

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

Die zweite Methode bestimmt die Kraft aus den Massen 543 und der Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt. In der Physik wird diese Methode als die dynamische Messung der Kraft bezeichnet. Sie wurde z. B. von NEWTON angewandt, als er die auf die Planeten wirkende Kraft aus deren Bewegung ableitete.

Die dritte Methode bestimmt die Kraft, indem sie sie mit 544 bekannten Kräften ins Gleichgewicht bringt. Diese Methode wird die statische genannt. Auf ihr beruhen z. B. alle Kräfte-messungen mit der Wage.

Angewandt zur Bestimmung einer und derselben Kraft 545 unter Beobachtung der von uns abgeleiteten Beziehungen müssen aber diese drei verschiedenen Methoden unter allen Umständen zu dem gleichen Resultate führen, wenn anders das Grundgesetz, auf welches sich unsere Überlegungen stützen, wirklich alle mögliche mechanische Erfahrung richtig zusammenfaßt.

## Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen.

### I. Cyklische Bewegung.

**Definition 1.** Cyklische Koordinate eines Systems heißt eine 546 freie Koordinate des Systems dann, wenn die Länge einer unendlich kleinen Verrückung des Systems nicht von dem Werte der Koordinate, sondern nur von dem ihrer Änderung abhängt.

**Anmerkung 1.** Es gibt cyklische Koordinaten. Denn 547 es genügt z. B. eine rechtwinklige Koordinate des Systems, wenn sie frei ist, der Voraussetzung. Cyklische Koordinaten können stets eingeführt werden, wenn unendlich kleine Verrückungen des Systems möglich sind, welche nicht eine Änderung der Massenverteilung im Raume zur Folge haben, sondern nur eine cyklische Vertauschung der Massen unter sich.



Daher der Name. Es können aber auch unter anderen Verhältnissen cyklische Koordinaten auftreten, wie es das Beispiel der rechtwinkligen Koordinaten zeigt.

548 **Anmerkung 2.** Die Energie eines Systems hängt nicht ab von dem Werte seiner cyklischen Koordinaten, sondern nur von deren Änderungsgeschwindigkeiten mit der Zeit.

549 **Definition 2.** Cyklisches System heißt ein materielles System, dessen Energie mit hinreichender Annäherung als eine homogene quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeiten seiner cyklischen Koordinaten erscheint.

Ein cyklisches System heißt ein monocyklisches, dicyklisches, usw., je nachdem es eine, zwei, usw. cyklische Koordinaten besitzt.

In einem cyklischen System werden die nicht cyklischen Koordinaten auch die Parameter des Systems genannt; die Änderungsgeschwindigkeiten der cyklischen Koordinaten nennen wir auch die cyklischen Intensitäten.

550 **Anmerkung 1.** Die Bedingung, deren angenäherte Erfüllung für cyklische Systeme erfordert wurde, kann mit Strenge überhaupt nicht erfüllt sein, abgesehen von dem Falle, daß das System nur cyklische Koordinaten besitzt.

Denn ist eine Größe Koordinate eines Systems, so bedingt ihre Änderung eine Verrückung mindestens eines materiellen Punktes des Systems; die Energie dieses Punktes ist also quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeit jener Koordinate, und für die Energie des Systems gilt demnach das gleiche. Die Energie eines jeden Systems enthält daher in Strenge notwendig die Änderungsgeschwindigkeiten aller Größen, welche überhaupt Koordinaten des Systems sind, also auch die Energie eines cyklischen Systems die Änderungsgeschwindigkeiten seiner Parameter.

551 **Anmerkung 2.** Jene Bedingung für das Auftreten eines cyklischen Systems kann aber mit jedem beliebigen Grade der Annäherung erfüllt sein, sobald das System überhaupt cyklische Koordinaten besitzt.

Sie ist nämlich erfüllt in dem Falle, daß die Teile der Energie, welche die Änderungsgeschwindigkeiten der Para-



meter enthalten, verschwinden gegen die Teile, welche von den cyclischen Intensitäten abhängen, und dies kann stets dadurch erreicht werden, daß die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter hinreichend klein, oder daß die cyclischen Intensitäten hinreichend groß angenommen werden. Wie groß diese oder wie klein jene angenommen werden müssen, damit ein bestimmter Grad der Annäherung erzielt werde, hängt ab von den besonderen Werten der Koeffizienten im Ausdruck der Energie.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die Bedingung der cyclischen Systeme mit so großer Annäherung erfüllt sei, daß wir so reden können, als sei sie genau erfüllt.

**Bezeichnung.** Wir bezeichnen die cyclischen Koordinaten des Systems mit  $p_e$ , mit  $r$  ihre Zahl, die Momente des Systems nach den  $p_e$  mit  $q_e$ . Die  $r$  nicht cyclischen Koordinaten des Systems mögen mit  $p_e$ , die Momente nach ihnen mit  $q_e$  bezeichnet werden. Die Masse des cyclischen Systems sei  $m$ .

Die äußeren Kräfte, welche auf das System wirken, mögen nach den  $p_e$  die Komponenten  $P_e$ , nach den  $p_e$  die Komponenten  $\mathfrak{P}_e$  haben. Die Kräfte, welche das System selbst ausübt, haben dann nach den  $p_e$ , beziehlich den  $p_e$  Komponenten, welche nach 467 mit  $P'_e$ , beziehlich  $\mathfrak{P}'_e$  zu bezeichnen sind.

**Folgerung 1.** Die Energie  $\mathfrak{E}$  eines cyclischen Systems kann geschrieben werden in den Formen (286):

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} &= \frac{1}{2} m \sum_1^r \sum_1^r a_{e\sigma} \dot{p}_e \dot{p}_\sigma \\ &= \frac{1}{2m} \sum_1^r \sum_1^r b_{e\sigma} q_e q_\sigma, \end{aligned}$$

in welchen die  $a_{e\sigma}$  und  $b_{e\sigma}$  Funktionen allein der  $p_e$ , nicht aber der  $p_e$  sind (548), übrigens aber dieselben Eigenschaften und denselben Zusammenhang haben, wie die  $a_{e\sigma}$  und  $b_{e\sigma}$  (59 ff.).

Betrachten wir  $\mathfrak{E}$  als Funktion der  $p_e$  und der  $\dot{p}_e$ , wie es die erste Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit  $\partial_p \mathfrak{E}$  bezeichnet werden; betrachten wir aber  $\mathfrak{E}$  als Funk-



tion der  $p_e$  und der  $q_e$ , wie es die zweite Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit  $\partial_q \mathcal{E}$  bezeichnet werden (vergl. 288).

554 **Folgerung 2.** Für alle Werte des  $q$  gelten die Gleichungen:

$$\text{a) } (289) \quad \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial \dot{p}_e} = q_e = 0 \quad ,$$

$$\text{b) } (290) \quad \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial q_e} = \dot{p}_e = 0 \quad ,$$

$$\text{c) } \quad \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial p_e} = 0 \quad ,$$

$$\text{d) } \quad \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial p_e} = 0 \quad ,$$

Diese Gleichungen enthalten die charakteristischen Merkmale der cyklischen Systeme, und auf ihnen beruhen die besonderen Eigentümlichkeiten derselben.

Die Gleichung **b)** wiederholt die Bemerkung (550), daß ein Widerspruch besteht zwischen der Annahme, daß die Form der Energie genau die angenommene sei und daß gleichwohl die  $p_e$  mit der Zeit veränderliche Größen seien. Wir haben die Gleichung gemäß 551 dahin zu deuten, daß, wenn  $\mathcal{E}$  sehr angenähert die gewählte Gestalt hat, die  $p_e$  als langsam sich verändernde Größen betrachtet werden müssen.

### Kräfte und Kräftefunktion.

555 **Aufgabe 1.** Die Kraft  $P'_e$  zu bestimmen, welche das cyklische System nach seinem Parameter  $p_e$  ausübt.

Zufolge der Gleichungen 493c, d und 554a erhalten wir:

$$\text{a) } \quad P'_e = \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial p_e} = - \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial p_e}$$

oder in entwickelter Form:

$$P'_q = \frac{1}{2} m \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_q} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad \text{b)}$$

$$= -\frac{1}{2m} \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial b_{\sigma\tau}}{\partial p_q} q_\sigma q_\tau \quad \text{c)}$$

**Folgerung.** Die Kräfte eines cyklischen Systems nach 556 seinen Parametern sind unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten dieser Parameter.

Vorausgesetzt ist jedoch immer, daß diese Änderungsgeschwindigkeiten nicht dasjenige Maß übersteigen, welches erlaubt, das System als ein cyklisches zu behandeln. So sind in der Elektrodynamik die Anziehungen zwischen Magneten zwar unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Bewegung, aber doch nur so lange, als diese Geschwindigkeit weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt.

**Aufgabe 2.** Die Kraft  $\mathfrak{P}'_q$  zu bestimmen, welche das 557 cyklische System nach seiner cyklischen Koordinate  $p_q$  ausübt. Zufolge der Gleichungen 493c und 554c erhält man:

$$\mathfrak{P}'_q = -\dot{q}_q \quad \text{a)}$$

Entwickelt, hat man, da (270)

$$q_q = m \sum_1^r a_{q\sigma} \dot{p}_\sigma \quad \text{b)}$$

$$\mathfrak{P}'_q = -m \sum_1^r a_{q\sigma} \ddot{p}_\sigma - m \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{q\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad \text{c)}$$

**Folgerung.** Wirkt auf ein cyklisches System eine äußere 558 Kraft, deren Komponenten nach den  $p_q$  die  $\mathfrak{P}'_q$  sind, so ändern sich die cyklischen Momente nach den Gleichungen:

$$\dot{q}_q = \mathfrak{P}'_q \quad \text{c)}$$

**Lehrsatz.** Wenn auf die cyklischen Koordinaten eines 559



cyklischen Systems keine Kräfte wirken, so sind die sämtlichen cyklischen Momente des Systems konstant in der Zeit.

