Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

die Betrachtung der beiden obersten Integrale läßt diese Gültigkeit folgen; die Betrachtung der beiden mittleren Integrale kann von dieser Gültigkeit unabhängig gehalten werden.

642 2. Die physikalische Bedeutung der beiden links stehenden Integrale ist eine äußerst einfache; die sie betreffenden Aussagen sind unmittelbare Ausflüsse des Grundgesetzes. Die rechts stehenden Integrale haben die einfache physikalische Bedeutung verloren; aber die Aussage, daß sie für die natürliche Bewegung ausgezeichnete Werte annehmen, stellt immer noch eine, wenn auch verwickelte und undurchsichtige Form des Grundgesetzes dar. Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigen Voraussetzungen angepaßt ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht, hat den trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

Unser Beweisverfahren war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, den obigen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

643 3. Daß die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daß das eine oder das andere jener Integrale ein Minimum werde, geht erstens daraus hervor, daß schon in holonomen Systemen bei ausgedehnterer Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daß es natürliche Systeme gibt, für welche das Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruck für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir auch das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrals für trügerisch zu halten.

Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme.

644 **Bemerkung 1.** Bezeichnen wir mit V' den Wert des Integrales

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen zwei Wertsystemen aller Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln, und gedacht als Funktion der Anfangs- und Endwerte jener Koordinaten, also der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und der $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$, $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$, und der Größe h, so stellt der Ausdruck

$$V'\sqrt{\frac{2\,E}{m+\mathfrak{m}}}$$

die geradeste Entfernung des Systems dar. Die Bezeichnung ist dabei dieselbe, welche wir bisher in diesem Abschnitt benutzt haben.

Denn nach **632** ist V' gleich der Zeitdauer des natürlichen Übergangs zwischen den gegebenen Lagen für die mathematische Energie h. Ist also S die geradeste Entfernung beider Lagen, so ist

$$E=\tfrac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{S^2}{V'^2} \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Mit Hilfe der Funktion V' lassen sich die 645
natürlichen Bahnen des betrachteten Systems in geschlossener Form darstellen.

Denn bezeichnen wir wie bisher mit ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, weiter mit $d\mathfrak{s}$ das Bahnelement des cyklischen Teilsystems und mit $d\sigma$ das Bahnelement des vollständigen Systems, so ist

$$(m+\mathfrak{m})\,d\sigma^2 = m\,ds^2 + \mathfrak{m}\,d\mathfrak{s}^2 \quad , \qquad \text{a)}$$

also (**57**) bei der bisher benutzten Bezeichnung:

$$d\sigma^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{m}{m+\mathfrak{m}}\,a_{\varrho\sigma}\,dp_\varrho\,dp_\sigma + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \frac{\mathfrak{m}}{m+\mathfrak{m}}\,\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\,d\mathfrak{p}_\varrho\,d\mathfrak{p}_\sigma \ . \qquad \text{b)}$$

Sind also schließlich noch σ,p_ϱ und $\sigma,\mathfrak{p}_\varrho$ die Winkel, welche die Bahn des ganzen Systems mit den Koordinaten p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ des ganzen Systems bildet, so werden die Gleichungen der natürlichen Bahnen zufolge von **224** und **226**, nach Division beider Seiten durch einen konstanten Faktor, erhalten in der Form:

c) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma,p_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}}$$

d) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma,p_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}}$$

e) $$\sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma,\mathfrak{p}_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}}$$

f) $$\sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma,\mathfrak{p}_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \quad ,$$

und diese Gleichungen lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die Gleichungen der natürlichen Bahnen als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

646 **Anmerkung.** Die vorstehenden Gleichungen **c)** bis **f)** sind richtig in jedem Falle, ob nun die cyklischen Koordinaten als beobachtbare oder als dauernd verborgene angesehen werden; aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald das letztere vorausgesetzt wird. Denn alsdann ist der vollständige Ausdruck von V' nicht bekannt, und die Gleichungen lassen sich nicht entwickelt hinschreiben.

