

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Innerer Zwang beim Stoße

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

ist also nicht eine bestimmte, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, welcher einen auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrechten Stoß darstellt (250).

- 700 **Anmerkung 1.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so sind doch alle Komponenten in Richtung einer möglichen Bewegung durch jene Bewegungsänderung bestimmt.
- 701 **Anmerkung 2.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so ist doch jede Komponente in Richtung einer freien Koordinate durch die Bewegungsänderung eindeutig bestimmt.
- 702 **Anmerkung 3.** Ist p_e eine freie Koordinate, so kann der nach dieser Koordinate ausgeübte Stoß geschrieben werden in den Formen:

$$\begin{aligned} J'_e &= -q_{e_1} + q_{e_0} \quad , \\ &= -\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_e}\right)_1 + \left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_e}\right)_0 \quad . \end{aligned}$$

Innerer Zwang beim Stoße.

- 703 **Bemerkung 1.** Trifft ein Stoß ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, so erfolgt eine Geschwindigkeitsänderung, deren Richtung die Richtung des Stoßes ist, und deren Größe gleich ist der Größe des Stoßes, dividiert durch die Masse des Systems.
- 704 **Bemerkung 2.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten des gestoßenen Systems, so weicht die Geschwindigkeitsänderung im allgemeinen ab von der durch die vorige Bemerkung gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems betrachten.

Definition. Inneren Zwang beim Stoße oder kurz Zwang 705 beim Stoße nennen wir die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines Systems an der Geschwindigkeitsänderung des Systems beim Stoße hervorbringen.

Der Zwang beim Stoße wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Geschwindigkeitsänderung und derjenigen Geschwindigkeitsänderung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich ersterer, vermindert um letztere.

Folgerung. Der Zwang beim Stoße ist das Zeitintegral 706 des inneren Zwanges des Systems während des Stoßes, genommen über die ganze Dauer desselben.

Aufgabe. Den Zwang eines Systems bei einem Stoße zu 707 bestimmen.

Wir bezeichnen die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_q mit Z_q . Indem wir nun die Gleichung 497a mit $m dt$ multiplizieren, und über die Dauer des Stoßes integrieren, erhalten wir:

$$mZ_q = q_{q_1} - q_{q_0} - J_q \quad . \quad \text{a)}$$

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reichen die Komponenten nach beliebigen Koordinaten im allgemeinen nicht aus. Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an und bezeichnen die Komponente des Zwanges nach x_v mit Z_v , so erhalten wir:

$$mZ_v = m_v (\dot{x}_{v_1} - \dot{x}_{v_0}) - I_v \quad , \quad \text{b)}$$

also wird die Größe Z des Zwanges die positive Wurzel der Gleichung:

$$mZ^2 = \sum_1^{3n} m_v \left(\dot{x}_{v_1} - \dot{x}_{v_0} - \frac{I_v}{m_v} \right)^2 .$$

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges beim Stoße fällt 708 kleiner aus für die natürliche Bewegungsänderung, als sie ausfallen würde für irgend eine andere mögliche Bewegungsänderung.

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der I_v die Größe $\frac{1}{2}mZ^2$ ein Minimum werde, erhalten wir (vergl. 155, 498) die $3n$ Gleichungen:

$$m_v(\dot{x}_{v_1} - \dot{x}_{v_0}) - I_v + \sum_1^i x_{iv} I_i = 0 \quad ,$$

in welchen die I_i zunächst beliebige unbestimmte Multiplikatoren bedeuten, und welche zusammen mit den i Gleichungen

$$\sum_1^{3n} x_{iv}(\dot{x}_{v_1} - \dot{x}_{v_0}) = 0$$

die $3n + i$ Größen $\dot{x}_{v_1} - \dot{x}_{v_0}$ und I_i eindeutig bestimmen. Da aber die Gleichungen zusammenfallen mit den Bewegungsgleichungen 691 des Systems, so wird ihnen genügt durch die natürlichen Geschwindigkeitsänderungen und nur durch diese.

709 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält die Anpassung des GAUSSSchen Prinzips des kleinsten Zwanges an die besonderen Verhältnisse des Stoßes.

