Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 6. Von den Unstetigkeiten der Bewegung

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Abschnitt 6. Von den Unstetigkeiten der Bewegung.

Erläuterungen und Bemerkungen.

668 1. Alle Systeme materieller Punkte, auf welche das Grundgesetz nach seinen Voraussetzungen überhaupt Anwendung finden kann, müssen stetige Zusammenhänge besitzen. Die Koeffizienten aller Bedingungsgleichungen solcher Systeme sind also von vornherein stetige Funktionen der Lage (**124**). Dies hindert aber nicht, daß diese Funktionen sich in der Nähe gewisser Lagen äußerst schnell ändern, so daß die Gleichungen schon in sehr benachbarten Lagen endlich verschiedene Koeffizienten haben.

669 2. Wenn das betrachtete System durch eine solche Lage sehr schneller Änderung hindurchgeht, so erfordert die vollständige Kenntnis seiner Bewegung die vollständige Kenntnis der Bedingungsgleichungen auch während der schnellen Änderung derselben. Gewisse Aussagen über die Bewegung aber lassen sich fällen, auch wenn die Form der Bedingungsgleichungen des Systems nur vor und hinter der Stelle ihrer schnellen Änderung gegeben ist. Beschränken wir uns auf diese Klasse von Aussagen, so ist es analytisch einfacher, auf die besondere Art der Änderung keine Rücksicht zu nehmen, und die Bedingungsgleichungen so zu behandeln, als ob ihre Koeffizienten unstetig wären. In diesem Falle ist die Auffassung des Systems als eines unstetigen bedingt durch die freiwillige Beschränkung unserer Behandlung desselben.

670 3. Es kann aber auch geschehen, daß unsere physikalischen Mittel uns zwar erlauben, den Zusammenhang eines Systems im übrigen vollständig zu erforschen, daß sie aber nicht ausreichen, ihn zu erforschen an den Stellen der sehr schnellen Änderung, obwohl wir überzeugt sind, und etwa auch physikalisch nachweisen können, daß dieser Zusammenhang auch hier ein stetiger ist. Trifft dies ein, so sind wir gezwungen, den Zusammenhang analytisch als einen unstetigen

darzustellen, wenn wir nicht auf eine einheitliche Darstellung desselben überhaupt verzichten wollen. In diesem Falle ist dann die Auffassung des Systems als eines unstetigen bedingt durch die unfreiwillige Beschränktheit unserer Kenntnis von dem System.

4. Sind uns umgekehrt unmittelbar analytisch die Koeffi- 671
zienten der Bedingungsgleichungen eines Systems als unstetige Funktionen der Lage gegeben, ohne Angabe, wie diese Funktionen ermittelt sind, so setzen wir voraus, daß einer der beiden vorher erwähnten Fälle vorliege. Wir betrachten also die gegebenen Gleichungen nur als eine unvollständige und angenäherte Angabe der wahren, stetigen Form derselben. Wir nehmen also auch eo ipso an, daß man nicht eine vollständige Bestimmung der Bewegung eines solchen Systems von uns verlange, sondern nur die Angabe derjenigen Aussagen, welche sich trotz der unvollständigen Kenntnis des Systems tun lassen unter der Voraussetzung, daß an den Unstetigkeitsstellen der unbekannte Zusammenhang in Wirklichkeit ein stetiger sei.

5. Geht ein System mit endlicher Geschwindigkeit durch 672
eine Stelle sehr schneller Änderung hindurch, so erleiden seine Bedingungsgleichungen in verschwindender Zeit endliche Änderungen. Ist das System während des ganzen Verlaufs auch in Wirklichkeit, wie es das Grundgesetz voraussetzt, ein gesetzmäßiges, so gewinnt es doch den Anschein, als erlitte seine Gesetzmäßigkeit zur Zeit des Durchgangs durch jene Lage einen Bruch, ohne daß in Wahrheit ein solcher stattfände. Ist uns also analytisch ein System gegeben, dessen im übrigen von der Zeit unabhängige Bedingungsgleichungen zu einer bestimmten Zeit in neue Formen überspringen, so betrachten wir diese Bedingungsgleichungen zu dieser Zeit nur als angenäherte Vertreter eines anderen, uns unbekannten, vielleicht viel verwickelteren, aber jedenfalls nicht nur stetigen, sondern auch gesetzmäßigen Zusammenhangs. Wir nehmen also auch an, daß man nicht eine vollständige Bestimmung der Bewegung des Systems von uns verlange, sondern nur die Angabe derjenigen Aussagen, welche sich trotz der vorhandenen Unkenntnis

