Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Differentialgleichungen der Bewegung

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Differentialgleichungen der Bewegung.

Aufgabe. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines konservativen Systems aufzustellen. 616

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Bewegungsgleichungen für das sichtbare Teilsystem. Die Masse dieses Teilsystems ist m, seine Koordinaten sind die p_ϱ; es seien die k Gleichungen:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0 \qquad \text{a)}$$

seine Bedingungsgleichungen. Da die p_ϱ zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems sind, so sind die Komponenten der Kräfte, welche dieses auf das sichtbare Teilsystem ausübt, gleich $\partial U / \partial p_\varrho$ (**563**). Wirkt auf das sichtbare Teilsystem durch Koppelung mit anderen sichtbaren Systemen noch eine weitere Kraft, so mögen deren Komponenten P_ϱ sein. Dann sind die Bewegungsgleichungen des Systems nach **481**:

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} + P_\varrho \quad , \qquad \text{b)}$$

und diese r Gleichungen zusammen mit den k Gleichungen **a)** reichen wieder aus zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$.

Anmerkung 1. Ist das betrachtete konservative System ein freies, wirkt also auf dasselbe keine äußere Kraft, so sind die P_ϱ gleich Null, und die Bewegungsgleichungen haben die Form: 617

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Anmerkung 2. Ist insbesondere die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate des sichtbaren Teilsystems, so nimmt die dem Index ϱ zugehörige Bewegungsgleichung die Form an: 618

$$m f_\varrho = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

da die $p_{\varkappa\varrho}$ alsdann sämtlich verschwinden.

619 **Anmerkung 3.** Indem wir in die Gleichungen **616** bis **618** für die Beschleunigungen nach den p_ϱ ihre verschiedenen Ausdrücke nach **291** einsetzen, erhalten wir für diese Gleichungen eine Reihe verschiedener Formen, welche den Formen entsprechen, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **368** u. ff. erhalten haben.

620 **Folgerung 1.** Sind in einem holonomen konservativen System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T + U = L \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von L ein, entwickeln die partiellen Differentialquotienten, und beachten, daß U die $\dot{p}_\varrho$ nicht enthält, daß also

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_p U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so erkennen wir, daß die Gleichungen **a)** mit der aus den Definitionen folgenden Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ zusammenfallen, die Gleichungen **b)** aber mit den Bewegungsgleichungen in der Form **618**. (**289**, **291**)

Anmerkung. Die Funktion L, durch deren Benutzung die 621
Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Form der Gleichungen **620a** und **b** annehmen, hat man bisweilen die LAGRANGEsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur in einem holonomen System, und sie ist hier gleich der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten.

Folgerung 2. Sind in einem holonomen konservativen 622
System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T - U = H \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

$$\dot{p}_\varrho = \quad \frac{\partial_q H}{\partial q_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q H}{\partial p_\varrho} \quad , \qquad \text{b)}$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von H ein, und beachten, daß U die q_ϱ nicht enthält, daß also:

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_q U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so sehen wir, daß die Gleichungen **a)** die aus den Definitionen folgende Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ darstellen, während die Gleichungen **b)** mit den aus der Erfahrung abgeleiteten Bewegungsgleichungen (**618**) des Systems zusammenfallen. (**290**, **294**)

Anmerkung. Die Funktion H, durch deren Benutzung die 623
Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Gestalt der

Gleichungen **622a** und **b** annehmen, hat man wohl die HAMILTONsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur für ein holonomes System, und sie ist für ein solches gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten; sie ist also auch gleich der Gesamtenergie des Systems, von einer willkürlichen Konstanten abgesehen.

Allgemein ist es zulässig, für ein System mit beliebigen, nicht notwendig cyklischen, verborgenen Bewegungen die HAMILTONsche Funktion zu definieren durch die Gleichungen **622a** und **b**, nämlich als eine Funktion der sichtbaren p_ϱ und q_ϱ, durch deren Benutzung (vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion gibt) die Bewegungsgleichungen eben jene einfache Form annehmen. Bei dieser allgemeineren Definition ist die HAMILTONsche Funktion nicht immer gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

624 **Bemerkung.** Aus den Gleichungen **620** und **622** können für ein System mit verborgenen Cykeln dieselben reziproken Eigenschaften der Bewegung abgeleitet werden, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **378** und **381** abgeleitet haben. Es ist aber diese neue Ableitung nicht erforderlich, sondern es liegt schon im Wesen jener Beziehungen, daß jede von ihnen Gültigkeit hat unabhängig davon, ob die in ihnen nicht vorkommenden Koordinaten, Momente usw. sichtbare oder verborgene Koordinaten, Momente, usw. sind.

Integralsätze für holonome Systeme.

625 **Bemerkung 1.** Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürliche Bewegung des Systems, als für jede andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen