Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

II. Verborgene cyklische Bewegung

urn:nbn:de:bsz:31-288857

des Zeitintegrals der Energie in einem adiabatischen System entgegengesetzt gleich aus, wenn man das eine Mal die cyklischen Momente des Systems unvariiert läßt, das andere Mal sie so variiert, daß Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn für eine beliebige Variation ist:

$$\delta \int \mathfrak{E}\, dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho} \int \frac{\partial_{\mathfrak{q}} \mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_{\varrho}} \delta \mathfrak{q}_{\varrho}\, dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho} \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho} \delta \mathfrak{q}_{\varrho} \quad ,$$

also insbesondere für eine Variation, bei welcher Anfangs- und Endwerte der $\mathfrak{p}_{\varrho}$ unvariiert bleiben.

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho} \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho} \delta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}_{\varrho} \quad .$$

Subtrahiert man hiervon zweimal die Gleichung **591b**, so folgt:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt = -\delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Man vergleiche übrigens die verwandten Sätze **96** und **293**.

II. Verborgene cyklische Bewegung.

Erläuterungen und Definitionen.

594 **1.** Wir sagen, ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Koordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Teiles derselben.

595 **2.** Diejenigen Massen, deren Lagen bei vollständiger Angabe der beobachtbaren Koordinaten des Systems dennoch unbekannt bleibt, heißen verborgene Massen, ihre Bewegungen

verborgene Bewegungen, ihre Koordinaten verborgene Koordinaten. Im Gegensatz dazu heißen die übrigen Massen des Systems sichtbare Massen, ihre Bewegungen sichtbare Bewegungen, ihre Koodinaten sichtbare Koordinaten.

3. Die Aufgabe, welche der Mechanik in Hinsicht der 596
Systeme mit verborgenen Massen zufällt, ist diese: die Bewegungen der sichtbaren Massen des Systems oder auch die Veränderungen der sichtbaren Koordinaten des Systems vorauszubestimmen trotz der vorhandenen Unkenntnis über die Lage der verborgenen Massen.

4. Ein System, welches verborgene Massen enthält, unter- 597
scheidet sich von einem System ohne verborgene Massen allein in Hinsicht unserer Kenntnis des Systems. Alle bisherigen Aussagen unserer Mechanik bleiben daher anwendbar auf Systeme mit verborgenen Bewegungen, sobald wir unter den Massen, Koordinaten usw. die sämtlichen Massen, Koordinaten usw. verstehen. Erst dann werden Änderungen nötig, wenn wir unsere Aussagen auf die sichtbaren Größen beschränken wollen. Die zu stellende Aufgabe kann daher auch dahin formuliert werden, daß anzugeben sei, welche Änderungen die bisherigen Aussagen unserer Mechanik erleiden müssen, wenn unter den Massen, Koordinaten usw. schlechthin nur die sichtbaren Massen, Koordinaten usw. verstanden werden.

5. Es ist klar, daß die in der einen oder der anderen 598
Form gestellte Aufgabe nicht zu lösen ist ohne gewisse Angaben über den Einfluß, welchen die verborgenen Massen auf die Bewegung der sichtbaren Massen ausüben. Solche Angaben aber sind möglich. Ein geleitetes System oder ein von Kräften beeinflußtes System kann bereits als ein System mit verborgenen Massen aufgefaßt werden, indem man die unbekannten Massen des leitenden Systems oder des beeinflussenden Systems als verborgene ansieht. Im allgemeinen ist es indessen in diesen Fällen möglich, auch die Massen des leitenden oder des Kräfte ausübenden Systems physikalisch zu erkennen, und die Auffassung derselben als verborgener ist alsdann eine freiwillige. Jetzt indessen fassen wir vorwiegend solche Fälle ins Auge, in welchen die Erkenntnis der ver-

borgenen Massen in der Tat durch keine physikalische Beobachtung möglich ist.

599 6. In sich zurücklaufende Bewegungen, also cyklische Bewegungen, sind häufig verborgene Bewegungen, da sie, allein bestehend, eine Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt, nicht hervorrufen. So ist die Bewegung einer homogenen Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefäße für den Anblick eine verborgene; sie wird erst sichtbar gemacht, wenn ihr durch Einbringen von Staub oder dergleichen die Eigenschaft der streng cyklischen Bewegung geraubt wird.

Umgekehrt sind verborgene Bewegungen fast stets cyklische Bewegungen. Nicht in sich zurücklaufende Bewegungen führen nämlich stets über kurz oder lang eine größere Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt hervor und werden dadurch sichtbar.

600 7. Auch cyklische Bewegungen können ihre Verborgenheit nicht lange bewahren, sobald wir Mittel gewinnen, auf die einzelnen cyklischen Koordinaten zu wirken und die cyklischen Intensitäten beliebig abzuändern. Die Mannigfaltigkeit unseres Einflusses auf das System ist in diesem Falle ebenso groß wie die wirkliche Mannigfaltigkeit des Systems, und wir können von jener auf diese schließen. Anders aber verhält es sich, wenn ein freiwilliger unmittelbarer Einfluß auf die cyklischen Koordinaten dauernd ausgeschlossen ist. Dies kann eintreten in adiabatischen cyklischen Systemen (**560**), und in diesen werden wir daher vorzugsweise die für unsere Beobachtung dauernd verborgenen Bewegungen zu suchen haben.

Auf solche Fälle beschränken wir daher zunächst die Betrachtung der verborgenen Bewegung. Unsere Behandlungsart aber bringt es mit sich, daß wir auch in solchen Fällen die verborgene Bewegung so behandeln, als wäre sie sichtbar, und erst nachträglich untersuchen, welche unserer Aussagen anwendbar bleiben trotz der nunmehr vorausgesetzten Verborgenheit.

Konservative Systeme.

Definition 1. Ein materielles System, welches keine anderen verborgenen Massen enthält, als solche, welche adiabatische cyklische Systeme bilden, heißt ein konservatives System. 601

Der Name ist veranlaßt durch eine Eigenschaft solcher Systeme, welche später hervortreten wird; er ist zunächst durch den Anschluß an den feststehenden Gebrauch der Mechanik genügend gerechtfertigt.

Anmerkung. Jedes konservative System kann betrachtet werden als bestehend aus zwei Teilsystemen, von denen das eine alle sichtbaren Massen, das andere alle verborgenen Massen des ganzen Systems enthält. Die Koordinaten des sichtbaren Teilsystems, also die sichtbaren Koordinaten des ganzen Systems, sind zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems. 602

Wir bezeichnen dauernd die Masse des sichtbaren Teilsystems mit m, seine Koordinaten mit p_ϱ, seine Momente nach den p_ϱ mit q_ϱ. Die Masse des verborgenen Teilsystems werde mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet, seine Koordinaten mit $\mathfrak{p}_\varrho$, seine Momente nach diesen mit $\mathfrak{q}_\varrho$.