Denn sind die  $\mathfrak{F}_q$  gleich Null, so ergeben die vorigen Gleichungen durch Integration

$$q_q = \text{constans} .$$

- 560 **Definition.** Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Momente konstant bleiben, heißt eine adiabatische Bewegung. Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Intensitäten konstant bleiben, heißt eine isocyklische Bewegung.

Adiabatisch, beziehlich isocyklisch wird das cyklische System selbst genannt, wenn es gezwungen ist, keine anderen Bewegungen auszuführen, als nur adiabatische, beziehlich isocyklische.

- 561 **Anmerkung 1.** Die analytische Bedingung der adiabatischen Bewegung ist diese, daß für alle  $q$ :

$$\dot{q}_q = 0 , \quad q_q = \text{constans}$$

sei. Die analytische Bedingung der isocyklischen Bewegung ist diese, daß für alle  $q$ :

$$\ddot{p}_q = 0 , \quad \dot{p}_q = \text{constans}$$

sei.

- 562 **Anmerkung 2.** Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine adiabatische, sobald auf die cyklischen Koordinaten dauernd keine Kräfte wirken. Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine isocyklische, wenn es nach den cyklischen Koordinaten mit anderen Systemen gekoppelt ist, welche konstante Änderungsgeschwindigkeit der gekoppelten Koordinaten besitzen. Damit die Bewegung eine isocyklische sei, müssen also geeignete Kräfte auf die cyklischen Koordinaten wirken.

- 563 **Definition.** Lassen sich die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern darstellen als die partiellen

Differentialquotienten einer Funktion der Parameter und konstanter Größen, nach den Parametern, so heißt diese Funktion die Kräftefunktion des cyklischen Systems.

**Lehrsatz.** Sowohl für die adiabatische, als auch für die isocyklische Bewegung besteht eine Kräftefunktion. 564

Denn für die adiabatische Bewegung folgt aus 555 c:

$$P'_q = -\frac{\partial}{\partial p_q} \sum_1^r \sum_1^r \nu_{\sigma\tau} \frac{q_\sigma q_\tau}{2m}, \quad \text{a)}$$

und hierin sind die Größen  $q_\sigma q_\tau / m$  Konstanten und die  $\nu_{\sigma\tau}$  Funktionen lediglich der Parameter.

Entsprechend folgt für die isocyklische Bewegung aus 555 b:

$$P'_q = \frac{\partial}{\partial p_q} \sum_1^r \sum_1^r \alpha_{\sigma\tau} \frac{m}{2} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau, \quad \text{b)}$$

und hierin sind wiederum die Größen  $m \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau$  Konstanten und die  $\alpha_{\sigma\tau}$  Funktionen lediglich der Parameter.

**Anmerkung.** Die Kräftefunktion für die adiabatische und für die isocyklische Bewegung unterscheiden wir auch wohl als adiabatische bez. isocyklische Kräftefunktion. Es gibt weitere Bewegungsformen des Systems, für welche Kräftefunktionen bestehen, aber nicht für jede beliebige Bewegung besteht eine solche. 565

**Zusatz 1.** Die Kräftefunktion eines adiabatischen Systems ist gleich der Abnahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich einer willkürlichen, d. h. durch die Definition nicht bestimmten Konstanten, vermindert um die Energie des Systems. 566

**Zusatz 2.** Die Kräftefunktion eines isocyklischen Systems ist gleich der Zunahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich der Energie des Systems, vermindert um eine willkürliche Konstante. 567



### Reziproke Eigentümlichkeiten.

- 568 **Lehrsatz 1a.** Wenn in einem adiabatischen System eine Vergrößerung des Parameters  $p_\mu$  die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter  $p_\lambda$  steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von  $p_\lambda$  die Kraft nach  $p_\mu$ . Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn in einem adiabatischen System können wir die  $p_e$  als die hinreichenden unabhängigen Bestimmungsstücke der  $P'_e$  betrachten, und es liefert uns daher die für adiabatische Systeme gültige Gleichung 564a:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

welches die Behauptung ist.

- 569 **Lehrsatz 1b.** Wenn in einem isocyklischen System eine Vergrößerung des Parameters  $p_\mu$  die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter  $p_\lambda$  steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von  $p_\lambda$  die Kraft nach  $p_\mu$ . Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn auch in einem isocyklischen System können wir die  $p_e$  als hinreichende unabhängige Bestimmungsstücke der  $P'_e$  ansehen, und es liefert uns daher die für isocyklische Systeme gültige Gleichung 564b:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda},$$

welches die Behauptung ist.

Es ist zu bemerken, daß diese Gleichung von der vorigen dem Sinne nach verschieden, wenn auch der Form nach identisch ist.

- 570 **Anmerkung.** Damit die vorstehenden beiden Lehrsätze eine physikalische Anwendung gestatten, genügt es, daß von

dem cyclischen System zwei Parameter und die Kräfte nach diesen der unmittelbaren Beobachtung zugänglich seien.

**Lehrsatz 2a.** Wenn in einem cyclischen System eine 571 Vermehrung des cyclischen Momentes  $q_\mu$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555a) \quad , \quad \dot{p}_\mu = \frac{\partial_q \mathcal{E}}{\partial q_\mu} \quad (290) \quad ,$$

also ist

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial q_\mu} = -\frac{\partial \dot{p}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad , \quad a)$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz die richtige Interpretation ist.

**Folgerung.** Wenn in einem monocyclischen System eine 572 Vermehrung der cyclischen Intensität  $\dot{p}$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der cyclischen Intensität  $\dot{p}$  hervor, und umgekehrt.

Denn in einem monocyclischen System geht Vermehrung der cyclischen Intensität und Vermehrung des cyclischen Momentes bei festgehaltenen Parametern stets Hand in Hand. Für ein monocyclisches System ist nämlich

$$q = m a \dot{p} \quad ,$$

worin  $a$  eine notwendig positive (62) Funktion der Parameter des Systems ist.

**Lehrsatz 2b.** Wenn in einem cyclischen System eine 573 Vermehrung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  bei festgehaltenen



Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Vermehrung des cyklischen Moments  $q_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555a) \quad , \quad q_\mu = \frac{\partial_v \mathcal{E}}{\partial \dot{p}_\mu} \quad (289) \quad ,$$

also ist:

$$a) \quad \frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{p}_\mu} = \frac{\partial q_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den Ausdruck in Worten gibt.

- 574 **Folgerung.** Wenn in einem monocyclischen System eine Vermehrung des cyklischen Momentes  $q$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Vermehrung des cyklischen Momentes  $q$  hervor, und umgekehrt.

Der Grund ist derselbe wie in 572.

- 575 **Anmerkung.** Die vorstehenden Lehrsätze 2a und 2b gestatten eine physikalische Anwendung dann, wenn es möglich ist, neben einer cyklischen Intensität auch das entsprechende cyklische Moment unmittelbar, d. h. ohne Kenntnis der Koeffizienten  $a_{\sigma\sigma}$ , zu bestimmen. Dies kann eintreten. In der Elektrostatik entsprechen z. B. die Potentialdifferenzen der Leiter den cyklischen Intensitäten, die Elektrizitätsmengen der Leiter den cyklischen Momenten, und beide Größen können unabhängig voneinander unmittelbar bestimmt werden.

Die Folgerungen verlangen nur die unmittelbare Bestimmbarkeit entweder der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes.

- 576 **Lehrsatz 3a.** Wenn in einem cyklischen System eine auf die cyklische Koordinate  $p_\mu$  ausgeübte Kraft ein zeitliches Anwachsen der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so

ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn denken wir uns in der linken Seite der Gleichung 571a die Änderungen  $\partial P'_\lambda$  und  $\partial q_\mu$  entstanden in der Zeit  $dt$ , dividieren wir den Differentialquotienten im Zähler und Nenner durch diese Zeit  $dt$ , und beachten die Gleichung 558, indem wir die Änderung  $\partial q_\mu$  als Wirkung der Kraft  $\mathfrak{P}_\mu$  ansehen, so folgt:

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = - \frac{\partial \dot{p}_\mu}{\partial p_\lambda} ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den vervollständigten Ausdruck in Worten gibt.

**Lehrsatz 3b.** Wenn in einem cyclischen System eine Vermehrung der cyclischen Intensität  $\dot{p}_\mu$  bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter  $p_\lambda$  zur Folge hat, so ruft die isocyclische Vergrößerung des Parameters  $p_\lambda$  eine Verminderung der Kraft des Systems nach der cyclischen Koordinate  $p_\mu$  hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denken wir uns in der rechten Seite der Gleichung 573a die Änderungen  $\partial q_\mu$  und  $\partial p_\lambda$  entstanden in der Zeit  $dt$ , so können wir setzen:

$$\partial q_\mu = \frac{d}{dt} q_\mu \cdot dt = \dot{q}_\mu dt = - \mathfrak{P}'_\mu dt \quad (557a) ,$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt} p_\lambda \cdot dt = \dot{p}_\lambda dt ;$$

es wird also jene Gleichung:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{p}_\mu} = - \frac{\mathfrak{P}'_\mu}{\dot{p}_\lambda} ,$$

welche Aussage der Lehrsatz in Worten wiedergibt.



