

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Energie, Arbeit

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

Verhältnisse des Stoßes, die symbolische Form 712 den gewöhnlichen Ausdruck dieser Anpassung.

- 714 **Folgerung 1.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung in der Richtung jeder möglichen Bewegung gleich der Komponente des Stoßes nach derselben Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
- 715 **Folgerung 2.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung nach jeder freien Koordinate gleich der Komponente des Stoßes nach dieser Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems.
- 716 **Folgerung 3.** Die Geschwindigkeitskomponente eines gestoßenen Systems nach jeder Koordinate der absoluten Lage ändert sich um einen Betrag, welcher gleich ist der Komponente des wirkenden Stoßes nach der gleichen Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch immer die Zusammenhänge des Systems sind.
- 717 **Anmerkung.** Auch ohne Kenntnis, oder ohne vollständige Kenntnis des Zusammenhangs der Massen eines Systems können wir demnach doch stets sechs Gleichungen für die Bewegung des Systems unter dem Einfluß eines Stoßes angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die sechs Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$, welche wir in 402 einführt, so stellen die sechs Gleichungen, welche wir erhalten, die Anpassung des Prinzips des Schwerpunkts und der Flächen an die besonderen Verhältnisse des Stoßes dar.

Energie, Arbeit.

- 718 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems infolge eines auf das System ausgeübten Stoßes wird die Arbeit des Stoßes genannt.
Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Stoßes wird als negative Zunahme gerechnet. Die Arbeit eines Stoßes kann demnach positiv oder negativ sein.
- 719 **Folgerung.** Die Arbeit eines Stoßes ist das Zeitintegral

der Arbeit, welche diejenige Kraft leistet, deren Zeitintegral der Stoß ist.

Lehrsatz. Die Arbeit eines Stoßes ist gleich dem Produkt 720 aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente des Mittelwertes der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit des Systems.

Denn welches auch in Wahrheit der Verlauf der wirkenden Kraft während der Stoßzeit und die Bewegung des Systems während dieser Zeit ist, die schließliche Bewegung und also die Arbeit des Stoßes wird dieselbe sein, als wirkte die Kraft mit konstanter mittlerer Größe in der Richtung des Stoßes selber. Machen wir aber diese vereinfachende Voraussetzung, so wird erstens die Größe der wirkenden Kraft gleich der Größe des Stoßes dividiert durch die Stoßzeit. Zweitens geht die Geschwindigkeit gleichmäßig sich ändernd aus dem Anfangs- in den Endwert über, und ihr Mittelwert ist das arithmetische Mittel ihres Anfangs- und ihres Endwertes. Die Komponente der während des Stoßes zurückgelegten Bahnstrecke in Richtung des Stoßes ist aber gleich der Komponente jenes Mittelwertes, multipliziert mit der Stoßzeit. Berechnen wir nun nach 513 die von der Kraft während ihrer Dauer, also die vom Stoß geleistete Arbeit, so hebt sich die Stoßzeit heraus, und es folgt die Behauptung.

Anmerkung. Unter Benutzung der bisherigen Bezeichnung 721 ist der analytische Ausdruck des Lehrsatzes die Aussage, daß die Arbeit des Stoßes gleich sei:

$$\frac{1}{2} \sum_1^r J_q (\dot{p}_{q_1} + \dot{p}_{q_0}) \cdot$$

Folgerung 1. Die Arbeit eines Stoßes ist gleich dem 722 Produkt des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der ursprünglichen Geschwindigkeit, vermehrt um das halbe Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeitsänderung.

Der analytische Ausdruck hierfür ist die Aussage, es sei die Arbeit des Stoßes gleich:

$$\sum_1^r J_q \dot{p}_{q_0} + \frac{1}{2} \sum_1^r J_q (\dot{p}_{q_1} - \dot{p}_{q_0}) ,$$

welche Aussage mit 721 übereinstimmt.

- 723 **Folgerung 2.** Die Arbeit eines Stoßes, welcher ein ruhendes System in Bewegung setzt, ist gleich dem halben Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeit.

Denn sind die \dot{p}_{q_0} gleich Null, so ist die Arbeit des Stoßes gleich:

$$\frac{1}{2} \sum_1^r J_q \dot{p}_{q_1} .$$

- 724 **Lehrsatz.** Ein ruhendes System setzt sich unter dem Einfluß eines Stoßes in derjenigen Richtung in Bewegung, bei welcher der Stoß die meiste Arbeit leistet, d. h. bei welcher er mehr Arbeit leistet, als er leisten würde, wenn wir durch Vermehrung der Zusammenhänge des Systems eine andere Richtung erzwingen. (Sogenannter Satz von BERTRAND.)

Denn ist J die Größe des Stoßes, v die Größe der erzeugten Geschwindigkeit, ε der Winkel zwischen beiden, so ist für jeden ursprünglichen oder auch vermehrten Zusammenhang nach 714:

$$v = \frac{J}{m} \cos \varepsilon ,$$

also die Arbeit des Stoßes nach 723 gleich:

$$\frac{1}{2} J v \cos \varepsilon = \frac{J^2}{2m} \cos^2 \varepsilon .$$

Der Winkel ε aber nimmt für die natürliche Wirkung des Stoßes nach 710 den kleinsten mit dem ursprünglichen Zusammenhang verträglichen Wert an, ε kann also durch Vermehrung der Zusammenhänge nur vergrößert, $\cos^2 \varepsilon$ also nur verkleinert werden, woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Die Energie, welche ein auf ein ruhendes System treffender Stoß in dem System erzeugt, fällt um so größer aus, je mehr Zusammenhänge des Systems wir auflösen. Der größte mögliche Wert jener Energie, welcher aber nur durch Auflösung aller Zusammenhänge erreicht wird, ist gleich dem Quadrat der Größe des Stoßes, dividiert durch die doppelte Masse des Systems. 725

Zusammenstoß zweier Systeme.

Erläuterungen.

1. Wir sagen, zwei Systeme stoßen zusammen, wenn sie sich so verhalten, als hätten sie während einer sehr kurzen Zeit eine Koppelung erfahren. Diese Koppelung nehmen wir als eine direkte an, indem wir geeignete Wahl der Koordinaten beider Systeme voraussetzen (452). 726

2. Eine solche vorübergehende Koppelung haben wir aufzufassen als eine dauernde Koppelung beider Systeme mit einem dritten, unbekanntem System von solcher Beschaffenheit, daß es im allgemeinen keinen Einfluß hat auf die Bewegung jener, daß aber in unmittelbarer Nachbarschaft solcher Lagen, in welchen gewisse Koordinaten des einen Systems gewissen Koordinaten des anderen Systems gleich werden, es diese Koordinaten vorübergehend gleich zu bleiben zwingt. Diese vorübergehend gleichbleibenden Koordinaten nennen wir die gemeinsamen Koordinaten beider Systeme. 727

3. Vor und nach dem Zusammenstoße sind die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten eines jeden der beiden zusammenstoßenden Systeme lediglich den Bedingungsgleichungen ihres eigenen Systems unterworfen. Während des Stoßes aber sind die Änderungsgeschwindigkeiten der gemeinsamen Koordinaten auch an die Koppelungsgleichungen gebunden. Diese Änderungsgeschwindigkeiten müssen also, wie die Koordinaten selbst, während des Stoßes beziehlich gleich geworden und eine Zeitlang gleich geblieben sein. Die 728