Ausführliches Lehrbuch der Elementar-Geometrie

Lübsen, Heinrich B.

Leipzig, 1885

Zweiter Teil. Körperliche Geometrie

urn:nbn:de:bsz:31-264714

Zweiter Teil.

Körperliche Geometrie.

Vierzehntes Buch.

Von der Lage der Ebenen.

142.

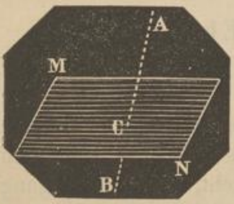
So wie die ebene Geometrie nur solche räumliche Gröſsen betrachtet, deren sämtliche Punkte in einerlei Ebene liegen und hierbei zuerst von der geraden Linie ausgeht, dann die Neigung zweier Linien gegen einander bestimmen lehrt, hierauf zu geschlossenen Figuren fortschreitet, die wichtigsten derselben besonders betrachtet, von den Eigenschaften, Ausmessung und Ähnlichkeit derselben handelt etc., so wird auf ähnliche Weise die sogenannte körperliche Geometrie (Stereometrie) sich mit solchen räumlichen Gröſsen beschäftigen, deren Punkte nicht alle in einerlei Ebene liegen, und hierbei zuerst die Lage der Ebenen gegen einander betrachten, dann zu geschlossenen Figuren, nämlich zu ringsum von allen Seiten durch lauter Ebenen oder krummen Flächen begrenzten Räumen (Körper) übergehen, sie ausmessen lehren etc.

Obwohl nun die körperliche Geometrie fast nur eine Anwendung der ebenen Geometrie ist, so bieten doch ihre ersten Sätze dem Anfänger deshalb Schwierigkeiten dar, weil in perspektivischer Zeichnung (indem das, was auſserhalb der Bildebene liegt, doch auf diese gezeichnet werden muſs) nicht alle Teile einer Figur im richtigen Verhältnis erscheinen. Indessen kann man der Anschauung auf verschiedene Weise zu Hilfe kommen, indem man z. B., statt der geometrischen Körper, physische Körper aus irgend einer weichen Masse schneidet und formt.

143.

Man pflegt eine Ebene gewöhnlich durch ein Viereck anzudeuten und durch zwei gegenüber stehende Buchstaben zu bezeichnen. So wie man eine gerade Linie nach beiden Enden hin bis ins Unendliche verlängert denken kann, so kann man sich auch eine Ebene nach allen Seiten bis ins Unendliche ausgedehnt denken. Versinnlichen kann man eine Ebene und deren Lage durch ein Blatt Papier, von dessen Dicke und Unebenheiten man abstrahiert.

144.



Lehrsatz. Eine gerade Linie kann eine Ebene nur in einem Punkt schneiden.

Beweis. Sei MN eine Ebene und AB eine durch sie hindurch gehende gerade Linie.*) Hätte diese Linie außer dem Durchschnittspunkt C noch einen zweiten mit der Ebene gemein, so müßte sie in ihrer ganzen Ausdehnung in derselben bleiben (§ 5), weil sie dieselbe aber schneiden soll, so kann dies nur in einem Punkt geschehen, weil beide, sowohl Linie als Ebene, keine Dicke haben.

145.

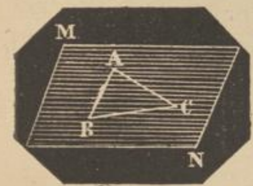
Lehrsatz. Durch zwei Punkte, A, B, oder durch die sie verbindende gerade Linie AB sind unzählig viele Ebenen möglich.

Beweis. Zuerst kann man sich eine durch A und B gehende Ebene BM, denken und sich sodann vorstellen, sie werde um AB, wie um eine Achse, gedreht (so

*) Sei MN ein Stück der Bildebene, so liegt nur ein Punkt, C, der Linie AB in dieser Ebene, alle übrigen Punkte der Linie AB liegen außerhalb derselben, teils oberhalb, teils unterhalb. Man muß sich also die Linie AB gegen die Ebene aufgerichtet denken. Wir werden solche Linien immer punktieren.

wie man ein Blatt in einem Buche wendet), alsdann kommt sie in unzählig verschiedene Lagen. Statt jeder dieser verschiedenen Lagen kann man sich aber eine andere Ebene, BM′, BM″,... durch AB gelegt*) denken.

146.



Lehrsatz. Durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte ist immer eine, aber nur eine Ebene möglich, und die Lage derselben vollkommen bestimmt.

Beweis. Zuerst kann man sich durch zwei der festen Punkte, z. B. durch B und C, eine Ebene gelegt und diese dann um BC gedreht denken, bis sie auch durch den dritten Punkt A geht.

Weil nun die Ebene durch alle drei Punkte A, B, C geht, so geht sie auch durch die drei Seiten des Dreiecks ABC (§ 5). Wollte man noch eine zweite Ebene durch die drei Punkte A, B, C legen, so müſste sie auch wieder durch die drei Seiten des Dreiecks A, B, C gehen, folglich mit der zuerst hindurch gelegten in ihrer ganzen Ausdehnung zusammen fallen. Es verhält sich hier mit der Ebene ähnlich, wie mit der geraden Linie. Durch einen Punkt sind unzählig viele gerade Linien möglich, durch zwei Punkte aber nur eine, deren Lage hierdurch völlig bestimmt ist. Durch ein oder zwei Punkte sind unzählig viele Ebenen möglich, durch drei aber nur eine, deren Lage dadurch bestimmt ist.

Zusätze. 1) Wenn zwei Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemein haben, so fallen sie zusammen und bilden nur eine Ebene.

2) Man sagt von mehreren Punkten im Raume, durch welche eine Ebene gelegt werden kann, sie liegen in dieser Ebene oder in einerlei Ebene. — Durch je drei beliebige Punkte im Raume (z. B. drei Turmspitzen) kann man immer eine Ebene gelegt denken, aber nicht durch je vier (viel weniger durch fünf, sechs etc.), es sei denn, daſs der vierte Punkt schon mit

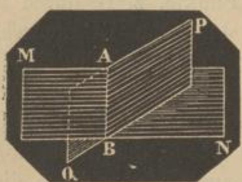
*) Bei Ebenen bedeutet das Wort legen (durch Punkte hindurch führen) dasselbe, was bei Linien ziehen heiſst.

den drei andern in einerlei Ebene läge. Es erklärt sich hieraus, weshalb ein dreibeiniger Tisch immer fest steht, wie uneben auch der Grund, worauf er steht, sein möge.

3) Ferner ist klar, daſs durch zwei sich schneidende Linien oder durch einen Winkel immer eine Ebene möglich und der Lage nach bestimmt ist, eben so durch zwei Parallellinien, welche dem Begriffe zufolge immer in einer Ebene liegen.

Zwei Linien, welche kreuzweis über einander weggehen, liegen nicht in einerlei Ebene, sind also auch nicht parallel, obgleich sie sich nicht schneiden.

147.



Lehrsatz. Der Durchschnitt zweier Ebenen ist immer eine gerade Linie.

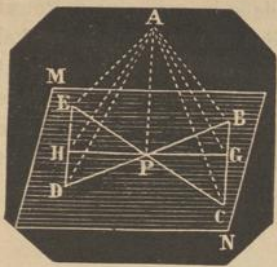
Beweis. Seien MN, PQ die beiden sich schneidenden Ebenen. Weil nun sämtliche Punkte des Durchschnitts beiden Ebenen gemein sind, so müssen sie auch in gerader Linie liegen; denn, lägen nur drei davon nicht in gerader Linie, so müſsten auch, weil diese Punkte in beiden Ebenen zugleich liegen, und durch drei nicht in gerader Linie liegende Punkte nur eine Ebene möglich ist, beide Ebenen zusammen fallen, und könnten sich nicht schneiden.

148.

Erklärung. Wenn eine Linie, AP (siehe folgende Figur), so auf einer Ebene, MN, steht, daſs sie mit allen durch den Fuſspunkt P in der Ebene gezogenen Linien PB, PC, PD... rechte Winkel bildet, so sagt man: die Linie stehe senkrecht (normal) auf der Ebene, und umgekehrt: die Ebene stehe senkrecht auf der Linie. In jedem andern Falle heiſsen beide schräg gegen einander.

149.

Lehrsatz. Eine Linie steht senkrecht auf einer Ebene, wenn sie nur auf zwei sich schneidenden Linien in derselben senkrecht steht.



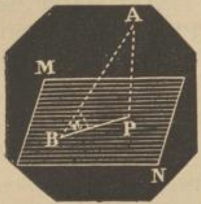
Beweis. Seien BD, CE die beiden in der Ebene MN liegenden und sich in P schneidenden Linien, und AB auf beiden senkrecht, so dafs $\angle APB = \angle APC = 90^0$,*) so haben wir nur zu zeigen, dafs AP dann auch auf jeder andern beliebig durch P gezogenen Linie, HG, senkrecht steht.

Weil nach Voraussetzung $\angle APB = \angle APC = 90^0$, so sind auch ihre Nebenwinkel APD und APE Rechte (§ 28). Nimmt man nun $PB = PC = PD = PE$, zieht BC und DE, so ist zuerst $\triangle BPC \cong \triangle DPE$ (§ 34), dann $\triangle BPG \cong \triangle DPH$ (§ 37); hieraus folgt: $PG = PH$ und $BG = DH$. Denkt man sich jetzt die Punkte B, C, D, E mit A verbunden, so erhält man vier kongruente, bei P rechtwinklige Dreiecke, nämlich $\triangle APB \cong \triangle APC \cong \triangle APD \cong \triangle APE$, weil sie alle eine Kathete, AP, gemein und die andern Katheten PB, PC, PD, PE gleich haben, es sind also auch ihre schräg gegen die Ebene MN aufgerichteten Hypotenusen gleich, nämlich: $AB = AC = AD = AE$; mithin sind nun auch die schräg gegen die Ebene MN aufstehenden Dreiecke ABC und ADE kongruent und gleichschenklig, also auch die Winkel an den beiden Grundlinien BC und DE einander gleich, daher $\angle ABG = \angle ADH$. Denkt man jetzt noch AG und AH gezogen, so ist erstlich $\triangle ABG \cong \triangle ADH$ (§ 34). (Denn wie vorhin bewiesen, ist $BG = DH$, $AB = AD$ und $\angle ABG = \angle ADH$, folglich auch $AG = AH$. Das Dreieck AHG ist also ein gleichschenkliges und P die Mitte der Grundlinie, folglich steht auch AP auf HG senkrecht (§ 44), und da dies für jede andere durch P gezogene Linie gilt, so steht auch AP auf der Ebene MN senkrecht (§ 148).

*) Die nicht in der Ebene MN liegenden Winkel und Linien können in der Zeichnung nicht in natürlicher Gröfse erscheinen, deshalb mufs hier die Einbildungskraft zu Hilfe kommen. Um sich diesen und ähnliche Sätze zu veranschaulichen, nehme man die Oberfläche des Tisches als die Ebene MN, ziehe darauf die Linien BD, CE, und stecke senkrecht auf diese in P einen Stift ein. Die übrigen, aufwärts gehenden Linien, wie AB, AC etc. kann man sich leicht hinzudenken, oder ebenfalls durch schräg eingesteckte Stifte anschaulich machen.

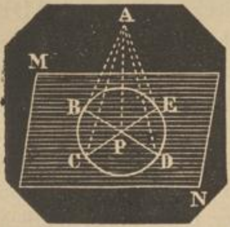
Zusatz. Es ist für sich klar, daſs 1) von einem Punkt auſserhalb oder innerhalb einer Ebene nur ein Perpendikel auf dieser Ebene möglich ist; 2) daſs die von einem Punkt an eine Ebene gehende Senkrechte kürzer ist, als jede Schräge. — Unter Entfernung eines Punktes von einer Ebene versteht man immer das auf diese (nötigenfalls erweitert gedachte) Ebene gefällte Perpendikel.

150.



Erklärung. Die Neigung einer schrägen Linie, AB, gegen eine Ebene, MN, wird immer durch den spitzen Winkel bestimmt, der entsteht, wenn man von einem beliebigen Punkt, A, der Schrägen ein Perpendikel, AP, auf die Ebene fällt, und den Fuſspunkt P desselben mit dem Fuſspunkt B der Schrägen verbindet. Durch diesen Winkel ABP ist dann die Neigung der Schrägen gegen die Ebene bestimmt.

151.



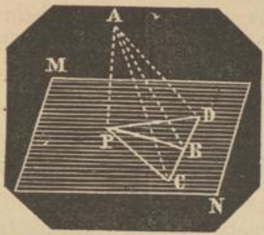
Lehrsatz. Wenn von einem Punkte, A auſserhalb der Ebene, mehrere Schrägen von gleicher Länge an dieselbe gehen, so liegen die Fuſspunkte dieser gleichen Schrägen alle in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt des von demselben Punkt A auf die Ebene gefällten Perpendikels ist.

Beweis. Sei $AB = AC = AD =$ etc. und AP perpendikulär auf MN. Denkt man nun P mit B, C, D . . verbunden, so sind alle entstehenden bei P rechtwinkligen Dreiecke einander kongruent, weil sie nach Voraussetzung gleiche Hypotenusen und eine Kathete, AP, gemeinschaftlich haben. Daher:

$$PB = PC = PD = \text{etc.} \quad (\S\ 107 \text{ oder } \S\ 43.)$$

Zusatz. Bestimmt man in einer Ebene drei Punkte, B, C, D, welche von einem auſserhalb liegenden Punkt, A, gleich weit entfernt sind, und beschreibt dann durch diese drei Punkte einen Kreis, so ist der Mittelpunkt desselben der Fuſspunkt des von A auf die Ebene gefällten Perpendikels.

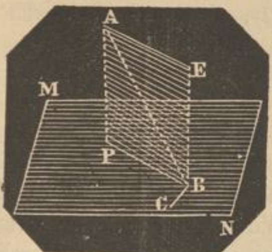
152.



Lehrsatz. Wenn man von einem Punkte, A, eine Schräge, AB, und eine Senkrechte, AP, an eine Ebene zieht, die Fuſspunkte B und P verbindet, und auf dieser Verbindungslinie, im Fuſspunkt der Schrägen ein Perpendikel, CB, errichtet, so ist dieses auch senkrecht auf der Schrägen AB. In Zeichen: Wenn AP senkrecht auf der Ebene MN und $\angle$ CBP $= 90^0$ ist, so ist auch $\angle$ CBA $= 90^0$.

Beweis. Verlängere CB, so daſs BD = BC, ziehe PC, PD, so sind die bei B rechtwinkligen Dreiecke PBC und PBD kongruent, daher PD = PC. Verbindet man jetzt C und D mit A, so sind die bei P rechtwinkligen Dreiecke APC und APD, wegen ihrer gleichen Katheten, kongruent; daher AC = AD. Das Dreieck ACD ist also gleichschenklig, und da B die Mitte der Grundlinie CD ist, so ist auch $\angle$ ABC $= 90^0$.

153.



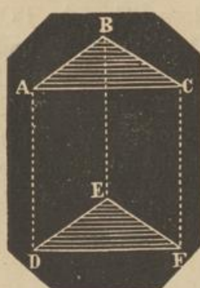
Lehrsatz. Wenn eine Linie senkrecht auf einer Ebene steht, so ist auch jede damit Parallele auf der Ebene senkrecht.

