Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Zeitintegral der Energie

Folgerung 1. Bei beliebiger Bewegung eines monocyklischen Systems ist der Ausdruck 585

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

das vollständige Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems, nämlich der Funktion

$$2 \log \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0} \quad ,$$

in welcher $\mathfrak{q}_0$ das cyklische Moment für eine willkürlich gewählte Anfangslage bedeutet. Diese Funktion wird auch die Entropie des monocyklischen Systems genannt.

Folgerung 2. Der Wert des für eine beliebige endliche Bewegung eines monocyklischen Systems gebildeten Integrales 586

$$\int \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

hängt nur ab von den Zuständen des Systems in der Anfangs- und Endlage der Bewegung, nicht aber von den zwischen beiden Lagen durchlaufenen Zuständen. Der Wert jenes Integrales wird Null für jede Bewegung, welche das System zu seinem Anfangszustand zurückführt.

Denn der Wert jenes Integrales ist gleich dem Unterschiede der Entropie im Anfangs- und im Endzustande der Bewegung.

Folgerung 3. Bei der adiabatischen Bewegung eines monocyklischen Systems bleibt die Entropie konstant. Denn für die adiabatische Bewegung ist $\mathfrak{P}$, also auch $d\mathfrak{Q}$ gleich Null. Die adiabatische Bewegung eines monocyklischen Systems wird deshalb auch eine isentropische genannt. 587

Zeitintegral der Energie.

Bemerkung 1. Ändern sich bei der adiabatischen Bewegung eines cyklischen Systems die cyklischen Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ 588 in einer gewissen endlichen Zeit um die Beträge $\bar{\mathfrak{p}}_\varrho$, so ist das Zeitintegral der Energie des Systems, genommen über jene Zeit, gleich

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Denn es kann die Energie des Systems geschrieben werden in der Form (**286b**):

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad ,$$

und hierin sind für die adiabatische Bewegung die $\mathfrak{q}_\varrho$ Konstanten.

589 **Bemerkung 2.** Die Variation des Zeitintegrales der Energie eines adiabatischen Systems bei variierter Bewegung des Systems hängt ab erstens von der Variation der Parameter während der ganzen Zeit, über welche das Integral gebildet ist, zweitens aber auch von den in der Zeit konstanten Variationen, welche die in der Zeit konstanten cyklischen Momente des Systems erleiden.

590 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen im folgenden:

mit δ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente willkürliche Variationen erleiden,

mit $\delta_\mathfrak{q}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente keine Variationen erleiden,

endlich mit $\delta_\mathfrak{p}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente solche Variationen erleiden, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

591 **Folgerung.** Aus der Bezeichnung folgt von selbst für alle ϱ:

$$\delta_\mathfrak{q}\, \mathfrak{q}_\varrho = 0 \quad , \quad \delta_\mathfrak{p} \bar{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

also wird nach **588** für beliebige Variationen der Parameter:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt = \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}^{\varrho}\, \mathfrak{q}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{q}}\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \qquad \text{a)}$$

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt = \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}^{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{q}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Anmerkung. In einem adiabatischen System ist es stets, und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise möglich, bei beliebiger Variation der Parameter den cyklischen Momenten solche Variationen zu erteilen, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben. 592

Denn aus der allgemeinen Beziehung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}^{\sigma}\, \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma$$

folgt für ein adiabatisches System, in welchem sich die $\mathfrak{p}_\varrho$ von den Werten $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$ auf die Werte $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$ ändern:

$$\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}^{\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt \quad ,$$

also bei beliebiger Variation der Parameter und der cyklischen Momente:

$$\delta\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \delta\mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}^{\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma\, \delta \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt + \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}^{\sigma}\, \delta\mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt \quad .$$

Diese Gleichungen aber bilden $\mathfrak{r}$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $\mathfrak{r}$ Größen $\delta\mathfrak{q}_\sigma$, welche also stets eine und zwar im allgemeinen nur eine Lösung zulassen, insbesondere auch dann, wenn die links stehenden Variationen verschwinden.

Variationen der Art, welche wir mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ bezeichneten, sind also auch bei beliebiger Variation der Parameter stets möglich.

Lehrsatz. Bei gleicher, übrigens willkürlicher Variation der Parameter während einer gewissen Zeit fällt die Variation 593 des Zeitintegrals der Energie in einem adiabatischen System entgegengesetzt gleich aus, wenn man das eine Mal die cyklischen Momente des Systems unvariiert läßt, das andere Mal sie so variiert, daß Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn für eine beliebige Variation ist:

$$\delta \int \mathfrak{E}\, dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho} \int \frac{\partial_{\mathfrak{q}} \mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_{\varrho}} \delta \mathfrak{q}_{\varrho}\, dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\, \delta \mathfrak{q}_{\varrho} \quad ,$$

also insbesondere für eine Variation, bei welcher Anfangs- und Endwerte der $\mathfrak{p}_{\varrho}$ unvariiert bleiben.

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\, \delta_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{q}_{\varrho} \quad .$$

Subtrahiert man hiervon zweimal die Gleichung **591b**, so folgt:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt = - \delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Man vergleiche übrigens die verwandten Sätze **96** und **293**.

II. Verborgene cyklische Bewegung.

Erläuterungen und Definitionen.

594 **1.** Wir sagen, ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Koordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Teiles derselben.

595 **2.** Diejenigen Massen, deren Lagen bei vollständiger Angabe der beobachtbaren Koordinaten des Systems dennoch unbekannt bleibt, heißen verborgene Massen, ihre Bewegungen