Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Integralsätze für holonome Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Gleichungen **622a** und **b** annehmen, hat man wohl die HAMILTONsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur für ein holonomes System, und sie ist für ein solches gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten; sie ist also auch gleich der Gesamtenergie des Systems, von einer willkürlichen Konstanten abgesehen.

Allgemein ist es zulässig, für ein System mit beliebigen, nicht notwendig cyklischen, verborgenen Bewegungen die HAMILTONsche Funktion zu definieren durch die Gleichungen **622a** und **b**, nämlich als eine Funktion der sichtbaren p_ϱ und q_ϱ, durch deren Benutzung (vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion gibt) die Bewegungsgleichungen eben jene einfache Form annehmen. Bei dieser allgemeineren Definition ist die HAMILTONsche Funktion nicht immer gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

624 **Bemerkung.** Aus den Gleichungen **620** und **622** können für ein System mit verborgenen Cykeln dieselben reziproken Eigenschaften der Bewegung abgeleitet werden, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **378** und **381** abgeleitet haben. Es ist aber diese neue Ableitung nicht erforderlich, sondern es liegt schon im Wesen jener Beziehungen, daß jede von ihnen Gültigkeit hat unabhängig davon, ob die in ihnen nicht vorkommenden Koordinaten, Momente usw. sichtbare oder verborgene Koordinaten, Momente, usw. sind.

Integralsätze für holonome Systeme.

625 **Bemerkung 1.** Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürliche Bewegung des Systems, als für jede andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen

Zeit sowohl die sichtbaren, als auch die verborgenen Koordinaten aus den Anfangswerten in die Endwerte überführt.

Denn da $T - U$ gleich ist der Energie des Systems, vermehrt um eine für alle möglichen Bewegungen gleiche Konstante (**611**), so ist die Bemerkung nichts anderes, als der Lehrsatz **358**, ausgesagt unter Anwendung der gegenwärtigen Bezeichnung.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend **626** benachbarte Endlagen weggelassen, so kann nur behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet beim Übergang zu irgend einer anderen der in Betracht kommenden Bewegungen. Unter Anwendung der Bezeichnung **590** nimmt alsdann die Aussage die Form an, daß

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0$$

sei beim Übergang von der natürlichen Bewegung zu irgend einer anderen möglichen, während die Variationen der Anfangs- und Endzeiten und der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten verschwinden. (Vergl. **359**.)

Anmerkung 2. Die Bemerkung 1 unterscheidet die natür- **627** lichen Bewegungen eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung, und sie kann daher dazu dienen, die natürliche Bewegung zu bestimmen, sobald es möglich ist, die Variation der Anmerkung 1 wirklich zu bilden. Sind aber, wie wir es ja voraussetzen, die cyklischen Koordinaten verborgene, so ist die Bildung der Variationen der Form $\delta_{\mathfrak{p}}$ nicht möglich, und der Satz verliert daher nicht zwar seine Richtigkeit, wohl aber seine Anwendbarkeit.

Lehrsatz 1. Das Integral **628**

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen seiner sichtbaren Massen kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen Zeit und mit denselben Momenten der verborgenen cyklischen Bewegungen die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführt.

Wir führen den Beweis, indem wir den Satz auf die Bemerkung **625** zurückführen. Wir ordnen deshalb, wie es nach **592** möglich ist, einer jeden nach den Ansprüchen des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation beim Übergang zu einer Bewegung der ersten Art haben wir nach **590** mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden Bewegung zweiter Art mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ zu bezeichnen.

Nun ist erstens, da T nur von den sichtbaren Koordinaten abhängt:

a) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int T\,dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int T\,dt \quad .$$

Zweitens ist, da die Dauer der Bewegung nicht variiert wird und $-U$ sich nur durch eine Konstante von der Energie der cyklischen Bewegung unterscheidet (**566**), zufolge von **593**:

b) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int U\,dt = -\delta_{\mathfrak{p}} \int U\,dt \quad .$$

Durch Addition von **a)** und **b)** ergibt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int (T+U)\,dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int (T-U)\,dt \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat (**626**, **625**) für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen notwendig negativen Wert, also auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

629 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, daß die Variation des Integrales verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu der Aussage von **626**):

$$\delta_q \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt = 0 \quad .$$

630 **Anmerkung 2.** Die in dem Lehrsatz ausgesprochene Eigenschaft der natürlichen Bewegung unterscheidet dieselbe eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung. Die Variation δ_q kann gebildet werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene angesehen sind, denn ihre Bildung erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse. Der Lehrsatz kann deshalb benutzt werden zur Bestimmung der natürlichen Bewegung konservativer Systeme. Seine Gültigkeit ist allerdings streng beschränkt auf holonome Systeme.

631 **Anmerkung 3.** Der vorstehende Lehrsatz, benutzt in der Auffassung der Anmerkung 2, führt den Namen des HAMILTONschen Prinzips. Seine physikalische Bedeutung kann nach unserer Anschauung keine andere sein, als die des Lehrsatzes **358**, aus welchem wir das Prinzip hergeleitet haben. Das Prinzip selbst stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze **358** geben müssen, damit er trotz unserer Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe.