- 578 **Anmerkung.** Die Lehrsätze 3a und 3b gestatten die physikalische Anwendung dann, wenn neben einer cyklischen Intensität auch die entsprechende cyklische Kraftkomponente der unmittelbaren Beobachtung zugänglich ist. Dies trifft zum Beispiel für die Elektrodynamik zu, und man versinnlicht sich die Bedeutung der Lehrsätze 3a und 3b am besten, indem man sie in die Redeweise dieses Zweiges der Physik übersetzt.

### Energie und Arbeit.

- 579 **Lehrsatz 1.** Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die Koppelung seiner cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig das Doppelte der Arbeit, welche es durch die Koppelung seiner Parameter abgibt.

Bei der isocyklischen Bewegung ist  $\ddot{p}_e$  für alle  $e$  gleich Null, also nach 514 und 557c die Arbeit, welche die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden äußeren Kräfte in der Zeiteinheit leisten, gleich:

$$-\sum_1^r e \mathfrak{K}'_e \dot{p}_e = m \sum_1^r e \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{e\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{p}_e .$$

Die Arbeit aber, welche das System durch seine Kräfte nach den Parametern leistet, berechnet auf die Zeiteinheit, wird gefunden mit Hilfe von 555b gleich:

$$\sum_1^r e P'_e \dot{p}_e = \frac{1}{2} m \sum_1^r e \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{e\sigma}}{\partial p_e} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{p}_e .$$

Die Summen in beiden Gleichungen sind bis auf die Bezeichnung identisch, und die Glieder der ersten Gleichung sind daher doppelt so groß als die der letzten.

- 580 **Folgerung.** Wenn ein isocyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein isocyklisches System durch die

Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn die Zunahme der Energie des Systems ist gleich dem Unterschiede der von den cyklischen Koordinaten aufgenommenen und der durch die Parameter abgegebenen Arbeit.

**Anmerkung.** Wenn ein adiabatisches System durch die 581 Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn in einem adiabatischen System wird durch die cyklischen Koordinaten keine Arbeit aufgenommen (562).

**Lehrsatz 2.** Bei der adiabatischen Verrückung eines 582 cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte nach den Parametern bei der Verrückung negative Arbeit leisten.

Es mögen bei der Verrückung die  $p_e$  die Änderungen  $\delta p_e$  und die Intensitäten  $\dot{p}_e$  die Änderungen  $\delta \dot{p}_e$  erleiden. Fänden nur die letzteren Änderungen statt, so würden sich die Kräfte  $P'_e$  ändern um die Beträge (555b):

$$\delta P'_e = m \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_e} \dot{p}_\sigma \delta \dot{p}_\tau,$$

und diese  $\delta P'_e$  sind es, welche der Lehrsatz als die von den  $\delta \dot{p}_\tau$  hervorgerufenen Kräfte bezeichnet. Die von ihnen geleistete Arbeit ist gleich:

$$\begin{aligned} \sum_1^r \delta P'_e \delta p_e &= m \sum_1^r \sum_1^r \sum_1^r \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_e} \dot{p}_\sigma \delta \dot{p}_\tau \delta p_e \\ &= m \sum_1^r \sum_1^r \delta a_{\sigma\tau} \dot{p}_\sigma \delta \dot{p}_\tau, \end{aligned}$$



und die Behauptung geht dahin, daß diese Arbeit notwendig negativ sei. Nun ist aber für die adiabatische Bewegung:

$$q_{\tau} = m \sum_1^{\tau} a_{\sigma\tau} \dot{p}_{\sigma} = \text{constans} \quad ,$$

also:

$$\sum_1^{\tau} \delta a_{\sigma\tau} \dot{p}_{\sigma} = - \sum_1^{\tau} a_{\sigma\tau} \delta \dot{p}_{\sigma} \quad .$$

Bilden wir diese Gleichungen für alle  $\tau$ , multiplizieren sie der Reihe nach mit  $m \delta \dot{p}_{\tau}$  und addieren, so erhalten wir links den vorigen Ausdruck für die betrachtete Arbeit, rechts eine notwendig negative Größe (62), womit die Behauptung erwiesen ist.

583 **Folgerung.** Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte die erzeugende Bewegung aufzuhalten streben.

Dies ist in der Tat nur eine andere Form, den vorigen Lehrsatz auszusagen. Sie entspricht der Ausdrucksweise der LENZschen Regel in der Elektrodynamik.

584 **Bemerkung.** Bei jeder unendlich kleinen Bewegung eines monocyclischen Systems verhält sich die durch die cyklische Koordinate aufgenommene Arbeit zur Energie des Systems, wie der doppelte Zuwachs, welchen das cyklische Moment des Systems erfährt, zu diesem Moment.

Denn die während der Zeit  $dt$  durch die cyklische Koordinate  $p$  aufgenommene Arbeit  $d\Omega$  ist gleich:

$$d\Omega = \mathfrak{P} dp = \dot{q} dp = \dot{q} \dot{p} dt = \dot{p} dq \quad ,$$

während die Energie  $\mathfrak{E}$  geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2} q \dot{p} \quad .$$

Also ist:

$$\frac{d\Omega}{\mathfrak{E}} = 2 \frac{dq}{q} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

**Folgerung 1.** Bei beliebiger Bewegung eines mono- 585  
cyklischen Systems ist der Ausdruck

$$\frac{d\Omega}{\mathcal{E}}$$

das vollständige Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems, nämlich der Funktion

$$2 \log \frac{q}{q_0} ,$$

in welcher  $q_0$  das cyklische Moment für eine willkürlich gewählte Anfangslage bedeutet. Diese Funktion wird auch die Entropie des monocyclischen Systems genannt.

**Folgerung 2.** Der Wert des für eine beliebige endliche 586  
Bewegung eines monocyclischen Systems gebildeten Integrales

$$\int \frac{d\Omega}{\mathcal{E}}$$

hängt nur ab von den Zuständen des Systems in der Anfangs- und Endlage der Bewegung, nicht aber von den zwischen beiden Lagen durchlaufenen Zuständen. Der Wert jenes Integrales wird Null für jede Bewegung, welche das System zu seinem Anfangszustand zurückführt.

Denn der Wert jenes Integrales ist gleich dem Unterschiede der Entropie im Anfangs- und im Endzustande der Bewegung.

**Folgerung 3.** Bei der adiabatischen Bewegung eines 587  
monocyclischen Systems bleibt die Entropie konstant. Denn für die adiabatische Bewegung ist  $\mathfrak{P}$ , also auch  $d\Omega$  gleich Null. Die adiabatische Bewegung eines monocyclischen Systems wird deshalb auch eine isentropische genannt.

### Zeitintegral der Energie.

**Bemerkung 1.** Ändern sich bei der adiabatischen Be- 588  
wegung eines cyklischen Systems die cyklischen Koordinaten  $p_e$



in einer gewissen endlichen Zeit um die Beträge  $\bar{p}_e$ , so ist das Zeitintegral der Energie des Systems, genommen über jene Zeit, gleich

$$\frac{1}{2} \sum_1^r q_e \bar{p}_e .$$

Denn es kann die Energie des Systems geschrieben werden in der Form (286b):

$$\frac{1}{2} \sum_1^r q_e \dot{p}_e ,$$

und hierin sind für die adiabatische Bewegung die  $q_e$  Konstanten.

589 **Bemerkung 2.** Die Variation des Zeitintegrals der Energie eines adiabatischen Systems bei variierter Bewegung des Systems hängt ab erstens von der Variation der Parameter während der ganzen Zeit, über welche das Integral gebildet ist, zweitens aber auch von den in der Zeit konstanten Variationen, welche die in der Zeit konstanten cyklischen Momente des Systems erleiden.

590 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen im folgenden:  
mit  $\delta$  eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente willkürliche Variationen erleiden,  
mit  $\delta_q$  eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente keine Variationen erleiden,  
endlich mit  $\delta_p$  eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente solche Variationen erleiden, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariirt bleiben.

591 **Folgerung.** Aus der Bezeichnung folgt von selbst für alle  $e$ :

$$\delta_q q_e = 0 , \quad \delta_p \bar{p}_e = 0 ,$$

also wird nach 588 für beliebige Variationen der Parameter:

$$\delta_q \int \mathcal{E} dt = \frac{1}{2} \sum_1^r q_\sigma \delta_q \bar{p}_\sigma \quad \text{a)}$$

$$\delta_p \int \mathcal{E} dt = \frac{1}{2} \sum_1^r \bar{p}_\sigma \delta_p q_\sigma \quad \text{b)}$$

**Anmerkung.** In einem adiabatischen System ist es stets, 592  
und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise möglich, bei  
beliebiger Variation der Parameter den cyklischen Momenten  
solche Variationen zu erteilen, daß die Anfangs- und End-  
werte der cyklischen Koordinaten unvariirt bleiben.

Denn aus der allgemeinen Beziehung:

$$\dot{p}_\sigma = \frac{1}{m} \sum_1^r \bar{h}_{\sigma\sigma} q_\sigma$$

folgt für ein adiabatisches System, in welchem sich die  $p_\sigma$   
den Werten  $p_{\sigma_0}$  auf die Werte  $p_{\sigma_1}$  ändern:

$$p_{\sigma_1} - p_{\sigma_0} = \frac{1}{m} \sum_1^r q_\sigma \int_0^1 \bar{h}_{\sigma\sigma} dt \quad ,$$

also bei beliebiger Variation der Parameter und der cyklischen  
Momente:

$$\delta p_{\sigma_1} - \delta p_{\sigma_0} = \frac{1}{m} \sum_1^r q_\sigma \delta \int_0^1 \bar{h}_{\sigma\sigma} dt + \frac{1}{m} \sum_1^r \delta q_\sigma \int_0^1 \bar{h}_{\sigma\sigma} dt \quad .$$

Diese Gleichungen aber bilden  $r$  nicht homogene, lineare Gleichungen für die  $r$  Größen  $\delta q_\sigma$ , welche also stets eine und zwar im allgemeinen nur eine Lösung zulassen, insbesondere auch dann, wenn die links stehenden Variationen verschwinden.

Variationen der Art, welche wir mit  $\delta_p$  bezeichneten, sind also auch bei beliebiger Variation der Parameter stets möglich.

**Lehrsatz.** Bei gleicher, übrigens willkürlicher Variation 593  
der Parameter während einer gewissen Zeit fällt die Variation



des Zeitintegrals der Energie in einem adiabatischen System entgegengesetzt gleich aus, wenn man das eine Mal die cyklischen Momente des Systems unvariirt läßt, das andere Mal sie so variirt, daß Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariirt bleiben.

Denn für eine beliebige Variation ist:

$$\begin{aligned} \delta \int \mathfrak{E} dt &= \delta_q \int \mathfrak{E} dt + \sum_1^r \int \frac{\partial_q \mathfrak{E}}{\partial q_e} \delta q_e dt \\ &= \delta_q \int \mathfrak{E} dt + \sum_1^r \bar{p}_e \delta q_e \quad , \end{aligned}$$

also insbesondere für eine Variation, bei welcher Anfangs- und Endwerte der  $p_e$  unvariirt bleiben.

$$\delta_p \int \mathfrak{E} dt = \delta_q \int \mathfrak{E} dt + \sum_1^r \bar{p}_e \delta_p q_e \quad .$$

Subtrahirt man hiervon zweimal die Gleichung 591b, so folgt:

$$\delta_q \int \mathfrak{E} dt = - \delta_p \int \mathfrak{E} dt \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Man vergleiche übrigens die verwandten Sätze 96 und 293.

## II. Verborgene cyklische Bewegung.

### Erläuterungen und Definitionen.

- 594 1. Wir sagen, ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Koordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Theiles derselben.
- 595 2. Diejenigen Massen, deren Lagen bei vollständiger Angabe der beobachtbaren Koordinaten des Systems dennoch unbekannt bleibt, heißen verborgene Massen, ihre Bewegungen

verborgene Bewegungen, ihre Koordinaten verborgene Koordinaten. Im Gegensatz dazu heißen die übrigen Massen des Systems sichtbare Massen, ihre Bewegungen sichtbare Bewegungen, ihre Koordinaten sichtbare Koordinaten.

3. Die Aufgabe, welche der Mechanik in Hinsicht der Systeme mit verborgenen Massen zufällt, ist diese: die Bewegungen der sichtbaren Massen des Systems oder auch die Veränderungen der sichtbaren Koordinaten des Systems vor auszubestimmen trotz der vorhandenen Unkenntnis über die Lage der verborgenen Massen. 596

4. Ein System, welches verborgene Massen enthält, unterscheidet sich von einem System ohne verborgene Massen allein in Hinsicht unserer Kenntnis des Systems. Alle bisherigen Aussagen unserer Mechanik bleiben daher anwendbar auf Systeme mit verborgenen Bewegungen, sobald wir unter den Massen, Koordinaten usw. die sämtlichen Massen, Koordinaten usw. verstehen. Erst dann werden Änderungen nötig, wenn wir unsere Aussagen auf die sichtbaren Größen beschränken wollen. Die zu stellende Aufgabe kann daher auch dahin formuliert werden, daß anzugeben sei, welche Änderungen die bisherigen Aussagen unserer Mechanik erleiden müssen, wenn unter den Massen, Koordinaten usw. schlechthin nur die sichtbaren Massen, Koordinaten usw. verstanden werden. 597

5. Es ist klar, daß die in der einen oder der anderen Form gestellte Aufgabe nicht zu lösen ist ohne gewisse Angaben über den Einfluß, welchen die verborgenen Massen auf die Bewegung der sichtbaren Massen ausüben. Solche Angaben aber sind möglich. Ein geleitetes System oder ein von Kräften beeinflusstes System kann bereits als ein System mit verborgenen Massen aufgefaßt werden, indem man die unbekanntes Massen des leitenden Systems oder des beeinflussenden Systems als verborgene ansieht. Im allgemeinen ist es indessen in diesen Fällen möglich, auch die Massen des leitenden oder des Kräfte ausübenden Systems physikalisch zu erkennen, und die Auffassung derselben als verborgener ist alsdann eine freiwillige. Jetzt indessen fassen wir vorwiegend solche Fälle ins Auge, in welchen die Erkenntnis der ver- 598



borgenen Massen in der Tat durch keine physikalische Beobachtung möglich ist.

599 6. In sich zurücklaufende Bewegungen, also cyklische Bewegungen, sind häufig verborgene Bewegungen, da sie, allein bestehend, eine Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt, nicht hervorrufen. So ist die Bewegung einer homogenen Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefäße für den Anblick eine verborgene; sie wird erst sichtbar gemacht, wenn ihr durch Einbringen von Staub oder dergleichen die Eigenschaft der streng cyklischen Bewegung geraubt wird.

Umgekehrt sind verborgene Bewegungen fast stets cyklische Bewegungen. Nicht in sich zurücklaufende Bewegungen führen nämlich stets über kurz oder lang eine größere Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt hervor und werden dadurch sichtbar.

600 7. Auch cyklische Bewegungen können ihre Verborgenheit nicht lange bewahren, sobald wir Mittel gewinnen, auf die einzelnen cyklischen Koordinaten zu wirken und die cyklischen Intensitäten beliebig abzuändern. Die Mannigfaltigkeit unseres Einflusses auf das System ist in diesem Falle ebenso groß wie die wirkliche Mannigfaltigkeit des Systems, und wir können von jener auf diese schließen. Anders aber verhält es sich, wenn ein freiwilliger unmittelbarer Einfluß auf die cyklischen Koordinaten dauernd ausgeschlossen ist. Dies kann eintreten in adiabatischen cyklischen Systemen (560), und in diesen werden wir daher vorzugsweise die für unsere Beobachtung dauernd verborgenen Bewegungen zu suchen haben.

Auf solche Fälle beschränken wir daher zunächst die Betrachtung der verborgenen Bewegung. Unsere Behandlungsart aber bringt es mit sich, daß wir auch in solchen Fällen die verborgene Bewegung so behandeln, als wäre sie sichtbar, und erst nachträglich untersuchen, welche unserer Aussagen anwendbar bleiben trotz der nunmehr vorausgesetzten Verborgenheit.



## Konservative Systeme.

**Definition 1.** Ein materielles System, welches keine anderen 601  
verborgenen Massen enthält, als solche, welche adiabatische  
cyklische Systeme bilden, heißt ein konservatives System.

Der Name ist veranlaßt durch eine Eigenschaft solcher  
Systeme, welche später hervortreten wird; er ist zunächst  
durch den Anschluß an den feststehenden Gebrauch der Mecha-  
nik genügend gerechtfertigt.

**Anmerkung.** Jedes konservative System kann betrachtet 602  
werden als bestehend aus zwei Teilsystemen, von denen das  
eine alle sichtbaren Massen, das andere alle verborgenen  
Massen des ganzen Systems enthält. Die Koordinaten des  
sichtbaren Teilsystems, also die sichtbaren Koordinaten des  
ganzen Systems, sind zugleich die Parameter des verborgenen  
Teilsystems.

Wir bezeichnen dauernd die Masse des sichtbaren Teil-  
systems mit  $m$ , seine Koordinaten mit  $p_e$ , seine Momente nach  
den  $p_e$  mit  $q_e$ . Die Masse des verborgenen Teilsystems werde  
mit  $m$  bezeichnet, seine Koordinaten mit  $p_e$ , seine Momente  
nach diesen mit  $q_e$ .

**Definition 2.** Unter der Kräftefunktion eines konservativen 603  
Systems verstehen wir die Kräftefunktion seines verborgenen  
Teilsystems (563).

Die Kräftefunktion eines konservativen Systems ist also  
im allgemeinen gegeben als Funktion der sichtbaren Koordi-  
naten und konstanter Größen, ohne daß der Zusammenhang  
dieser Konstanten mit den Momenten des cyklischen Teil-  
systems offen gegeben sei. Die Form dieser Funktion ist  
durch unsere Betrachtungen keiner Einschränkung unterworfen.

Wir bezeichnen die Kräftefunktion des konservativen Sy-  
stems dauernd mit  $U$ .

**Bemerkung.** Damit die Bewegung der sichtbaren Massen 604  
eines konservativen Systems vollständig bestimmt sei, genügt  
es, daß seine Kräftefunktion gegeben sei als Funktion seiner  
sichtbaren Koordinaten, und es macht diese Angabe jede weitere  
Angabe über die verborgenen Massen des Systems entbehrlich.



Denn aus der Kräftefunktion in der angegebenen Form folgen vollständig die Kräfte, welche das verborgene Teilsystem auf das sichtbare ausübt, und diese Kräfte vertreten vollständig den Einfluß des ersteren auf das letztere (457 ff.).

605 **Definition 3.** Derjenige Teil der Energie eines konservativen Systems, welcher von der Bewegung seiner sichtbaren Massen herrührt, heißt die kinetische Energie des ganzen Systems. Im Gegensatz dazu wird die Energie der verborgenen Massen die potentielle Energie des ganzen Systems genannt.

Die kinetische Energie wird auch wohl als lebendige Kraft bezeichnet; nach einer anderen, älteren Redeweise wird das Doppelte der kinetischen Energie mit diesem Namen belegt.

606 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen die kinetische Energie dauernd mit  $T$ .  $T$  ist demnach eine homogene quadratische Funktion der  $\dot{p}_e$ , mit gleichem Rechte der  $q_e$ ; die Koeffizienten dieser Funktion sind Funktionen der  $p_e$ . Mit  $\partial_p T$  bezeichnen wir das partielle Differential von  $T$ , sobald wir die  $p_e$  und die  $\dot{p}_e$  als unabhängig voneinander veränderliche Variable betrachten, mit  $\partial_q T$  aber dann, wenn wir die  $p_e$  und die  $q_e$  als unabhängig voneinander veränderliche Variable betrachten.

Die Energie des verborgenen cyklischen Teilsystems, also die potentielle Energie des ganzen Systems, möge unter Beibehaltung einer bereits benutzten Bezeichnung (553) mit  $\mathcal{E}$  bezeichnet werden.

607 **Anmerkung.** Die kinetische und die potentielle Energie eines konservativen Systems unterscheiden sich voneinander nicht durch ihre Natur, sondern nur durch den freiwilligen Standpunkt unserer Auffassung, oder die unfreiwillige Beschränktheit unserer Kenntnis von den Massen des Systems. Dieselbe Energie, welche bei einem gewissen Stand unserer Auffassung oder unserer Kenntnis als potentielle zu bezeichnen ist, ist bei verändertem Stand unserer Auffassung oder Kenntnis als kinetische anzusprechen.

608 **Folgerung 1.** Die Energie eines konservativen Systems ist gleich der Summe seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie.

Wir bezeichnen die Gesamtenergie des konservativen Systems dauernd mit  $E$  und haben alsdann:

$$E = T + \mathcal{C} .$$

**Folgerung 2.** In einem freien konservativen System ist die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie konstant in der Zeit; die kinetische Energie wächst nur auf Kosten der potentiellen, und umgekehrt (340). 609

**Folgerung 3.** In einem freien konservativen System ist die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion konstant in der Zeit; kinetische Energie und Kräftefunktion nehmen gleichzeitig zu und ab und zwar um gleiche Beträge (566). 610

**Definition 4.** Die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion eines konservativen Systems nennen wir die mathematische oder analytische Energie des Systems. 611

Wir bezeichnen die mathematische Energie dauernd mit  $h$ . Sie unterscheidet sich von der Energie des Systems nur durch eine von Zeit und Lage des Systems unabhängige, im allgemeinen aber unbekannte Konstante. Für die mathematische Anwendung kann sie die Energie vollständig vertreten, es fehlt ihr aber die physikalische Bedeutung, welche diese besitzt.

**Anmerkung.** Die Definition wird wiedergegeben durch die Gleichung: 612

$$T - U = h , \quad \text{a)}$$

oder in anderer Schreibart:

$$U + h = T . \quad \text{b)}$$

Ist das konservative System ein freies, so ist in dieser Gleichung die Größe  $h$  eine von der Zeit unabhängige Konstante und die Gleichung wird alsdann auch wohl als die Gleichung der Energie für das konservative System bezeichnet.

Aus b) und 608 leiten wir noch die Beziehung her:

$$U + h = E - \mathcal{C} . \quad \text{c)}$$



- 613 **Definition 5.** Das Zeitintegral der kinetischen Energie eines Systems, genommen zwischen zwei bestimmten Zeiten als Grenzen, wird die Wirkung oder der Kraftaufwand während der Zwischenzeit genannt.

Die Wirkung bei der Bewegung eines konservativen Systems während einer gegebenen Zeit wird also dargestellt durch das Integral

$$\int T dt ,$$

genommen zwischen dem Anfangs- und dem Endwerte jener Zeit.

- 614 **Anmerkung 1.** Bezeichnet  $ds$  das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems,  $v$  die Geschwindigkeit desselben in seiner Bahn, so kann die Wirkung auch dargestellt werden in der Form des Integrals

$$\frac{1}{2} m \int v ds ,$$

genommen zwischen den Lagen, in welchen sich das System zu Anfang und zu Ende der betrachteten Zeit befindet.

- 615 **Anmerkung 2.** Der Name „Wirkung“ für das in Rede stehende Integral ist oft als unpassend verurteilt worden. Es ist aber nicht wohl einzusehen, warum der von JACOBI vorgeschlagene Name „Kraftaufwand“ besser wäre, noch auch was der ursprünglich von MAUPERTUIS gewählte Ausdruck „action“ vor jenen voraushabe. Alle diese Benennungen erwecken Vorstellungen, welche mit dem bekannten Gegenstande nichts zu schaffen haben. Es ist auch schwer verständlich, wie die Summation der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Energien etwas anderes liefern könne, als eine Rechnungsgröße, und es ist daher wohl nicht nur schwierig, sondern unmöglich, für das in Rede stehende Integral eine passende Bezeichnung von einfachem Sinne zu finden.

Auch die übrigen in diesem Abschnitt eingeführten Namen und Bezeichnungen sind weniger durch ihre innere Zweckmäßigkeit gerechtfertigt, als durch die Notwendigkeit, uns der bestehenden Redeweise der Mechanik so viel als möglich anzuschließen.

## Differentialgleichungen der Bewegung.

**Aufgabe.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines konservativen Systems aufzustellen.

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Bewegungsgleichungen für das sichtbare Teilsystem. Die Masse dieses Teilsystems ist  $m$ , seine Koordinaten sind die  $p_\rho$ ; es seien die  $k$  Gleichungen:

$$\sum_1^r p_{\rho\sigma} dp_\rho = 0 \quad \text{a)}$$

seine Bedingungsgleichungen. Da die  $p_\rho$  zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems sind, so sind die Komponenten der Kräfte, welche dieses auf das sichtbare Teilsystem ausübt, gleich  $\partial U / \partial p_\rho$  (563). Wirkt auf das sichtbare Teilsystem durch Koppelung mit anderen sichtbaren Systemen noch eine weitere Kraft, so mögen deren Komponenten  $P_\rho$  sein. Dann sind die Bewegungsgleichungen des Systems nach 481:

$$mf_\rho + \sum_1^k p_{\rho\sigma} P_\sigma = \frac{\partial U}{\partial p_\rho} + P_\rho, \quad \text{b)}$$

und diese  $r$  Gleichungen zusammen mit den  $k$  Gleichungen a) reichen wieder aus zur eindeutigen Bestimmung der  $r+k$  Größen  $\ddot{p}_\rho$  und  $P_\sigma$ .

**Anmerkung 1.** Ist das betrachtete konservative System ein freies, wirkt also auf dasselbe keine äußere Kraft, so sind die  $P_\rho$  gleich Null, und die Bewegungsgleichungen haben die Form:

$$mf_\rho + \sum_1^k p_{\rho\sigma} P_\sigma = \frac{\partial U}{\partial p_\rho}.$$

**Anmerkung 2.** Ist insbesondere die Koordinate  $p_\rho$  eine freie Koordinate des sichtbaren Teilsystems, so nimmt die dem Index  $\rho$  zugehörige Bewegungsgleichung die Form an:



$$mf_q = \frac{\partial U}{\partial p_e},$$

da die  $p_{\neq e}$  alsdann sämtlich verschwinden.

619 **Anmerkung 3.** Indem wir in die Gleichungen 616 bis 618 für die Beschleunigungen nach den  $p_e$  ihre verschiedenen Ausdrücke nach 291 einsetzen, erhalten wir für diese Gleichungen eine Reihe verschiedener Formen, welche den Formen entsprechen, welche wir für ein vollständig bekanntes System in 368 u. ff. erhalten haben.

620 **Folgerung 1.** Sind in einem holonomen konservativen System die  $p_e$  sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T + U = L,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der  $2r$  Gleichungen:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & q_e = \frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_e} \\ \text{b)} \quad & \dot{q}_e = \frac{\partial_p L}{\partial p_e}, \end{aligned}$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die  $2r$  Größen  $p_e$  und  $q_e$  aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von  $L$  ein, entwickeln die partiellen Differentialquotienten, und beachten, daß  $U$  die  $\dot{p}_e$  nicht enthält, daß also

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_e} = 0, \quad \frac{\partial_p U}{\partial p_e} = \frac{\partial U}{\partial p_e}$$

ist, so erkennen wir, daß die Gleichungen a) mit der aus den Definitionen folgenden Beziehung der  $q_e$  und der  $\dot{p}_e$  zusammenfallen, die Gleichungen b) aber mit den Bewegungsgleichungen in der Form 618. (289, 291)

**Anmerkung.** Die Funktion  $L$ , durch deren Benutzung die 621 Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Form der Gleichungen 620 a und b annehmen, hat man bisweilen die LAGRANGESCHE Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur in einem holonomen System, und sie ist hier gleich der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten.

**Folgerung 2.** Sind in einem holonomen konservativen 622 System die  $p_e$  sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T - U = H \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der  $2r$  Gleichungen:

$$\dot{p}_e = \frac{\partial_q H}{\partial q_e} \quad \text{a)}$$

$$\dot{q}_e = - \frac{\partial_q H}{\partial p_e} \quad , \quad \text{b)}$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die  $2r$  Größen  $p_e$  und  $q_e$  aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von  $H$  ein, und beachten, daß  $U$  die  $q_e$  nicht enthält, daß also:

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_e} = 0 \quad , \quad \frac{\partial_q U}{\partial p_e} = \frac{\partial U}{\partial p_e}$$

ist, so sehen wir, daß die Gleichungen a) die aus den Definitionen folgende Beziehung der  $q_e$  und der  $\dot{p}_e$  darstellen, während die Gleichungen b) mit den aus der Erfahrung abgeleiteten Bewegungsgleichungen (618) des Systems zusammenfallen. (290, 294)

**Anmerkung.** Die Funktion  $H$ , durch deren Benutzung die 623 Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Gestalt der



Gleichungen 622a und b annehmen, hat man wohl die HAMILTONSche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur für ein holonomes System, und sie ist für ein solches gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten; sie ist also auch gleich der Gesamtenergie des Systems, von einer willkürlichen Konstanten abgesehen.

Allgemein ist es zulässig, für ein System mit beliebigen, nicht notwendig cyklischen, verborgenen Bewegungen die HAMILTONSche Funktion zu definieren durch die Gleichungen 622a und b, nämlich als eine Funktion der sichtbaren  $p_e$  und  $q_e$ , durch deren Benutzung (vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion gibt) die Bewegungsgleichungen eben jene einfache Form annehmen. Bei dieser allgemeineren Definition ist die HAMILTONSche Funktion nicht immer gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

- 624 **Bemerkung.** Aus den Gleichungen 620 und 622 können für ein System mit verborgenen Cykeln dieselben reziproken Eigenschaften der Bewegung abgeleitet werden, welche wir für ein vollständig bekanntes System in 378 und 381 abgeleitet haben. Es ist aber diese neue Ableitung nicht erforderlich, sondern es liegt schon im Wesen jener Beziehungen, daß jede von ihnen Gültigkeit hat unabhängig davon, ob die in ihnen nicht vorkommenden Koordinaten, Momente usw. sichtbare oder verborgene Koordinaten, Momente, usw. sind.

### Integralsätze für holonome Systeme.

- 625 **Bemerkung 1.** Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürliche Bewegung des Systems, als für jede andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen

Zeit sowohl die sichtbaren, als auch die verborgenen Koordinaten aus den Anfangswerten in die Endwerte überführt.

Denn da  $T - U$  gleich ist der Energie des Systems, vermehrt um eine für alle möglichen Bewegungen gleiche Konstante (611), so ist die Bemerkung nichts anderes, als der Lehrsatz 358, ausgesagt unter Anwendung der gegenwärtigen Bezeichnung.

**Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Endlagen weggelassen, so kann nur behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet beim Übergang zu irgend einer anderen der in Betracht kommenden Bewegungen. Unter Anwendung der Bezeichnung 590 nimmt alsdann die Aussage die Form an, daß

$$\delta_p \int_{t_0}^{t_1} (T - U) dt = 0$$

sei beim Übergang von der natürlichen Bewegung zu irgend einer anderen möglichen, während die Variationen der Anfangs- und Endzeiten und der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten verschwinden. (Vergl. 359.)

**Anmerkung 2.** Die Bemerkung 1 unterscheidet die natürlichen Bewegungen eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung, und sie kann daher dazu dienen, die natürliche Bewegung zu bestimmen, sobald es möglich ist, die Variation der Anmerkung 1 wirklich zu bilden. Sind aber, wie wir es ja voraussetzen, die cyklischen Koordinaten verborgene, so ist die Bildung der Variationen der Form  $\delta_p$  nicht möglich, und der Satz verliert daher nicht zwar seine Richtigkeit, wohl aber seine Anwendbarkeit.

**Lehrsatz 1.** Das Integral

628

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen seiner sichtbaren Massen kleiner für die natür-



liche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen Zeit und mit denselben Momenten der verborgenen cyklischen Bewegungen die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführt.

Wir führen den Beweis, indem wir den Satz auf die Bemerkung 625 zurückführen. Wir ordnen deshalb, wie es nach 592 möglich ist, einer jeden nach den Ansprüchen des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation beim Übergang zu einer Bewegung der ersten Art haben wir nach 590 mit  $\delta_q$ , eine Variation zu der entsprechenden Bewegung zweiter Art mit  $\delta_p$  zu bezeichnen.

Nun ist erstens, da  $T$  nur von den sichtbaren Koordinaten abhängt:

$$a) \quad \delta_q \int T dt = \delta_p \int T dt \quad .$$

Zweitens ist, da die Dauer der Bewegung nicht variiert wird und  $-U$  sich nur durch eine Konstante von der Energie der cyklischen Bewegung unterscheidet (566), zufolge von 593:

$$b) \quad \delta_q \int U dt = -\delta_p \int U dt \quad .$$

Durch Addition von a) und b) ergibt sich:

$$c) \quad \delta_q \int (T + U) dt = \delta_p \int (T - U) dt \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat (626, 625) für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen notwendig negativen Wert, also auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

629 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet

werden, daß die Variation des Integrales verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu der Aussage von 626):

$$\delta_q \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt = 0 .$$

**Anmerkung 2.** Die in dem Lehrsatz ausgesprochene **630** Eigenschaft der natürlichen Bewegung unterscheidet dieselbe eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung. Die Variation  $\delta_q$  kann gebildet werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene angesehen sind, denn ihre Bildung erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse. Der Lehrsatz kann deshalb benutzt werden zur Bestimmung der natürlichen Bewegung konservativer Systeme. Seine Gültigkeit ist allerdings streng beschränkt auf holonome Systeme.

**Anmerkung 3.** Der vorstehende Lehrsatz, benutzt in der **631** Auffassung der Anmerkung 2, führt den Namen des HAMILTONSchen Prinzips. Seine physikalische Bedeutung kann nach unserer Anschauung keine andere sein, als die des Lehrsatzes **358**, aus welchem wir das Prinzip hergeleitet haben. Das Prinzip selbst stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze **358** geben müssen, damit er trotz unserer Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe.

**Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit  $ds$  das Bahnelement **632** der sichtbaren Massen eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, so ist das Integral

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürlichen Bahnen des Systems, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche sowohl die



Werte der sichtbaren, als auch die Werte der cyklischen Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen. Die Größe  $h$  ist dabei als eine von einer natürlichen Bahn zur anderen wechselnde, übrigens für alle jedesmal verglichenen Bahnen gleiche Konstante zu betrachten.

Denn führen wir die Zeit als Hilfsgröße ein und machen dabei die willkürliche aber zulässige Annahme, das System durchlaufe die betrachteten Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daß die Konstante  $h$  den Wert der analytischen Energie bezeichnet, so ist:

$$a) \quad T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} ,$$

also das betrachtete Integral gleich:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt .$$

Das Integral ist also, von dem Faktor abgesehen, gleich der Zeitdauer des Überganges. Diese ist aber nach 352 als Folge von 347 für gegebenen Wert der Energie, also der Konstanten  $h$ , ein Minimum. Unsere Bemerkung ist demnach nichts anderes, als der Inhalt des Lehrsatzes 352, ausgesagt unter Benutzung der inzwischen eingeführten Bezeichnungen.

- 633 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fortgelassen, so kann nur noch das Verschwinden einer Variation behauptet werden (353); welche Aussage in unserer Bezeichnung in der Form darzustellen ist:

$$\delta_p \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = 0 .$$

- 634 **Anmerkung 2.** Durch die Eigenschaft, welche die Bemerkung 2 aussagt, sind die natürlichen Bahnen, welche den verschiedenen Werten der Konstanten  $h$  entsprechen, eindeutig ausgezeichnet vor jeder anderen möglichen Bahn, und der Lehr-

satz kann daher zur Bestimmung der natürlichen Bahn des Systems dienen, sobald es möglich ist, die Variation  $\delta_p$  zu bilden. Sind aber, wie wir voraussetzen, die Einzelheiten der cyklischen Bewegung verborgen, so ist diese Bildung nicht möglich, und die Bemerkung verliert daher nicht zwar ihre Richtigkeit, wohl aber ihre Anwendbarkeit zu dem besagten Zwecke.

**Lehrsatz 2\*).** Beim Übergang eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, zwischen zwei hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 der sichtbaren Massen, ist das Integral

$$\int_0^1 \sqrt{U+h} ds$$

kleiner für die natürlichen Bahnen, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche mit denselben Werten der verborgenen cyklischen Momente und der Konstanten  $h$  die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen.

Wir führen wiederum den Beweis des Satzes, indem wir ihn auf die vorangegangene Bemerkung (632) zurückführen. Zu dem Ende benutzen wir wieder die Zeit als Hilfsgröße, indem wir die willkürliche aber zulässige Annahme machen, daß das System die betrachteten Bahnen mit konstanter und solcher Geschwindigkeit durchlaufe, daß die Konstante  $h$  gleich der mathematischen Energie wird. Es läßt sich dann das Integral, von dem der Lehrsatz handelt, schreiben in der Form:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} (U+h) dt .$$

Ferner ordnen wir wieder, wie es nach 592 zulässig ist, einer jeden nach der Vorschrift des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, für welche auch die Konstante  $h$ ,

\*) Mit dem Originale übereinstimmender Abdruck. — Der Herausgeber.



(635) und also auch die Energie  $E$  ihren Wert behält, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation, wie sie den Ansprüchen des Lehrsatzes entspricht, bezeichnen wir wieder mit  $\delta_q$ , eine Variation zu der entsprechenden zweiten Bewegung mit  $\delta_p$ .