Beweis. Sei AP senkrecht auf MN, und EB ∥ AP. Alsdann kann man sich durch die Parallelen AP, EB eine Ebene, EP, gelegt denken (§ 146, 3), welche die Ebene MN in der geraden Linie PB schneidet. Weil nun nach Voraussetzung $\angle$ APB $= 90^0$ und EB ∥ AP, so ist auch $\angle$ EBP $= 90^0$. Denkt man sich nun CB auf PB senkrecht, so ist CB auch senkrecht auf der Schrägen AB (§ 152), mithin ist auch CB senkrecht auf der durch BP und BA gelegten Ebene, also auch senkrecht auf EB (§ 149). Die mit AP Parallele EB macht also mit BP und BC rechte Winkel, ist also senkrecht auf der Ebene MN (§ 149).

Zusatz 1. Da in einem Punkte nur ein Perpendikel auf einer Ebene möglich ist, so folgt, daſs, wenn man umgekehrt in einem Punkte, B, ein Perpendikel EB auf der Ebene MN errichtet, dieses mit jeder andern auf MN senkrechten Linie, AP, parallel sein muſs.

Zusatz 2. Wenn zwei Linien mit einer dritten einzeln parallel sind, so sind sie unter einander parallel. Denn denkt man sich durch die dritte Linie eine senkrechte Ebene gelegt, so steht auf dieser auch jede der beiden Parallelen senkrecht.

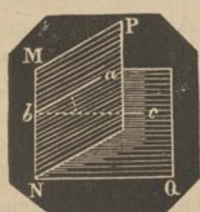
154.



Lehrsatz. Wenn die Schenkel zweier, nicht in einer Ebene liegenden Winkel, BAC und EDF, nach denselben Seiten hin parallel sind, so sind die Winkel gleich.

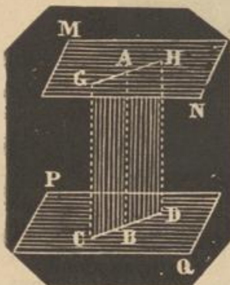
Beweis. Man denke sich von den parallelen Schenkeln gleiche Stücke abgeschnitten, AB = DE und AC = DF, dann BC und EF gezogen, so wie auch AD, BE, CF. Dann ist AD $\underline{\parallel}$ BE und AD $\underline{\parallel}$ CF. (§ 93); folglich CF $\underline{\parallel}$ BE (§ 153, 2), also auch BC = EF. Mithin ist $\triangle$ BAC $\cong$ $\triangle$ EDF (§ 41) und hieraus: $\angle$ BAC = $\angle$ EDF.

155.



Erklärung. Unter Neigung zweier Ebenen, MQ, PN, gegen einander versteht man stets den Winkel, der entsteht, wenn man auf ihrer gemeinschaftlichen Durchschnittslinie MN in einem beliebigen Punkt, *b*, zwei Perpendikel errichtet, wovon das eine, *bc*, in der Ebene MQ und das andere, *ba*, in der Ebene PN liegt. Da der Punkt *b* in der Durchschnittslinie MN zufolge § 154 ganz willkürlich genommen werden kann, so ist durch den Winkel *abc* die Neigung der beiden Ebenen gegen einander vollkommen bestimmt. Denkt man sich die obere Ebene PN um die Durchschnittslinie MN so lange gedreht, bis der Winkel *abc* ein rechter wird, so sind die Ebenen senkrecht gegen einander.

156.



Lehrsatz. Wenn zwei Ebenen, MN, PQ, auf einer und derselben Linie, AB, senkrecht stehen, so sind sie parallel.

Beweis. Durch die Linie AB denke man sich noch eine dritte Ebene, GD, gelegt und diese um AB ganz herum gedreht, so sind ihre jedesmaligen Durchschnittslinien in den beiden Ebenen MN, PQ, z. B. die Durchschnitte GH und CD, weil auf AB senkrecht (§ 148) und in einer Ebene, GD, liegend, stets parallel, also auch die Ebenen MN und PQ, in welchen die Durchschnittslinien liegen.

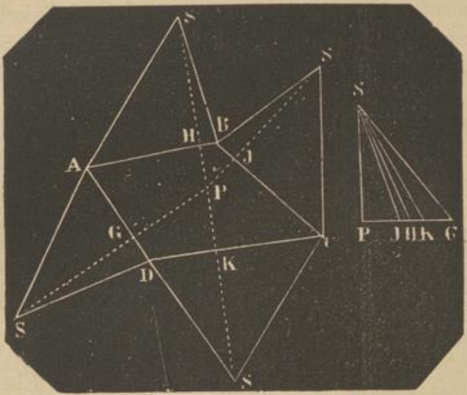
Zusatz 1. Wenn zwei parallele Ebenen von einer dritten geschnitten werden, so sind die Durchschnitte parallel, die innern Wechselwinkel und korrespondierenden Winkel gleich etc.

Zusatz 2. Wenn zwei sich schneidende Ebenen zugleich auf einer dritten Ebene senkrecht stehen, so ist auch ihre Durchschnittslinie auf der dritten Ebene senkrecht. Es seien z. B. die zwei an einander stofsenden ebenen Wände eines Zimmers auf dem ebenen Fufsboden (oder Decke) senkrecht, so ist es auch ihr Durchschnitt. (§ 149 und § 155).

Anmerkung. Die vorhergehenden Sätze kommen oftmals zur Anwendung, namentlich beruht auf ihnen die Theorie sowohl der perspektivischen, als auch der geometrischen Zeichnenkunst.

157.

*) **Aufgabe.** Es ist ein beliebiges ebenes Vieleck, z. B. ein Viereck, ABCD, gegeben, auf der Ebene dieses Vierecks denke man sich im Punkte P ein (in der Zeichnung nicht angegebenes) Perpendikel von gegebener Länge, SP, errichtet. Man soll nun über die Seiten des Vierecks Dreiecke zeichnen,



die gegen das Viereck aufgeklappt im Endpunkt S des Perpendikels SP zusammenstoſsen und ein schlieſsendes Dach bilden.

Auflösung. Vom Fuſspunkte P des Perpendikels SP (in der Zeichnenkunst heiſst P die Projektion von S) fälle auf die Seiten des Vierecks die Perpendikel PG, PH, PJ, PK und zeichne dann rechtwinklige Dreiecke, welche diese Perpendikel und die Höhe des Daches SP zu Katheten haben, so sind die Hypotenusen die nötigen Verlängerungen der von P auf die Seiten des Vierecks gefällten Perpendikel. Die Winkel SGP, SHP... geben zugleich die Neigungen der Dächer SAD, SAB... gegen die Ebene des Vierecks ABCD an. (§§ 152, 155.)

Zusatz. Halbiert man zwei benachbarte Winkel des Vielecks, z. B. A und B, und nimmt den Durchschnittspunkt der Halbierungslinien als Projektion der Spitze des zu konstruierenden Daches, so würden drei Dächer, SAB, SAD, SBC, gleiche Neigung gegen die Grundfläche ABCD bekommen. Soll diese Neigung 45° betragen, so muſs man die Höhe des Daches gleich den, vom bestimmten Projektionspunkt auf die drei Seiten AB, AD, BC gefällten und gleichen Perpendikeln nehmen.

Fünfzehntes Buch.

Von den Körpern und deren Berechnung.

158.

Erklärungen. Körper heiſst jeder nach allen Richtungen hin begrenzte Raum. Die Summe aller ihn begrenzenden Flächen heiſst die Oberfläche des Körpers. So wie aber eine Fläche durch eine einzige Linie begrenzt sein kann, z. B. der Kreis, so kann auch ein Körper durch eine einzige (krumme) Fläche begrenzt sein, z. B. die Kugel. Auſser den, später näher zu erwähnenden drei runden (krummflächigen) Körpern: Cylinder, Kegel und Kugel, beschäftigt sich aber die Elementar-Geometrie nur mit solchen Körpern, welche von lauter ebenen Flächen (Ebenen) begrenzt werden.

Die Linien, in welchen sich irgend zwei den Körper begrenzende Ebenen schneiden, heiſsen Kanten. An den Punkten, in welchen drei oder mehrere Grenzebenen zusammenstoſsen, entsteht das, was man, von auſsen betrachtet, eine Ecke, von innen gesehen, einen körperlichen Winkel nennt. Um eine Ecke oder einen körperlichen Winkel zu bilden, sind also wenigstens drei durch einerlei Punkt gehende Ebenen erforderlich.

Ein Körper wird manchmal nach der Anzahl der ihn begrenzenden ebenen Flächen benannt, ein achtflächiger Körper z. B. wird von acht Flächen begrenzt. Von weniger als vier
+ [illegible]
Ebenen kann ein+ Körper nicht begrenzt sein. Körper, welche in der Praxis häufig vorkommen, und deren Namen deshalb wohl zu merken, sind folgende:

1) **Prisma**. Jeder Körper, begrenzt durch zwei kongruente Vielecke, welche man die Grundflächen nennt, deren gleichliegende Seiten parallel und dessen andere (die gleichliegenden Seiten der Grundflächen verbindende) Flächen, Seitenflächen genannt, folglich Parallelogramme sind (§ 93), heiſst ein Prisma, und zwar ein dreiseitiges, vierseitiges etc., je nachdem die Grundflächen Dreiecke, Vierecke etc. sind. Die Kanten, in welchen irgend zwei Seitenflächen sich schneiden, nennt man hier Seitenlinien. Ein jedes Prisma kann man beschrieben denken, indem die eine untere Grundfläche sich an zwei parallelen Seitenlinien und stets parallel mit sich selbst bis zur obern Grundfläche bewegt (siehe Figur § 162). In jedem Prisma sind die Seitenlinien einander gleich und parallel.

2) Ein Prisma heiſst **gerade** (normal), wenn die Seitenlinien senkrecht auf der Grundfläche stehen, mithin alle Seitenflächen Rechtecke sind.

3) Unter Höhe eines Prismas versteht man den Abstand der beiden parallelen Grundflächen, nämlich das von einem beliebigen Punkt der einen Grundfläche auf die andere (nötigenfalls erweitert gedachte) Grundfläche gefällte Perpendikel. Bei einem geraden Prisma geben schon die Seitenlinien die Höhe an.

4) Ein gerades Prisma heiſst regelmäſsig, wenn die Grundflächen regelmäſsige Vielecke sind.

5) **Parallelepipedon** heiſst jedes Prisma, dessen Grundflächen Parallelogramme sind (siehe Figur § 159). Sind die Grundflächen und Seitenflächen Rechtecke, so heiſst das Parallelepipedon ein rechtwinkliges oder rechteckiges.

6) **Kubus** (Würfel, Hexaeder) heiſst jedes Parallelepiped, dessen Grundflächen und Seitenflächen Quadrate sind, die folglich gleich und senkrecht auf einander sind.

7) **Cylinder** (Walze) heiſst jeder prismatische Körper, der zwei kongruente und parallele Kreise zu Grundflächen hat, und dessen Seitenfläche — Mantel — eine einzige solche krumme Fläche ist, deren sämtliche mit der Grundfläche parallelen Durchschnitte der Grundfläche gleich sind. Die die Mittelpunkte der Grundflächen verbindende Gerade nennt man **Achse**. Man unterscheidet gerade und schiefe Cylinder, je nachdem die Achse senkrecht auf den Grundflächen steht, oder nicht. Ersteren kann man sich durch Umdrehung eines Rechtecks, ECBG, um die Seite EC, als Achse beschrieben denken (Rotationscylinder — . . . siehe Figur § 164). Die Radien EG und CB beschreiben dann gleiche und parallele Kreise, die Seitenlinie GB die in sich zurücklaufende krumme Seitenfläche.

8) **Pyramide** heiſst jeder Körper, dessen Grundfläche ein beliebiges Vieleck ist, und dessen Seitenflächen Dreiecke sind, die in einer Spitze, S, zusammenstoſsen (s. Figur § 166).

Ein von der Spitze der Pyramide auf die Grundfläche gefälltes Perpendikel heiſst die Höhe der Pyramide. Eine Pyramide wird nach der Anzahl Seiten der Grundfläche benannt: dreiseitige, vierseitige etc. Ferner heiſst eine Pyramide regelmäſsig, wenn die Grundfläche ein regelmäſsiges Vieleck ist, und das von der Spitze darauf gefällte Perpendikel den Mittelpunkt des regelmäſsigen Vielecks trifft.

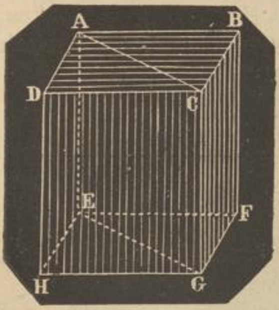
9) **Kegel** heiſst jeder pyramidische Körper, dessen Grund-

fläche ein Kreis, und dessen Seitenfläche — Mantel — eine einzige solche krumme ist, daſs darin von der Spitze nach jedem Punkt der Peripherie der Grundfläche eine gerade Linie gezogen werden kann. Die von der Spitze nach dem Mittelpunkt der Grundfläche gehende Linie heiſst die Achse des Kegels. Man unterscheidet gerade und schiefe Kegel, je nachdem die Achse auf der Grundfläche senkrecht steht, oder nicht. Ersteren kann man sich beschrieben denken, indem ein rechtwinkliges Dreieck, SCB, sich um eine Kathete, SC, als Achse dreht. (Rotationskegel — ... s. Figur § 170.)

10) Zwei Körper heiſsen symmetrisch, wenn alle Bestandteile derselben, wie Ecken, Winkel, Seitenflächen etc. einzeln genommen, vollkommen gleich sind, jedoch in der Zusammensetzung gerade entgegengesetzte Lage haben, so daſs dasselbe Stück, welches bei dem einen Körper rechts, oben etc. in dem andern links, unten etc. liegt. Obgleich solche symmetrische Körper sonst vollkommen gleich sind (z. B. die rechte und die linke Hand), so können sie doch, wegen der entgegengesetzten Lage ihrer gleichen Teile, nicht in vollkommen gleiche Grenzflächen eingeschlossen werden (nicht unmittelbar kongruent sein). Man nennt sie symmetrisch-kongruent.

159.

Lehrsatz. Ein Parallelepipedon wird durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich groſse dreiseitige Prismen geteilt *)



Beweis. Man denke sich durch zwei gegenüber liegende parallele Seitenlinien, CG und AE, eine Ebene (Schnitt) geführt, so wird dadurch das Parallelepiped AG offenbar in zwei dreiseitige Prismen geteilt. Das rechts liegende dreiseitige Prisma hat die Ebenen BCGF, ABFE und die Diagonal-Ebene ACGE zu Seitenflächen, das links liegende die Ebenen ADHE, DCGH und die

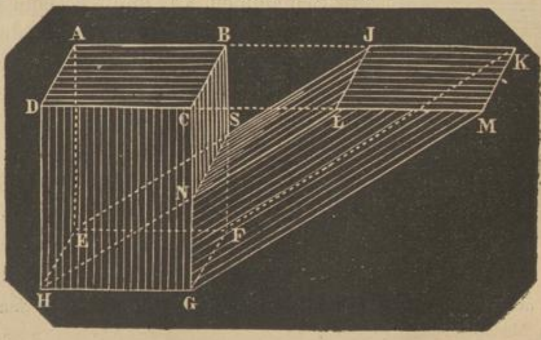
*) Des leichtern Verständnisses halber möge der Anfänger zuvor §§ 161 und 162 lesen. Auch möge man sich solche Körper aus einer weichen Masse formen.