632 **Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit ds das Bahnelement der sichtbaren Massen eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, so ist das Integral

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürlichen Bahnen des Systems, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche sowohl die

Werte der sichtbaren, als auch die Werte der cyklischen Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen. Die Größe h ist dabei als eine von einer natürlichen Bahn zur anderen wechselnde, übrigens für alle jedesmal verglichenen Bahnen gleiche Konstante zu betrachten.

Denn führen wir die Zeit als Hilfsgröße ein und machen dabei die willkürliche aber zulässige Annahme, das System durchlaufe die betrachteten Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daß die Konstante h den Wert der analytischen Energie bezeichnet, so ist:

a) $$T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \quad ,$$

also das betrachtete Integral gleich:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt \quad .$$

Das Integral ist also, von dem Faktor abgesehen, gleich der Zeitdauer des Überganges. Diese ist aber nach **352** als Folge von **347** für gegebenen Wert der Energie, also der Konstanten h, ein Minimum. Unsere Bemerkung ist demnach nichts anderes, als der Inhalt des Lehrsatzes **352**, ausgesagt unter Benutzung der inzwischen eingeführten Bezeichnungen.

633 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fortgelassen, so kann nur noch das Verschwinden einer Variation behauptet werden (**353**); welche Aussage in unserer Bezeichnung in der Form darzustellen ist:

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = 0 \quad .$$

634 **Anmerkung 2.** Durch die Eigenschaft, welche die Bemerkung 2 aussagt, sind die natürlichen Bahnen, welche den verschiedenen Werten der Konstanten h entsprechen, eindeutig ausgezeichnet vor jeder anderen möglichen Bahn, und der Lehrsatz kann daher zur Bestimmung der natürlichen Bahn des Systems dienen, sobald es möglich ist, die Variation δ_p zu bilden. Sind aber, wie wir voraussetzen, die Einzelheiten der cyklischen Bewegung verborgen, so ist diese Bildung nicht möglich, und die Bemerkung verliert daher nicht zwar ihre Richtigkeit, wohl aber ihre Anwendbarkeit zu dem besagten Zwecke.

Lehrsatz 2*). Beim Übergang eines freien holonomen Sy- **635**
stems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, zwischen zwei hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 der sichtbaren Massen, ist das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds$$

kleiner für die natürlichen Bahnen, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche mit denselben Werten der verborgenen cyklischen Momente und der Konstanten h die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen.

Wir führen wiederum den Beweis des Satzes, indem wir ihn auf die vorangegangene Bemerkung (**632**) zurückführen. Zu dem Ende benutzen wir wieder die Zeit als Hilfsgröße, indem wir die willkürliche aber zulässige Annahme machen, daß das System die betrachteten Bahnen mit konstanter und solcher Geschwindigkeit durchlaufe, daß die Konstante h gleich der mathematischen Energie wird. Es läßt sich dann das Integral, von dem der Lehrsatz handelt, schreiben in der Form:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} (U+h)\, dt \quad .$$

Ferner ordnen wir wieder, wie es nach **592** zulässig ist, einer jeden nach der Vorschrift des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, für welche auch die Konstante h,

*) Mit dem Originale übereinstimmender Abdruck. — Der Herausgeber.

(635) und also auch die Energie E ihren Wert behält, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation, wie sie den Ansprüchen des Lehrsatzes entspricht, bezeichnen wir wieder mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden zweiten Bewegung mit $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Nun ist erstens für beliebige Variationen $\delta\mathfrak{q}_\varrho$ der cyklischen Momente $\mathfrak{q}_\varrho$ (**566**):

$$\delta\int(U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\int\frac{\partial(U+h)}{\partial\mathfrak{q}_\varrho}\,\delta\mathfrak{q}_\varrho\,dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta\mathfrak{q}_\varrho \quad ,$$

also im besonderen für eine Variation $\delta_{\mathfrak{p}}$:

a) $$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Zweitens erhalten wir aus Gleichung **612c** unter Berücksichtigung der Beziehung **588** und der Konstanz von E:

$$\int(U+h)\,dt = E(t_1-t_0) - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

also durch eine Variation der Art $\delta_{\mathfrak{p}}$:

b) $$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1-t_0) - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Durch Subtraktion von **a)** und **b)** ergibt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1-t_0) \quad ,$$

oder indem wir mit Hilfe von **632a** die Zeit wieder eliminieren:

d) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds = E\,\delta_{\mathfrak{p}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat nach **632** für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen negativen Wert, also, da E notwendig positiv ist, auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend **636**
benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu **633**):

$$\delta_q \int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Für jeden Wert der Konstanten h zeichnet **637**
der Lehrsatz eine natürliche Bahn in eindeutiger Weise aus vor jeder anderen möglichen Bahn. Die Eigenschaft der natürlichen Bahnen, welche der Lehrsatz aussagt, kann daher benutzt werden zur Bestimmung dieser Bahnen; und zwar kann sie benutzt werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene vorausgesetzt sind.

Denn die Bildung der Variation δ_q erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse; die Variation kann also gebildet werden trotz Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung.