nach dem Grundgesetz aussagen lassen unter der Voraussetzung, daß auch zur Zeit der Unstetigkeit der wahre Zusammenhang des Systems ein stetiger und gesetzmäßiger sei.

673 **6.** Indem wir alle Unstetigkeitslagen und -zeiten in der vorerwähnten Weise auffassen, haben wir freilich auf die Behandlung wirklich unstetiger Systeme verzichtet. Auf solche würde auch das Grundgesetz eine Anwendung gar nicht gestatten. Einen Verzicht auf die Behandlung irgendwelcher natürlicher Systeme bedeutet aber diese Einschränkung nicht, da alles uns zu der Annahme berechtigt, daß in der Natur wohl scheinbare, aber keine wirklichen Unstetigkeiten vorkommen. Daß der Durchgang der Systeme durch scheinbare Unstetigkeitslagen nicht vollständig durch das Grundgesetz allein bestimmt ist, entspricht auch vollständig der physikalischen Erfahrung, daß die Kenntnis eines Systems vor und hinter einer Unstetigkeitsstelle nicht hinreicht, um die Änderung der Bewegung beim Durchgang durch die Stelle vollständig zu ermitteln.

Von der Stoßkraft oder dem Stoß.

674 **Bemerkung.** Durchläuft ein System eine Unstetigkeitslage, so erleidet seine Geschwindigkeit eine Änderung von endlicher Größe. Die Differentialquotienten seiner Koordinaten nach der Zeit springen plötzlich auf neue Werte über.

Denn unmittelbar vor und hinter der Unstetigkeitsstelle müssen diese Differentialquotienten, und also die Komponenten jener Geschwindigkeit, linearen Gleichungen mit endlich verschiedenen Koeffizienten genügen.

675 **Folgerung 1.** Beim Durchgang durch eine Unstetigkeitslage wird die Beschleunigung unendlich groß, jedoch in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Beschleunigung, genommen über die Zeit des Durchgangs, im allgemeinen einen endlichen Wert behält.

Denn dieses Zeitintegral ist die im allgemeinen endliche Änderung der Geschwindigkeit.

Folgerung 2. Erleiden die Bedingungsgleichungen des einen von zwei oder mehreren gekoppelten Systemen eine Unstetigkeit, so wird beim Durchgang durch diese Unstetigkeit die zwischen den Systemen auftretende Kraft im allgemeinen unendlich groß, jedoch in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Kraft, genommen über die Zeit des Durchgangs, endlich bleibt. 676

Denn im allgemeinen werden die Komponenten der Beschleunigung des unstetigen Systems auch nach den gemeinsamen Koordinaten im Sinne der Folgerung 1 unendlich werden. Da aber die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen auch während der Unstetigkeit endlich bleiben, so ist die Kraft von der Ordnung der Beschleunigung.

Definition. Stoßkraft oder kurz Stoß heißt das Zeitintegral der während des Durchgangs durch eine Unstetigkeitsstelle von einem System auf ein anderes ausgeübten Kraft, genommen über die Dauer des Durchgangs durch die Unstetigkeitsstelle. 677

Anmerkung. Bei endlicher Geschwindigkeit aller betrachteten Systeme können endliche und unendlich kleine, nicht aber unendlich große Stöße vorkommen. Wir setzen die Stöße im folgenden als endlich voraus. 678

Folgerung 1. Zu jedem Stoß gibt es immer einen Gegenstoß. Er ist das Zeitintegral der Kraft, welche das als zweites bezeichnete System auf das in der Definition zuerst genannte ausübt. 679

Folgerung 2. Ein Stoß wird stets ausgeübt von einem System, welches eine Unstetigkeit seiner Bewegung erleidet, und ausgeübt auf ein System, welches eine Unstetigkeit seiner Bewegung erleidet; er ist nicht denkbar ohne zwei solcher einander beeinflussender Systeme. 680

Aus denselben Gründen wie bei der Kraft können wir uns aber erlauben, von Stößen schlechthin zu reden, ohne ausdrücklich der Systeme zu gedenken, von welchen oder auf welche sie ausgeübt werden.