Definition 2. Unter der Kräftefunktion eines konservativen Systems verstehen wir die Kräftefunktion seines verborgenen Teilsystems (**563**). 603

Die Kräftefunktion eines konservativen Systems ist also im allgemeinen gegeben als Funktion der sichtbaren Koordinaten und konstanter Größen, ohne daß der Zusammenhang dieser Konstanten mit den Momenten des cyklischen Teilsystems offen gegeben sei. Die Form dieser Funktion ist durch unsere Betrachtungen keiner Einschränkung unterworfen.

Wir bezeichnen die Kräftefunktion des konservativen Systems dauernd mit U.

Bemerkung. Damit die Bewegung der sichtbaren Massen eines konservativen Systems vollständig bestimmt sei, genügt es, daß seine Kräftefunktion gegeben sei als Funktion seiner sichtbaren Koordinaten, und es macht diese Angabe jede weitere Angabe über die verborgenen Massen des Systems entbehrlich. 604

Denn aus der Kräftefunktion in der angegebenen Form folgen vollständig die Kräfte, welche das verborgene Teilsystem auf das sichtbare ausübt, und diese Kräfte vertreten vollständig den Einfluß des ersteren auf das letztere (**457** ff.).

605 **Definition 3.** Derjenige Teil der Energie eines konservativen Systems, welcher von der Bewegung seiner sichtbaren Massen herrührt, heißt die kinetische Energie des ganzen Systems. Im Gegensatz dazu wird die Energie der verborgenen Massen die potentielle Energie des ganzen Systems genannt.

Die kinetische Energie wird auch wohl als lebendige Kraft bezeichnet; nach einer anderen, älteren Redeweise wird das Doppelte der kinetischen Energie mit diesem Namen belegt.

606 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen die kinetische Energie dauernd mit T. T ist demnach eine homogene quadratische Funktion der $\dot{p}_\varrho$, mit gleichem Rechte der q_ϱ; die Koeffizienten dieser Funktion sind Funktionen der p_ϱ. Mit $\partial_p T$ bezeichnen wir das partielle Differential von T, sobald wir die p_ϱ und die $\dot{p}_\varrho$ als unabhängig voneinander veränderliche Variabele betrachten, mit $\partial_q T$ aber dann, wenn wir die p_ϱ und die q_ϱ als unabhängig voneinander veränderliche Variabele betrachten.

Die Energie des verborgenen cyklischen Teilsystems, also die potentielle Energie des ganzen Systems, möge unter Beibehaltung einer bereits benutzten Bezeichnung (**553**) mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden.

607 **Anmerkung.** Die kinetische und die potentielle Energie eines konservativen Systems unterscheiden sich voneinander nicht durch ihre Natur, sondern nur durch den freiwilligen Standpunkt unserer Auffassung, oder die unfreiwillige Beschränktheit unserer Kenntnis von den Massen des Systems. Dieselbe Energie, welche bei einem gewissen Stand unserer Auffassung oder unserer Kenntnis als potentielle zu bezeichnen ist, ist bei verändertem Stand unserer Auffassung oder Kenntnis als kinetische anzusprechen.

608 **Folgerung 1.** Die Energie eines konservativen Systems ist gleich der Summe seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie.

Wir bezeichnen die Gesamtenergie des konservativen Systems dauernd mit E und haben alsdann:

$$E = T + \mathfrak{E} \quad .$$

Folgerung 2. In einem freien konservativen System ist die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie konstant in der Zeit; die kinetische Energie wächst nur auf Kosten der potentiellen, und umgekehrt (**340**). 609

Folgerung 3. In einem freien konservativen System ist die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion konstant in der Zeit; kinetische Energie und Kräftefunktion nehmen gleichzeitig zu und ab und zwar um gleiche Beträge (**566**). 610

Definition 4. Die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion eines konservativen Systems nennen wir die mathematische oder analytische Energie des Systems. 611

Wir bezeichnen die mathematische Energie dauernd mit h. Sie unterscheidet sich von der Energie des Systems nur durch eine von Zeit und Lage des Systems unabhängige, im allgemeinen aber unbekannte Konstante. Für die mathematische Anwendung kann sie die Energie vollständig vertreten, es fehlt ihr aber die physikalische Bedeutung, welche diese besitzt.

Anmerkung. Die Definition wird wiedergegeben durch die Gleichung: 612

$$T - U = h \quad , \qquad \textbf{a)}$$

oder in anderer Schreibart:

$$U + h = T \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Ist das konservative System ein freies, so ist in dieser Gleichung die Größe h eine von der Zeit unabhängige Konstante und die Gleichung wird alsdann auch wohl als die Gleichung der Energie für das konservative System bezeichnet.

Aus **b)** und **608** leiten wir noch die Beziehung her:

$$U + h = E - \mathfrak{E} \quad . \qquad \textbf{c)}$$

613 **Definition 5.** Das Zeitintegral der kinetischen Energie eines Systems, genommen zwischen zwei bestimmten Zeiten als Grenzen, wird die Wirkung oder der Kraftaufwand während der Zwischenzeit genannt.

Die Wirkung bei der Bewegung eines konservativen Systems während einer gegebenen Zeit wird also dargestellt durch das Integral

$$\int T\,dt \quad ,$$

genommen zwischen dem Anfangs- und dem Endwerte jener Zeit.

614 **Anmerkung 1.** Bezeichnet ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, v die Geschwindigkeit desselben in seiner Bahn, so kann die Wirkung auch dargestellt werden in der Form des Integrals

$$\frac{1}{2} m \int v\,ds \quad ,$$

genommen zwischen den Lagen, in welchen sich das System zu Anfang und zu Ende der betrachteten Zeit befindet.

615 **Anmerkung 2.** Der Name „Wirkung" für das in Rede stehende Integral ist oft als unpassend verurteilt worden. Es ist aber nicht wohl einzusehen, warum der von Jacobi vorgeschlagene Name „Kraftaufwand" besser wäre, noch auch was der ursprünglich von Maupertuis gewählte Ausdruck „action" vor jenen voraushabe. Alle diese Benennungen erwecken Vorstellungen, welche mit dem bekannten Gegenstande nichts zu schaffen haben. Es ist auch schwer verständlich, wie die Summation der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Energien etwas anderes liefern könne, als eine Rechnungsgröße, und es ist daher wohl nicht nur schwierig, sondern unmöglich, für das in Rede stehende Integral eine passende Bezeichnung von einfachem Sinne zu finden.

