

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

Kräfte und Kräftefunktion

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

tion der  $p_e$  und der  $q_e$ , wie es die zweite Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit  $\partial_q \mathcal{E}$  bezeichnet werden (vergl. 288).

554 **Folgerung 2.** Für alle Werte des  $q$  gelten die Gleichungen:

$$\text{a) } (289) \quad \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial \dot{p}_e} = q_e = 0 \quad ,$$

$$\text{b) } (290) \quad \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial q_e} = \dot{p}_e = 0 \quad ,$$

$$\text{c) } \quad \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial p_e} = 0 \quad ,$$

$$\text{d) } \quad \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial p_e} = 0 \quad ,$$

Diese Gleichungen enthalten die charakteristischen Merkmale der cyklischen Systeme, und auf ihnen beruhen die besonderen Eigentümlichkeiten derselben.

Die Gleichung **b)** wiederholt die Bemerkung (550), daß ein Widerspruch besteht zwischen der Annahme, daß die Form der Energie genau die angenommene sei und daß gleichwohl die  $p_e$  mit der Zeit veränderliche Größen seien. Wir haben die Gleichung gemäß 551 dahin zu deuten, daß, wenn  $\mathcal{E}$  sehr angenähert die gewählte Gestalt hat, die  $p_e$  als langsam sich verändernde Größen betrachtet werden müssen.

### Kräfte und Kräftefunktion.

555 **Aufgabe 1.** Die Kraft  $P'_e$  zu bestimmen, welche das cyklische System nach seinem Parameter  $p_e$  ausübt.

Zufolge der Gleichungen 493c, d und 554a erhalten wir:

$$\text{a) } \quad P'_e = \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial p_e} = - \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial p_e}$$

oder in entwickelter Form:

$$P'_q = \frac{1}{2} m \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_q} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad \text{b)}$$

$$= -\frac{1}{2m} \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial b_{\sigma\tau}}{\partial p_q} q_\sigma q_\tau \quad \text{c)}$$

**Folgerung.** Die Kräfte eines cyklischen Systems nach 556 seinen Parametern sind unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten dieser Parameter.

Vorausgesetzt ist jedoch immer, daß diese Änderungsgeschwindigkeiten nicht dasjenige Maß übersteigen, welches erlaubt, das System als ein cyklisches zu behandeln. So sind in der Elektrodynamik die Anziehungen zwischen Magneten zwar unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Bewegung, aber doch nur so lange, als diese Geschwindigkeit weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt.

**Aufgabe 2.** Die Kraft  $\mathfrak{P}'_q$  zu bestimmen, welche das 557 cyklische System nach seiner cyklischen Koordinate  $p_q$  ausübt. Zufolge der Gleichungen 493c und 554c erhält man:

$$\mathfrak{P}'_q = -\dot{q}_q \quad \text{a)}$$

Entwickelt, hat man, da (270)

$$q_q = m \sum_1^r a_{q\sigma} \dot{p}_\sigma \quad \text{b)}$$

$$\mathfrak{P}'_q = -m \sum_1^r a_{q\sigma} \ddot{p}_\sigma - m \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{q\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad \text{c)}$$

**Folgerung.** Wirkt auf ein cyklisches System eine äußere 558 Kraft, deren Komponenten nach den  $p_q$  die  $\mathfrak{P}'_q$  sind, so ändern sich die cyklischen Momente nach den Gleichungen:

$$\dot{q}_q = \mathfrak{P}'_q \quad \text{c)}$$

**Lehrsatz.** Wenn auf die cyklischen Koordinaten eines 559



cyklischen Systems keine Kräfte wirken, so sind die sämtlichen cyklischen Momente des Systems konstant in der Zeit.

Denn sind die  $\mathfrak{F}_q$  gleich Null, so ergeben die vorigen Gleichungen durch Integration

$$q_q = \text{constans} .$$

- 560 **Definition.** Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Momente konstant bleiben, heißt eine adiabatische Bewegung. Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Intensitäten konstant bleiben, heißt eine isocyklische Bewegung.

Adiabatisch, beziehlich isocyklisch wird das cyklische System selbst genannt, wenn es gezwungen ist, keine anderen Bewegungen auszuführen, als nur adiabatische, beziehlich isocyklische.

- 561 **Anmerkung 1.** Die analytische Bedingung der adiabatischen Bewegung ist diese, daß für alle  $q$ :

$$\dot{q}_q = 0 , \quad q_q = \text{constans}$$

sei. Die analytische Bedingung der isocyklischen Bewegung ist diese, daß für alle  $q$ :

$$\ddot{p}_q = 0 , \quad \dot{p}_q = \text{constans}$$

sei.

- 562 **Anmerkung 2.** Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine adiabatische, sobald auf die cyklischen Koordinaten dauernd keine Kräfte wirken. Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine isocyklische, wenn es nach den cyklischen Koordinaten mit anderen Systemen gekoppelt ist, welche konstante Änderungsgeschwindigkeit der gekoppelten Koordinaten besitzen. Damit die Bewegung eine isocyklische sei, müssen also geeignete Kräfte auf die cyklischen Koordinaten wirken.

- 563 **Definition.** Lassen sich die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern darstellen als die partiellen

Differentialquotienten einer Funktion der Parameter und konstanter Größen, nach den Parametern, so heißt diese Funktion die Kräftefunktion des cyklischen Systems.

**Lehrsatz.** Sowohl für die adiabatische, als auch für die isocyklische Bewegung besteht eine Kräftefunktion. 564

Denn für die adiabatische Bewegung folgt aus 555 c:

$$P'_q = -\frac{\partial}{\partial p_q} \sum_1^r \sum_1^r \nu_{\sigma\tau} \frac{q_\sigma q_\tau}{2m}, \quad \text{a)}$$

und hierin sind die Größen  $q_\sigma q_\tau / m$  Konstanten und die  $\nu_{\sigma\tau}$  Funktionen lediglich der Parameter.

Entsprechend folgt für die isocyklische Bewegung aus 555 b:

$$P'_q = \frac{\partial}{\partial p_q} \sum_1^r \sum_1^r \alpha_{\sigma\tau} \frac{m}{2} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau, \quad \text{b)}$$

und hierin sind wiederum die Größen  $m \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau$  Konstanten und die  $\alpha_{\sigma\tau}$  Funktionen lediglich der Parameter.

**Anmerkung.** Die Kräftefunktion für die adiabatische und für die isocyklische Bewegung unterscheiden wir auch wohl als adiabatische bez. isocyklische Kräftefunktion. Es gibt weitere Bewegungsformen des Systems, für welche Kräftefunktionen bestehen, aber nicht für jede beliebige Bewegung besteht eine solche. 565

**Zusatz 1.** Die Kräftefunktion eines adiabatischen Systems ist gleich der Abnahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich einer willkürlichen, d. h. durch die Definition nicht bestimmten Konstanten, vermindert um die Energie des Systems. 566

**Zusatz 2.** Die Kräftefunktion eines isocyklischen Systems ist gleich der Zunahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich der Energie des Systems, vermindert um eine willkürliche Konstante. 567