Diagonal-Ebene zu Seitenflächen. Betrachtet man im rechts liegenden Prisma das Dreieck ABC, und im links liegenden das Dreieck HEG als untere Grundfläche, so sind die Grundflächen in beiden gleich, und da auch die Seitenflächen in beiden Prismen, sowohl gegen ihre Grundflächen ABC, HEG, als unter einander dieselbe Neigung haben (§§ 155 und 156, 1), so sind die Prismen jedenfalls symmetrisch kongruent und also gleich grofs. Wäre das Parallelepiped ein gerades, so könnte man beide Hälften in einander gesteckt denken.

160.

Lehrsatz. Ein schiefes Parallelepipedon ist so grofs, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man nehme zuerst an, dafs die beiden obern Grundflächen zwischen denselben Parallelen AK, DM liegen und denke sich die Parallelen AD, BC, JL, KM,. . .EH, FG gegen die Bildfläche aufgerichtet, z. B. senkrecht auf der Ebene des Papiers, so dafs also AB, JK, EF in der Bildfläche, DC, LM, HG aber davor liegen. Das Parallelepiped AG kann man sich nun auch beschrieben denken, indem sich die hintere Seitenfläche ABFE parallel mit sich selbst und an den beiden parallelen Linien AD, BC hingleitend, bis zur vordern Seitenfläche DCGH aufbewegt (§ 158, 1), eben so kann man sich das Parallelepiped JG durch die parallele Bewegung der hintern Seitenfläche JKFE bis zur vordern LMGH entstanden denken. Eben so kann man sich nun auch die beiden dreiseitigen Prismen KBG und JAH beschrieben denken, indem beim erstern die hintere Fläche, nämlich das Dreieck



KBF, parallel mit sich selbst bis zur vordern MCG, und beim andern Prisma die hintere Fläche JAE bis zur vordern LDH sich bewegt. Diese beiden dreiseitigen Prismen sind aber offenbar vollkommen gleich. Subtrahiert man von beiden das dreiseitige Prisma, von welchem JBS die hintere und LCN die vordere Grundfläche ist, und addiert zu den gleichen Resten wieder das dreiseitige Prisma, von welchem SEF die hintere und NHG die vordere Grundfläche ist, so erhält man die beiden fraglichen und gleichen Parallelepipeda.

Läge die obere Grundfläche des schiefen Parallelepipedons mit der des geraden nicht zwischen denselben Parallelen, so kann man auf gleiche Weise erst zeigen, daſs es einem solchen, und folglich auch dem geraden an Gröſse gleich ist.

Zusatz 1. Parallelepipeda von derselben Grundfläche und Höhe sind gleich groſs.

Zusatz 2. Weil jedes der beiden Parallelepipeda durch eine Diagonal-Ebene in zwei gleich groſse dreiseitige Prismen geteilt wird (§ 159), so ist klar, daſs auch jedes schiefe dreiseitige Prisma so groſs ist, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

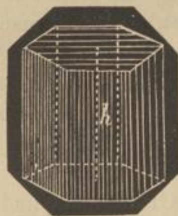
Zusatz 3. Weil jedes Prisma in dreiseitige zerlegt werden kann, so ist auch jedes beliebig vielseitige schiefe Prisma so groſs, als ein gerades von derselben Grundfläche und Höhe.

161.

Körpermaſs. Um von der Gröſse eines Körpers einen bestimmten Begriff zu erhalten, muſs ausgemittelt werden, wie oft ein anderer, als Maſseinheit betrachteter Körper darin enthalten ist. Als die bequemste Form der Einheit zeigt sich hier sogleich der Würfel oder Kubus (§ 158, 6). Solche kubische Körpereinheiten giebt es nun von verschiedener Gröſse, die alle nach der ihnen zu Grunde liegenden Längeneinheit benannt werden. Ist z. B. der zur Maſseinheit genommene Kubus 1 m lang, breit und hoch, mithin jeder seiner sechs Flächen 1 qm, so heiſst dieser Kubus oder der von ihm ausgefüllte Raum, 1 Kubikmeter (cbm). Ist der Kubus 1 cm lang, breit und hoch, so hat man 1 Kubikcentimeter (cbcm). Hiernach versteht man auch, was ein Kubikfuſs, Kubikmeile etc. heiſst.

Weiſs man nun, wie oft eine solche kubische Einheit, z. B. 1 cbm, in einem Körper enthalten ist, so giebt diese Zahl, verbunden mit der deutlichen Vorstellung der Einheit, einen bestimmten Begriff von der Gröfse (Kubikinhalt, kubischen Inhalt, Raumesinhalt, Volumen) des Körpers. Wie man diese Zahl finden kann, zeigen folgende Sätze.

162.



Lehrsatz. Der Inhalt eines Prismas ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe.

Bedeutet F den Flächeninhalt (Quadratinhalt) der Grundfläche, h die Höhe und V den Kubikinhalt (Volumen), so ist in Zeichen:

$$V = F \, . \, h.$$

Beweis. Zeigen wir zuerst, dafs der Satz wahr ist für ein gerades rechtwinkliges Parallelepipedon.

Angenommen, ein Zimmer habe diese Form und es sei die Länge desselben = 7 m, die Breite = 6 m und die Höhe = 5 m. Dann wäre der Quadratinhalt des Fufsbodens = 42 qm und es könnten dann (weil die Grundfläche eines Kubikmeters 1 qm ist) offenbar 42 cbm (Würfel) auf dem Fufsboden neben einander stehen. Ist nun die Höhe des Zimmers 5 m, so würden (weil die Höhe eines Kubikmeters 1 m ist) fünf solche Schichten von je 42 cbm das ganze Zimmer genau ausfüllen, mithin der Kubikinhalt des Zimmers = 42.5 = 210 cbm sein. — Wäre die Grundfläche des geraden Parallelepipedons statt eines Rechtecks, wie hier angenommen worden, ein schiefwinkliges Parallelogramm, so findet offenbar dieselbe Regel statt, ohne dafs man nötig hat, das Parallelogramm erst in ein Rechteck zu verwandeln. Und hiernach erhellt nun wohl, dafs man den Kubikinhalt eines jeden sowohl geraden als schiefen Prismas (§ 160, Zusatz 3) findet, wenn man erst den Quadratinhalt der Grundfläche sucht und diesen mit der Höhe multipliziert; denn so viel Quadratmeter die Grundfläche hält, so viel Kubikmeter könnten (gehörig geformt) auf derselben neben einander stehen, und man hat dann die Anzahl Kubikmeter in dieser untern Schicht so oft zu nehmen, als die Höhe Meter enthält.

Zusatz 1. Die Seitenfläche eines geraden Prismas wird erhalten, indem man den Umfang mit der Höhe multipliziert; denn, weil die einzelnen Seitenflächen lauter Rechtecke von gleicher Höhe sind, so sind sie alle zusammen offenbar gleich einem einzigen Rechtecke von derselben Höhe, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange ist.

Zusatz 2. Um die Seitenfläche eines schiefen Prismas zu erhalten, berechne man die einzelnen Seitenflächen, indem man zwischen je zwei der gleichen und parallelen Seitenlinien ein Perpendikel fällt. Die ganze Seitenfläche ist also gleich einem Parallelogramm oder Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf den Seitenlinien senkrechten Durchschnitts (eines sogenannten Normalschnittes) ist.

Anmerkung. Beim Reduzieren der Zahlen auf höhere oder niedere Einheiten mufs man bemerken, dafs nach dem Decimalsystem 1 cbm = 1 000000 cbcm ist, weil die Grundfläche = 100 . 100 und die Höhe = 100 ist. 1 Liter (l) ist = einem Würfel, dessen Kante 10 cm mifst.

163.

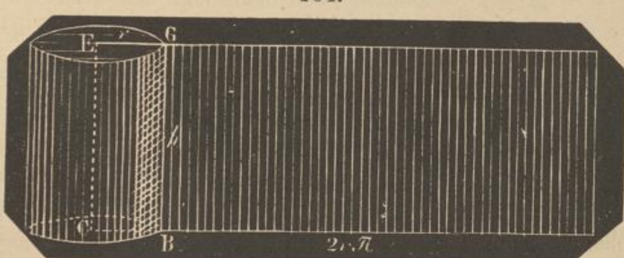
Aufgaben. 1. Die Grundfläche eines dreiseitigen Prismas sei ein rechtwinkliges Dreieck, dessen eine Kathete, b = 3 m 74 cm, die andere c = 2 m 30 cm, die Höhe des Prismas sei h = 4 m 15 cm; wie grofs ist der Kubikinhalt V?

2. Wie grofs ist der Kubikinhalt einer Säule von Sandstein, und wie grofs ist ihr Gewicht, wenn ihre Höhe = 5 m 66 cm, ihre Grundfläche ein Quadrat ist, dessen Seiten = 85 cm und das Gewicht von 1 cbm Sandstein = 5200 ℔ ist?

3. Der Kubikinhalt einer Eisenstange ist 88 700 cbm, die Grundfläche ist ein Rechteck, dessen eine Seite = 20 cm, die andere = 11 cm; wie lang ist die Stange?

Antwort. (1) V = 18,2211 cbm. (2) 4,08935 cbm. Gewicht = 21264,62 ℔. (3) 4 m 3,18 cm.

164.



Lehrsatz. 1) Der Kubikinhalt eines Cylinders ist gleich dem Produkte aus Grundfläche und Höhe. 2) Die Seitenfläche (der Mantel) des geraden Cylinders ist gleich dem Produkt aus dem Umfange und der Höhe.

Bezeichnet h die Höhe des Cylinders, r den Radius der Grundfläche, V den Kubikinhalt eines beliebigen Cylinders und F die Seitenfläche eines geraden Cylinders, so ist in Zeichen:

$$V = \pi r^2 h \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$
$$F = 2\pi r h \, . \, . \, . \, . \, . \quad (2)$$

Beweis. Der Cylinder kann als ein regelmäſsiges Prisma von unendlicher Seitenzahl betrachtet werden. Da nun die Grundfläche $= \pi r^2 h$ (§ 140) und die Höhe h, so ist $V = \pi r^2 h$. Was die Mantelfläche des geraden Cylinders betrifft, so kann man sich dieselbe vom Zylinder abgewickelt denken und erhält dann offenbar ein Rechteck, dessen Höhe $= h$, und dessen Grundlinie gleich dem Umfange der Grundfläche $= 2\pi r$ ist (§ 140). Die Formel (1) gilt selbstverstanden auch für einen schiefen Cylinder; die Seitenfläche eines solchen kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung eine in der elementaren Mathematik unberechenbare Fläche giebt. Zufolge § 162, Zusatz 2 ist die Seitenfläche eines schiefen Cylinders gleich einem Rechteck, dessen Grundlinie gleich der Seitenlinie, und dessen Höhe gleich dem Umfange eines auf der Seitenlinie senkrechten Durchschnitts ist. Dieser Umfang ist aber kein Kreis und läſst sich, wie gesagt, nur durch höhere Mathematik berechnen, für praktische Zwecke aber leicht genau genug messen.

165.

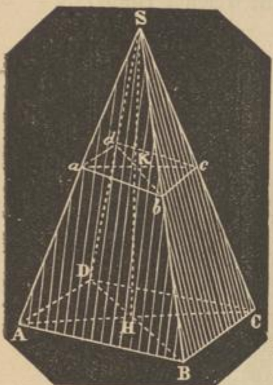
Aufgaben. 1. Wie gross ist der Inhalt V und die Seitenfläche F eines geraden Cylinders, dessen Höhe $h = 1$ m 56 cm, und dessen Radius $r = 26$ cm ist? ($\pi = 3^1/_7$).

2. Ein cylindrisches Gefäſs soll $V = 2600$ Liter halten, der Radius desselben $r = 76$ cm sein. Wie groſs muſs seine Höhe h genommen werden?

3. Ein Cylinder soll $h = 84$ cm hoch sein und $V = 678$ Liter Inhalt haben. Wie grofs mufs der Radius der Grundfläche sein?

Antwort. Es ist (1) $V = 331{,}433$ Liter und $F = 25494{,}86$ cm. (2) $h = 1$ m $43{,}226$ cm. (3) $r = 50{,}677$ cm.

166.



Lehrsatz. Der Durchschnitt einer Pyramide, welcher mit der Grundfläche parallel ist, ist mit derselben ähnlich, und die Flächeninhalte des Durchschnitts und der Grundfläche verhalten sich, wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

$$abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2.$$

Beweis. Weil die Linien ab, AB in parallelen Ebenen liegen, so können sie sich nicht schneiden, weil sie aber zugleich auch in einerlei Ebene liegen, nämlich in der Ebene des Dreiecks SAB, so sind sie parallel. Aus gleichem Grunde ist auch $bc \parallel BC$ etc. Die Winkel des Durchschnitts und die der Grundfläche sind also paarweise gleich (§ 154). Ferner ist nun auch (§ 117), $ab : AB = Sa : SA$ oder auch, indem man noch die Fufspunkte K und H der Perpendikel SK, SH mit den Eckpunkten des Durchschnitts und der Grundfläche verbunden denkt, weil dann auch $aK \parallel AH$, $bK \parallel BH$ etc.

$$ab : AB = Sa : SA = SK : SH$$

eben so: $bc : BC = Sb : SB = SK : SH$ etc.

Es verhalten sich also je zwei parallele Seiten, wie SK : SH, daher:

$$ab : AB = bc : BC = cd : CD \text{ etc.}$$

mithin ist: $abcd \sim ABCD$ (§ 116).

Nach § 125 ist nun $abcd : ABCD = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$. Weil aber $SK : SH = ab : AB$, also auch $\overline{SK}^2 : \overline{SH}^2 = \overline{ab}^2 : \overline{AB}^2$, so ist auch, wie der Lehrsatz behauptet, $abcd : ABCD = \overline{SK}^2 : \overline{SH}^2$.

Wäre z. B. SH zwei, drei, viermal so groſs, als SK, so wäre die Grundfläche vier, neun, sechzehnmal so groſs, als die Fläche des Durchschnitts.

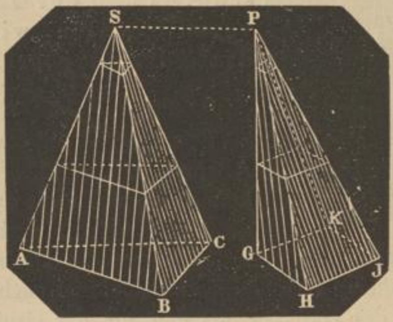
Beispiel 1. Es sei SK = 5 m, SH = 12 m, ABCD = 40 qm. Wie groſs ist $abcd = x$?

Antwort. Man hat $x : 40 = 5^2 : 12^2$ und hieraus $x = 6\frac{17}{18}$ qm.

Beispiel 2. Es sei SH = 12 m, ABCD = 60 qm. Der Durchschnitt $abcd$ soll 20 qm sein, auf welcher Höhe $SK = x$ muſs er genommen werden?

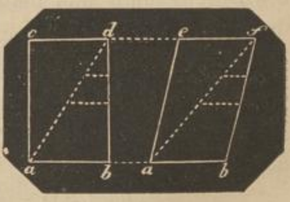
Antwort. Aus $20 : 60 = x^2 : 144$ folgt $x = 6{,}9282$ m.

167.