Auch die übrigen in diesem Abschnitt eingeführten Namen und Bezeichnungen sind weniger durch ihre innere Zweckmäßigkeit gerechtfertigt, als durch die Notwendigkeit, uns der bestehenden Redeweise der Mechanik so viel als möglich anzuschließen.

Differentialgleichungen der Bewegung.

Aufgabe. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines konservativen Systems aufzustellen. 616

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Bewegungsgleichungen für das sichtbare Teilsystem. Die Masse dieses Teilsystems ist m, seine Koordinaten sind die p_ϱ; es seien die k Gleichungen:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho} \, dp_\varrho = 0 \qquad \text{a)}$$

seine Bedingungsgleichungen. Da die p_ϱ zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems sind, so sind die Komponenten der Kräfte, welche dieses auf das sichtbare Teilsystem ausübt, gleich $\partial U / \partial p_\varrho$ (**563**). Wirkt auf das sichtbare Teilsystem durch Koppelung mit anderen sichtbaren Systemen noch eine weitere Kraft, so mögen deren Komponenten P_ϱ sein. Dann sind die Bewegungsgleichungen des Systems nach **481**:

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \, P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} + P_\varrho \quad , \qquad \text{b)}$$

und diese r Gleichungen zusammen mit den k Gleichungen **a)** reichen wieder aus zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$.

Anmerkung 1. Ist das betrachtete konservative System ein freies, wirkt also auf dasselbe keine äußere Kraft, so sind die P_ϱ gleich Null, und die Bewegungsgleichungen haben die Form: 617

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \, P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Anmerkung 2. Ist insbesondere die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate des sichtbaren Teilsystems, so nimmt die dem Index ϱ zugehörige Bewegungsgleichung die Form an: 618

$$mf_\varrho = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

da die $p_{\varkappa\varrho}$ alsdann sämtlich verschwinden.

619 **Anmerkung 3.** Indem wir in die Gleichungen **616** bis **618** für die Beschleunigungen nach den p_ϱ ihre verschiedenen Ausdrücke nach **291** einsetzen, erhalten wir für diese Gleichungen eine Reihe verschiedener Formen, welche den Formen entsprechen, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **368** u. ff. erhalten haben.

620 **Folgerung 1.** Sind in einem holonomen konservativen System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T + U = L \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von L ein, entwickeln die partiellen Differentialquotienten, und beachten, daß U die $\dot{p}_\varrho$ nicht enthält, daß also

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_p U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so erkennen wir, daß die Gleichungen **a)** mit der aus den Definitionen folgenden Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ zusammenfallen, die Gleichungen **b)** aber mit den Bewegungsgleichungen in der Form **618**. (**289**, **291**)

Anmerkung. Die Funktion L, durch deren Benutzung die 621
Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Form der Gleichungen **620a** und **b** annehmen, hat man bisweilen die LAGRANGEsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur in einem holonomen System, und sie ist hier gleich der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten.

Folgerung 2. Sind in einem holonomen konservativen 622
System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T - U = H \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

$$\dot{p}_\varrho = \quad \frac{\partial_q H}{\partial q_\varrho} \qquad \textbf{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q H}{\partial p_\varrho} \quad , \qquad \textbf{b)}$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von H ein, und beachten, daß U die q_ϱ nicht enthält, daß also:

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_q U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so sehen wir, daß die Gleichungen **a)** die aus den Definitionen folgende Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ darstellen, während die Gleichungen **b)** mit den aus der Erfahrung abgeleiteten Bewegungsgleichungen (**618**) des Systems zusammenfallen. (**290**, **294**)

Anmerkung. Die Funktion H, durch deren Benutzung die 623
Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Gestalt der

Gleichungen **622a** und **b** annehmen, hat man wohl die HAMILTONsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur für ein holonomes System, und sie ist für ein solches gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten; sie ist also auch gleich der Gesamtenergie des Systems, von einer willkürlichen Konstanten abgesehen.

Allgemein ist es zulässig, für ein System mit beliebigen, nicht notwendig cyklischen, verborgenen Bewegungen die HAMILTONsche Funktion zu definieren durch die Gleichungen **622a** und **b**, nämlich als eine Funktion der sichtbaren p_ϱ und q_ϱ, durch deren Benutzung (vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion gibt) die Bewegungsgleichungen eben jene einfache Form annehmen. Bei dieser allgemeineren Definition ist die HAMILTONsche Funktion nicht immer gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

624 **Bemerkung.** Aus den Gleichungen **620** und **622** können für ein System mit verborgenen Cykeln dieselben reziproken Eigenschaften der Bewegung abgeleitet werden, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **378** und **381** abgeleitet haben. Es ist aber diese neue Ableitung nicht erforderlich, sondern es liegt schon im Wesen jener Beziehungen, daß jede von ihnen Gültigkeit hat unabhängig davon, ob die in ihnen nicht vorkommenden Koordinaten, Momente usw. sichtbare oder verborgene Koordinaten, Momente, usw. sind.

Integralsätze für holonome Systeme.

625 **Bemerkung 1.** Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürliche Bewegung des Systems, als für jede andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen

Zeit sowohl die sichtbaren, als auch die verborgenen Koordinaten aus den Anfangswerten in die Endwerte überführt.

Denn da $T - U$ gleich ist der Energie des Systems, vermehrt um eine für alle möglichen Bewegungen gleiche Konstante (**611**), so ist die Bemerkung nichts anderes, als der Lehrsatz **358**, ausgesagt unter Anwendung der gegenwärtigen Bezeichnung.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Endlagen weggelassen, so kann nur behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet beim Übergang zu irgend einer anderen der in Betracht kommenden Bewegungen. Unter Anwendung der Bezeichnung **590** nimmt alsdann die Aussage die Form an, daß **626**

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0$$

sei beim Übergang von der natürlichen Bewegung zu irgend einer anderen möglichen, während die Variationen der Anfangs- und Endzeiten und der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten verschwinden. (Vergl. **359**.)

Anmerkung 2. Die Bemerkung 1 unterscheidet die natürlichen Bewegungen eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung, und sie kann daher dazu dienen, die natürliche Bewegung zu bestimmen, sobald es möglich ist, die Variation der Anmerkung 1 wirklich zu bilden. Sind aber, wie wir es ja voraussetzen, die cyklischen Koordinaten verborgene, so ist die Bildung der Variationen der Form $\delta_{\mathfrak{p}}$ nicht möglich, und der Satz verliert daher nicht zwar seine Richtigkeit, wohl aber seine Anwendbarkeit. **627**

Lehrsatz 1. Das Integral **628**

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen seiner sichtbaren Massen kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen Zeit und mit denselben Momenten der verborgenen cyklischen Bewegungen die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführt.

