Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Energie und Arbeit

urn:nbn:de:bsz:31-288857

578 **Anmerkung.** Die Lehrsätze 3a und 3b gestatten die physikalische Anwendung dann, wenn neben einer cyklischen Intensität auch die entsprechende cyklische Kraftkomponente der unmittelbaren Beobachtung zugänglich ist. Dies trifft zum Beispiel für die Elektrodynamik zu, und man versinnlicht sich die Bedeutung der Lehrsätze 3a und 3b am besten, indem man sie in die Redeweise dieses Zweiges der Physik übersetzt.

Energie und Arbeit.

579 **Lehrsatz 1.** Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die Koppelung seiner cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig das Doppelte der Arbeit, welche es durch die Koppelung seiner Parameter abgibt.

Bei der isocyklischen Bewegung ist $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ für alle ϱ gleich Null, also nach **514** und **557c** die Arbeit, welche die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden äußeren Kräfte in der Zeiteinheit leisten, gleich:

$$-\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{P}'_\varrho \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{r}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Die Arbeit aber, welche das System durch seine Kräfte nach den Parametern leistet, berechnet auf die Zeiteinheit, wird gefunden mit Hilfe von **555b** gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho\, P'_\varrho \dot{p}_\varrho = \frac{1}{2} \mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \dot{p}_\varrho \quad .$$

Die Summen in beiden Gleichungen sind bis auf die Bezeichnung identisch, und die Glieder der ersten Gleichung sind daher doppelt so groß als die der letzten.

580 **Folgerung.** Wenn ein isocyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein isocyklisches System durch die

Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn die Zunahme der Energie des Systems ist gleich dem Unterschiede der von den cyklischen Koordinaten aufgenommenen und der durch die Parameter abgegebenen Arbeit.

Anmerkung. Wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit. 581

Denn in einem adiabatischen System wird durch die cyklischen Koordinaten keine Arbeit aufgenommen (**562**).

Lehrsatz 2. Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte nach den Parametern bei der Verrückung negative Arbeit leisten. 582

Es mögen bei der Verrückung die p_ϱ die Änderungen δp_ϱ und die Intensitäten $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ die Änderungen $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ erleiden. Fänden nur die letzteren Änderungen statt, so würden sich die Kräfte P'_ϱ ändern um die Beträge (**555b**):

$$\delta P'_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und diese $\delta P'_\varrho$ sind es, welche der Lehrsatz als die von den $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ hervorgerufenen Kräfte bezeichnet. Die von ihnen geleistete Arbeit ist gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho \, \delta P'_\varrho \, \delta p_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \, \delta p_\varrho$$

$$= \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \, \delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau} \, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und die Behauptung geht dahin, daß diese Arbeit notwendig negativ sei. Nun ist aber für die adiabatische Bewegung:

$$\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \, \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = \text{constans} \quad ,$$

also:

$$\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \, \delta \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = - \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \, \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \delta \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad .$$

Bilden wir diese Gleichungen für alle τ, multiplizieren sie der Reihe nach mit $\mathfrak{m}\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ und addieren, so erhalten wir links den vorigen Ausdruck für die betrachtete Arbeit, rechts eine notwendig negative Größe (62), womit die Behauptung erwiesen ist.

583 **Folgerung.** Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte die erzeugende Bewegung aufzuhalten streben.

Dies ist in der Tat nur eine andere Form, den vorigen Lehrsatz auszusagen. Sie entspricht der Ausdrucksweise der Lenzschen Regel in der Elektrodynamik.

584 **Bemerkung.** Bei jeder unendlich kleinen Bewegung eines monocyklischen Systems verhält sich die durch die cyklische Koordinate aufgenommene Arbeit zur Energie des Systems, wie der doppelte Zuwachs, welchen das cyklische Moment des Systems erfährt, zu diesem Moment.

Denn die während der Zeit dt durch die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$ aufgenommene Arbeit $d\mathfrak{Q}$ ist gleich:

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, \dot{\mathfrak{p}}\, dt = \dot{\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{q} \quad ,$$

während die Energie $\mathfrak{E}$ geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2} \mathfrak{q} \dot{\mathfrak{p}} \quad .$$

Also ist:

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}} = 2 \frac{d\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung 1. Bei beliebiger Bewegung eines monocyklischen Systems ist der Ausdruck 585

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

das vollständige Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems, nämlich der Funktion

$$2 \log \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0} \quad ,$$

in welcher $\mathfrak{q}_0$ das cyklische Moment für eine willkürlich gewählte Anfangslage bedeutet. Diese Funktion wird auch die Entropie des monocyklischen Systems genannt.

Folgerung 2. Der Wert des für eine beliebige endliche Bewegung eines monocyklischen Systems gebildeten Integrales 586

$$\int \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

hängt nur ab von den Zuständen des Systems in der Anfangs- und Endlage der Bewegung, nicht aber von den zwischen beiden Lagen durchlaufenen Zuständen. Der Wert jenes Integrales wird Null für jede Bewegung, welche das System zu seinem Anfangszustand zurückführt.

Denn der Wert jenes Integrales ist gleich dem Unterschiede der Entropie im Anfangs- und im Endzustande der Bewegung.

Folgerung 3. Bei der adiabatischen Bewegung eines monocyklischen Systems bleibt die Entropie konstant. Denn für die adiabatische Bewegung ist $\mathfrak{P}$, also auch $d\mathfrak{Q}$ gleich Null. Die adiabatische Bewegung eines monocyklischen Systems wird deshalb auch eine isentropische genannt. 587

Zeitintegral der Energie.

Bemerkung 1. Ändern sich bei der adiabatischen Bewegung eines cyklischen Systems die cyklischen Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ 588