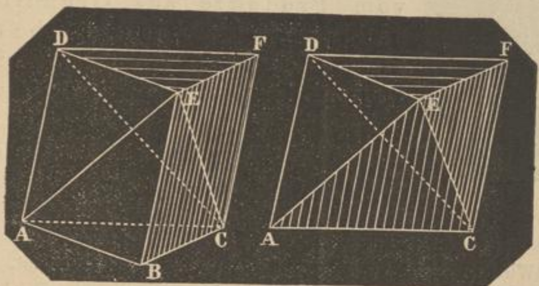
Lehrsatz. Pyramiden von gleich groſser Grundfläche und Höhe sind inhaltsgleich.

Beweis. Man überlege erst folgendes: Wenn zwei gleiche gerade Linien, $ab = ab$, sich parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe bewegen, so beschreiben sie offenbar gleiche Flächen (§ 96, Zusatz). Auch müssen sie gleich groſse Flächen beschreiben, wenn sie bei ihrer parallelen Bewegung gleichzeitig und in demselben Verhältnis bis zu Null abnehmen. Auf diese Weise kann man sich die Dreiecke dab, fab beschrieben denken, wenn die Seiten ab auf der Hälfte ihres Weges um die Hälfte, auf dreiviertel ihres Weges um dreiviertel u. s. f. abnehmen.



Ebenso kann man sich nun die beiden Pyramiden beschrieben denken. Sind nämlich, wie der Lehrsatz voraussetzt, ihre Grundflächen gleich groſs, ABC = GHJK, und ihre Höhen gleich, so sind auch je zwei Durchschnitte von gleicher Höhe einander gleich, weil sie stets nach § 166 die gleichvielsten Teile von den gleichen Grundflächen sind. Bewegen sich nun die gleichen Grundflächen parallel mit sich selbst auf gleiche Höhe, so beschreiben sie offenbar gleich groſse Prismen, und eben so auch gleich groſse Pyramiden, indem sie hierbei gleichzeitig und im erwähnten Verhältnis bis zu Null abnehmen.

168.



Lehrsatz. Ein dreiseitiges Prisma ist so groſs, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

Beweis. Man lege durch die drei Punkte E, A, C, eine Ebene, diese geht dann durch die Linie AC (§§ 5 und 146) und schneidet also eine Pyramide, EABC, ab, welche E zur Spitze und ABC zur Grundfläche, also dieselbe Höhe und dieselbe Grundfläche, wie das Prisma hat. Denkt man sich diese Pyramide EABC vom Prisma weggenommen, so bleibt eine vierseitige, in Figur 2 dargestellte Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Parallelogramm DFCA zur Grundfläche hat; legt man nun wieder durch die drei Punkte E, D, C eine Ebene, so teilt diese die vierseitige Pyramide EDFCA in zwei dreiseitige, welche die gemeinschaftliche Spitze E haben, und wovon die links liegende Pyramide DAC die rechts liegende DFC zur Grundfläche hat. Diese beiden Pyramiden EDAC und EDFC sind aber gleich groſs (§ 167), und da die rechts liegende Pyramide, in welcher man auch C als Spitze und DFE als die Grundfläche betrachten kann, der zuerst abgeschnittenen Pyramide EABC gleich ist, so sind alle drei Pyramiden, in welche das Prisma zerlegt worden, gleich groſs, und folglich ist, wie der Lehrsatz behauptet, ein dreiseitiges Prisma so groſs, als drei Pyramiden von derselben Grundfläche und Höhe.

169.

Lehrsatz. Der Inhalt einer Pyramide ist gleich dem dritten Teil vom Produkte aus Grundfläche und Höhe, oder, was dasselbe sagt, gleich der Grundfläche mit einem Drittel der Höhe multipliziert.

Bedeutet F den Quadratinhalt der Grundfläche, h die Höhe und V den Inhalt der Pyramide, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{1}{3} hF.$$

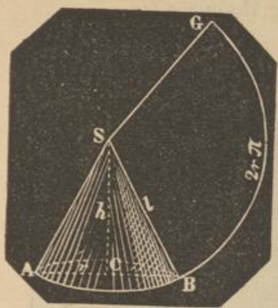
Beweis. Jede Pyramide, die keine dreiseitige ist, kann durch Diagonalebenen in solche zerlegt werden, und da nun nach § 168 jede dreiseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe ist, so muſs auch jede noch so vielseitige Pyramide gleich dem dritten Teil eines Prismas von gleicher Grundfläche und Höhe sein. Der Inhalt eines Prismas ist nun aber gleich dem Produkt aus Grundfläche und Höhe (§ 162), mithin der Inhalt einer Pyramide gleich dem Produkt aus Grundfläche und einem Drittel der Höhe.

Zusatz. Um die Seitenfläche einer Pyramide zu bestimmen, muſs man die Seitendreiecke einzeln berechnen und dann addieren.

Aufgabe. Eine der ägyptischen Pyramiden ist $146\frac{1}{2}$ m hoch und die Grundfläche ein Quadrat, dessen Seiten ebenfalls $146\frac{1}{2}$ m. Wie groſs ist der Inhalt V dieser Pyramide?

Antwort. Es ist $V = \frac{(146\frac{1}{2})^2 . 146\frac{1}{2}}{3} = 1\,048\,073$ cbm.

170.



Lehrsatz. 1) Der Inhalt eines Kegels ist gleich dem Produkt aus der Grundfläche und einem Drittel der Höhe. 2) Die Seitenfläche eines geraden Kegels ist gleich dem Produkt aus dem halben Umfange und der Seitenlinie.

Bedeutet V den Inhalt, F die Seitenfläche, h die Höhe l die Seitenlinie und r den Radius des Kegels, so ist in Zeichen:

$$V = \frac{\pi r^2 h}{3} \ldots\ldots (1)$$

$$F = \pi r l = \pi r \sqrt{r^2 + h^2} \ldots\ldots (2)$$

Beweis. 1. Man kann den Kegel als eine Pyramide betrachten, deren Grundfläche ein regelmäſsiges Vieleck von unendlich vielen Seiten ist; er ist deshalb auch, was sein Inhalt betrifft, gleich dem dritten Teil eines Cylinders von derselben Grundfläche und Höhe.

2. Was die Seitenfläche (Mantelfläche) betrifft, so kann man dieselbe vom Kegel abgewickelt denken. Die Abwickelung giebt dann, wenn der Kegel gerade ist, offenbar einen Kreisausschnitt, dessen Bogen, BG, gleich dem Umfange des Grundkreises, und dessen Radius gleich der Seitenlinie des Kegels ist. (§ 141, 2.)

Anmerkung. Der Inhalt eines schiefen Kegels wird auf dieselbe Weise nach Formel (1) berechnet, die Seitenfläche eines schiefen Kegels kann aber nur durch höhere Mathematik gefunden werden, weil die Abwickelung keinen Kreisausschnitt bildet.

171.

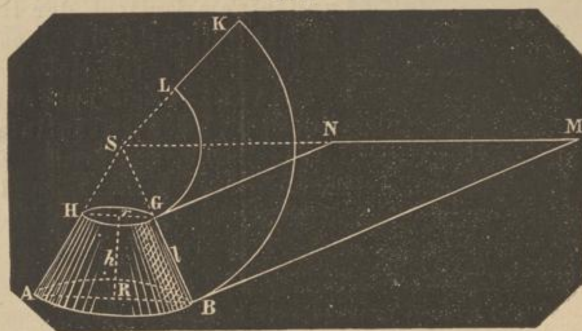
Aufgaben. 1. Der Radius der Grundfläche eines geraden Kegels sei $r = 3$ m, die Höhe $h = 4$ m, also die Seitenlinie $l = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ m. Wie groſs ist der Inhalt V und die Seitenfläche F? ($\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt).

2. Der Inhalt eines Kegels ist V = 1,76 cbm, der Radius $r = 40$ cm. Wie groſs ist die Höhe h?

3. Der Inhalt eines Kegels ist $V = 18$ cbm, die Höhe, $h = 4$ m 68 cm. Wie grofs ist der Radius r?

Antwort. (1) $V = 37\frac{5}{7}$ cbm. $F = 47\frac{1}{7}$ qm (2) $h = 10\frac{1}{2}$m (3) $r = 1{,}91607$ m.

172.



Lehrsatz. Die Seitenfläche eines parallel mit der Grundfläche abgekürzten geraden Kegels ist gleich der Fläche eines Trapezes, dessen parallele Seiten gleich den Peripherien der beiden parallelen Grundflächen, und dessen Höhe gleich der Seitenlinie ist.

Bedeutet also $l = GB$ die Seitenlinie, so ist in Zeichen:

$$F = \pi l\,(R + r).$$

Beweis. Man denke sich den abgekürzten Kegel zu einem ganzen ergänzt und dann abgewickelt. Stellt nun die auf SB senkrechte Linie BM die Länge der untern Peripherie ($2\pi R =$ arc BK) dar, so ist die auf SG senkrechte Linie GN notwendig gleich der obern Peripherie ($2\pi r =$ arc GL), denn die Bögen BK, GL verhalten sich wie ihre Radien SB, SG; wie diese verhalten sich aber auch die Linien BM, GN. Stellt also das Dreieck SBM die Seitenfläche des ganzen Kegels dar, so enthält das Dreieck SGN die Seitenfläche des Ergänzungskegels, und mithin das Trapez GBMN die Seitenfläche des abgekürzten Kegels. In dem Trapez ist nun aber $BM = 2\pi R$. $GN = 2\pi r$. Folglich ist (§ 103):

$$F = \frac{2\pi R + 2\pi r}{2} . l = (\pi R + \pi r)\,l = \pi l\,(R + r).$$

Dieser Satz folgt übrigens auch ganz einfach aus der Betrachtung der Figur GLKB, welche man sich als ein Trapez denken kann. Wäre z. B. $R = 6$ m, $r = 4$ m und $l = 5$ m, so wäre $F = 157\frac{1}{7}$ qm.

Sechzehntes Buch.

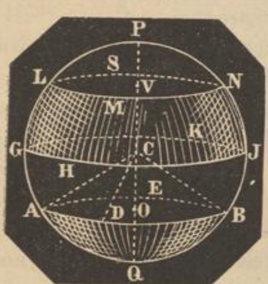
Von der Kugel.

173.

Erklärungen. Die Kugel ist ein Körper von einer einzigen krummen Fläche dergestalt begrenzt, daſs alle Punkte derselben von einem innerhalb liegenden Punkt, Mittelpunkt oder Centrum, gleich weit entfernt sind.

Jede vom Mittelpunkt bis an die Oberfläche gehende Linie heiſst Radius oder Halbmesser, und jede durch den Mittelpunkt nach beiden Seiten bis an die Oberfläche gehende Linie heiſst Durchmesser oder Diameter.

174.



Lehrsatz. Jeder ebene Durchschnitt einer Kugel ist ein Kreis.

Beweis. Verbindet man beliebige Grenzpunkte, A, D, B, E, des Durchschnitts ADBE mit dem Mittelpunkt C, so sind diese Verbindungslinien CA, CD, CB . ., als Radien der Kugel einander gleich, mithin ist nach § 151 die krumme Linie ADBEA auf der Kugel ein vollkommener Kreis, dessen Mittelpunkt der Fuſspunkt O des von C auf die Ebene des Kreises (Durchschnitts) gefällten Perpendikels ist.

Zusatz. Errichtet man auf der Ebene eines Kugelkreises, ADBE, im Mittelpunkt O ein Perpendikel, so muſs dies durch den Mittelpunkt der Kugel gehen.

175a.

Erklärungen. Jeder Kreis, dessen Ebene nicht durch den Mittelpunkt geht, wie ADBE, heiſst ein Kugelkreis, jeder Kreis aber, dessen Ebene durch den Mittelpunkt geht, wie GHJK, heiſst ein gröſster Kreis (Normalkreis).

Es ist klar, dafs alle gröfsten Kreise einander gleich sind, dafs jeder die Kugel halbiert, und dafs auch je zwei gröfste Kreise sich halbieren, weil ihre Radien dem der Kugel gleich sind (vgl. § 19).

2. Die Endpunkte P, Q eines Durchmessers, der durch den Mittelpunkt O eines Kugelkreises, ADBE, geht und auf dessen Ebene senkrecht steht,*) heifsen die Pole des Kreises.

3. Alle Kreise auf der Kugel, deren Ebenen parallel sind, heifsen Parallelkreise. Parallelkreise, wie ADBE, GHJK, haben also gemeinschaftliche Pole..

4. Das körperliche Stück einer Kugel, welches, wie AQB, von der Ebene eines Kreises und einer krummen Fläche begrenzt wird, heifst Kugelabschnitt oder Kugelsegment, die den Kugelabschnitt mit begrenzende krumme Fläche heifst Kugelhaube (Calotte, Kugelmütze, Kugelkappe), und das auf dem Grundkreise im Mittelpunkt errichtete Perpendikel OQ heifst die Höhe (oder Pfeil, Sagitte) des Abschnitts und der Haube. Ein von einem gröfsten Kreis begrenzter Abschnitt heifst Halbkugel oder Hemisphäre.

5. Ein Streifen von der Kugeloberfläche, welcher, wie LJ, von zwei Parallelkreisen, GHJK und LMNS, begrenzt wird, heifst eine Zone (Gürtel), und das von der Zone und den Ebenen der beiden Parallelkreise begrenzte körperliche Stück der Kugel heifst Zonenabschnitt (Zonenkörper). Der Abstand der beiden parallelen Kreisebenen, nämlich CV, heifst die Höhe der Zone und des Zonenabschnitts.

6. Das Stück einer Kugel, welches, wie CAQB, aus einem Kegel, CAB, und einem daran liegenden Haubenabschnitt, AQB, besteht, heifst ein Kugelausschnitt (Kugelsektor, Kugelkegel).

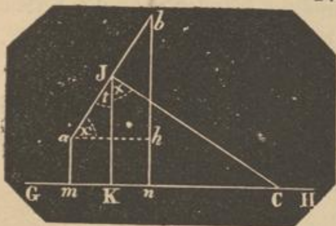
Anmerkung. Man kann sich sowohl die ganze Kugel, als auch ihre eben erklärten Teile auf folgende Weise entstanden denken: Der Halbkreis PNBQ drehe sich um den Durchmesser PQ, wie um eine Achse, so beschreibt die Fläche des Halbkreises die Kugel, die halbe Peripherie PNBQ die Kugeloberfläche, die Punkte N, J, B Parallelkreise, deren Pole (Drehpunkte) P und Q sind; der Bogen PN beschreibt eine

*) Bei Kreisen, die kleiner als ein gröfster Kreis, wie hier ADBE, ist dies von selbst der Fall. (§ 174, Zus.)

Haube, der Bogen NJ eine Zone, der Kreisausschnitt CQH einen Kugelausschnitt etc.

Was nun die Berechnung der Oberfläche und des Inhalts der Kugel, so wie auch Stücke derselben betrifft, so wird dies jedem sehr leicht begreiflich werden, der den folgenden Hilfssatz, welcher den Schlüssel dazu giebt, gut versteht.

175b.



Hilfssatz. Wenn eine gerade Linie, ab, sich um eine Achse, GH, ganz herumdreht,*) so läſst sich die Fläche F, welche sie beschreibt, nach der Formel:

$$F = 2\pi \,.\, CJ \,.\, mn$$

berechnen, worin CJ das auf der Mitte der Linie ab errichtete, bis an die Achse GH gehende Perpendikel, π die bekannte Zahl $3\frac{1}{7}$, und mn das Stück der Achse ist, welches die von a und b darauf gefällten Perpendikel zwischen sich fassen.