Wir führen den Beweis, indem wir den Satz auf die Bemerkung **625** zurückführen. Wir ordnen deshalb, wie es nach **592** möglich ist, einer jeden nach den Ansprüchen des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation beim Übergang zu einer Bewegung der ersten Art haben wir nach **590** mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden Bewegung zweiter Art mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ zu bezeichnen.

Nun ist erstens, da T nur von den sichtbaren Koordinaten abhängt:

a) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int T\,dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int T\,dt \quad .$$

Zweitens ist, da die Dauer der Bewegung nicht variiert wird und $-U$ sich nur durch eine Konstante von der Energie der cyklischen Bewegung unterscheidet (**566**), zufolge von **593**:

b) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int U\,dt = -\delta_{\mathfrak{p}}\int U\,dt \quad .$$

Durch Addition von **a)** und **b)** ergibt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int (T+U)\,dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int (T-U)\,dt \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat (**626**, **625**) für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen notwendig negativen Wert, also auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

629 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet

werden, daß die Variation des Integrales verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu der Aussage von 626):

$$\delta_q \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Die in dem Lehrsatz ausgesprochene Eigenschaft der natürlichen Bewegung unterscheidet dieselbe eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung. Die Variation δ_q kann gebildet werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene angesehen sind, denn ihre Bildung erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse. Der Lehrsatz kann deshalb benutzt werden zur Bestimmung der natürlichen Bewegung konservativer Systeme. Seine Gültigkeit ist allerdings streng beschränkt auf holonome Systeme. 630

Anmerkung 3. Der vorstehende Lehrsatz, benutzt in der Auffassung der Anmerkung 2, führt den Namen des Hamiltonschen Prinzips. Seine physikalische Bedeutung kann nach unserer Anschauung keine andere sein, als die des Lehrsatzes 358, aus welchem wir das Prinzip hergeleitet haben. Das Prinzip selbst stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze 358 geben müssen, damit er trotz unserer Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. 631

Bemerkung 2. Bezeichnen wir mit ds das Bahnelement der sichtbaren Massen eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, so ist das Integral 632

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürlichen Bahnen des Systems, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche sowohl die

Werte der sichtbaren, als auch die Werte der cyklischen Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen. Die Größe h ist dabei als eine von einer natürlichen Bahn zur anderen wechselnde, übrigens für alle jedesmal verglichenen Bahnen gleiche Konstante zu betrachten.

Denn führen wir die Zeit als Hilfsgröße ein und machen dabei die willkürliche aber zulässige Annahme, das System durchlaufe die betrachteten Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daß die Konstante h den Wert der analytischen Energie bezeichnet, so ist:

a) $$T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \quad ,$$

also das betrachtete Integral gleich:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt \quad .$$

Das Integral ist also, von dem Faktor abgesehen, gleich der Zeitdauer des Überganges. Diese ist aber nach **352** als Folge von **347** für gegebenen Wert der Energie, also der Konstanten h, ein Minimum. Unsere Bemerkung ist demnach nichts anderes, als der Inhalt des Lehrsatzes **352**, ausgesagt unter Benutzung der inzwischen eingeführten Bezeichnungen.

633 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fortgelassen, so kann nur noch das Verschwinden einer Variation behauptet werden (**353**); welche Aussage in unserer Bezeichnung in der Form darzustellen ist:

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = 0 \quad .$$

634 **Anmerkung 2.** Durch die Eigenschaft, welche die Bemerkung 2 aussagt, sind die natürlichen Bahnen, welche den verschiedenen Werten der Konstanten h entsprechen, eindeutig ausgezeichnet vor jeder anderen möglichen Bahn, und der Lehrsatz kann daher zur Bestimmung der natürlichen Bahn des Systems dienen, sobald es möglich ist, die Variation δ_p zu bilden. Sind aber, wie wir voraussetzen, die Einzelheiten der cyklischen Bewegung verborgen, so ist diese Bildung nicht möglich, und die Bemerkung verliert daher nicht zwar ihre Richtigkeit, wohl aber ihre Anwendbarkeit zu dem besagten Zwecke.

Lehrsatz 2*). Beim Übergang eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, zwischen zwei hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 der sichtbaren Massen, ist das Integral **635**

$$\int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds$$

kleiner für die natürlichen Bahnen, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche mit denselben Werten der verborgenen cyklischen Momente und der Konstanten h die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen.

Wir führen wiederum den Beweis des Satzes, indem wir ihn auf die vorangegangene Bemerkung (**632**) zurückführen. Zu dem Ende benutzen wir wieder die Zeit als Hilfsgröße, indem wir die willkürliche aber zulässige Annahme machen, daß das System die betrachteten Bahnen mit konstanter und solcher Geschwindigkeit durchlaufe, daß die Konstante h gleich der mathematischen Energie wird. Es läßt sich dann das Integral, von dem der Lehrsatz handelt, schreiben in der Form:

$$\sqrt{\frac{2}{m}}\int_{t_0}^{t_1} (U+h)\, dt \quad .$$

Ferner ordnen wir wieder, wie es nach **592** zulässig ist, einer jeden nach der Vorschrift des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, für welche auch die Konstante h,

*) Mit dem Originale übereinstimmender Abdruck. — Der Herausgeber.

(635) und also auch die Energie E ihren Wert behält, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation, wie sie den Ansprüchen des Lehrsatzes entspricht, bezeichnen wir wieder mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden zweiten Bewegung mit $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Nun ist erstens für beliebige Variationen $\delta\mathfrak{q}_\varrho$ der cyklischen Momente $\mathfrak{q}_\varrho$ (**566**):

$$\delta\int(U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\int\frac{\partial(U+h)}{\partial\mathfrak{q}_\varrho}\,\delta\mathfrak{q}_\varrho\,dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta\mathfrak{q}_\varrho \quad ,$$

also im besonderen für eine Variation $\delta_{\mathfrak{p}}$:

a) $$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta_{\mathfrak{p}}\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Zweitens erhalten wir aus Gleichung **612c** unter Berücksichtigung der Beziehung **588** und der Konstanz von E:

$$\int(U+h)\,dt = E(t_1-t_0) - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

also durch eine Variation der Art $\delta_{\mathfrak{p}}$:

b) $$\delta_{\mathfrak{p}}\int(U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1-t_0) - \frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\,\bar{\mathfrak{p}}_\varrho\,\delta_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Durch Subtraktion von **a)** und **b)** ergibt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int(U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1-t_0) \quad ,$$

oder indem wir mit Hilfe von **632a** die Zeit wieder eliminieren:

d) $$\delta_{\mathfrak{q}}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds = E\,\delta_{\mathfrak{p}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat nach **632** für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen negativen Wert, also, da E notwendig positiv ist, auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend **636**
benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu **633**):

$$\delta_q \int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Für jeden Wert der Konstanten h zeichnet **637**
der Lehrsatz eine natürliche Bahn in eindeutiger Weise aus vor jeder anderen möglichen Bahn. Die Eigenschaft der natürlichen Bahnen, welche der Lehrsatz aussagt, kann daher benutzt werden zur Bestimmung dieser Bahnen; und zwar kann sie benutzt werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene vorausgesetzt sind.