647 **Aufgabe 1.** Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit V den Wert des Integrales

$$\sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds \quad ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen irgend zwei Wertsystemen der sichtbaren Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bahn wollen wir die in der Kräftefunktion vorkommenden cyklischen Momente als unveränderliche Konstanten ansehen, und V soll also gedacht werden als Funktion der Anfangs- und Endwerte allein der sichtbaren Koordinaten und der Konstanten h. Nach **635d** ist nun beim Übergang von einer natürlichen Bahn zu einer anderen mit beliebig variierten sichtbaren Koordinaten: (647)

$$\delta_{\mathfrak{q}} \sqrt{2m} \int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds = 2E\, \delta_{\mathfrak{p}} \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \text{a)}$$

also ist auch insbesondere beim Übergang von einer natürlichen zu einer beliebigen benachbarten natürlichen Bahn:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\, V = 2E\, \delta_{\mathfrak{p}}\, V' \quad , \qquad \text{b)}$$

also ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} &= 2E \frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \\ \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} &= 2E \frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \end{aligned} \qquad \text{c)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die cyklischen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **645c** und **d** fortschaffen. Was die linken Seiten anlangt, so haben wir die Winkel $\sigma.p_\varrho$ zu ersetzen durch die s,p_ϱ. Nun haben wir nach **645b** (**75**):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}} \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, d\sigma \cos \sigma, p_\varrho &= \sum_1^r{}_\sigma \frac{m}{m+\mathfrak{m}} a_{\varrho\sigma}\, dp_\sigma \\ &= \frac{m}{m+\mathfrak{m}} \sqrt{a_{\varrho\varrho}}\, ds \cos s, p_\varrho \quad , \end{aligned} \qquad \text{d)}$$

und ferner aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U+h = T &= \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \qquad \text{und} \\ E &= \frac{1}{2}(m+\mathfrak{m}) \frac{d\sigma^2}{dt^2} \end{aligned} \qquad \text{e)}$$

durch Division:

f) $$d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{\frac{E}{U+h}}\,ds \quad ,$$

also aus **d)** und **f)**:

g) $$\cos \sigma, p_\varrho = \sqrt{\frac{U+h}{E}}\cos s, p_\varrho \quad .$$

Indem wir nun das Ergebnis **e)** in die rechten, das Ergebnis **g)** in die linken Seiten der umzuformenden Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Gleichungen:

h) $$\begin{aligned}\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos s, p_{\varrho_1} &= \frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \\ \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos s, p_{\varrho_0} &= -\frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad ,\end{aligned}$$

welches die gesuchten Umformungen sind. Denn sie enthalten keine Größen mehr, welche sich auf das verborgene Teilsystem beziehen, und sie lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die natürlichen Bahnen des sichtbaren Teilsystems als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

648 **Anmerkung 1.** Die Funktion V enthält nicht die Zeit und gibt auch nur die natürlichen Bahnen des Systems, nicht aber die Bewegung des Systems in diesen Bahnen. Da aber die natürlichen Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, und da wir bereits der in V vorkommenden Konstanten h die Bedeutung der analytischen Energie beilegten, so ist es leicht, die Zeit als unabhängige Variabele in die Gleichungen einzuführen. Zunächst ist die Verknüpfung der Zeit mit der bisher als unabhängige Variabele benutzten Weglänge gegeben durch die Gleichung:

a) $$\frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0 \quad .$$

Sodann erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen **647h** mit

$$\sqrt{2m(U+h)} = \sqrt{2m\,T} = m\frac{ds}{dt} \quad ,$$

und Beachtung von **75** und **270**:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \tag{b}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \tag{c}$$

Endlich erhalten wir für den Wert der Funktion selbst:

$$V = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt \quad . \tag{d}$$

Der Form nach sind diese Gleichungen weit einfacher als die Gleichungen der vorangegangenen Aufgabe, aber jene Gleichungen haben den Vorzug, eine unabhängige Variabele weniger zu enthalten.

Anmerkung 2. Die Funktion V ist diejenige Funktion, **649**
welche von Hamilton mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet und die charakteristische Funktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **412**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit V bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Funktion über.

Übrigens erhellt, daß die charakteristische Funktion eines Systems nach der jetzt erweiterten Definition eine Rechnungsgröße ohne physikalische Bedeutung ist. Denn je nachdem wir größere oder kleinere Teile der cyklischen Bewegungen als verborgene behandeln, können wir für dasselbe System verschiedene charakteristische Funktionen aufstellen, welche den gleichen analytischen Dienst leisten, aber für identische Übergänge des Systems verschiedene Werte besitzen.