Beweis. Zuerst ist klar, daſs die Linie ab die Seitenfläche eines abgekürzten Kegels beschreibt, dessen parallele Radien am und bn sind und dessen Seitenlinie ab ist. Nach § 172 ist also die Fläche, welche die Linie ab nach ihrer ganzen Umdrehung beschrieben hat:

$$F = \pi \,.\, ab \,.\, (bn + am) \;\ldots\ldots\; (1)$$

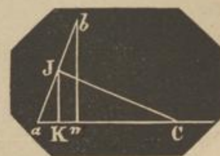
Dieser Ausdruck muſs nun aber, um ihn auf die Kugel anwenden zu können, zweimal umgeformt werden. Denkt man sich von der Mitte J der Linie ab das Perpendikel JK auf die Achse gefällt, so ist leicht einzusehen, daſs $2\,JK = bn + am$ ist. (Man denke sich nur durch J eine Parallele mit mn gezogen, die dann zu am dasselbe Stück hinzusetzt, welches sie von bn abschneidet.) Man darf also in der Formel (1) $2\,JK$ statt $bn + am$ setzen, und es ist daher auch:

$$F = \pi \,.\, ab \,.\, 2JK = 2\pi \,.\, JK \,.\, ab \;\ldots\ldots\ldots\; (2)$$

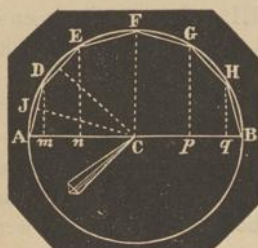
Zieht man nun noch ah parallel mit mn, so sind die beiden Dreiecke abh und CJK gleichwinklig und folglich ähnlich,

*) Man denke sich Trapez $mabn$ fest mit GH verbunden und diese Figur um GH rotierend.

(jedes hat einen rechten Winkel, außerdem $x + t = x' + t = 90^0$, woraus $x = x'$) mithin ab : CJ $= ah$: JK, oder, weil $mn = ah$, auch ab : CJ $= mn$: JK, hieraus: CJ . mn = JK . ab. Man kann also in die zweite Formel CJ . mn statt JK . ab setzen, und man hat dann für die von ab beschriebene Fläche folgende im Lehrsatz behauptete Formel: $F = 2\pi$. CJ . mn. Diese Formel gilt auch, wenn der eine Endpunkt a der Linie ab in der Achse GH liegt, alsdann beschreibt ab (oder mb) die Seitenfläche eines ganzen Kegels, und es ist dann (§ 170) $F = \pi . bn . ab$, oder auch, weil 2JK $= bn$ ist: $F = \pi$. 2JK . ab = 2π . JK . ab. Ferner: da $\triangle abn \sim \triangle$CJK ist, ab : CJ $= an$: JK, hieraus: CJ . an = JK . ab. Daher auch: $F = 2\pi$. CJ . an.



176.



Lehrsatz. Die Oberfläche einer Kugel ist viermal so groſs, als die Fläche eines gröſsten Kreises, und der Inhalt der Kugel so groſs, als der eines Kegels, dessen Grundfläche gleich der Oberfläche, und dessen Höhe gleich dem Radius der Kugel ist.

Bedeutet r den Radius, d den Durchmesser, F die Oberfläche und V den Kubikinhalt der Kugel, so ist:

$$F = 4\pi r^2 = \pi d^2 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \frac{\pi}{6} d^3 \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Beweis. In dem die Kugel beschreibenden Halbkreis denke man sich ein regelmäſsiges Vieleck beschrieben und suche zuerst eine Formel für die Fläche, welche dieses regelmäſsige Vieleck beschreibt, indem es sich um den Durchmesser AB ganz herumdreht. Weil alle Vielecksseiten gleich, folglich auch alle auf ihren Mitten errichteten und durch den Mittelpunkt C gehenden Perpendikel gleich sind (§ 71, Zusatz), so ist, nach § 175b, die Fläche, welche die Seite AD beschreibt, $= 2\pi$. CJ . Am, die Fläche, welche die folgende Seite DE beschreibt, $= 2\pi . CJ . mn$, die Fläche, welche EF beschreibt, $= 2\pi . CJ . nC$ u. s. w., mithin die Fläche, welche das ganze Vieleck beschreibt:

$$= 2\pi . CJ . Am + 2\pi . CJ . mn + \ldots\ldots + 2\pi . CJ . qB$$

oder, indem man den, allen Gliedern gemeinschaftlichen Faktor $2\pi . CJ$ heraussetzt:

$$= 2\pi . CJ . (Am + mn + nC + \ldots\ldots + qB)$$

oder, da der Ausdruck in der Klammer dem Durchmesser AB gleich ist,

$$= 2\pi . CJ . AB.$$

Man erhält also die Fläche, welche ein regelmäſsiges Vieleck beschreibt, indem man die Peripherie des dem Vieleck umgeschriebenen Kreises $2\pi . CJ$ mit dem Durchmesser AB multipliziert. Dieser Satz ist immer richtig, wieviel Seiten das regelmäſsige Vieleck auch haben möge. Denkt man sich also die Seitenzahl des regelmäſsigen Vielecks immerfort verdoppelt, so ändert sich in dem oben gefundenen Ausdruck $2\pi . CJ . AB$ bloſs der Faktor CJ, der mit jeder Verdoppelung der Seitenzahl immer gröſser, und zuletzt, wo diese Verdoppelung aufhört und das Vieleck in einen Halbkreis übergeht, dem Radius CA gleich wird. Es ist mithin die Fläche, welche der Halbkreis beschreibt, d. i. die Oberfläche der Kugel, $= 2\pi . CJ . AB = 2\pi r . AB$, oder, den Radius der Kugel $CA = r$, den Durchmesser $AB = 2r$, die Oberfläche $=$ F gesetzt: $F = 2\pi r . 2r = 4\pi r^2 = \pi d^2$.

Durch ähnliche Schlüsse, wie in § 137, gelangt man nun auch leicht zu dem im Lehrsatz angegebenen Ausdruck für den Inhalt der Kugel. Denkt man sich nämlich innerhalb der Kugel um den Mittelpunkt herum aneinander liegende regelmäſsige dreiseitige Pyramiden von gleicher Grundfläche und folglich auch von gleicher Höhe gelegt, so daſs ihre Spitzen im Mittelpunkt, die Eckpunkte ihrer Grundflächen in der Oberfläche der Kugel, die Grundflächen selbst also innerhalb der Kugel liegen, so ist die Summe aller dieser Pyramiden kleiner, als die Kugel. Denkt man sich die Grundflächen dieser gleichen regelmäſsig eingeschriebenen Pyramiden immer kleiner, folglich ihre Höhe immer gröſser werdend, so kommt die Summe dieser Pyramiden dem Inhalte der Kugel immer näher. Bezeichnet man nun die Grundfläche der 1. Pyramide mit g_1, der 2. Pyramide mit g_2, der 3. mit g_3 u. s. w., die Höhe der Pyramiden mit h, so ist nach § 169 der Kubikinhalt der 1. Pyramide $= \frac{g_1 h}{3}$, der zweiten $= \frac{g_2 h}{3}$ u. s. w., folglich die Summe, d. i. der Kubikinhalt sämtlicher Pyramiden

$$= \frac{g_1 h}{3} + \frac{g_2 h}{3} + \frac{g_3 h}{3} + \frac{g_4 h}{3} + \ldots\ldots$$

$$= \frac{h}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + \ldots).$$

Sobald nun die Grundflächen der Pyramiden unendlich klein und dann Teile der Oberfläche der Kugel selbst werden, geht ihre Höhe h in den Radius der Kugel über und die Summe sämtlicher Pyramiden wird genau dem Kubikinhalt der Kugel gleich, der mithin

$$= \frac{r}{3}(g_1 + g_2 + g_3 + \ldots\ldots) \text{ wird.}$$

Die Summe $g_1 + g_2 + \ldots.$ sämtlicher Grundflächen wird aber alsdann zur Oberfläche der Kugel ($4\pi r^2$) und jener Ausdruck für den Kubikinhalt der Kugel wird $\frac{r}{3} . 4\pi r^2$ (= dem Inhalt eines Kegels mit der Grundfläche $4\pi r^2$ und Höhe r) $= \frac{4\pi r^3}{3}$.

177.

Aufgaben. 1. Der Radius einer Kugel ist $r = 15$ cm. Wie grofs ist die Oberfläche F und der Kubikinhalt V? ($\pi = \frac{22}{7}$ gesetzt).

2. Wie viel Meter $\frac{3}{4}$ breiten Taffet sind erforderlich, um einen kugelförmigen Luftballon zu bekleiden, dessen Radius = 2 m 56 cm?

3. Die Oberfläche einer Kugel ist = 23 qm. Wie grofs ist der Radius?

4. Eine Kugel, deren Radius = 18 cm ist, soll vergoldet werden. Wie teuer kommt dies, wenn für den Quadratcentimeter 15 Pfennige bezahlt wird?

5. Die Oberfläche einer Kugel ist = 3,579 qm. Wie grofs ist der Radius?

6. Der Kubikinhalt einer Kugel ist 97,5 cbcm. Wie grofs ist der Radius?

7. Man denke sich in einen Cylinder einen Kegel und eine Kugel gezeichnet, so dafs die Radien aller drei Körper gleich

sind, und die Höhe des Kegels und Cylinders gleich dem doppelten Radius ist. Wie verhalten sich diese drei Körper: Kegel, Kugel und Cylinder hinsichtlich ihres Volumens zu einander?

Antwort. (1) $F = 2828\frac{4}{7}$ qcm, $V = 14142\frac{6}{7}$ cbcm; (2) 82,388 m; (3) $r = 1,3526$ m; (4) 610 M. 97 Pf.; (5) $r = 53,54$ cm; (6) $r = 2,8548$ m; (7) wie 1 : 2 : 3.*)

178.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man die Fläche einer Kugelhaube berechnen kann.

Auflösung. Führt man den Beweis in § 176 in Bezug auf die dortigen Vielecksseiten AD und DE allein, so würde sich für die durch diese entstehende krumme Oberfläche

$$= 2\pi . CJ . Am + 2\pi . CJ . mn$$
$$= 2\pi . CJ . (Am + mn)$$
$$= 2\pi . CJ . An \quad \text{ergeben.}$$

Denkt man sich nun immer mehr Seiten in den Bogen AE, so würde, ganz analog der dortigen Ausführung, CJ zuletzt in den Radius r der Kugel, die durch die Vielecksseiten A bis E entstehende krumme Oberfläche $2\pi . CJ . An$ daher in die durch den Bogen AE entstehende krumme Oberfläche (Kugelhaube) mit der Formel $2\pi r . An$ übergehen.

In Bezug auf die Figur unseres § 178 erhält man dafür $2\pi r . AP$, oder, wenn man die Höhe AP der Haube mit h und die krumme Fläche derselben mit F bezeichnet,

$$F = 2\pi r h.$$

Zusatz 1. Aus denselben Betrachtungen folgt, daſs dieselbe Formel auch für eine Zone gilt, und daſs alle Zonen von gleicher Höhe auf derselben Kugel auch gleiche Flächen haben.

Zusatz 2. Denkt man sich vom Scheitel A der Haube nach einem Punkt, M, der sie begrenzenden Peripherie die Sehne $AM = a$ gezogen, so ist (§ 126, Zusatz 1) $h : a = a : 2r$, hieraus: $a^2 = 2rh$. Wir können also in obiger Formel a^2

*) Dieses merkwürdige Verhältnis entdeckte Cicero auf einem dem Archimed in Syrakus gesetzten Denkmale.

statt $2rh$ setzen und erhalten dann für die Fläche der Haube den Ausdruck:

$$F = \pi a^2,$$

welche Formel für die Praxis viel bequemer ist, indem man statt der Höhe und des Radius nur eine Sehne zu messen braucht.

Beispiel. Wie viel Quadratmeter Kupferblech sind zur Bedachung einer Kuppel erforderlich, wenn die vom höchsten zum tiefsten Punkt gemessene Sehne $AM = 5\frac{1}{3}$ m ist?

Antwort. 89,397 qm.

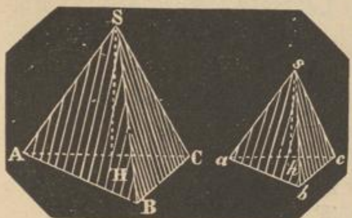
Siebzehntes Buch.

Ergänzungen.

179.

Erklärung. Zwei Körper heiſsen ähnlich, wenn die körperlichen Winkel wechselweise gleich sind, und je zwei ähnlich liegende Kanten dasselbe Verhältnis zu einander haben; alsdann sind offenbar auch die Seitenflächen ähnlich, und beide Körper an Form vollkommen gleich, und nur an Gröſse verschieden.

180.



Lehrsatz. Die Inhalte ähnlicher Körper verhalten sich wie die Kuben ähnlich liegender Seiten.

Beweis. Man braucht nur zu zeigen, daſs der Satz für ähnliche Pyramiden gilt, weil ähnliche Körper in solche zerlegt werden können.

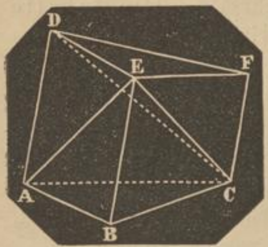
Sei demnach Pyramide SABC $\sim$ Pyramide *sabc*. Weil alle ähnlich liegende Seiten einerlei Verhältnis zu einander haben, und die Winkel wechselweise gleich sind, so sind erstens die Grundflächen ähnlich und verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten (§ 125); wie diese Seiten, so verhalten sich aber auch die Höhen der Pyramiden, nämlich $sh : SH = ab : AB$, also auch $\frac{1}{3}\, sh : \frac{1}{3}\, SH = ab : AB$. Man hat also:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\triangle ABC}{\triangle abc}&=\frac{AB^2}{ab^2}\\ \frac{\frac{1}{3}SH}{\frac{1}{3}sh}&=\frac{AB}{ab}\end{aligned}\right\}$$ Beide Gleichungen mit einander multipliziert, kommt $\frac{\frac{1}{3}SH.\triangle ABC}{\frac{1}{3}sh.\triangle abc}=\frac{AB^3}{ab^3}$

d. h. der Inhalt der kleinern Pyramide ($\frac{1}{3}sh.\triangle abc$) ist so oft in dem Inhalt der gröſsern ($\frac{1}{3}SH.\triangle ABC$) enthalten, als der Kubus einer Seite der kleinern Pyramide in dem Kubus der ähnlich liegenden Seite der gröſsern. Wäre z. B. AB zweimal so groſs als *ab*, so wäre der Kubikinhalt der gröſsern Pyramide $2^2=8$mal so groſs, als der der kleinern. Denkt man sich nun zwei ähnliche Körper in ähnliche Pyramiden zerlegt, so verhalten sich je zwei ähnliche Pyramiden, also auch die Summe der Pyramiden in dem einen Körper zur Summe in dem andern und mithin die beiden ähnlichen Körper selbst, wie die Kuben zweier ähnlich liegenden Seiten.

Soll ein Körper konstruiert werden, dessen Inhalt m mal so groſs ist, als der eines ähnlichen Körpers, so müssen die ähnlich liegenden Seiten sich wie 1 zu $\sqrt[3]{m}$ verhalten. Für Kugeln, Kegel und Cylinder folgt der Lehrsatz von selbst aus den Formeln.