Folgerung 3. Ein Stoß kann stets betrachtet werden als Vektorgröße, sowohl in bezug auf das System, welches 681 ihn ausübt, als auch in bezug auf das System, auf welches er ausgeübt wird. Seine Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten sind im allgemeinen von Null verschieden; seine Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten sind Null; seine Komponenten in Richtungen, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, bleiben unbestimmt.

Denn die gleiche Behauptung gilt von der Kraft, von welcher der Stoß das Zeitintegral ist.

682 **Bezeichnung.** Erleidet ein System mit den Koordinaten p_ϱ eine Unstetigkeit seiner Bewegung, so wollen wir die Komponenten des Stoßes, welcher auf das System wirkt, nach den p_ϱ mit J_ϱ bezeichnen. Die Komponenten des Stoßes aber, welchen das System ausübt, nach den p_ϱ, sollen mit J'_ϱ bezeichnet werden. Für das zweite System, dessen Koordinaten wir mit $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen, mögen die entsprechenden Größen mit $\mathfrak{J}_\varrho$ und $\mathfrak{J}'_\varrho$ bezeichnet werden (vergl. **467**). Identisch ist dann:

$$J_\varrho = \mathfrak{J}'_\varrho \quad ,$$
$$\mathfrak{J}_\varrho = J'_\varrho \quad .$$

683 **Lehrsatz.** Stoß und Gegenstoß sind einander stets entgegengesetzt gleich, d. h. es sind die Komponenten beider nach jeder Koordinate entgegengesetzt gleich, und zwar sowohl wenn wir beide Größen betrachten als Vektorgrößen in bezug auf das eine, als auch in bezug auf das andere System.

Denn Stoß und Gegenstoß können auch betrachtet werden als die Zeitintegrale von Kraft und Gegenkraft (vergl. **468**).

In der eingeführten Bezeichnung wird der Lehrsatz wiedergegeben durch die Gleichungen:

$$J_\varrho = -J'_\varrho \quad ,$$
$$\mathfrak{J}_\varrho = -\mathfrak{J}'_\varrho \quad .$$

Zusammensetzung der Stöße.

Lehrsatz. Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist ein Stoß, welchen die Gesamtheit jener Systeme ausübt, gleich der Summe der Stöße, welche die einzelnen Systeme ausüben. 684

Denn die Behauptung gilt für jeden Augenblick der Stoßzeit für die wirkenden Kräfte (**471**), also auch für die Integrale derselben, die Stöße.

Folgerung. Gleichzeitig auf dasselbe System ausgeübte, 685
oder von demselben System ausgeübte Stöße können wie Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung von Vektorgrößen überhaupt. Wir reden von den Komponenten eines Stoßes und von resultierenden Stößen in demselben Sinne, in welchem wir von Komponenten der Kraft und von resultierenden Kräften reden. (Vergl. **472** bis **474**.)

Definition. Ein Stoß, welcher von einem einzelnen ma- 686
teriellen Punkt oder auf einen einzelnen materiellen Punkt ausgeübt wird, heißt ein Elementarstoß.

Folgerung 1. Jeder Stoß, welcher von einem mate- 687
riellen System oder auf ein materielles System ausgeübt wird, kann zerlegt werden in eine Anzahl von Elementarstößen. (Vergl. **479**.)

Folgerung 2. Die Zusammensetzung und Zerlegung der 688
Elementarstöße erfolgt nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung geometrischer Strecken. (Parallelogramm der Stöße.) (Vergl. **478**.)

Bewegung unter dem Einfluß von Stößen.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems 689
unter dem Einfluß eines gegebenen Stoßes zu bestimmen.