650 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}}=(U+h)_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}}=(U+h)_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten durch Einsetzen der Richtungscosinus aus den Gleichungen **647h** in die Gleichung **88**, welcher diese Richtungscosinus genügen.

651 **Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit P' den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt \quad ,$$

genommen über die natürliche Bewegung zwischen zwei Wertsystemen der sämtlichen Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln und gedacht als Funktion dieser Werte und der Zeitdauer des Übergangs, so unterscheidet sich P' von der Prinzipalfunktion des Systems (**415**) nur um das Produkt der Zeitdauer des Übergangs in eine (unbekannte) Konstante.

Denn es unterscheidet sich $T-U$ von der Energie des Systems nur um eine (unbekannte) Konstante.

652 **Folgerung.** Mit Hilfe der Funktion P' lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems in geschlossener Form darstellen.

In der Tat hindert der Unterschied zwischen P' und der in **415** definierten Prinzipalfunktion nicht die unmittelbare Anwendung der Gleichungen **414b** und **c**, so daß wir als Bewegungsgleichungen erhalten:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{a)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{c)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{d)}$$

Dagegen erfordert die Gleichung **414d** eine leichte Abänderung; an ihrer Stelle wird erhalten:

$$h = -\frac{\partial P'}{\partial t_0} = \frac{\partial P'}{\partial t_1} \quad . \qquad \text{e)}$$

Anmerkung. Die vorstehenden Gleichungen **a)** bis **d)** sind 653
richtig in jedem Falle, ob nun alle Koordinaten in Wahrheit beobachtbar sind oder ob nicht, aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene behandelt werden.

Aufgabe 2. Die vorstehenden Bewegungsgleichungen 654
eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit P den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt \quad ,$$

genommen für die natürliche Bewegung zwischen zwei zu den Zeiten t_0 und t_1 stattfindenden Wertsystemen der s i c h t b a r e n Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bewegung sollen die in den Konstanten der Kräftefunktion enthaltenen cyklischen Momente als unabänderlich angesehen werden, und P soll also gedacht sein als Funktion allein der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten und der Zeiten t_0 und t_1.

Nun gilt nach **628c** beim Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer beliebigen benachbarten Bewegung von gleicher Dauer die Gleichung:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int (T+U)\,dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int (T-U)\,dt \quad .$$

Wenden wir diese Gleichung an auf den Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer benachbarten natürlichen Bewegung von gleicher Dauer, so liefert sie uns:

$$\delta_{\mathfrak{q}} P = \delta_{\mathfrak{p}} P' \quad ,$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad .$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen entfernen wir die verborgenen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **652**. Was die linken Seiten anlangt, so genügt die Bemerkung, daß das Moment q_ϱ des gesamten Systems nach seiner Koordinate p_ϱ zugleich das Moment des sichtbaren Teilsystems nach der Größe p_ϱ als Koordinate dieses Teilsystems ist. Wir erhalten demnach als Bewegungsgleichungen des sichtbaren Teilsystems:

a) $$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

b) $$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \quad ,$$

welches die gesuchten Umformungen sind.

655 **Anmerkung 1.** Die jetzt von uns eingeführte Funktion P ist diejenige Funktion, welche von Hamilton mit dem Buchstaben S bezeichnet und die Prinzipalfunktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **415**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit P bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben belegte Funktion über.

Anmerkung 2. Der Wert der Prinzipalfunktion für einen bestimmten Übergang hängt mit dem der charakteristischen Funktion in einfacher Weise zusammen. Durch einfache Umformung wird nämlich erhalten: 656

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1}(2\,U+h)\,dt$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds - \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{h\,ds}{\sqrt{U+h}} \quad .$$