181.



*) **Lehrsatz.** Ein schief abgeschnittenes dreiseitiges Prisma ist so groſs, als drei Pyramiden, welche die Grundfläche des Prismas ABC zu Grundflächen und die drei gegenüber liegenden Ecken E, D, F zu Spitzen haben.

Beweis. Legt man zuerst durch die drei Punkte EAC eine Ebene, so schneidet diese eine Pyramide EABC ab. Es bleibt nun noch eine vierseitige Pyramide übrig, welche E zur Spitze und das Trapez DACF zur Grundfläche hat. Diese wird durch eine durch D, E, C gelegte Ebene in zwei dreiseitige zerlegt, EDAC und EDFC. Denkt man sich nun die Spitze E der links liegenden Pyramide EDAC parallel mit der Grundfläche DAC (also in gleich bleibender Höhe) nach B verschoben, so ist dadurch die Pyramide EDAC in die gleich große BDAC verwandelt (§ 167). In letzterer kann man nun aber auch D als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten. Die dritte Pyramide EDFC endlich, kann man erst in die Pyramide EAFC*) verwandelt denken, indem die Grundflächen DFC und AFC, als Dreiecke von gleicher Grundlinie und Höhe, gleich groß sind. Denkt man sich nun bei dieser Pyramide EAFC die Spitze E in gleich bleibender Höhe nach B verlegt, so ist sie in die Pyramide BAFC verwandelt, bei welcher man aber auch F als Spitze und ABC als Grundfläche betrachten kann.

Bezeichnen also h, h', h'' die drei von den Ecken E, D, F auf die Grundfläche ABC = F, gefällten Perpendikel, und V den Inhalt des schief abgeschnittenen dreiseitigen Prismas, so ist:

$$V = \frac{h + h' + h''}{3} . F.$$

182.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V eines abgekürzten Kegels aus den beiden parallelen Radien R, r und der Höhe h = OC berechnen kann.

Auflösung. Setzt man die unbekannte Höhe des Ergänzungskegels vorläufig $= x$, so ist nach § 170:**)

$$V = \frac{\pi R^2 (h + x)}{3} - \frac{\pi r^2 x}{3}$$

$$\text{oder } V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{\pi (R^2 - r^2) x}{3} \ldots\ldots (1)$$

Zur Bestimmung der unbekannten Höhe x hat man:

$$x : h + x = r : R \text{ und hieraus } x = \frac{hr}{R - r}$$

---

*) Man denke die Linie AF gezogen.

**) Bei diesen Anwendungen der Algebra auf Geometrie muß die Kenntnis der erstern Wissenschaft vorausgesetzt werden.

Diesen Wert von x in die Gleichung (1) substituiert, kommt:

$$V = \frac{\pi R^2 h}{3} + \frac{\pi (R^2 - r^2) r h}{3 (R - r)}.$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel: *)

$$V = \frac{\pi h}{3} (R^2 + Rr + r^2)$$

Beispiel. Sei $R = 80$ cm, $r = 54$ cm, $h = 95$ cm, so ist $V = 1{,}3571$ cbm.

183.

Aufgabe. Eine Formel zu finden, nach welcher man den Inhalt V einer abgekürzten Pyramide aus deren beiden parallelen Grundflächen F, f, und der Höhe h berechnen kann.

Auflösung. Die Höhe der Ergänzungspyramide sei $= x$, so ist:

$$V = \frac{h + x}{3} . F - \frac{x}{3} f$$

$$\text{oder } V = \tfrac{1}{3} h F + \tfrac{1}{3} x (F - f) \ldots\ldots\ldots (1)$$

Ferner ist (§ 166):

$$\frac{x^2}{(h + x)^2} = \frac{f}{F} \text{ also } \frac{x}{h + x} = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{F}} \text{ und hieraus: } x = \frac{h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}}$$

Diesen für x gefundenen Ausdruck in die Gleichung (1) substituiert, kommt:

$$V = \tfrac{1}{3} h F + \frac{\tfrac{1}{3} h \sqrt{f}}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} (F - f)$$

$$\text{oder } V = \tfrac{1}{3} h F + \tfrac{1}{3} h \sqrt{f} (\sqrt{F} + \sqrt{f}) \text{ **)}$$

und hieraus nach gehöriger Reduktion die verlangte Formel:

$$V = \frac{h}{3} (F + \sqrt{Ff} + f)$$

---

*) Es ist nämlich $\frac{R^2 - r^2}{R - r} = R + r$. (Algebra § 143.)

**) Weil $\frac{F - f}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \frac{(\sqrt{F})^2 - (\sqrt{f})^2}{\sqrt{F} - \sqrt{f}} = \sqrt{F} + \sqrt{f}$. (Algebra § 143 und § 215, 4.)

184.

Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man den Kubikinhalt eines Kugelausschnitts, CMAN, berechnen kann, wenn der Radius r der Kugel und die Höhe der Haube, welche der Ausschnitt zur Grundfläche hat, $AP = h$ gegeben ist.

Auflösung. Was von der ganzen Kugel, als eine Summe von kleinen Pyramiden (Kegeln) gilt, gilt offenbar auch von einem Ausschnitt. Er ist nämlich gleich einem Kegel, dessen Höhe gleich dem Radius, und dessen Grundfläche die Haube ist. Letztere ist (§ 178) $= 2\pi r h$, folglich der Inhalt des Ausschnitts:

$$V = \tfrac{2}{3}\pi r^2 h.$$

185.

Aufgabe. Den Inhalt eines Haubenabschnitts, MAN, aus der Höhe $AP = h$ und dem Radius der Kugel zu berechnen.

Auflösung. Man muſs den Kegel CMN vom Ausschnitt CMAN subtrahieren. Der Inhalt des Kegels ist $= \pi . \frac{CP}{3} . MP^2$, oder weil $CP = r - h$ und $\overline{MP}^2 = r^2 - (r-h)^2 = 2rh - h^2$ und der Inhalt des Ausschnitts (nach § 184) $= \frac{2}{3}\pi r^2 h$, so ist der Abschnitt $V = \frac{2}{3}\pi r^2 h - \pi . \frac{r-h}{3} . (2rh - h^2)$, oder die Klammern aufgelöst und gehörig reduziert:

$$V = \pi h^2 (r - \tfrac{1}{3}h) \ldots\ldots (1)$$

Zusatz. Ist statt des Radius r der Kugel der bequemer zu messende Radius des Grundkreises des Abschnitts, $MP = a$ gegeben, so folgt aus § 126: $h : a = a : 2r - h$; hieraus: $r = \frac{a^2 + h^2}{2h}$. Dies statt r in obige Formel (1) substituiert, ist auch:

$$V = \frac{\pi h}{6}(3a^2 + h^2) \ldots\ldots\ldots\ldots (2)$$

186.

Aufgabe. Den Inhalt V eines Zonen-Abschnitts, DEGF, zu berechnen, wenn die Höhe HK $= h$ und die Radien der beiden Grundflächen DH $= a$ und FK $= b$ gegeben sind.

Auflösung. Man setze KB $= x$ und subtrahiere den Abschnitt FBG vom Abschnitt DBE, so hat man den Zonen-Abschnitt (§ 185, Formel 2):

$$V = \pi . \frac{3a^2 + (h+x)^2}{6} . (h+x) - \frac{\pi x}{6} . (3b^2 + x^2).$$

$$\text{oder } \frac{6V}{\pi} = 3a^2h + 3a^2x + h^3 + 3h^2x + 3hx^2 - 3b^2x$$

$$\frac{6V}{\pi} = 3a^2h + h^3 + 3(hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x).$$

Um x zu eliminieren, hat man, den Radius der Kugel $= r$ gesetzt (§ 126):

$$x : b = b : 2r - x, \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{b^2}{x} + x$$

$$h + x : a = a : 2r - (x+h), \quad \text{hieraus: } 2r = \frac{a^2}{h+x} + x + h.$$

Mithin ist $\frac{b^2}{x} = \frac{a^2}{h+x} + h$ und hieraus folgt:

$$hx^2 + a^2x + h^2x - b^2x = b^2h,$$

folglich nach Substitution und gehöriger Reduktion:

$$V = \frac{\pi h}{2}(a^2 + b^2 + \tfrac{1}{3}h^2).$$

187.

Um den Inhalt ganz unregelmäſsiger Körper zu finden, muſs man sie in Prismen oder Pyramiden zerlegen und die einzelnen Stücke berechnen. Geht dies nicht an, so muſs man sich auf folgende Weise zu helfen suchen:

1) Hat man den Inhalt eines Hohlgefäſses zu bestimmen, so kann man es mit Wasser füllen, dieses dann in einen senkrechten Cylinder oder ein Parallelepipedon von bekannter Grundfläche gieſsen, die Höhe, bis zu welcher das Wasser ihn anfüllt, messen, und hat dann diese nur mit der Grundfläche zu multiplizieren. Ist der Cylinder (Parallelepiped) im voraus, zu einem kubischen Maſsstab dienend, gehörig

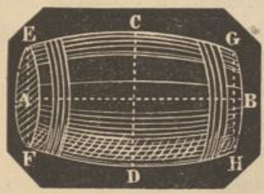
graduiert, so kann man das Volumen, welches das Wasser in ihm einnimmt, unmittelbar ablesen.

2) 1 Liter (Kubikdecimeter) Wasser wiegt 1 kg oder 2 ℔, folglich kann man auch aus dem Gewichte des Wassers, welches ein Hohlgefäſs enthält, seinen Inhalt berechnen.

3) Ist der Inhalt eines nicht hohlen unregelmäſsigen Körpers zu bestimmen, so kann man ihn in einen hohlen Cylinder (Prisma) von bekannter Grundfläche legen, den leer bleibenden Raum so weit mit Wasser (Sand) ausfüllen, bis der Körper ganz bedeckt ist. Man nimmt dann den Körper wieder heraus und miſst, um wieviel das Wasser im Cylinder jetzt niedriger steht, und multipliziert diese Senkung mit der Grundfläche.

4) Man umgebe den Körper — er sei z. B. ein groſser auf dem Felde liegender Stein — mit einem prismatischen Körper (Parallelepipedon), dessen Inhalt man berechnen kann, fülle den leer bleibenden Raum mit Sand (Erde) aus, berechne jetzt den ganzen prismatischen Körper und subtrahiere den Kubikinhalt des zur Ausfüllung gebrauchten Sandes.

188.



*) Den kubischen Inhalt leerer Fässer berechnet man annäherungsweise nach einer der beiden folgenden Formeln, worin D = CD den gröſsten durchs Spund gemessenen Durchmesser, d = EF = GH den Durchmesser der parallelen Böden und h = AB die Länge des Fasses, V den Inhalt bedeutet, und $\pi = 3\frac{1}{7}$ ist.

$$V = \frac{\pi h}{9}\,(D + \tfrac{1}{2}d)^2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

$$V = 0{,}04909\,h\,(10\,D^2 + 5\,d^2 + D d) \ldots\ldots (2)$$

Die zweite Formel (von Rich. Schurig) giebt das Volumen genauer. — Wäre z. B. D = 100 cm, d = 60 cm, h = 110 cm, so giebt die erste Formel: V = 649,17 Liter, die zweite Formel: V = 661,15 Liter.

Sind die beiden Böden von verschiedenen Durchmessern, so nimmt man für d das arithmetische Mittel derselben.

189.

Regelmäſsige Körper. Regelmäſsige Vielecke, d. h. solche, deren Winkel und Seiten einander gleich sind, kann man von jeder beliebigen Seitenzahl, mithin unendlich viele verschiedene denken. Übertragen wir aber diesen Begriff von Regelmäſsigkeit auch auf Körper, und nennen nur solche Körper regelmäſsige, deren Ecken (körperliche Winkel) einander gleich, und deren Seitenflächen kongruente und zugleich regelmäſsige Vielecke sind, so ergiebt sich, als eine notwendige Folge und merkwürdiges Resultat unserer Denkgesetze, daſs es solcher regelmäſsigen Körper nicht mehr, als fünf verschiedene geben kann.

Der Grund liegt nämlich darin: daſs 1) zur Bildung eines körperlichen Winkels (Ecke) wenigstens drei Ebenen erforderlich sind, und daſs, wie ebenfalls leicht einzusehen, 2) alle Kantenwinkel (Linienwinkel), welche eine Ecke bilden (z. B. um die Spitze einer Pyramide herum liegen), zusammen allemal weniger, als vier rechte Winkel betragen.

Hieraus folgt nun sogleich, daſs es keinen regelmäſsigen Körper geben kann, dessen Seitenflächen kongruente regelmäſsige Sechsecke und viel weniger noch regelmäſsige 7, 8, 9...Ecke wären; denn schon im regelmäſsigen Sechseck beträgt jeder Winkel 120°. Drei solche Winkel können also nicht (weil 4 Rechte betragend) zur Bildung einer Ecke zusammengestellt werden, und wir haben es deshalb nur noch mit den regelmäſsigen 3, 4 und 5 Ecken zu versuchen.

Im regelmäſsigen Dreieck ist jeder Winkel = 60°. Drei, vier und auch fünf solche Winkel betragen weniger, als vier rechte und können also eine Ecke bilden. Im regelmäſsigen Viereck ist jeder Winkel = 90°, und im regelmäſsigen Fünfeck = 108°. Von jedem dieser Winkel können also nur drei eine Ecke bilden. Die gehörige Zusammenstellung giebt nun folgende fünf regelmäſsige Körper.

1. *Tetraeder*, dessen Seitenflächen regelmäſsige Dreiecke sind. — Man denke sich auf der Ebene eines gleichseitigen Dreiecks, ABC, im Mittelpunkt O ein Perpendikel errichtet und schneide dieses mit einer Seite, AB, aus einem Punkt, A, in einem Punkt, P, so giebt dieser Punkt P mit A, B, C verbunden noch drei regelmäſsige, dem ABC kongruente Dreiecke, und es ist

leicht einzusehen, daſs in der entstandenen Pyramide PABC auch die vier körperlichen Winkel (Ecken) einander gleich sind, weil jeder durch drei Kantenwinkel von je 60° gebildet. Zeichnet man, um das Netz des *Tetraeders* zu erhalten, über jede Seite des regelmäſsigen Dreiecks ABC wieder regelmäſsige Dreiecke, ABS etc., so kann man die ganze Figur aus dem Papier schneiden, und die äuſsern Dreiecke dachförmig gegen das innere aufschlagen.

2. *Hexaeder*, dessen sechs gleiche Seitenflächen Quadrate sind, wovon je drei eine Ecke bilden. Dieser Körper ist der schon bekannte Würfel oder Kubus, und dessen Netz leicht zu konstruieren.

3. *Oktaeder*, dessen acht gleiche Seitenflächen regelmäſsige Dreiecke sind, wovon je vier eine Ecke bilden. Man denke sich auf der Ebene eines Quadrats, ABCD, im Mittelpunkt O ein Perpendikel errichtet, und dieses durch die Ebene hindurch verlängert. Schneidet man dieses Perpendikel mit einer Seite, AB, aus A auf beiden Seiten des Quadrats in den Punkten P und P′, und verbindet diese mit A, B, C, D, so hat man über der Grundfläche ABCD zwei gleiche entgegengesetzte Pyramiden gezeichnet, welche das *Oktaeder* bilden.

4. *Dodekaeder*, dessen zwölf gleiche Seitenflächen regelmäſsige Fünfecke sind, und wovon jede der zwanzig Ecken aus drei Kantenwinkeln von je 108° gebildet ist.