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Änderung, welche die Geschwindigkeit des Systems durch den

(689) Stoß erfährt. Es sei nun das betrachtete System dasselbe wie in **481**; bedeuten die P_ϱ die Komponenten der unendlichen Kraft, welche während der Dauer des Stoßes auf das System wirkt, so ist während dieser Dauer nach **481**:

a) $$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho \quad .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dt und integrieren über die Stoßzeit. Da die Werte der Koordinaten während dieser Zeit konstant sind, so ist

b) $$m \int f_\varrho \, dt = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn wir durch den Index 0 die Größen vor dem Stoße, durch den Index 1 die Größen nach dem Stoße charakterisieren. Wir haben ferner nach **682**:

c) $$\int P_\varrho \, dt = J_\varrho \quad ,$$

und wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

d) $$\int P_\varkappa \, dt = J_\varkappa \quad ,$$

so erhalten wir r Gleichungen von der Form:

e) $$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa = J_\varrho \quad .$$

Da die Geschwindigkeit des Systems vor und nach dem Stoße den Zusammenhängen des Systems genügen muß, so erhalten wir weiter aus den k Bedingungsgleichungen des Systems k Gleichungen von der Form:

f) $$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} (\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **e)** als $r + k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $k + r$ Größen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$

und $J_\varkappa$ oder auch für die $k+r$ Größen $q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}$ und $J_\varkappa$ angesehen werden können, und welche also diese Größen und damit die Änderung der Geschwindigkeit des Systems eindeutig bestimmen.

690 **Anmerkung 1.** Ist uns die Geschwindigkeit des Systems vor dem Stoße gegeben, und sind also die Größen q_{ϱ_0} und $\dot{p}_{\varrho_0}$ bekannt, so können wir die r Gleichungen **689e** zusammen mit den k Gleichungen **689f**, oder, was dasselbe, mit den k Gleichungen

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, \dot{p}_{\varrho_1} = 0$$

auch auffassen als $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $J_\varkappa$, welche also diese Größen und damit die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoße eindeutig bestimmen.

691 **Anmerkung 2.** Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnen wir die Komponente des Stoßes nach der Koordinate x_ν mit I_ν, so nehmen die Gleichungen des Stoßes die Form der $3n$ Gleichungen an:

$$m_\nu\,(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu}\, I_\iota = I_\nu \quad , \qquad \text{a)}$$

welche zusammen mit den i aus den Bedingungsgleichungen abgeleiteten Gleichungen:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu\, x_{\iota\nu}\,(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) = 0 \qquad \text{b)}$$

die $3n$ Komponenten $\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}$ der Geschwindigkeitsänderung und die i Hilfsgrößen I_ι eindeutig bestimmen.

692 **Anmerkung 3.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so sind die entsprechenden Größen $p_{\varkappa\varrho}$ gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Stoßgleichung nimmt die einfache Form an:

$$q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0} = J_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle Koordinaten freie Koordinaten, so nehmen alle Gleichungen diese Form an, und die so entstehenden r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Größen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$, welche bekannte lineare Funktionen der durch jene Gleichungen unmittelbar gegebenen $q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0}$ sind.

693 **Folgerung 1** (aus **689**). Um ein System aus der Ruhe plötzlich in eine gegebene mögliche Geschwindigkeit zu versetzen, genügt es, dem System einen Stoß zu erteilen, welcher nach Richtung und Größe gleich ist dem Produkt aus der gegebenen Geschwindigkeit und der Masse des Systems.

Denn sind die $q_{\varrho_0} = 0$, und genügen die gegebenen $\dot{p}_{\varrho_1}$ an sich den Bedingungsgleichungen, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = q_{\varrho_1}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

694 **Folgerung 2**. Um ein bewegtes System in seiner augenblicklichen Lage plötzlich zur Ruhe zu bringen, genügt es, dem System einen Stoß zu erteilen, welcher nach Richtung und Größe entgegengesetzt gleich ist dem Produkt aus der Geschwindigkeit des Systems in seine Masse.

