich dem Radius ist.

3) Hat man endlich einen Kreisabschnitt, d. i. einen von einer Sehne und einem Bogen begrenzten Teil, ADBA, zu berechnen, so muſs man von dem Ausschnitt CADB das Dreieck CAB subtrahieren.

Ist der Kreisabschnitt nicht gröſser als der Halbkreis und setzt man die begrenzende Sehne $= s$, die Höhe (Verbindungslinie der Mitte der Sehne und der Mitte des Bogens) $= h$, so giebt die nachstehende Formel (von Rich. Schurig) die Fläche F des Abschnittes sehr genau.

$$F = \frac{h}{3}\left[\sqrt{s^2 + 2{,}63616\, h^2} + \sqrt{s^2 + 0{,}56384\, h^2}\right].$$