5. *Ikosaeder*, dessen zwanzig gleiche Seitenflächen wiederum regelmäſsige Dreiecke sind, und wovon jede seiner 12 Ecken durch 5 Kantenwinkel von je 60° gebildet wird.

Die genauere Beschreibung und Netzzeichnung der drei letzten regelmäſsigen Körper, sowie die Berechnung derselben würde zu viel Raum einnehmen, und da die vollständige Theorie dieser Körper doch nur rein wissenschaftliches Interesse hat, so müssen wir uns darauf beschränken, den merkwürdigen Umstand, daſs es nur f ü n f verschiedene Arten regelmäſsige Körper geben kann, kurz angedeutet zu haben. Hat man jedoch diese Körper zur Hand, so ist auch die Möglichkeit ihrer Konstruktion leicht einzusehen.

Achtzehntes Buch.

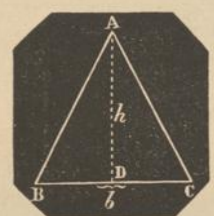
Anwendung der Algebra auf Geometrie.

190.

Unter Anwendung der Algebra auf Geometrie versteht man die Verbindung beider Wissenschaften mit einander, wodurch sie befähigt werden, Probleme zu lösen, welche die Kräfte jeder einzelnen übersteigen. Einige solcher Verbindungen sind im Vorhergehenden bereits schon vorgekommen; wir erinnern nur an die Aufgabe: die Inhalte räumlicher Gröſsen, z. B. des Kreises, Kegels, der Kugel etc. zu bestimmen, welches offenbar der Geometrie allein nicht möglich ist, aber auch der Arithmetik allein nicht, weil diese die Kenntnis geometrischer Gesetze voraussetzt, worauf sie ihre Rechnungen gründet. Kurz, beide muſsten mit einander verbunden werden, wie denn überhaupt fast die ganze praktische Geometrie nur aus einer solchen Verbindung hervorgeht. Deshalb ist auch die Arithmetik für die Praxis höchst wichtig und der eigentliche Lebensnerv der praktischen Geometrie, wie dies besonders ein eigener und wichtiger Teil der Mathematik, die Trigonometrie, zeigt.

Durch Hilfe der Arithmetik können ferner manche Beweise ungemein vereinfacht und abgekürzt werden. Manche geometrische Sätze lassen sich nur auf arithmetischem Wege finden und beweisen. Man merke sich hier folgendes: Sind von einer räumlichen Gröſse solche Stücke in Zahlen gegeben, wodurch andere damit in Verbindung stehende Stücke der Gröſse nach vollkommen bestimmt sind und durch Zeichnung gefunden werden könnten, wie z. B. durch die drei Seiten eines Dreiecks der Radius des um- oder eingeschriebenen Kreises etc., so mufs es auch allemal zwischen solchen von einander abhängigen räumlichen Gröfsen eine arithmetische Beziehung geben, und somit eine allgemeine Gleichung existieren, welche den Zusammenhang dieser Gröfsen enthält. Und diese Gleichung aufzufinden, d. i. die geometrische Beziehung unter den fraglichen Gröfsen in die arithmetische Sprache zu übersetzen, ist eine der Hauptanwendungen der Arithmetik auf Geometrie. Hat man solche Gleichungen (Formeln) einmal gefunden, so zeigen sie, abgesehen von ihrer oft merkwürdigen Form, manchmal noch mehr, als man suchte, ganz ungeahnte merkwürdige Verhältnisse, so dafs in diesem Sinne die Arithmetik ein wichtiges Entdeckungsmittel ist. — Einige Gewandtheit in der Algebra, schnelle Erinnerung geometrischer Lehrsätze, sind aber hierzu erforderlich, wie die folgenden Beispiele zeigen werden.

191.



Aufgabe. Es ist die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks BC $= b$ gegeben, sowie die Schenkel AB $=$ AC $= a$. Man sucht die Höhe AD $= h$ und den Inhalt F.

Auflösung. Aus dem rechtwinkligen Dreieck ADC folgt sogleich:

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2}\right)^2}.$$

$$F = \tfrac{1}{2} b . \sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4} b^2} = \frac{b}{4} \sqrt{4 a^2 - b^2}.$$

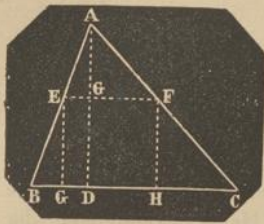
Wäre $b = a$, also das Dreieck ein gleichseitiges, so wäre

$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = \sqrt{\frac{3 a^2}{4}} = \frac{a}{2} \sqrt{3}.$$

$$F = \left(\frac{a}{2}\right)^2 . \sqrt{3}.$$

192.

Aufgabe. Es ist die Grundlinie und Höhe eines Dreiecks gegeben, BC $= a$, AD $= h$. Man sucht die Seite x eines darin



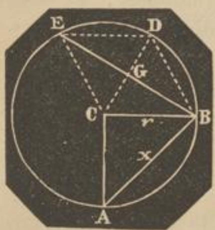
gezeichneten Quadrats, von welchem eine Seite auf der Grundlinie liegt.

Auflösung. Weil $\triangle$ AEF $\sim$ $\triangle$ ABC, und AG $= h - x$, so hat man:

$$(h - x) : h = x : a$$

$$\text{hieraus: } x = \frac{ah}{a + h}$$

193.



Aufgabe. Es ist der Radius eines Kreises CA $= r$ gegeben. Wie findet man hieraus die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vierecks AB $= x$, und des Dreiecks BE $= y$?

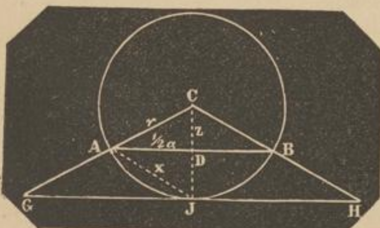
Auflösung. Für die Seite des Vierecks ist: $x^2 = 2r^2$, also:

$$x = r\sqrt{2}.$$

Ist BD $=$ DE $= r$, so ist CG $= \frac{1}{2}r$ (§ 46), und folglich $(\frac{1}{2}y)^2 = r^2 - (\frac{1}{2}r)^2$, hieraus:

$$y = r\sqrt{3}.$$

194.



Aufgabe. Aus dem Radius eines Kreises AC $= r$, und der Seite eines beliebigen eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks AB$=a$, die Seite des umgeschriebenen regelmäſsigen Vielecks GH $= u$, und die Seite des eingeschriebenen regelmäſsigen Vielecks von doppelt so vielen Seiten AJ $= x$ zu finden.

Auflösung. Setzt man vorläufig das Perpendikel CD$=z$, so hat man zuerst $z^2 = r^2 - (\frac{1}{2}a)^2$, also: $z = \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}$.

Dann ist CD : CJ = AB : GH oder $z : r = a : u$, hieraus: $u = \frac{ar}{z}$, oder: statt z seinen Wert gesetzt,

$$u = \frac{ar}{\sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2}} \dots\dots\dots\dots\dots (1)$$

Weil nun $DJ = r - z$, so ist: $x^2 = (\frac{1}{2}a)^2 + (r-z)^2$, oder: $x^2 = \frac{1}{4}a^2 + r^2 - 2rz + z^2$, oder, statt z und z^2 ihre Werte gesetzt:

$$x = \sqrt{2r(r - \sqrt{r^2 - \frac{1}{4}a^2})} \dots\dots (2)$$

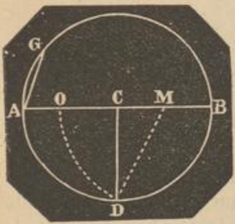
Setzt man in beiden Formeln $r = 1$, so hat man:

$$u = \frac{a}{\sqrt{1 - \frac{1}{4}a^2}} \dots\dots\dots\dots\dots (3)$$

$$x = \sqrt{2 - \sqrt{4 - a^2}} \dots\dots\dots\dots (4)$$

Wäre a die Seite des eingeschriebenen regelmäfsigen Vierecks $= \sqrt{2}$ (§ 193), so findet man nach Formel (4) die Seite x des eingeschriebenen Achtecks, und wenn man darin diesen gefundenen Wert wieder statt a setzt, nach derselben Formel die Seite des eingeschriebenen 16-Ecks etc. Auf diese mühsame Weise sind die Zahlen § 139 berechnet worden.

195.



*) **Aufgabe.** Aus dem Radius $AC = r$ die Seite des regelmäfsigen Zehnecks zu berechnen.

Auflösung. Wird der Radius in O nach stetiger Proportion geteilt, so ist (§ 135) OC die Seite des Zehnecks. Setzt man $OC = x$, mithin $AO = r - x$, so hat man (Algebra § 227):

$$r - x : x = x : r$$

$$x^2 + rx = r^2$$

$$x^2 + rx + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{r^2}{4}$$

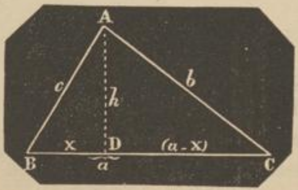
$$x + \frac{1}{2}r = \pm\sqrt{\frac{5r^2}{4}}$$

$$x = \frac{r}{2}(\sqrt{5} - 1).$$

Anmerkung. Hieraus folgt noch eine leichtere Konstruktion für die Seite des Zehnecks. Man halbiere nämlich den Radius BC in M, errichte CD senkrecht auf AB, nehme MO = MD, so ist CO die Seite des Zehnecks (und zugleich die Gerade DO die des Fünfecks).

Beweis. Es ist $\overline{MO}^2 = \overline{MD}^2 = r^2 + \frac{1}{4}r^2 = \frac{5r^2}{4}$, also $MO = \frac{1}{2}r\sqrt{5}$, folglich $CO = \frac{1}{2}r\sqrt{5} - \frac{1}{2}r = \frac{r}{2}(\sqrt{5}-1)$, wie vorhin.

196.



Aufgabe. Es sind die drei Seiten a, b, c eines Dreiecks gegeben, auf die Seite $BC = a$ ist das Perpendikel AD gefällt, man sucht den Abstand desselben von B (die Projektion von c auf a).

Auflösung. Setzt man den fraglichen Abstand $BD = x$, mithin $DC = a - x$, und $AD = h$, so ist: $h^2 = c^2 - x^2$, und auch $h^2 = b^2 - (a-x)^2$, folglich:

$$b^2 - (a-x)^2 = c^2 - x^2$$

$$b^2 - a^2 + 2ax - x^2 = c^2 - x^2$$

und hieraus: $x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$ *)

197.

Aufgabe. Eine Formel abzuleiten, nach welcher man aus den drei gegebenen Seiten a, b, c eines Dreiecks den Inhalt F berechnen kann.

Auflösung. Es kommt nur darauf an, die Höhe h zu finden. Setzen wir deshalb (s. Figur § 196) in den Ausdruck

$$h^2 = c^2 - x^2 = (c+x)(c-x)$$

*) Man vergleiche wegen des negativen Resultats, welches diese Formel geben kann, Algebra § 126.

statt x den dafür gefundenen Wert, so ist:

$$h^2 = \left(c + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \left(\frac{2ac + a^2 + c^2 - b^2}{2a}\right)\left(\frac{2ac - a^2 - c^2 + b^2}{2a}\right)$$

$$h^2 = \frac{\{(a+c)^2 - b^2\}\ \{b^2 - (a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$h^2 = \frac{(a+c+b)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c)}{4a^2}$$

$$h = \frac{1}{2a}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

Multipliziert man die gefundene Höhe mit $\frac{a}{2}$, so ist:

$$F = \tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}\,^{*)}$$

Diese Formel, welche besonders für die Feldmeſskunst von groſser Wichtigkeit ist, läſst sich noch auf eine für die numerische Rechnung bequemere Form bringen. Setzen wir nämlich die Summe der drei gegebenen Seiten:

$$a+b+c = s = 2.\tfrac{1}{2}s$$

so ist: $a+b-c = 2.\tfrac{1}{2}s - 2c = 2(\tfrac{1}{2}s - c)$

$$a+c-b = 2.\tfrac{1}{2}s - 2b = 2(\tfrac{1}{2}s - b)$$

$$b+c-a = 2(\tfrac{1}{2}s - a).$$

Dies in vorstehende Formel substituiert, kommt, nach gehöriger Reduktion:

$$F = \sqrt{\tfrac{1}{2}s.(\tfrac{1}{2}s - a)\,(\tfrac{1}{2}s - b)\,(\tfrac{1}{2}s - c)}$$

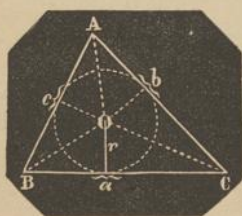
in Worten: man subtrahiere von der halben Summe der drei Seiten jede derselben, multipliziere die drei Reste und die

*) Diese Formel, sagt Playfair, zu Euklids Zeiten wahrscheinlich unbekannt, findet sich, jedoch ohne Beweis, in den Schriften Heros des Jüngern, eines Ingenieurs, welcher um das achte Jahrhundert gelebt zu haben scheint. Sie war jedoch schon viel früher in Hindostan bekannt, wie aus einem Werke des Bramegupta hervorgeht. Der Italiener Tartaglia aber, der im sechzehnten Jahrhundert lebte, machte zuerst darauf aufmerksam.

halbe Summe mit einander, und ziehe aus dem Produkt die Quadratwurzeln, was mittelst Logarithmentafeln sich leicht thun läfst. Sei z. B. gegeben:

$$\begin{array}{lrl}
 & \frac{1}{2}s = 331{,}4 \ldots & 2{,}5203525 \\
a = 256{,}7\,\mathrm{m} & \frac{1}{2}s - a = 74{,}7 \ldots & 1{,}8733206 \\
b = 198{,}6\,\mathrm{m} & \frac{1}{2}s - b = 132{,}8 \ldots & 2{,}1231981 \\
c = \underline{207{,}5}\,\mathrm{m} & \frac{1}{2}s - c = 123{,}9 \ldots & \underline{2{,}0930713} \\
s = 662{,}8\,\mathrm{m} & & \underline{8{,}6099425} \\
 & \lg \mathrm{F} = & 4{,}3049712 \\
 & \mathrm{F} = & 20182{,}33\ \mathrm{qm.}
\end{array}$$

198.

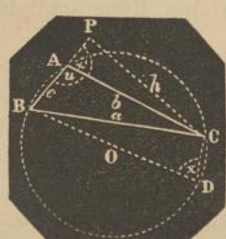


Aufgabe. Aus den drei Seiten eines Dreiecks a, b, c den Radius r des eingeschriebenen Kreises zu berechnen.

Auflösung. Nach dem vorhergehenden § kann man den durch die Seiten bestimmten Inhalt F des Dreiecks als bekannt ansehen; da nun der Mittelpunkt O des eingeschriebenen Kreises von allen drei Seiten gleich weit entfernt ist (§ 76), so hat man: $\frac{ar}{2} + \frac{br}{2} + \frac{cr}{2} = \mathrm{F}$, und hieraus:

$$r = \frac{2\mathrm{F}}{a + b + c}$$

199.



Aufgabe. Aus den drei Seiten a, b, c eines Dreiecks den Radius R des umgeschriebenen Kreises zu finden.