Denn sollen die $q_{\varrho_1} = 0$ werden, und genügen die $\dot{p}_{\varrho_0}$ den Bedingungsgleichungen des Systems, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = -q_{\varrho_0}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

695 **Lehrsatz.** Die Geschwindigkeitsänderung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Stöße einem System erteilen, ist die Summe der Geschwindigkeitsänderungen, welche die Stöße, einzeln wirkend, dem System erteilen würden.

Als gleichzeitig wirkend sind dabei alle Stöße bezeichnet, welche innerhalb einer verschwindend kleinen Zeit erfolgen, ohne Rücksicht auf ihre etwaigen Zeitunterschiede oder ihre Reihenfolge innerhalb dieser Zeit.

Der Satz folgt (vergl. **485**) aus der linearen Form der Gleichungen **689e, f**, er kann aber auch als unmittelbare Folgerung des Satzes **485** angesehen werden.

Anmerkung. Der Inhalt des vorigen Lehrsatzes kann auch **696**
wiedergegeben werden in der oft benutzten Form der Aussage, daß mehrere gleichzeitig erfolgende Stöße sich hinsichtlich der Geschwindigkeit, welche sie erzeugen, nicht stören.

Lehrsatz. Steht die Richtung eines Stoßes senkrecht auf **697**
jeder möglichen Verrückung des Systems, auf welches er wirkt, so übt der Stoß keinen Einfluß aus auf die Bewegung des Systems. Und umgekehrt: Übt ein Stoß keinen Einfluß aus auf die Bewegung des Systems, auf welches er wirkt, so steht er senkrecht auf jeder möglichen Verrückung desselben.

Der Satz kann als unmittelbare Folgerung des Satzes **488** angesehen werden oder auch in entsprechender Weise aus den Gleichungen **689e, f** abgeleitet werden.

Anmerkung. Obwohl also aus der Angabe eines Stoßes **698**
eindeutig die Bewegungsänderung erschlossen werden kann, welche er erzeugt, so kann doch nicht umgekehrt aus einer plötzlichen Bewegungsänderung eindeutig auf den Stoß geschlossen werden, welcher sie erzeugt hat.

Aufgabe 2. Die Stoßkraft zu bestimmen, welche ein **699**
materielles System bei gegebener plötzlicher Bewegungsänderung ausübt.

Nach **682** sind die Komponenten des gesuchten Stoßes zu bezeichnen mit J'_ϱ, und nach **683** und **689e** sind dieselben:

$$J'_\varrho = -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} - \sum_{1}^{k}{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa \quad .$$

Hierin sind die q_{ϱ_1} und q_{ϱ_0} durch die Angaben der Aufgabe bestimmt, die $J_\varkappa$ aber sind nicht gegeben, solange nicht auch die Bewegung des zweiten Systems gegeben ist, auf welches der Stoß ausgeübt wird. Die Lösung der Aufgabe ist also nicht eine bestimmte, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, welcher einen auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrechten Stoß darstellt (**250**).

700 **Anmerkung 1.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so sind doch alle Komponenten in Richtung einer möglichen Bewegung durch jene Bewegungsänderung bestimmt.

701 **Anmerkung 2.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so ist doch jede Komponente in Richtung einer freien Koordinate durch die Bewegungsänderung eindeutig bestimmt.

702 **Anmerkung 3.** Ist p_ϱ eine freie Koordinate, so kann der nach dieser Koordinate ausgeübte Stoß geschrieben werden in den Formen:

$$\begin{aligned} J'_\varrho &= -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} \quad , \\ &= -\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_1 + \left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_0 \quad . \end{aligned}$$

Innerer Zwang beim Stoße.

703 **Bemerkung 1.** Trifft ein Stoß ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, so erfolgt eine Geschwindigkeitsänderung, deren Richtung die Richtung des Stoßes ist, und deren Größe gleich ist der Größe des Stoßes, dividiert durch die Masse des Systems.

704 **Bemerkung 2.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten des gestoßenen Systems, so weicht die Geschwindigkeitsänderung im allgemeinen ab von der durch die vorige Bemerkung gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems betrachten.