Nun ist erstens für beliebige Variationen  $\delta q_e$  der cyklischen Momente  $q_e$  (566):

$$\begin{aligned} \delta \int (U+h) dt &= \delta_q \int (U+h) dt + \sum_1^r \int \frac{\partial(U+h)}{\partial q_e} \delta q_e dt \\ &= \delta_q \int (U+h) dt - \frac{1}{2} \sum_1^r \bar{p}_e \delta q_e, \end{aligned}$$

also im besonderen für eine Variation  $\delta_p$ :

$$\text{a) } \delta_p \int (U+h) dt = \delta_q \int (U+h) dt - \frac{1}{2} \sum_1^r \bar{p}_e \delta_p q_e.$$

Zweitens erhalten wir aus Gleichung 612c unter Berücksichtigung der Beziehung 588 und der Konstanz von  $E$ :

$$\int (U+h) dt = E(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \sum_1^r \bar{p}_e q_e.$$

also durch eine Variation der Art  $\delta_p$ :

$$\text{b) } \delta_p \int (U+h) dt = E \delta_p (t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \sum_1^r \bar{p}_e \delta_p q_e.$$

Durch Subtraktion von a) und b) ergibt sich:

$$\text{c) } \delta_q \int (U+h) dt = E \delta_p (t_1 - t_0),$$

oder indem wir mit Hilfe von 632a die Zeit wieder eliminieren:

$$\text{d) } \delta_q \int_0^1 \sqrt{U+h} ds = E \delta_p \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}.$$

Die rechts stehende Variation aber hat nach 632 für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen negativen Wert, also, da  $E$  notwendig positiv ist, auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

**Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend 636 benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungswiese (im Gegensatz zu 633):

$$\delta_q \int_0^1 \sqrt{U+h} ds = 0 .$$

**Anmerkung 2.** Für jeden Wert der Konstanten  $h$  zeichnet 637 der Lehrsatz eine natürliche Bahn in eindeutiger Weise aus vor jeder anderen möglichen Bahn. Die Eigenschaft der natürlichen Bahnen, welche der Lehrsatz aussagt, kann daher benutzt werden zur Bestimmung dieser Bahnen; und zwar kann sie benutzt werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene vorausgesetzt sind.

Denn die Bildung der Variation  $\delta_q$  erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariirt lasse; die Variation kann also gebildet werden trotz Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung.

**Anmerkung 3.** Der Lehrsatz 2, benutzt in der Auffassung 638 der Anmerkung 2, ist die JACOBIsche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Denn nennen wir für den Augenblick  $m_v$  die Masse des  $v$ ten der sichtbaren  $n$  Punkte des Systems,  $ds_v$  das Element der Bahn dieses Punktes, so ist

$$m ds^2 = \sum_1^n m_v ds_v^2 ,$$

und also das Integral, für welches wir einen Minimalwert feststellen bis auf einen Faktor:



$$\int \sqrt{U + h} \sqrt{\sum_1^n m_v ds_v^2} ,$$

welches, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, das JACOBIsche Integral ist.

Die physikalische Bedeutung des JACOBIschen Prinzips kann nach unserer Auffassung keine andere sein, als die des Lehrsatzes 352, bez. 347, aus welchem es abgeleitet ist; es stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze geben müssen, damit er trotz vorhandener Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegungen zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. Die Gültigkeit auch des JACOBIschen Satzes erstreckt sich nur auf holonome Systeme.

639 **Lehrsatz 3.** Beim Übergang eines freien holonomen konservativen Systems zwischen hinreichend benachbarten Lagen ist das Zeitintegral der kinetischen Energie kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System von den gegebenen Anfangswerten zu den Endwerten der sichtbaren Koordinaten überführt, und welche mit demselben gegebenen, in der Zeit konstanten Werte der mathematischen Energie ausgeführt wird.

Denn nennen wir  $h$  den gegebenen Wert der mathematischen Energie, so ist für alle in Betracht kommenden Bahnen (611)

$$T - U = h ,$$

also ist das Integral, von welchem der Satz handelt, nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} T dt ,$$

bis auf einen konstanten Faktor dasselbe Integral, von welchem der Lehrsatz 2 handelt; der gegenwärtige Satz ist daher nur eine andere Form, den Inhalt jenes Lehrsatzes auszusagen.

Die zu dem Lehrsatz 2 gemachten Anmerkungen 1 und 2 finden daher auch hier sinnentsprechende Anwendung.

**Anmerkung.** Der Lehrsatz 639 gibt die ursprüngliche 640 MAUPERTUISsche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Diese Form hat vor der JACOBISchen den Vorzug, daß sie sich in einfachen Worten aussprechen läßt und daher einen einfachen physikalischen Sinn zu enthalten scheint. Sie hat aber gegenüber der JACOBISchen Form den Nachteil, daß sie unnötigerweise die Zeit enthält, obwohl doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems bestimmt, nicht die Bewegung in dieser, und obwohl diese Bewegung vielmehr nur durch die hinzugefügte Bemerkung bestimmt ist, daß überhaupt nur Bewegungen mit konstanter Energie in Betracht gezogen werden sollen.

Rückblick auf 625 bis 640.

1. Nach den Ergebnissen unserer Überlegung nimmt für 641 die natürliche Bewegung eines freien konservativen Systems ein jedes der Integrale:

$$\begin{aligned} \int (T - U) dt \quad , \quad & \int (T + U) dt \quad , \\ \int \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \quad & \int \sqrt{U+h} ds \quad , \\ & \int T dt \quad , \end{aligned}$$

unter bestimmten Verhältnissen einen ausgezeichneten Wert an. Dabei beziehen sich die beiden oberen Integrale auf die Bewegung des Systems, die übrigen in Wahrheit nur auf die Bahn desselben. Die beiden links stehenden Integrale beziehen sich auf den Fall, daß alle, auch die cyklischen Koordinaten des Systems in Betracht gezogen werden, und daß nur solche Lagen des Systems als gleiche gelten, bei welchen auch die letzteren Koordinaten die gleichen Werte haben. Die übrigen Integrale beziehen sich auf den Fall, daß die cyklischen Koordinaten des Systems verborgen sind, und daß schon solche Lagen des Systems als gleich gelten, bei welchen die sichtbaren Koordinaten gleiche Werte haben. Die Betrachtung des letzten Integrals setzt die Gültigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie als zugestanden voraus;



die Betrachtung der beiden obersten Integrale läßt diese Gültigkeit folgen; die Betrachtung der beiden mittleren Integrale kann von dieser Gültigkeit unabhängig gehalten werden.

- 642 2. Die physikalische Bedeutung der beiden links stehenden Integrale ist eine äußerst einfache; die sie betreffenden Aussagen sind unmittelbare Ausflüsse des Grundgesetzes. Die rechts stehenden Integrale haben die einfache physikalische Bedeutung verloren; aber die Aussage, daß sie für die natürliche Bewegung ausgezeichnete Werte annehmen, stellt immer noch eine, wenn auch verwickelte und undurchsichtige Form des Grundgesetzes dar. Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigen Voraussetzungen angepaßt ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht, hat den trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

Unser Beweisverfahren war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, den obigen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

- 643 3. Daß die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daß das eine oder das andere jener Integrale ein Minimum werde, geht erstens daraus hervor, daß schon in holonomen Systemen bei ausgedehnterer Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daß es natürliche Systeme gibt, für welche das Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruck für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir auch das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrals für trügerisch zu halten.

### Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme.

- 644 Bemerkung 1. Bezeichnen wir mit  $V$  den Wert des Integrales

$$V = \frac{\sqrt{m}}{2} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}},$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen zwei Wertsystemen aller Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln, und gedacht als Funktion der Anfangs- und Endwerte jener Koordinaten, also der  $p_{e_0}$ ,  $p_{e_1}$  und der  $p_{e_0}$ ,  $p_{e_1}$ , und der Größe  $h$ , so stellt der Ausdruck

$$V' \sqrt{\frac{2E}{m+m}}$$

die geradeste Entfernung des Systems dar. Die Bezeichnung ist dabei dieselbe, welche wir bisher in diesem Abschnitt benutzt haben.

Denn nach 632 ist  $V'$  gleich der Zeitdauer des natürlichen Übergangs zwischen den gegebenen Lagen für die mathematische Energie  $h$ . Ist also  $S$  die geradeste Entfernung beider Lagen, so ist

$$E = \frac{1}{2} (m+m) \frac{S^2}{V'^2} ,$$

woraus die Behauptung folgt.

