Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Bewegung unter dem Einfluß von Stößen

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Zusammensetzung der Stöße.

Lehrsatz. Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist ein Stoß, welchen die Gesamtheit jener Systeme ausübt, gleich der Summe der Stöße, welche die einzelnen Systeme ausüben. 684

Denn die Behauptung gilt für jeden Augenblick der Stoßzeit für die wirkenden Kräfte (**471**), also auch für die Integrale derselben, die Stöße.

Folgerung. Gleichzeitig auf dasselbe System ausgeübte, oder von demselben System ausgeübte Stöße können wie Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung von Vektorgrößen überhaupt. Wir reden von den Komponenten eines Stoßes und von resultierenden Stößen in demselben Sinne, in welchem wir von Komponenten der Kraft und von resultierenden Kräften reden. (Vergl. **472** bis **474**.) 685

Definition. Ein Stoß, welcher von einem einzelnen materiellen Punkt oder auf einen einzelnen materiellen Punkt ausgeübt wird, heißt ein Elementarstoß. 686

Folgerung 1. Jeder Stoß, welcher von einem materiellen System oder auf ein materielles System ausgeübt wird, kann zerlegt werden in eine Anzahl von Elementarstößen. (Vergl. **479**.) 687

Folgerung 2. Die Zusammensetzung und Zerlegung der Elementarstöße erfolgt nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung geometrischer Strecken. (Parallelogramm der Stöße.) (Vergl. **478**.) 688

Bewegung unter dem Einfluß von Stößen.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluß eines gegebenen Stoßes zu bestimmen. 689

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Änderung, welche die Geschwindigkeit des Systems durch den

(689) Stoß erfährt. Es sei nun das betrachtete System dasselbe wie in **481**; bedeuten die P_ϱ die Komponenten der unendlichen Kraft, welche während der Dauer des Stoßes auf das System wirkt, so ist während dieser Dauer nach **481**:

$$\text{a)} \qquad m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho \quad .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dt und integrieren über die Stoßzeit. Da die Werte der Koordinaten während dieser Zeit konstant sind, so ist

$$\text{b)} \qquad m \int f_\varrho \, dt = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn wir durch den Index 0 die Größen vor dem Stoße, durch den Index 1 die Größen nach dem Stoße charakterisieren. Wir haben ferner nach **682**:

$$\text{c)} \qquad \int P_\varrho \, dt = J_\varrho \quad ,$$

und wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

$$\text{d)} \qquad \int P_\varkappa \, dt = J_\varkappa \quad ,$$

so erhalten wir r Gleichungen von der Form:

$$\text{e)} \qquad q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa = J_\varrho \quad .$$

Da die Geschwindigkeit des Systems vor und nach dem Stoße den Zusammenhängen des Systems genügen muß, so erhalten wir weiter aus den k Bedingungsgleichungen des Systems k Gleichungen von der Form:

$$\text{f)} \qquad \sum_1^r{}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho} (\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **e)** als $r + k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $k + r$ Größen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$

und $J_\varkappa$ oder auch für die $k+r$ Größen $q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}$ und $J_\varkappa$ angesehen werden können, und welche also diese Größen und damit die Änderung der Geschwindigkeit des Systems eindeutig bestimmen.

690 **Anmerkung 1.** Ist uns die Geschwindigkeit des Systems vor dem Stoße gegeben, und sind also die Größen q_{ϱ_0} und $\dot{p}_{\varrho_0}$ bekannt, so können wir die r Gleichungen **689e** zusammen mit den k Gleichungen **689f**, oder, was dasselbe, mit den k Gleichungen

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, \dot{p}_{\varrho_1} = 0$$

auch auffassen als $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $J_\varkappa$, welche also diese Größen und damit die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoße eindeutig bestimmen.

691 **Anmerkung 2.** Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnen wir die Komponente des Stoßes nach der Koordinate x_ν mit I_ν, so nehmen die Gleichungen des Stoßes die Form der $3n$ Gleichungen an:

$$m_\nu (\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) + \sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\, I_\iota = I_\nu \quad , \qquad \text{a)}$$

welche zusammen mit den i aus den Bedingungsgleichungen abgeleiteten Gleichungen:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\, (\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) = 0 \qquad \text{b)}$$

die $3n$ Komponenten $\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}$ der Geschwindigkeitsänderung und die i Hilfsgrößen I_ι eindeutig bestimmen.

692 **Anmerkung 3.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so sind die entsprechenden Größen $p_{\varkappa\varrho}$ gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Stoßgleichung nimmt die einfache Form an:

$$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} = J_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle Koordinaten freie Koordinaten, so nehmen alle Gleichungen diese Form an, und die so entstehenden r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Größen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$, welche bekannte lineare Funktionen der durch jene Gleichungen unmittelbar gegebenen $q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0}$ sind.

