

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

Reziproke Eigentümlichkeiten

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

### Reziproke Eigentümlichkeiten.

- 568 **Lehrsatz 1a.** Wenn in einem adiabatischen System eine Vergrößerung des Parameters  $p_\mu$  die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter  $p_\lambda$  steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von  $p_\lambda$  die Kraft nach  $p_\mu$ . Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn in einem adiabatischen System können wir die  $p_e$  als die hinreichenden unabhängigen Bestimmungsstücke der  $P'_e$  betrachten, und es liefert uns daher die für adiabatische Systeme gültige Gleichung 564a:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

welches die Behauptung ist.

- 569 **Lehrsatz 1b.** Wenn in einem isocyklischen System eine Vergrößerung des Parameters  $p_\mu$  die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter  $p_\lambda$  steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von  $p_\lambda$  die Kraft nach  $p_\mu$ . Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn auch in einem isocyklischen System können wir die  $p_e$  als hinreichende unabhängige Bestimmungsstücke der  $P'_e$  ansehen, und es liefert uns daher die für isocyklische Systeme gültige Gleichung 564b:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

welches die Behauptung ist.

Es ist zu bemerken, daß diese Gleichung von der vorigen dem Sinne nach verschieden, wenn auch der Form nach identisch ist.

- 570 **Anmerkung.** Damit die vorstehenden beiden Lehrsätze eine physikalische Anwendung gestatten, genügt es, daß von

dem cyclischen System zwei Parameter und die Kräfte nach diesen der unmittelbaren Beobachtung zugänglich seien.

**Lehrsatz 2a.** Wenn in einem cyclischen System eine 571 Vermehrung des cyclischen Momentes  $q_\mu$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555a) \quad , \quad \dot{p}_\mu = \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial q_\mu} \quad (290) \quad ,$$

also ist

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial \dot{p}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad , \quad a)$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz die richtige Interpretation ist.

**Folgerung.** Wenn in einem monocyclischen System eine 572 Vermehrung der cyclischen Intensität  $\dot{p}$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der cyclischen Intensität  $\dot{p}$  hervor, und umgekehrt.

Denn in einem monocyclischen System geht Vermehrung der cyclischen Intensität und Vermehrung des cyclischen Momentes bei festgehaltenen Parametern stets Hand in Hand. Für ein monocyclisches System ist nämlich

$$q = m a \dot{p} \quad ,$$

worin  $a$  eine notwendig positive (62) Funktion der Parameter des Systems ist.

**Lehrsatz 2b.** Wenn in einem cyclischen System eine 573 Vermehrung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  bei festgehaltenen

Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Vermehrung des cyklischen Moments  $q_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555a) \quad , \quad q_\mu = \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial \dot{p}_\mu} \quad (289) \quad ,$$

also ist:

$$a) \quad \frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{p}_\mu} = \frac{\partial q_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den Ausdruck in Worten gibt.

- 574 **Folgerung.** Wenn in einem monocyclischen System eine Vermehrung des cyklischen Momentes  $q$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Vermehrung des cyklischen Momentes  $q$  hervor, und umgekehrt.

Der Grund ist derselbe wie in 572.

- 575 **Anmerkung.** Die vorstehenden Lehrsätze 2a und 2b gestatten eine physikalische Anwendung dann, wenn es möglich ist, neben einer cyklischen Intensität auch das entsprechende cyklische Moment unmittelbar, d. h. ohne Kenntnis der Koeffizienten  $a_{\sigma\sigma}$ , zu bestimmen. Dies kann eintreten. In der Elektrostatik entsprechen z. B. die Potentialdifferenzen der Leiter den cyklischen Intensitäten, die Elektrizitätsmengen der Leiter den cyklischen Momenten, und beide Größen können unabhängig voneinander unmittelbar bestimmt werden.

Die Folgerungen verlangen nur die unmittelbare Bestimmbarkeit entweder der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes.

- 576 **Lehrsatz 3a.** Wenn in einem cyklischen System eine auf die cyklische Koordinate  $p_\mu$  ausgeübte Kraft ein zeitliches Anwachsen der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so

ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn denken wir uns in der linken Seite der Gleichung 571a die Änderungen  $\partial P'_\lambda$  und  $\partial q_\mu$  entstanden in der Zeit  $dt$ , dividieren wir den Differentialquotienten im Zähler und Nenner durch diese Zeit  $dt$ , und beachten die Gleichung 558, indem wir die Änderung  $\partial q_\mu$  als Wirkung der Kraft  $\mathfrak{P}_\mu$  ansehen, so folgt:

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = - \frac{\partial \dot{p}_\mu}{\partial p_\lambda} ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den vervollständigten Ausdruck in Worten gibt.

**Lehrsatz 3b.** Wenn in einem cyclischen System eine Vermehrung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die isocyclische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der Kraft des Systems nach der cyclischen Koordinate  $p_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denken wir uns in der rechten Seite der Gleichung 573a die Änderungen  $\partial q_\mu$  und  $\partial p_\lambda$  entstanden in der Zeit  $dt$ , so können wir setzen:

$$\partial q_\mu = \frac{d}{dt} q_\mu \cdot dt = \dot{q}_\mu dt = - \mathfrak{P}'_\mu dt \quad (557a) ,$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt} p_\lambda \cdot dt = \dot{p}_\lambda dt ;$$

es wird also jene Gleichung:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{p}_\mu} = - \frac{\mathfrak{P}'_\mu}{\dot{p}_\lambda} ,$$

welche Aussage der Lehrsatz in Worten wiedergibt.

- 578 **Anmerkung.** Die Lehrsätze 3a und 3b gestatten die physikalische Anwendung dann, wenn neben einer cyklischen Intensität auch die entsprechende cyklische Kraftkomponente der unmittelbaren Beobachtung zugänglich ist. Dies trifft zum Beispiel für die Elektrodynamik zu, und man versinnlicht sich die Bedeutung der Lehrsätze 3a und 3b am besten, indem man sie in die Redeweise dieses Zweiges der Physik übersetzt.

### Energie und Arbeit.

- 579 **Lehrsatz 1.** Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die Koppelung seiner cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig das Doppelte der Arbeit, welche es durch die Koppelung seiner Parameter abgibt.

Bei der isocyklischen Bewegung ist  $\ddot{p}_e$  für alle  $e$  gleich Null, also nach 514 und 557c die Arbeit, welche die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden äußeren Kräfte in der Zeiteinheit leisten, gleich:

$$-\sum_1^r e \mathfrak{K}'_e \dot{p}_e = m \sum_1^r e \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{e\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{p}_e .$$

Die Arbeit aber, welche das System durch seine Kräfte nach den Parametern leistet, berechnet auf die Zeiteinheit, wird gefunden mit Hilfe von 555b gleich:

$$\sum_1^r e P'_e \dot{p}_e = \frac{1}{2} m \sum_1^r e \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{e\sigma}}{\partial p_e} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{p}_e .$$

Die Summen in beiden Gleichungen sind bis auf die Bezeichnung identisch, und die Glieder der ersten Gleichung sind daher doppelt so groß als die der letzten.

- 580 **Folgerung.** Wenn ein isocyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein isocyklisches System durch die