Denn die Bildung der Variation δ_q erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse; die Variation kann also gebildet werden trotz Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung.

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 2, benutzt in der Auffassung **638**
der Anmerkung 2, ist die Jacobische Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse des νten der sichtbaren n Punkte des Systems, ds_ν das Element der Bahn dieses Punktes, so ist

$$m\, ds^2 = \sum_1^n {}_\nu\, m_\nu\, ds_\nu^2 \quad ,$$

und also das Integral, für welches wir einen Minimalwert feststellen bis auf einen Faktor:

$$\int \sqrt{U+h} \sqrt{\sum_1^n {}_\nu \, m_\nu \, ds_\nu^2} \quad ,$$

welches, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, das JACOBIsche Integral ist.

Die physikalische Bedeutung des JACOBIschen Prinzips kann nach unserer Auffassung keine andere sein, als die des Lehrsatzes **352**, bez. **347**, aus welchem es abgeleitet ist; es stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze geben müssen, damit er trotz vorhandener Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegungen zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. Die Gültigkeit auch des JACOBIschen Satzes erstreckt sich nur auf holonome Systeme.

639 **Lehrsatz 3.** Beim Übergang eines freien holonomen konservativen Systems zwischen hinreichend benachbarten Lagen ist das Zeitintegral der kinetischen Energie kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System von den gegebenen Anfangswerten zu den Endwerten der sichtbaren Koordinaten überführt, und welche mit demselben gegebenen, in der Zeit konstanten Werte der mathematischen Energie ausgeführt wird.

Denn nennen wir h den gegebenen Wert der mathematischen Energie, so ist für alle in Betracht kommenden Bahnen (**611**)

$$T - U = h \quad ,$$

also ist das Integral, von welchem der Satz handelt, nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} T \, dt \quad ,$$

bis auf einen konstanten Faktor dasselbe Integral, von welchem der Lehrsatz 2 handelt; der gegenwärtige Satz ist daher nur eine andere Form, den Inhalt jenes Lehrsatzes auszusagen.

Die zu dem Lehrsatz 2 gemachten Anmerkungen 1 und 2 finden daher auch hier sinnentsprechende Anwendung.

Anmerkung. Der Lehrsatz **639** gibt die ursprüngliche MAUPERTUISsche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Diese Form hat vor der JACOBIschen den Vorzug, daß sie sich in einfachen Worten aussprechen läßt und daher einen einfachen physikalischen Sinn zu enthalten scheint. Sie hat aber gegenüber der JACOBIschen Form den Nachteil, daß sie unnötigerweise die Zeit enthält, obwohl doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems bestimmt, nicht die Bewegung in dieser, und obwohl diese Bewegung vielmehr nur durch die hinzugefügte Bemerkung bestimmt ist, daß überhaupt nur Bewegungen mit konstanter Energie in Betracht gezogen werden sollen. **640**

Rückblick auf 625 bis 640.

1. Nach den Ergebnissen unserer Überlegung nimmt für **641**
die natürliche Bewegung eines freien konservativen Systems ein jedes der Integrale:

$$\int (T - U)\, dt \quad , \qquad \int (T + U)\, dt \quad ,$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \int \sqrt{U+h}\, ds \quad ,$$

$$\int T\, dt \quad ,$$

unter bestimmten Verhältnissen einen ausgezeichneten Wert an. Dabei beziehen sich die beiden oberen Integrale auf die Bewegung des Systems, die übrigen in Wahrheit nur auf die Bahn desselben. Die beiden links stehenden Integrale beziehen sich auf den Fall, daß alle, auch die cyklischen Koordinaten des Systems in Betracht gezogen werden, und daß nur solche Lagen des Systems als gleiche gelten, bei welchen auch die letzteren Koordinaten die gleichen Werte haben. Die übrigen Integrale beziehen sich auf den Fall, daß die cyklischen Koordinaten des Systems verborgen sind, und daß schon solche Lagen des Systems als gleich gelten, bei welchen die sichtbaren Koordinaten gleiche Werte haben. Die Betrachtung des letzten Integrals setzt die Gültigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie als zugestanden voraus;

die Betrachtung der beiden obersten Integrale läßt diese Gültigkeit folgen; die Betrachtung der beiden mittleren Integrale kann von dieser Gültigkeit unabhängig gehalten werden.

642 2. Die physikalische Bedeutung der beiden links stehenden Integrale ist eine äußerst einfache; die sie betreffenden Aussagen sind unmittelbare Ausflüsse des Grundgesetzes. Die rechts stehenden Integrale haben die einfache physikalische Bedeutung verloren; aber die Aussage, daß sie für die natürliche Bewegung ausgezeichnete Werte annehmen, stellt immer noch eine, wenn auch verwickelte und undurchsichtige Form des Grundgesetzes dar. Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigen Voraussetzungen angepaßt ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht, hat den trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

Unser Beweisverfahren war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, den obigen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

643 3. Daß die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daß das eine oder das andere jener Integrale ein Minimum werde, geht erstens daraus hervor, daß schon in holonomen Systemen bei ausgedehnterer Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daß es natürliche Systeme gibt, für welche das Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruck für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir auch das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrals für trügerisch zu halten.

Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme.

644 **Bemerkung 1.** Bezeichnen wir mit V' den Wert des Integrales

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen zwei Wertsystemen aller Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln, und gedacht als Funktion der Anfangs- und Endwerte jener Koordinaten, also der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und der $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$, $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$, und der Größe h, so stellt der Ausdruck

$$V'\sqrt{\frac{2E}{m+\mathfrak{m}}}$$

die geradeste Entfernung des Systems dar. Die Bezeichnung ist dabei dieselbe, welche wir bisher in diesem Abschnitt benutzt haben.