693 **Folgerung 1** (aus 689). Um ein System aus der Ruhe plötzlich in eine gegebene mögliche Geschwindigkeit zu versetzen, genügt es, dem System einen Stoß zu erteilen, welcher nach Richtung und Größe gleich ist dem Produkt aus der gegebenen Geschwindigkeit und der Masse des Systems.

Denn sind die $q_{\varrho_0} = 0$, und genügen die gegebenen $\dot{p}_{\varrho_1}$ an sich den Bedingungsgleichungen, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = q_{\varrho_1}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

694 **Folgerung 2**. Um ein bewegtes System in seiner augenblicklichen Lage plötzlich zur Ruhe zu bringen, genügt es, dem System einen Stoß zu erteilen, welcher nach Richtung und Größe entgegengesetzt gleich ist dem Produkt aus der Geschwindigkeit des Systems in seine Masse.

Denn sollen die $q_{\varrho_1} = 0$ werden, und genügen die $\dot{p}_{\varrho_0}$ den Bedingungsgleichungen des Systems, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = -q_{\varrho_0}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

695 **Lehrsatz.** Die Geschwindigkeitsänderung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Stöße einem System erteilen, ist die Summe der Geschwindigkeitsänderungen, welche die Stöße, einzeln wirkend, dem System erteilen würden.

Als gleichzeitig wirkend sind dabei alle Stöße bezeichnet, welche innerhalb einer verschwindend kleinen Zeit erfolgen, ohne Rücksicht auf ihre etwaigen Zeitunterschiede oder ihre Reihenfolge innerhalb dieser Zeit.

Der Satz folgt (vergl. **485**) aus der linearen Form der Gleichungen **689e, f**, er kann aber auch als unmittelbare Folgerung des Satzes **485** angesehen werden.

Anmerkung. Der Inhalt des vorigen Lehrsatzes kann auch **696**
wiedergegeben werden in der oft benutzten Form der Aussage, daß mehrere gleichzeitig erfolgende Stöße sich hinsichtlich der Geschwindigkeit, welche sie erzeugen, nicht stören.

Lehrsatz. Steht die Richtung eines Stoßes senkrecht auf **697**
jeder möglichen Verrückung des Systems, auf welches er wirkt, so übt der Stoß keinen Einfluß aus auf die Bewegung des Systems. Und umgekehrt: Übt ein Stoß keinen Einfluß aus auf die Bewegung des Systems, auf welches er wirkt, so steht er senkrecht auf jeder möglichen Verrückung desselben.

Der Satz kann als unmittelbare Folgerung des Satzes **488** angesehen werden oder auch in entsprechender Weise aus den Gleichungen **689e, f** abgeleitet werden.

Anmerkung. Obwohl also aus der Angabe eines Stoßes **698**
eindeutig die Bewegungsänderung erschlossen werden kann, welche er erzeugt, so kann doch nicht umgekehrt aus einer plötzlichen Bewegungsänderung eindeutig auf den Stoß geschlossen werden, welcher sie erzeugt hat.

Aufgabe 2. Die Stoßkraft zu bestimmen, welche ein **699**
materielles System bei gegebener plötzlicher Bewegungsänderung ausübt.

Nach **682** sind die Komponenten des gesuchten Stoßes zu bezeichnen mit J'_ϱ, und nach **683** und **689e** sind dieselben:

$$J'_\varrho = -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} - \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa \quad .$$

Hierin sind die q_{ϱ_1} und q_{ϱ_0} durch die Angaben der Aufgabe bestimmt, die $J_\varkappa$ aber sind nicht gegeben, solange nicht auch die Bewegung des zweiten Systems gegeben ist, auf welches der Stoß ausgeübt wird. Die Lösung der Aufgabe ist also nicht eine bestimmte, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, welcher einen auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrechten Stoß darstellt (**250**).

700 **Anmerkung 1.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so sind doch alle Komponenten in Richtung einer möglichen Bewegung durch jene Bewegungsänderung bestimmt.

701 **Anmerkung 2.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so ist doch jede Komponente in Richtung einer freien Koordinate durch die Bewegungsänderung eindeutig bestimmt.

702 **Anmerkung 3.** Ist p_ϱ eine freie Koordinate, so kann der nach dieser Koordinate ausgeübte Stoß geschrieben werden in den Formen:

$$\begin{aligned} J'_\varrho &= -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} \quad , \\ &= -\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_1 + \left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_0 \quad . \end{aligned}$$

Innerer Zwang beim Stoße.

703 **Bemerkung 1.** Trifft ein Stoß ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, so erfolgt eine Geschwindigkeitsänderung, deren Richtung die Richtung des Stoßes ist, und deren Größe gleich ist der Größe des Stoßes, dividiert durch die Masse des Systems.

704 **Bemerkung 2.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten des gestoßenen Systems, so weicht die Geschwindigkeitsänderung im allgemeinen ab von der durch die vorige Bemerkung gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems betrachten.