Definition. Inneren Zwang beim Stoße oder kurz Zwang beim Stoße nennen wir die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines Systems an der Geschwindigkeitsänderung des Systems beim Stoße hervorbringen. 705

Der Zwang beim Stoße wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Geschwindigkeitsänderung und derjenigen Geschwindigkeitsänderung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich ersterer, vermindert um letztere.

Folgerung. Der Zwang beim Stoße ist das Zeitintegral des inneren Zwanges des Systems während des Stoßes, genommen über die ganze Dauer desselben. 706

Aufgabe. Den Zwang eines Systems bei einem Stoße zu bestimmen. 707

Wir bezeichnen die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ mit Z_ϱ. Indem wir nun die Gleichung 497a mit $m\,dt$ multiplizieren, und über die Dauer des Stoßes integrieren, erhalten wir:

$$mZ_\varrho = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} - J_\varrho \quad . \tag{a}$$

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reichen die Komponenten nach beliebigen Koordinaten im allgemeinen nicht aus. Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an und bezeichnen die Komponente des Zwanges nach x_ν mit Z_ν, so erhalten wir:

$$mZ_\nu = m_\nu(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu \quad , \tag{b}$$

also wird die Größe Z des Zwanges die positive Wurzel der Gleichung:

$$mZ^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \left(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0} - \frac{I_\nu}{m_\nu}\right)^2 .$$

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges beim Stoße fällt kleiner aus für die natürliche Bewegungsänderung, als sie ausfallen würde für irgend eine andere mögliche Bewegungsänderung. 708

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der I_ν die Größe $\frac{1}{2}mZ^2$ ein Minimum werde, erhalten wir (vergl. **155**, **498**) die $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu + \sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu} I_\iota = 0 \quad ,$$

in welchen die I_ι zunächst beliebige unbestimmte Multiplikatoren bedeuten, und welche zusammen mit den i Gleichungen

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) = 0$$

die $3n+i$ Größen $\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}$ und I_ι eindeutig bestimmen. Da aber die Gleichungen zusammenfallen mit den Bewegungsgleichungen **691** des Systems, so wird ihnen genügt durch die natürlichen Geschwindigkeitsänderungen und nur durch diese.

709 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält die Anpassung des Gaussschen Prinzips des kleinsten Zwanges an die besonderen Verhältnisse des Stoßes.

710 **Folgerung.** Verhindern die Zusammenhänge des Systems, daß der Winkel zwischen einem Stoße und der durch ihn hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderung gleich Null werde (**703**), so fällt doch dieser Winkel so klein aus, als es die Zusammenhänge des Systems irgend gestatten.

Denn zeichnen wir ein ebenes Dreieck, dessen Seiten sind die Größe des Stoßes dividiert durch die Masse des Systems, die Größe einer beliebigen möglichen Geschwindigkeitsänderung und die Größe des Unterschiedes beider, also des Zwanges, welcher jener Geschwindigkeitsänderung entspricht, so stellt der von den ersten beiden Seiten eingeschlossene Winkel ε den Winkel zwischen Stoß und Geschwindigkeitsänderung dar (**34**). Eine mögliche Geschwindigkeitsänderung von gegebener Richtung kann nun alle Größen annehmen; unter allen Geschwindigkeitsänderungen von gegebener Richtung kann aber nur diejenige die natürliche sein, bei welcher der Zwang senkrecht steht auf der Geschwindigkeitsänderung (**708**). Beschränken wir uns also auf diejenigen Geschwindigkeitsänderungen, welche hiernach noch in Betracht kommen, so sind alle in Betracht zu ziehenden Dreiecke rechtwinklig; die Hypotenuse aller ist gleich und gegeben; die dem Winkel ε gegenüberliegende Kathete wird aber für die natürliche Geschwindigkeitsänderung kleiner als für jede andere (**708**), also wird für diese Geschwindigkeitsänderung der Winkel ε selbst ein Minimum, welches die Behauptung ist.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges beim Stoße steht senkrecht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 711

Denn nach **707** und **689** lassen sich die Komponenten des Zwanges darstellen in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_{1}^{k}{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho} J_{\varkappa} \quad ,$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (**250**) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems. Der Satz kann auch als unmittelbare Folgerung aus dem Satz **500** gezogen werden.