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 2, benutzt in der Auffassung **638**
der Anmerkung 2, ist die Jacobische Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse des ν ten der sichtbaren n Punkte des Systems, ds_ν das Element der Bahn dieses Punktes, so ist

$$m\, ds^2 = \sum_1^n {}_\nu\, m_\nu\, ds_\nu^2 \quad ,$$

und also das Integral, für welches wir einen Minimalwert feststellen bis auf einen Faktor:

$$\int \sqrt{U+h} \sqrt{\sum_1^n \nu\, m_\nu\, ds_\nu^2} \quad ,$$

welches, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, das Jacobische Integral ist.

Die physikalische Bedeutung des Jacobischen Prinzips kann nach unserer Auffassung keine andere sein, als die des Lehrsatzes **352**, bez. **347**, aus welchem es abgeleitet ist; es stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze geben müssen, damit er trotz vorhandener Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegungen zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. Die Gültigkeit auch des Jacobischen Satzes erstreckt sich nur auf holonome Systeme.

639 **Lehrsatz 3.** Beim Übergang eines freien holonomen konservativen Systems zwischen hinreichend benachbarten Lagen ist das Zeitintegral der kinetischen Energie kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System von den gegebenen Anfangswerten zu den Endwerten der sichtbaren Koordinaten überführt, und welche mit demselben gegebenen, in der Zeit konstanten Werte der mathematischen Energie ausgeführt wird.

Denn nennen wir h den gegebenen Wert der mathematischen Energie, so ist für alle in Betracht kommenden Bahnen (**611**)

$$T - U = h \quad ,$$

also ist das Integral, von welchem der Satz handelt, nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} T\, dt \quad ,$$

bis auf einen konstanten Faktor dasselbe Integral, von welchem der Lehrsatz 2 handelt; der gegenwärtige Satz ist daher nur eine andere Form, den Inhalt jenes Lehrsatzes auszusagen.

Die zu dem Lehrsatz 2 gemachten Anmerkungen 1 und 2 finden daher auch hier sinnentsprechende Anwendung.

Anmerkung. Der Lehrsatz **639** gibt die ursprüngliche **640**
MAUPERTUISsche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Diese Form hat vor der JACOBIschen den Vorzug, daß sie sich in einfachen Worten aussprechen läßt und daher einen einfachen physikalischen Sinn zu enthalten scheint. Sie hat aber gegenüber der JACOBIschen Form den Nachteil, daß sie unnötigerweise die Zeit enthält, obwohl doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems bestimmt, nicht die Bewegung in dieser, und obwohl diese Bewegung vielmehr nur durch die hinzugefügte Bemerkung bestimmt ist, daß überhaupt nur Bewegungen mit konstanter Energie in Betracht gezogen werden sollen.

Rückblick auf 625 bis 640.

1. Nach den Ergebnissen unserer Überlegung nimmt für **641**
die natürliche Bewegung eines freien konservativen Systems ein jedes der Integrale:

$$\int (T-U)\,dt \quad , \qquad \int (T+U)\,dt \quad ,$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \int \sqrt{U+h}\,ds \quad ,$$

$$\int T\,dt \quad ,$$

unter bestimmten Verhältnissen einen ausgezeichneten Wert an. Dabei beziehen sich die beiden oberen Integrale auf die Bewegung des Systems, die übrigen in Wahrheit nur auf die Bahn desselben. Die beiden links stehenden Integrale beziehen sich auf den Fall, daß alle, auch die cyklischen Koordinaten des Systems in Betracht gezogen werden, und daß nur solche Lagen des Systems als gleiche gelten, bei welchen auch die letzteren Koordinaten die gleichen Werte haben. Die übrigen Integrale beziehen sich auf den Fall, daß die cyklischen Koordinaten des Systems verborgen sind, und daß schon solche Lagen des Systems als gleich gelten, bei welchen die sichtbaren Koordinaten gleiche Werte haben. Die Betrachtung des letzten Integrals setzt die Gültigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie als zugestanden voraus;

die Betrachtung der beiden obersten Integrale läßt diese Gültigkeit folgen; die Betrachtung der beiden mittleren Integrale kann von dieser Gültigkeit unabhängig gehalten werden.

642 2. Die physikalische Bedeutung der beiden links stehenden Integrale ist eine äußerst einfache; die sie betreffenden Aussagen sind unmittelbare Ausflüsse des Grundgesetzes. Die rechts stehenden Integrale haben die einfache physikalische Bedeutung verloren; aber die Aussage, daß sie für die natürliche Bewegung ausgezeichnete Werte annehmen, stellt immer noch eine, wenn auch verwickelte und undurchsichtige Form des Grundgesetzes dar. Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigen Voraussetzungen angepaßt ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht, hat den trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

Unser Beweisverfahren war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, den obigen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

643 3. Daß die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daß das eine oder das andere jener Integrale ein Minimum werde, geht erstens daraus hervor, daß schon in holonomen Systemen bei ausgedehnterer Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daß es natürliche Systeme gibt, für welche das Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruck für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir auch das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrals für trügerisch zu halten.

Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme.

644 **Bemerkung 1.** Bezeichnen wir mit V' den Wert des Integrales

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad ,$$