710 **Folgerung.** Verhindern die Zusammenhänge des Systems, daß der Winkel zwischen einem Stoße und der durch ihn hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderung gleich Null werde (703), so fällt doch dieser Winkel so klein aus, als es die Zusammenhänge des Systems irgend gestatten.

Denn zeichnen wir ein ebenes Dreieck, dessen Seiten sind die Größe des Stoßes dividiert durch die Masse des Systems, die Größe einer beliebigen möglichen Geschwindigkeitsänderung und die Größe des Unterschiedes beider, also des Zwanges, welcher jener Geschwindigkeitsänderung entspricht, so stellt der von den ersten beiden Seiten eingeschlossene Winkel ϵ den Winkel zwischen Stoß und Geschwindigkeitsänderung dar (34). Eine mögliche Geschwindigkeitsänderung von gegebener Richtung kann nun alle Größen annehmen; unter allen Geschwindigkeitsänderungen von gegebener Richtung kann aber nur diejenige die natürliche sein, bei welcher der Zwang senkrecht steht auf der Geschwindigkeitsänderung (708). Be-

schränken wir uns also auf diejenigen Geschwindigkeitsänderungen, welche hiernach noch in Betracht kommen, so sind alle in Betracht zu ziehenden Dreiecke rechtwinklig; die Hypotenuse aller ist gleich und gegeben; die dem Winkel ε gegenüberliegende Kathete wird aber für die natürliche Geschwindigkeitsänderung kleiner als für jede andere (708), also wird für diese Geschwindigkeitsänderung der Winkel ε selbst ein Minimum, welches die Behauptung ist.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges beim Stoße steht 711 senkrecht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Denn nach 707 und 689 lassen sich die Komponenten des Zwanges darstellen in der Form:

$$-\frac{1}{m} \sum_1^k p_{xq} J_x \quad ,$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (250) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems. Der Satz kann auch als unmittelbare Folgerung aus dem Satz 500 gezogen werden.

Symbolischer Ausdruck. Bezeichnen wir mit δp_e die 712 Änderungen der Koordinaten p_e für eine jede beliebige mögliche Verrückung des Systems, so kann der vorige Satz in die Form der symbolischen Gleichung gekleidet werden:

$$\sum_1^r (q_{e1} - q_{e0} - J_e) \delta p_e = 0 \quad , \quad \text{a)}$$

welche für die rechtwinkligen Koordinaten die Form annimmt:

$$\sum_1^{3n} [m_v (\dot{x}_{v1} - \dot{x}_{v0}) - I_v] \delta x_v = 0 \quad . \quad \text{b)}$$

Vergl. 393, 501.

Anmerkung. Der vorige Lehrsatz (711) enthält die An- 713 passung des D'ALEMBERTSchen Prinzips an die besonderen

Verhältnisse des Stoßes, die symbolische Form 712 den gewöhnlichen Ausdruck dieser Anpassung.

- 714 **Folgerung 1.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung in der Richtung jeder möglichen Bewegung gleich der Komponente des Stoßes nach derselben Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
- 715 **Folgerung 2.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung nach jeder freien Koordinate gleich der Komponente des Stoßes nach dieser Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems.
- 716 **Folgerung 3.** Die Geschwindigkeitskomponente eines gestoßenen Systems nach jeder Koordinate der absoluten Lage ändert sich um einen Betrag, welcher gleich ist der Komponente des wirkenden Stoßes nach der gleichen Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch immer die Zusammenhänge des Systems sind.
- 717 **Anmerkung.** Auch ohne Kenntnis, oder ohne vollständige Kenntnis des Zusammenhangs der Massen eines Systems können wir demnach doch stets sechs Gleichungen für die Bewegung des Systems unter dem Einfluß eines Stoßes angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die sechs Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$, welche wir in 402 einführten, so stellen die sechs Gleichungen, welche wir erhalten, die Anpassung des Prinzips des Schwerpunkts und der Flächen an die besonderen Verhältnisse des Stoßes dar.

Energie, Arbeit.

- 718 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems infolge eines auf das System ausgeübten Stoßes wird die Arbeit des Stoßes genannt.
Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Stoßes wird als negative Zunahme gerechnet. Die Arbeit eines Stoßes kann demnach positiv oder negativ sein.
- 719 **Folgerung.** Die Arbeit eines Stoßes ist das Zeitintegral