Denn nach **632** ist V' gleich der Zeitdauer des natürlichen Übergangs zwischen den gegebenen Lagen für die mathematische Energie h. Ist also S die geradeste Entfernung beider Lagen, so ist

$$E=\tfrac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{S^2}{V'^2} \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Mit Hilfe der Funktion V' lassen sich die natürlichen Bahnen des betrachteten Systems in geschlossener Form darstellen. 645

Denn bezeichnen wir wie bisher mit ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, weiter mit $d\mathfrak{s}$ das Bahnelement des cyklischen Teilsystems und mit $d\sigma$ das Bahnelement des vollständigen Systems, so ist

$$(m+\mathfrak{m})\,d\sigma^2=m\,ds^2+\mathfrak{m}\,d\mathfrak{s}^2 \quad , \qquad \text{a)}$$

also (**57**) bei der bisher benutzten Bezeichnung:

$$d\sigma^2=\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\frac{m}{m+\mathfrak{m}}a_{\varrho\sigma}\,dp_\varrho\,dp_\sigma+\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\frac{\mathfrak{m}}{m+\mathfrak{m}}\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\,d\mathfrak{p}_\varrho\,d\mathfrak{p}_\sigma \ . \qquad \text{b)}$$

Sind also schließlich noch σ,p_ϱ und $\sigma,\mathfrak{p}_\varrho$ die Winkel, welche die Bahn des ganzen Systems mit den Koordinaten p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ des ganzen Systems bildet, so werden die Gleichungen der natürlichen Bahnen zufolge von **224** und **226**, nach Division beider Seiten durch einen konstanten Faktor, erhalten in der Form:

$$\text{c)}\qquad \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma, p_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}}$$

$$\text{d)}\qquad \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma, p_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}}$$

$$\text{e)}\qquad \sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma, \mathfrak{p}_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}}$$

$$\text{f)}\qquad \sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma, \mathfrak{p}_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}}\quad ,$$

und diese Gleichungen lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die Gleichungen der natürlichen Bahnen als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

646 **Anmerkung.** Die vorstehenden Gleichungen **c)** bis **f)** sind richtig in jedem Falle, ob nun die cyklischen Koordinaten als beobachtbare oder als dauernd verborgene angesehen werden; aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald das letztere vorausgesetzt wird. Denn alsdann ist der vollständige Ausdruck von V' nicht bekannt, und die Gleichungen lassen sich nicht entwickelt hinschreiben.

647 **Aufgabe 1.** Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit V den Wert des Integrales

$$\sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds\quad ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen irgend zwei Wertsystemen der sichtbaren Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bahn wollen wir die in der Kräftefunktion vorkommenden cyklischen Momente als unveränderliche Konstanten ansehen, und V soll also gedacht werden als Funktion der Anfangs- und Endwerte allein der sichtbaren Koordinaten und der Konstanten h. Nach **635d** ist nun beim Übergang von einer natürlichen Bahn zu einer anderen mit beliebig variierten sichtbaren Koordinaten: (647)

$$\delta_{\mathfrak{q}}\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds = 2E\,\delta_{\mathfrak{p}}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \text{a)}$$

also ist auch insbesondere beim Übergang von einer natürlichen zu einer beliebigen benachbarten natürlichen Bahn:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\,V = 2E\,\delta_{\mathfrak{p}}\,V' \quad , \qquad \text{b)}$$

also ist:

$$\begin{aligned}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} &= 2E\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,\\ \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} &= 2E\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad .\end{aligned} \qquad \text{c)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die cyklischen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **645c** und **d** fortschaffen. Was die linken Seiten anlangt, so haben wir die Winkel $\sigma . p_\varrho$ zu ersetzen durch die s, p_ϱ. Nun haben wir nach **645b (75)**:

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,d\sigma\cos\sigma,p_\varrho &= \sum_1^r{}_\sigma\frac{m}{m+\mathfrak{m}}a_{\varrho\sigma}\,dp_\sigma\\ &= \frac{m}{m+\mathfrak{m}}\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds\cos s,p_\varrho \quad ,\end{aligned} \qquad \text{d)}$$

und ferner aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned}U+h = T &= \frac{1}{2}m\frac{ds^2}{dt^2} \qquad \text{und}\\ E &= \frac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{d\sigma^2}{dt^2}\end{aligned} \qquad \text{e)}$$

durch Division:

f) $$d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{\frac{E}{U+h}}\,ds \quad ,$$

also aus **d)** und **f)**:

g) $$\cos\sigma{,}p_\varrho = \sqrt{\frac{U+h}{E}}\cos s{,}p_\varrho \quad .$$

Indem wir nun das Ergebnis **e)** in die rechten, das Ergebnis **g)** in die linken Seiten der umzuformenden Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Gleichungen:

h) $$\begin{aligned} \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos s{,}p_{\varrho_1} &= \frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \\ \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos s{,}p_{\varrho_0} &= -\frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \end{aligned}$$

welches die gesuchten Umformungen sind. Denn sie enthalten keine Größen mehr, welche sich auf das verborgene Teilsystem beziehen, und sie lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die natürlichen Bahnen des sichtbaren Teilsystems als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

648 **Anmerkung 1.** Die Funktion V enthält nicht die Zeit und gibt auch nur die natürlichen Bahnen des Systems, nicht aber die Bewegung des Systems in diesen Bahnen. Da aber die natürlichen Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, und da wir bereits der in V vorkommenden Konstanten h die Bedeutung der analytischen Energie beilegten, so ist es leicht, die Zeit als unabhängige Variabele in die Gleichungen einzuführen. Zunächst ist die Verknüpfung der Zeit mit der bisher als unabhängige Variabele benutzten Weglänge gegeben durch die Gleichung:

a) $$\frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0 \quad .$$

Sodann erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen **647h** mit

$$\sqrt{2m(U+h)} = \sqrt{2m\,T} = m\frac{ds}{dt} \quad ,$$

und Beachtung von **75** und **270**:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{c)}$$

Endlich erhalten wir für den Wert der Funktion selbst:

$$V = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt \quad . \qquad \text{d)}$$

Der Form nach sind diese Gleichungen weit einfacher als die Gleichungen der vorangegangenen Aufgabe, aber jene Gleichungen haben den Vorzug, eine unabhängige Variabele weniger zu enthalten.

Anmerkung 2. Die Funktion V ist diejenige Funktion, **649**
welche von Hamilton mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet und die charakteristische Funktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **412**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit V bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Funktion über.