Also ist (**647, 644**):

$$P = V - h(t_1 - t_0) \quad , \qquad \text{a)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in V und im zweiten Summanden, die Größe h als Funktion von $t_1 - t_0$ und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Umgekehrt ist also auch

$$V = P + h(t_1 - t_0) \quad , \qquad \text{b)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in P und im zweiten Summanden, die Größe $t_1 - t_0$ als Funktion von h und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Anmerkung 3. Die analytische Energie h kommt in der Prinzipalfunktion nicht vor. Doch kann sie aus derselben mit Hilfe der Gleichungen **654a, b, 286c** und **612a** mittelbar abgeleitet werden. Sie kann aber auch unmittelbar durch P ausgedrückt werden. Denn ändern wir in der rechten Seite der Gleichung **656a** nicht die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}, sondern nur t_1 und t_0, und bezeichnen mit dh die damit notwendig verbundene Änderung von h, so folgt: 657

$$dP = \frac{\partial V}{\partial h}\,dh - h\,d(t_1 - t_0) - (t_1 - t_0)\,dh \quad ,$$

also nach **648a**:

$$dP = -h\,d(t_1 - t_0) \quad ,$$

woraus folgt:

$$h = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad .$$

658 **Lehrsatz.** Die Prinzipalfunktion P eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} + \frac{\partial P}{\partial t_1} = U_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} - \frac{\partial P}{\partial t_0} = U_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten, wenn man die analytische Energie h das eine Mal direkt mit Hilfe von **657**, das andere Mal indirekt mit Hilfe von **612a** und **654a, b** durch die Differentialquotienten von P ausdrückt.

Rückblick auf 644 bis 658.

659 1. In den Nummern **644** bis **658** sind vier endliche Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln gegeben. In der ersten und dritten Darstellung waren alle Koordinaten des Systems als beobachtbare angesehen, in der zweiten und vierten Darstellung waren die cyklischen Koordinaten als verborgene behandelt. Die erste und zweite Darstellung, welche auf die charakteristische Funktion führte, gab im Grunde nur die Bahn des Systems und entsprach dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Die dritte und vierte Darstellung, welche auf die Prinzipalfunktion führte, gab vollständig die Bewegung und entsprach dem Hamiltonschen Prinzip.

660 2. Alle vier Darstellungen haben denselben einfachen physikalischen Sinn und für alle ist der Grund der mathematischen Verwickelung derselbe. Der einfache physikalische

Sinn besteht in der Tatsache, daß die natürlichen Bahnen stets geradeste Bahnen sind, und in dem rein geometrischen Zusammenhange dieser Bahnen mit der geradesten Entfernung in holonomen Systemen. Der Grund der mathematischen Verwickelung aber besteht darin, daß wir nicht stets alle wesentlichen Bestimmungsstücke der Bewegung gleichmäßig behandelten, sondern einige derselben als verborgene eliminierten. Wir können auch sagen, die Ungleichmäßigkeit bestehe darin, daß wir für einige Koordinaten die Anfangs- und Endwerte, für andere Koordinaten die Anfangsgeschwindigkeiten als Bestimmungsstücke einführten. Unsere Ableitungsweise war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, dies Verhältnis möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

3. Man kann weitere Darstellungen der Bewegung eines 661
holonomen Systems geben, indem man weitere Koordinaten eliminiert, oder indem man auch für die sichtbaren Koordinaten nicht die Anfangs- und Endwerte, sondern andere Größen als Bestimmungsstücke einführt, oder indem man von den partiellen Differentialgleichungen **650** oder **658** ausgeht, in ähnlicher Weise, wie dies für die geradeste Entfernung in **232** u. ff. geschehen ist. Solche Darstellungen können in besonderen Fällen mathematische Vorteile bieten, wie Jacobi in umfassender Weise gezeigt hat. Je mehr man aber in dieser Richtung fortschreitet, desto mehr verbirgt sich der physikalische Sinn der Operationen hinter deren mathematischer Form, desto mehr nehmen die benutzten Funktionen den Charakter von Hilfskonstruktionen an, welchen es nicht mehr möglich ist, eine physikalische Bedeutung beizulegen.

Nicht-konservative Systeme.

Erläuterungen und Bemerkungen.

1. Enthält ein materielles System keine anderen ver- 662
borgenen Massen, als solche, welche in adiabatischer cyklischer Bewegung begriffen sind, so ist es bei freier Verfügung über die sichtbaren Koordinaten jederzeit möglich, Energie, welche in die Energie der verborgenen Massen übergegangen ist, in