Auflösung. Setzt man den als bekannt anzusehenden Inhalt $= \mathrm{F}$, und das von C auf AB gefällte Perpendikel $\mathrm{CP} = h$, so ist erstlich:

$$\frac{ch}{2} = \mathrm{F}, \text{ also: } h = \frac{2\mathrm{F}}{c}$$

Verbindet man den Endpunkt D des Durchmessers mit C, so ist $\angle$ BCD = P = 90° (§ 81), ferner: $x + u = x' + u = 180°$ (§ 90), also $x = x'$, mithin $\triangle$ CAP $\sim$ $\triangle$ BDC, daher: $b : 2R = h : a$, oder $b : 2R = \frac{2F}{c} : a$, und hieraus:

$$R = \frac{abc}{4F}.$$

200.

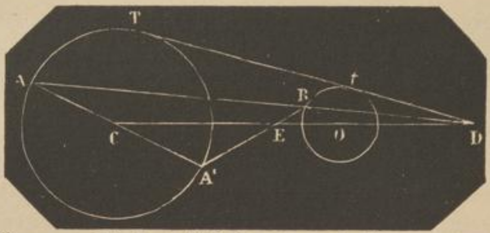
Aufgabe. Es soll ein Quadrat, dessen Seite $= a$, mit gleichen Kreisen möglichst angefüllt werden. Mit wie viel Kreisen kann dies geschehen und wie viel beträgt die Flächensumme der leer bleibenden Zwischenräume?

Auflösung. Denkt man sich die Seiten des Quadrats in n gleiche Teile geteilt, so zerfällt das Quadrat in n^2 kleinere gleiche Quadrate. In jedes kann ein Kreis beschrieben werden, dessen Inhalt $= \pi \left(\frac{a}{2n}\right)^2$. Der Inhalt aller Kreise ist $= n^2 . \pi \left(\frac{a}{2n}\right)^2 = \pi . \frac{a^2}{4}$; folglich ist, wie grofs auch n angenommen werden möge, die Summe aller Kreisflächen doch jedesmal gerade so grofs, als ein einziger eingeschriebener Kreis; die fragliche Summe der leeren Zwischenräume ist folglich $= a^2 - \pi . \frac{a^2}{4} = a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$, und das Quadrat kann mit 1, 4, 9, 16, 25... gleichen Kreisen ausgefüllt werden.

Eben so ist leicht einzusehen, dafs ein Kubus, dessen Seite $= a$, mit 1, 8, 27, 64... n^3 gleichen Kugeln ausgefüllt werden kann und dafs die Summe der leeren Zwischenräume stets $= a^3\left(1 - \frac{\pi}{6}\right)$.

201.

Aufgabe. Es sind die Gröfsen zweier Kreise und ihr Abstand gegeben: CA = R, OB = r, CO = e. Man ziehe zwei parallele Radien, sowohl nach derselben, als auch nach entgegengesetzten Richtungen OB ∥ CA und OB ∥ CA′, verbinde ihre Endpunkte durch gerade Linien und bestimme dann deren Durchschnittspunkte D und E in der Centrallinie von O, nämlich OD $= x$, und OE $= y$.



Auflösung. Weil $\triangle BOD \sim \triangle ACD$, so hat man:

$$x : x + e = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$x = \frac{re}{R - r}$$

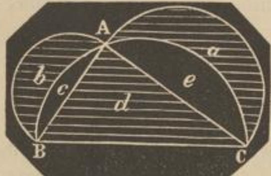
Ferner ist $\triangle OEB \sim \triangle ECA'$, daher:

$$y : e - y = r : R, \text{ hieraus:}$$

$$y = \frac{re}{R + r}$$

Anmerkung. Weil die gefundenen Werte x, y von der Lage der parallelen Radien nicht abhängen, und dieselben bleiben, wenn die Verbindungslinie auf dem einen Radius, mithin auch auf dem andern senkrecht steht, so ist es leicht, an zwei gegebene Kreise eine gemeinschaftliche Berührungslinie zu ziehen, indem man erst die Punkte D und E bestimmt und dann nach § 83 verfährt. Denkt man sich statt der Kreise Kugeln, und die kleinere von der gröſsern beleuchtet, so ist die Länge des sogenannten Kernschattens durch den für x gefundenen Ausdruck gegeben.

202.



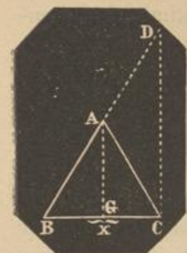
Aufgabe. Über die Seiten eines rechtwinkligen Dreiecks, ABC, sind Halbkreise beschrieben; man soll beweisen, daſs die Flächensumme der beiden mondförmigen Stücke a und b, welche nach ihrem Entdecker die Hippokratischen Möndchen genannt werden, so groſs ist, als die Fläche des Dreiecks ABC.

Auflösung. Die Fläche des gröſsern Halbkreises ist $= \frac{1}{8} . \pi BC^2$, die der beiden kleinern $= \frac{1}{8}\pi . \overline{AB}^2 + \frac{1}{8}\pi . \overline{AC}^2 = \frac{1}{8}\pi(\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2) = \frac{1}{8}\pi . \overline{BC}^2$, folglich ist

$$c + d + e = a + e + b + c,$$

hieraus: $a + b = d$. Wäre das rechtwinklige Dreieck gleichschenklig, so wäre jedes der beiden Möndchen gleich der Hälfte des Dreiecks ABC.

203.



Aufgabe. Wie grofs mufs die Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sein, wenn der Inhalt desselben F = 48 qm, und die gleichen Schenkel AB = AC = a = 10 m sein sollen.

Auflösung. Es sei die gesuchte Grundlinie BC$=x$, also das darauf gefällte Perpendikel AG $= \sqrt{a^2 - (\frac{1}{2}x)^2}$, so hat man:

$$F = \tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - \tfrac{1}{4}x^2}$$

$$F^2 = \frac{x^2}{4}\left(a^2 - \frac{x^2}{4}\right) = \frac{a^2x^2}{4} - \frac{x^4}{16}$$

$$x^4 - 4a^2x^2 = -16F^2 \text{ (Algebra § 231)}$$

$$x^4 - 4a^2x^2 + (2a^2)^2 = 4a^4 - 16F^2$$

$$x^2 - 2a^2 = \pm\sqrt{4a^4 - 16F^2}$$

$$x = \sqrt{2a^2 \pm \sqrt{4a^4 - 16F^2}}$$

Je nachdem man das obere oder untere Vorzeichen nimmt, hat man $x = 16$, und auch $x = 12$. Dafs hier wirklich zwei verschiedene Grundlinien möglich sind, worauf die Algebra aufmerksam macht, ist leicht einzusehen, wenn man AB um sich selbst nach D verlängert, und DC zieht; dann ist $\triangle$ ABC = $\triangle$ ADC (§ 97, Zusatz). Ist also BC = 12, so ist DC = 16.

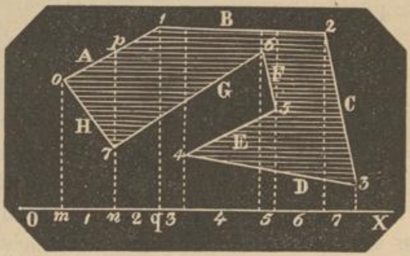
204.

*) Zum Schlusse dieses Kapitels wollen wir noch eine uns von Gaufs mitgeteilte, für die praktische Geometrie wichtige Methode erläutern, nach welcher man den Flächeninhalt einer aufs Papier getragenen Figur (z. B. einer Karte) leichter, als nach der gewöhnlichen Methode berechnen kann.

Nach der gewöhnlichen Methode zerlegt man die Figur in lauter Dreiecke (in Rechtecke ist selten möglich), mifst nach demselben verjüngten Mafsstab, nach welchem die Figur aufgetragen worden, in jedem Dreieck Grundlinie und Höhe, und berechnet hieraus den fraglichen Inhalt. Diese Methode ist aber nicht allein der Karte sehr nachteilig, sondern auch noch andern Übelständen und Unbequemlichkeiten ausgesetzt, denen wir auf folgende Weise ausweichen können.

Des leichtern Verständnisses halber wollen wir als Beispiel zuerst eine geradlinig begrenzte Figur von bestimmter Seitenzahl annehmen.

Wir ziehen nun neben dieser Figur in beliebiger Richtung eine Linie, OX (Abscissenachse), und fällen darauf von jedem Eckpunkt ein Perpendikel (Ordinate), welches wir uns aufwärts durch die Figur hindurch verlängert denken, so ist dadurch die Abscissenlinie in $n - 1$ Teile geteilt,*) wenn die Figur n Seiten hat, und es ist klar, daſs jeder dieser Teile der Abscissenlinie mit zwei Ordinaten und einer Seite der Figur oder mit einem Stück von der Seite, ein Trapez bildet; kurz, die ganze Figur (bis an die Abscissenachse gerechnet) ist in lauter Trapeze zerlegt, die teils positiv, teils negativ sind. —



Bezeichnen wir die ganzen Seiten der Figur einfach mit A, B, C..., und Stücke davon mit denselben, jedoch numerierten Buchstaben, so können wir den Flächeninhalt der Figur folgendermaſsen erst kurz andeuten:

$$\begin{array}{llllllll}
1\,A_1 & -1\,H & -2\,G_1 & +3\,B_1 & +4\,E_1 & -4\,D_1 & -5\,F & +7\,C \\
2\,A_2 & & -3\,G_2 & +4\,B_2 & +5\,E_2 & -5\,D_2 & & \\
 & & -4\,G_3 & +5\,B_3 & & -6\,D_3 & & \\
 & & & +6\,B_4 & & -7\,D_4 & & \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{Fläche} = (A) + (B) + (C) + (-D) + (E) + (-F) + (-G) + (-H)$$

*) Eins oder mehrere dieser Teile kann = 0 sein, wenn eine oder mehrere Seiten der Figur mit der Ordinatenrichtung parallel laufen.

wobei also $1\,A_1$ das Trapez $opnm$ und 1 H das davon zu subtrahierende Trapez $o7nm$, ferner $2\,A_2$ das Trapez $p1qn$, und $(A) = 1\,A_1 + 2\,A_2$ das Trapez $o1qm$ bedeutet etc.

Man sieht also, daſs die algebraische Summe der Trapeze, welche die Seiten mit den aus ihren Endpunkten gefällten Ordinaten und den dazwischen liegenden Stücken der Abscissenlinie bilden, den Flächeninhalt der Figur auf sehr einfache Weise darstellt. Was die Vorzeichen betrifft, unter denen offenbar ein enger Zusammenhang stattfindet, so lassen sich dieselben auf folgende Weise erklären:

Wir können den Umfang einer Figur auf zweierlei Weise umgehen; einmal, indem wir die Figur selbst immer zur Rechten, dann auch, indem wir sie immer zur Linken haben. Geht man vom Endpunkt einer der beiden äuſsersten Ordinaten, z. B. von o aus, und zwar steigend von o nach 1, von 1 nach 2 etc., so unterscheiden sich die Seiten ganz einfach durch + und —, je nachdem sie vorwärts oder rückwärts laufen, d. h. je nachdem sie von der ersten Ordinate weiter ab zu den folgenden oder wieder zurückführen. Hiernach müssen also notwendig A, B, C positiv, D aber negativ, E wieder positiv sein etc.

Bezeichnet man demnach die Eckpunkte der Figur, von einer der äuſsersten Ordinaten ausgehend, mit 0, 1, 2..., die von einem beliebig genommenen Punkt, O, abgemessenen Abscissen derselben mit x_0, x_1, $x_2 \ldots$, und die zugehörigen Ordinaten mit y_0, y_1, $y_2 \ldots$ (wobei also $x_0 = Om$, $x_1 = Oq \ldots$; $y_0 = om$, $y_1 = 1q \ldots$; $x_1 - x_0 = mq$; $\frac{y_0 + y_1}{2} = \frac{om + 1q}{2}$ etc.), so kann man die vorhergehende Formel, wenn man die Trapeze (A), (B)... durch Koordinaten ausdrückt, auch so schreiben:

$$F = (x_1 - x_0) \cdot \frac{y_0 + y_1}{2} + (x_2 - x_1)\frac{y_1 + y_2}{2} + (x_3 - x_2)\frac{y_2 + y_3}{2} + \ldots (1)$$

Wir können auf diese Weise allen Trapezen der Gleichförmigkeit halber das *plus*-Zeichen geben, denn ist eins derselben negativ, so ist die dazu gehörige Seite rückläufig, mithin auch die Abscisse des vorhergehenden Punktes gröſser, als die des folgenden, und deshalb liegt das Negative schon in dem Faktor, welcher die Höhe des Trapezes ausdrückt; so ist z. B. in $(-D) = (x_4 - x_3)\frac{y_3 + y_4}{2}$ der Faktor $x_4 - x_3$ wirklich negativ.

Aus obiger Formel folgt:

$$F = \tfrac{1}{2}\begin{cases}(x_1 - x_0)\,(y_0 + y_1)\\(x_2 - x_1)\,(y_1 + y_2)\\(x_3 - x_2)\,(y_2 + y_3)\\(x_4 - x_3)\,(y_3 + y_4)\\(x_5 - x_4)\,(y_4 + y_5)\\(x_6 - x_5)\,(y_5 + y_6)\\(x_7 - x_6)\,(y_6 + y_7)\\(x_0 - x_7)\,(y_7 + y_0)\end{cases}$$

Ohne die angedeuteten Multiplikationen wirklich auszuführen, sieht man leicht, daſs je zwei auf einander folgende Produkte, nämlich das erste und zweite, das zweite und dritte, das letzte und erste, immer zwei gleiche und entgegengesetzte Teile enthalten, z. B. das erste $+ x_1 y_1$, das zweite $- x_1 y_1$ etc., läſst man diese aus, so ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\,[x_0(y_7 - y_1) + x_1(y_0 - y_2) + x_2(y_1 - y_3) + x_3(y_2 - y_4) + \ldots + x_6(y_5 - y_7) + x_7(y_6 - y_0)].$$

Diese höchst einfache schöne Formel*) (in welcher man auch die Koordinaten x, y mit einander verwechseln könnte) würde in Worten lauten: Man multipliziere jede Abscisse mit der Differenz der nächst vorhergehenden und nächstfolgenden Ordinate und nehme von der algebraischen Summe dieser Produkte die Hälfte.

Es ist klar, daſs diese Formel allgemein gilt, die Anzahl der Punkte möge noch so groſs sein. Hat die Figur auch krummlinige Grenzen, so findet man das Resultat desto genauer, je mehr Punkte man annimmt. Findet man es bequemer, die Abscissenlinie durch die Figur gehen zu lassen, so kann dies die Gestalt der Formel nicht ändern, weil diese Verlegung der Abscissenlinie erstlich die Abscissen-Differenzen $(x_1 - x_0)$. ., selbst nicht ändert, und was die Ordinaten y_0, y_1 . . betrifft, so ist, wenn auch jede um $\mp a$ geändert wird, doch immer $(y_m \mp a) - (y_p \mp a) = y_m - y_p$.

Was das bequeme Messen der Koordinaten betrifft, so braucht man dazu zwei rechtwinklig verbundene Maſsstäbe, wovon der eine, an der Abscissenlinie fortgleitende Schenkel die Abscissen, und der andere zugleich die Ordinaten abliest.

*) Nach einer brieflichen Mitteilung hat Gauſs diese Formel schon 1790 gefunden. Sie wird seitdem oftmals wieder aufs neue gefunden, d. h. von verschiedenen Schriftstellern ohne Angabe der Quelle mitgeteilt.