Übrigens erhellt, daß die charakteristische Funktion eines Systems nach der jetzt erweiterten Definition eine Rechnungsgröße ohne physikalische Bedeutung ist. Denn je nachdem wir größere oder kleinere Teile der cyklischen Bewegungen als verborgene behandeln, können wir für dasselbe System verschiedene charakteristische Funktionen aufstellen, welche den gleichen analytischen Dienst leisten, aber für identische Übergänge des Systems verschiedene Werte besitzen.

650 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}}=(U+h)_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}}=(U+h)_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten durch Einsetzen der Richtungscosinus aus den Gleichungen **647h** in die Gleichung **88**, welcher diese Richtungscosinus genügen.

651 **Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit P' den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt \quad ,$$

genommen über die natürliche Bewegung zwischen zwei Wertsystemen der sämtlichen Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln und gedacht als Funktion dieser Werte und der Zeitdauer des Übergangs, so unterscheidet sich P' von der Prinzipalfunktion des Systems (**415**) nur um das Produkt der Zeitdauer des Übergangs in eine (unbekannte) Konstante.

Denn es unterscheidet sich $T-U$ von der Energie des Systems nur um eine (unbekannte) Konstante.

652 **Folgerung.** Mit Hilfe der Funktion P' lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems in geschlossener Form darstellen.

In der Tat hindert der Unterschied zwischen P' und der in **415** definierten Prinzipalfunktion nicht die unmittelbare Anwendung der Gleichungen **414b** und **c**, so daß wir als Bewegungsgleichungen erhalten:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \,, \qquad \text{a)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \,, \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}} \,, \qquad \text{c)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \,. \qquad \text{d)}$$

Dagegen erfordert die Gleichung **414d** eine leichte Abänderung; an ihrer Stelle wird erhalten:

$$h = -\frac{\partial P'}{\partial t_0} = \frac{\partial P'}{\partial t_1} \,. \qquad \text{e)}$$

Anmerkung. Die vorstehenden Gleichungen **a)** bis **d)** sind richtig in jedem Falle, ob nun alle Koordinaten in Wahrheit beobachtbar sind oder ob nicht, aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene behandelt werden. **653**

Aufgabe 2. Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten. **654**

Wir bezeichnen mit P den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt \,,$$

genommen für die natürliche Bewegung zwischen zwei zu den Zeiten t_0 und t_1 stattfindenden Wertsystemen der s i c h t b a r e n Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bewegung sollen die in den Konstanten der Kräftefunktion enthaltenen cyklischen Momente als unabänderlich angesehen werden, und P soll also gedacht sein als Funktion allein der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten und der Zeiten t_0 und t_1.

Nun gilt nach **628c** beim Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer beliebigen benachbarten Bewegung von gleicher Dauer die Gleichung:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int (T+U)\,dt = \delta_{\mathfrak{p}}\int (T-U)\,dt \quad .$$

Wenden wir diese Gleichung an auf den Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer benachbarten natürlichen Bewegung von gleicher Dauer, so liefert sie uns:

$$\delta_{\mathfrak{q}} P = \delta_{\mathfrak{p}} P' \quad ,$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad .$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen entfernen wir die verborgenen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **652**. Was die linken Seiten anlangt, so genügt die Bemerkung, daß das Moment q_ϱ des gesamten Systems nach seiner Koordinate p_ϱ zugleich das Moment des sichtbaren Teilsystems nach der Größe p_ϱ als Koordinate dieses Teilsystems ist. Wir erhalten demnach als Bewegungsgleichungen des sichtbaren Teilsystems:

a) $$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

b) $$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \quad ,$$

welches die gesuchten Umformungen sind.

655 **Anmerkung 1.** Die jetzt von uns eingeführte Funktion P ist diejenige Funktion, welche von Hamilton mit dem Buchstaben S bezeichnet und die Prinzipalfunktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **415**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit P bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben belegte Funktion über.

Anmerkung 2. Der Wert der Prinzipalfunktion für einen 656
bestimmten Übergang hängt mit dem der charakteristischen Funktion in einfacher Weise zusammen. Durch einfache Umformung wird nämlich erhalten:

$$\int_{t_0}^{t_1} (T+U)\,dt = \int_{t_0}^{t_1} (2\,U+h)\,dt$$

$$= \sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds - \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{h\,ds}{\sqrt{U+h}} \quad .$$

Also ist (**647, 644**):

$$P = V - h\,(t_1 - t_0) \quad , \qquad \textbf{a)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in V und im zweiten Summanden, die Größe h als Funktion von $t_1 - t_0$ und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Umgekehrt ist also auch

$$V = P + h\,(t_1 - t_0) \quad , \qquad \textbf{b)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in P und im zweiten Summanden, die Größe $t_1 - t_0$ als Funktion von h und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Anmerkung 3. Die analytische Energie h kommt in der 657
Prinzipalfunktion nicht vor. Doch kann sie aus derselben mit Hilfe der Gleichungen **654a, b, 286c** und **612a** mittelbar abgeleitet werden. Sie kann aber auch unmittelbar durch P ausgedrückt werden. Denn ändern wir in der rechten Seite der Gleichung **656a** nicht die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}, sondern nur t_1 und t_0, und bezeichnen mit dh die damit notwendig verbundene Änderung von h, so folgt:

$$dP = \frac{\partial V}{\partial h}\,dh - h\,d(t_1 - t_0) - (t_1 - t_0)\,dh \quad ,$$

also nach **648a**:

$$dP = -h\,d(t_1 - t_0) \quad ,$$

woraus folgt:

$$h = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad .$$

658 **Lehrsatz.** Die Prinzipalfunktion P eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} + \frac{\partial P}{\partial t_1} = U_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} - \frac{\partial P}{\partial t_0} = U_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten, wenn man die analytische Energie h das eine Mal direkt mit Hilfe von **657**, das andere Mal indirekt mit Hilfe von **612a** und **654a, b** durch die Differentialquotienten von P ausdrückt.

Rückblick auf 644 bis 658.

659 1. In den Nummern **644** bis **658** sind vier endliche Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln gegeben. In der ersten und dritten Darstellung waren alle Koordinaten des Systems als beobachtbare angesehen, in der zweiten und vierten Darstellung waren die cyklischen Koordinaten als verborgene behandelt. Die erste und zweite Darstellung, welche auf die charakteristische Funktion führte, gab im Grunde nur die Bahn des Systems und entsprach dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Die dritte und vierte Darstellung, welche auf die Prinzipalfunktion führte, gab vollständig die Bewegung und entsprach dem HAMILTONschen Prinzip.