Symbolischer Ausdruck. Bezeichnen wir mit δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für eine jede beliebige mögliche Verrückung des Systems, so kann der vorige Satz in die Form der symbolischen Gleichung gekleidet werden: 712

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\,(q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} - J_\varrho)\,\delta p_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

welche für die rechtwinkligen Koordinaten die Form annimmt:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\left[m_\nu(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu\right]\delta x_\nu = 0 \quad . \qquad \text{b)}$$

Vergl. **393**, **501**.

Anmerkung. Der vorige Lehrsatz (**711**) enthält die Anpassung des D'ALEMBERTschen Prinzips an die besonderen 713

Verhältnisse des Stoßes, die symbolische Form **712** den gewöhnlichen Ausdruck dieser Anpassung.

714 **Folgerung 1.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung in der Richtung jeder möglichen Bewegung gleich der Komponente des Stoßes nach derselben Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

715 **Folgerung 2.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung nach jeder freien Koordinate gleich der Komponente des Stoßes nach dieser Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems.

716 **Folgerung 3.** Die Geschwindigkeitskomponente eines gestoßenen Systems nach jeder Koordinate der absoluten Lage ändert sich um einen Betrag, welcher gleich ist der Komponente des wirkenden Stoßes nach der gleichen Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch immer die Zusammenhänge des Systems sind.

717 **Anmerkung.** Auch ohne Kenntnis, oder ohne vollständige Kenntnis des Zusammenhangs der Massen eines Systems können wir demnach doch stets sechs Gleichungen für die Bewegung des Systems unter dem Einfluß eines Stoßes angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die sechs Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$, welche wir in **402** einführten, so stellen die sechs Gleichungen, welche wir erhalten, die Anpassung des Prinzips des Schwerpunkts und der Flächen an die besonderen Verhältnisse des Stoßes dar.

Energie, Arbeit.

718 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems infolge eines auf das System ausgeübten Stoßes wird die Arbeit des Stoßes genannt.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Stoßes wird als negative Zunahme gerechnet. Die Arbeit eines Stoßes kann demnach positiv oder negativ sein.

719 **Folgerung.** Die Arbeit eines Stoßes ist das Zeitintegral

der Arbeit, welche diejenige Kraft leistet, deren Zeitintegral der Stoß ist.

Lehrsatz. Die Arbeit eines Stoßes ist gleich dem Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente des Mittelwertes der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit des Systems. 720

Denn welches auch in Wahrheit der Verlauf der wirkenden Kraft während der Stoßzeit und die Bewegung des Systems während dieser Zeit ist, die schließliche Bewegung und also die Arbeit des Stoßes wird dieselbe sein, als wirkte die Kraft mit konstanter mittlerer Größe in der Richtung des Stoßes selber. Machen wir aber diese vereinfachende Voraussetzung, so wird erstens die Größe der wirkenden Kraft gleich der Größe des Stoßes dividiert durch die Stoßzeit. Zweitens geht die Geschwindigkeit gleichmäßig sich ändernd aus dem Anfangs- in den Endwert über, und ihr Mittelwert ist das arithmetische Mittel ihres Anfangs- und ihres Endwertes. Die Komponente der während des Stoßes zurückgelegten Bahnstrecke in Richtung des Stoßes ist aber gleich der Komponente jenes Mittelwertes, multipliziert mit der Stoßzeit. Berechnen wir nun nach **513** die von der Kraft während ihrer Dauer, also die vom Stoß geleistete Arbeit, so hebt sich die Stoßzeit heraus, und es folgt die Behauptung.

Anmerkung. Unter Benutzung der bisherigen Bezeichnung ist der analytische Ausdruck des Lehrsatzes die Aussage, daß die Arbeit des Stoßes gleich sei: 721

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{r}{}_{\varrho} J_{\varrho}(\dot{p}_{\varrho_1}+\dot{p}_{\varrho_0}) \quad .$$

Folgerung 1. Die Arbeit eines Stoßes ist gleich dem Produkt des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der ursprünglichen Geschwindigkeit, vermehrt um das halbe Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeitsänderung. 722

Der analytische Ausdruck hierfür ist die Aussage, es sei die Arbeit des Stoßes gleich:

$$\sum_1^r {}_\varrho J_\varrho \dot{p}_{\varrho_0} + \frac{1}{2} \sum_1^r {}_\varrho J_\varrho (\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) \quad ,$$

welche Aussage mit **721** übereinstimmt.