660 2. Alle vier Darstellungen haben denselben einfachen physikalischen Sinn und für alle ist der Grund der mathematischen Verwickelung derselbe. Der einfache physikalische

Sinn besteht in der Tatsache, daß die natürlichen Bahnen stets geradeste Bahnen sind, und in dem rein geometrischen Zusammenhange dieser Bahnen mit der geradesten Entfernung in holonomen Systemen. Der Grund der mathematischen Verwickelung aber besteht darin, daß wir nicht stets alle wesentlichen Bestimmungsstücke der Bewegung gleichmäßig behandelten, sondern einige derselben als verborgene eliminierten. Wir können auch sagen, die Ungleichmäßigkeit bestehe darin, daß wir für einige Koordinaten die Anfangs- und Endwerte, für andere Koordinaten die Anfangsgeschwindigkeiten als Bestimmungsstücke einführten. Unsere Ableitungsweise war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, dies Verhältnis möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

3. Man kann weitere Darstellungen der Bewegung eines 661
holonomen Systems geben, indem man weitere Koordinaten eliminiert, oder indem man auch für die sichtbaren Koordinaten nicht die Anfangs- und Endwerte, sondern andere Größen als Bestimmungsstücke einführt, oder indem man von den partiellen Differentialgleichungen **650** oder **658** ausgeht, in ähnlicher Weise, wie dies für die geradeste Entfernung in **232** u. ff. geschehen ist. Solche Darstellungen können in besonderen Fällen mathematische Vorteile bieten, wie Jacobi in umfassender Weise gezeigt hat. Je mehr man aber in dieser Richtung fortschreitet, desto mehr verbirgt sich der physikalische Sinn der Operationen hinter deren mathematischer Form, desto mehr nehmen die benutzten Funktionen den Charakter von Hilfskonstruktionen an, welchen es nicht mehr möglich ist, eine physikalische Bedeutung beizulegen.

Nicht-konservative Systeme.

Erläuterungen und Bemerkungen.

1. Enthält ein materielles System keine anderen ver- 662
borgenen Massen, als solche, welche in adiabatischer cyklischer Bewegung begriffen sind, so ist es bei freier Verfügung über die sichtbaren Koordinaten jederzeit möglich, Energie, welche in die Energie der verborgenen Massen übergegangen ist, in

die Energie der sichtbaren Massen zurückzuverwandeln. Die einmal im System vorhandene sichtbare Energie kann also dauernd als sichtbare Energie erhalten bleiben.

Dies ist die Eigenschaft, auf Grund deren wir solche Systeme als konservative bezeichneten. Aus dem gleichen Grunde bezeichnen wir die von den verborgenen Massen solcher Systeme ausgeübten Kräfte als konservative Kräfte.

663 2. Im Gegensatz dazu werden solche Systeme, bei welchen die freie Verfügung über die sichtbaren Koordinaten nicht ausreicht, verborgene Energie jederzeit in sichtbare zurückzuverwandeln, als nicht-konservative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme als nicht-konservative Kräfte bezeichnet. Nicht-konservative Systeme, in welchen die Energie sich vorzugsweise aus der Energie sichtbarer Massen in die Energie der verborgenen Massen verwandelt, nicht aber umgekehrt, heißen dissipative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme dissipative Kräfte.

664 3. Im allgemeinen sind die Systeme und Kräfte der Natur nicht-konservativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand ist eine notwendige Folge davon, daß die konservativen Systeme nur Ausnahmefälle, sogar nur mit mehr oder weniger Annäherung erreichte (**550**) Ausnahmefälle bilden, daß also für ein beliebig herausgegriffenes natürliches System eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, daß es ein konservatives sei. Erfahrungsmäßig aber sind weiter die Systeme und Kräfte der Natur dissipativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand findet eine hinreichende Erklärung in der Hypothese, daß in der Natur die Zahl der verborgenen Massen und ihrer Bewegungsfreiheiten unendlich groß sei gegen die Zahl der sichtbaren Massen und deren sichtbarer Koordinaten, so daß für eine beliebig herausgegriffene Bewegung eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, daß sich die Energie gerade in der besonderen und ausgezeichneten Richtung von jener großen Zahl von Massen auf diese ganz bestimmte kleine Zahl hin konzentriere.

665 4. Übrigens steht der Unterschied zwischen konservativen

und dissipativen Systemen und Kräften nicht in der Natur, sondern beruht lediglich auf der freiwilligen Beschränkung unserer Auffassung oder der unfreiwilligen Beschränktheit unserer Kenntnis der natürlichen Systeme. Werden alle Massen der Natur als sichtbare Massen betrachtet, so fällt jener Unterschied fort, und alle Kräfte der Natur können alsdann als konservative Kräfte bezeichnet werden.

5. Die konservativen Kräfte erscheinen im allgemeinen **666**
als Differentialquotienten von Kräftefunktionen, also als solche Funktionen der sichtbaren Koordinaten der Systeme, welche unabhängig von der Zeit sind. Die nicht-konservativen Kräfte hängen außerdem im allgemeinen von den ersten und von höheren Differentialquotienten der sichtbaren Koordinaten nach der Zeit ab. Bei jeder analytisch gegebenen Form einer Kraft beider Arten kann die Frage aufgeworfen werden, ob diese Form mit den Voraussetzungen unserer Mechanik verträglich sei, oder ihr widerspreche.

6. Auf diese letztere Frage kann im allgemeinen Ant- **667**
wort nicht erteilt werden; im einzelnen ist sie nach folgenden Gesichtspunkten zu beurteilen:

1. Wenn irgend ein gesetzmäßiges stetiges System aufgewiesen werden kann, welches Kräfte der gegebenen Form ausübt, so ist bewiesen, daß die gegebene Form den Ansprüchen unserer Mechanik genügt.

2. Wenn die Unmöglichkeit nachgewiesen werden kann, ein solches System aufzufinden, so ist gezeigt, daß die gegebene Form unserer Mechanik widerspricht.

3. Wenn in der Natur irgend ein System aufgewiesen werden kann, welches erfahrungsmäßig Kräfte der gegebenen Form ausübt, so betrachten wir dadurch zunächst als bewiesen, daß die gegebene Form mit unserer Mechanik verträglich ist.

Trifft keiner der Fälle 1. 2. 3. zu, so muß die gestellte Frage eine offene bleiben. Sollte sich eine Form der Kraft finden, welche nach 2. zurückzuweisen wäre, nach 3. aber zugelassen werden müßte, so wäre damit die Unzulänglichkeit der Hypothese, welche unserer Mechanik zugrunde liegt, und damit die Unzulänglichkeit dieser Mechanik selbst erwiesen.