723 **Folgerung 2.** Die Arbeit eines Stoßes, welcher ein ruhendes System in Bewegung setzt, ist gleich dem halben Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeit.

Denn sind die $\dot{p}_{\varrho_0}$ gleich Null, so ist die Arbeit des Stoßes gleich:

$$\frac{1}{2} \sum_1^r {}_\varrho J_\varrho \dot{p}_{\varrho_1} \quad .$$

724 **Lehrsatz.** Ein ruhendes System setzt sich unter dem Einfluß eines Stoßes in derjenigen Richtung in Bewegung, bei welcher der Stoß die meiste Arbeit leistet, d. h. bei welcher er mehr Arbeit leistet, als er leisten würde, wenn wir durch Vermehrung der Zusammenhänge des Systems eine andere Richtung erzwängen. (Sogenannter Satz von BERTRAND.)

Denn ist J die Größe des Stoßes, v die Größe der erzeugten Geschwindigkeit, ε der Winkel zwischen beiden, so ist für jeden ursprünglichen oder auch vermehrten Zusammenhang nach **714**:

$$v = \frac{J}{m} \cos \varepsilon \quad ,$$

also die Arbeit des Stoßes nach **723** gleich:

$$\frac{1}{2} J v \cos \varepsilon = \frac{J^2}{2m} \cos^2 \varepsilon \quad .$$

Der Winkel ε aber nimmt für die natürliche Wirkung des Stoßes nach **710** den kleinsten mit dem ursprünglichen Zusammenhang verträglichen Wert an, ε kann also durch Vermehrung der Zusammenhänge nur vergrößert, $\cos^2 \varepsilon$ also nur verkleinert werden, woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Die Energie, welche ein auf ein ruhendes System treffender Stoß in dem System erzeugt, fällt um so größer aus, je mehr Zusammenhänge des Systems wir auflösen. Der größte mögliche Wert jener Energie, welcher aber nur durch Auflösung aller Zusammenhänge erreicht wird, ist gleich dem Quadrat der Größe des Stoßes, dividiert durch die doppelte Masse des Systems. 725

Zusammenstoß zweier Systeme.

Erläuterungen.

1. Wir sagen, zwei Systeme stoßen zusammen, wenn sie 726 sich so verhalten, als hätten sie während einer sehr kurzen Zeit eine Koppelung erfahren. Diese Koppelung nehmen wir als eine direkte an, indem wir geeignete Wahl der Koordinaten beider Systeme voraussetzen (**452**).

2. Eine solche vorübergehende Koppelung haben wir 727 aufzufassen als eine dauernde Koppelung beider Systeme mit einem dritten, unbekannten System von solcher Beschaffenheit, daß es im allgemeinen keinen Einfluß hat auf die Bewegung jener, daß aber in unmittelbarer Nachbarschaft solcher Lagen, in welchen gewisse Koordinaten des einen Systems gewissen Koordinaten des anderen Systems gleich werden, es diese Koordinaten vorübergehend gleich zu bleiben zwingt. Diese vorübergehend gleichbleibenden Koordinaten nennen wir die gemeinsamen Koordinaten beider Systeme.

3. Vor und nach dem Zusammenstoße sind die Ände- 728 rungsgeschwindigkeiten der Koordinaten eines jeden der beiden zusammenstoßenden Systeme lediglich den Bedingungsgleichungen ihres eigenen Systems unterworfen. Während des Stoßes aber sind die Änderungsgeschwindigkeiten der gemeinsamen Koordinaten auch an die Koppelungsgleichungen gebunden. Diese Änderungsgeschwindigkeiten müssen also, wie die Koordinaten selbst, während des Stoßes beziehlich gleich geworden und eine Zeitlang gleich geblieben sein. Die