**Folgerung.** Mit Hilfe der Funktion  $V'$  lassen sich die natürlichen Bahnen des betrachteten Systems in geschlossener Form darstellen. 645

Denn bezeichnen wir wie bisher mit  $ds$  das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, weiter mit  $d\tilde{s}$  das Bahnelement des cyklischen Teilsystems und mit  $d\sigma$  das Bahnelement des vollständigen Systems, so ist

$$(m+m) d\sigma^2 = m ds^2 + m d\tilde{s}^2 , \quad \text{a)}$$

also (57) bei der bisher benutzten Bezeichnung:

$$d\sigma^2 = \sum_1^r \sum_1^r \frac{m}{m+m} \alpha_{q\sigma} dp_q dp_\sigma + \sum_1^r \sum_1^r \frac{m}{m+m} \alpha_{q\sigma} dp_q dp_\sigma . \quad \text{b)}$$

Sind also schließlich noch  $\sigma, p_e$  und  $\sigma, p_e$  die Winkel, welche die Bahn des ganzen Systems mit den Koordinaten  $p_e$  und  $p_e$  des ganzen Systems bildet, so werden die Gleichungen der



natürlichen Bahnen zufolge von 224 und 226, nach Division beider Seiten durch einen konstanten Faktor, erhalten in der Form:

$$e) \quad \sqrt{a_{q_1}} \cos \sigma, p_{q_1} = \sqrt{\frac{2E}{m} \frac{\partial V'}{\partial p_{q_1}}}$$

$$d) \quad \sqrt{a_{q_0}} \cos \sigma, p_{q_0} = -\sqrt{\frac{2E}{m} \frac{\partial V'}{\partial p_{q_0}}}$$

$$e) \quad \sqrt{a_{q_1}} \cos \sigma, p_{q_1} = \sqrt{\frac{2E}{m} \frac{\partial V'}{\partial p_{q_1}}}$$

$$f) \quad \sqrt{a_{q_0}} \cos \sigma, p_{q_0} = -\sqrt{\frac{2E}{m} \frac{\partial V'}{\partial p_{q_0}}},$$

und diese Gleichungen lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die Gleichungen der natürlichen Bahnen als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

- 646 **Anmerkung.** Die vorstehenden Gleichungen e) bis f) sind richtig in jedem Falle, ob nun die cyklischen Koordinaten als beobachtbare oder als dauernd verborgene angesehen werden; aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald das letztere vorausgesetzt wird. Denn alsdann ist der vollständige Ausdruck von  $V'$  nicht bekannt, und die Gleichungen lassen sich nicht entwickelt hinschreiben.

- 647 **Aufgabe 1.** Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit  $V$  den Wert des Integrales

$$\sqrt{2m} \int_0^1 \sqrt{U+h} ds,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen irgend zwei Wertsystemen der sichtbaren Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bahn wollen wir die in der Kräftefunktion

vorkommenden cyklischen Momente als unveränderliche Konstanten ansehen, und  $V$  soll also gedacht werden als Funktion der Anfangs- und Endwerte allein der sichtbaren Koordinaten und der Konstanten  $h$ . Nach 635 d ist nun beim Übergang von einer natürlichen Bahn zu einer anderen mit beliebig variierten sichtbaren Koordinaten:

$$\delta_q \sqrt{2m} \int_0^1 \sqrt{U+h} ds = 2E \delta_p \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}, \quad \text{a)}$$

also ist auch insbesondere beim Übergang von einer natürlichen zu einer beliebigen benachbarten natürlichen Bahn:

$$\delta_q V = 2E \delta_p V', \quad \text{b)}$$

also ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_{e_1}} &= 2E \frac{\partial V'}{\partial p_{e_1}}, \\ \frac{\partial V}{\partial p_{e_2}} &= 2E \frac{\partial V'}{\partial p_{e_2}}. \end{aligned} \quad \text{c)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die cyklischen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen 645 c und d fortschaffen. Was die linken Seiten anlangt, so haben wir die Winkel  $\sigma, p_e$  zu ersetzen durch die  $s, p_e$ . Nun haben wir nach 645 b (75):

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{m+m}} \sqrt{a_{qq}} d\sigma \cos \sigma, p_q &= \sum_1^r \frac{m}{m+m} a_{q\sigma} dp_\sigma \\ &= \frac{m}{m+m} \sqrt{a_{qq}} ds \cos s, p_q, \end{aligned} \quad \text{d)}$$

und ferner aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U+h &= T = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \quad \text{und} \\ E &= \frac{1}{2} (m+m) \frac{d\sigma^2}{dt^2} \end{aligned} \quad \text{e)}$$



durch Division:

$$f) \quad d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+h}} \sqrt{\frac{E}{U+h}} ds ,$$

also aus d) und f):

$$g) \quad \cos \sigma, p_q = \sqrt{\frac{U+h}{E}} \cos s, p_q .$$

Indem wir nun das Ergebnis e) in die rechten, das Ergebnis g) in die linken Seiten der umzuformenden Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Gleichungen:

$$h) \quad \begin{aligned} \sqrt{a_{q_1}} \cos s, p_{q_1} &= \frac{1}{\sqrt{2m(U+h)}} \frac{\partial V}{\partial p_{q_1}} \\ \sqrt{a_{q_0}} \cos s, p_{q_0} &= - \frac{1}{\sqrt{2m(U+h)}} \frac{\partial V}{\partial p_{q_0}} , \end{aligned}$$

welches die gesuchten Umformungen sind. Denn sie enthalten keine Größen mehr, welche sich auf das verborgene Teilsystem beziehen, und sie lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die natürlichen Bahnen des sichtbaren Teilsystems als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

648 **Anmerkung 1.** Die Funktion  $V$  enthält nicht die Zeit und gibt auch nur die natürlichen Bahnen des Systems, nicht aber die Bewegung des Systems in diesen Bahnen. Da aber die natürlichen Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, und da wir bereits der in  $V$  vorkommenden Konstanten  $h$  die Bedeutung der analytischen Energie beilegen, so ist es leicht, die Zeit als unabhängige Variable in die Gleichungen einzuführen. Zunächst ist die Verknüpfung der Zeit mit der bisher als unabhängige Variable benutzten Weglänge gegeben durch die Gleichung:

$$a) \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0 .$$

Sodann erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen 647h mit

$$\sqrt{2m(U+h)} = \sqrt{2mT} = m \frac{ds}{dt} ,$$

und Beachtung von 75 und 270:

$$Q_{q_1} = \frac{\partial V}{\partial p_{q_1}} , \quad \text{b)}$$

$$Q_{q_2} = - \frac{\partial V}{\partial p_{q_2}} . \quad \text{c)}$$

Endlich erhalten wir für den Wert der Funktion selbst:

$$V = 2 \int_{t_0}^{t_1} T dt . \quad \text{d)}$$

Der Form nach sind diese Gleichungen weit einfacher als die Gleichungen der vorangegangenen Aufgabe, aber jene Gleichungen haben den Vorzug, eine unabhängige Variable weniger zu enthalten.

**Anmerkung 2.** Die Funktion  $V$  ist diejenige Funktion, 649 welche von HAMILTON mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet und die charakteristische Funktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage 412, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbar seien, geht die jetzt mit  $V$  bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Funktion über.

Übrigens erhellt, daß die charakteristische Funktion eines Systems nach der jetzt erweiterten Definition eine Rechnungsgröße ohne physikalische Bedeutung ist. Denn je nachdem wir größere oder kleinere Teile der cyklischen Bewegungen als verborgene behandeln, können wir für dasselbe System verschiedene charakteristische Funktionen aufstellen, welche den gleichen analytischen Dienst leisten, aber für identische Übergänge des Systems verschiedene Werte besitzen.



- 650 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion  $V$  eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r e \sum_1^r \sigma b_{q\sigma_1} \frac{\partial V}{\partial p_{e_1}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}} = (U+h)_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r e \sum_1^r \sigma b_{q\sigma_0} \frac{\partial V}{\partial p_{e_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}} = (U+h)_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen 227 für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten durch Einsetzen der Richtungscosinus aus den Gleichungen 647h in die Gleichung 88, welcher diese Richtungscosinus genügen.

- 651 **Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit  $P'$  den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (T-U) dt \quad ,$$

genommen über die natürliche Bewegung zwischen zwei Wertsystemen der sämtlichen Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln und gedacht als Funktion dieser Werte und der Zeitdauer des Übergangs, so unterscheidet sich  $P'$  von der Prinzipalfunktion des Systems (415) nur um das Produkt der Zeitdauer des Übergangs in eine (unbekannte) Konstante.

Denn es unterscheidet sich  $T-U$  von der Energie des Systems nur um eine (unbekannte) Konstante.

- 652 **Folgerung.** Mit Hilfe der Funktion  $P'$  lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems in geschlossener Form darstellen.

In der Tat hindert der Unterschied zwischen  $P'$  und der in 415 definierten Prinzipalfunktion nicht die unmittelbare Anwendung der Gleichungen 414b und c, so daß wir als Bewegungsgleichungen erhalten:

$$q_{e_1} = \frac{\partial P'}{\partial p_{e_1}} \quad , \quad \text{a)}$$

$$q_{e_0} = - \frac{\partial P'}{\partial p_{e_0}} \quad , \quad \text{b)}$$

$$q_{e_1} = \frac{\partial P'}{\partial v_{e_1}} \quad , \quad \text{c)}$$

$$q_{e_0} = - \frac{\partial P'}{\partial v_{e_0}} \quad . \quad \text{d)}$$

Dagegen erfordert die Gleichung 414 d eine leichte Abänderung; an ihrer Stelle wird erhalten:

$$h = - \frac{\partial P'}{\partial t_0} = \frac{\partial P'}{\partial t_1} \quad . \quad \text{e)}$$

**Anmerkung.** Die vorstehenden Gleichungen a) bis d) sind 653 richtig in jedem Falle, ob nun alle Koordinaten in Wahrheit beobachtbar sind oder ob nicht, aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene behandelt werden.

**Aufgabe 2.** Die vorstehenden Bewegungsgleichungen 654 eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit  $P$  den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt \quad ,$$

genommen für die natürliche Bewegung zwischen zwei zu den Zeiten  $t_0$  und  $t_1$  stattfindenden Wertsystemen der sichtbaren Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bewegung sollen die in den Konstanten der Kräftefunktion enthaltenen cyklischen Momente als unabänderlich angesehen werden, und  $P$  soll also gedacht sein als Funktion allein der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten und der Zeiten  $t_0$  und  $t_1$ .



Nun gilt nach 628c beim Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer beliebigen benachbarten Bewegung von gleicher Dauer die Gleichung:

$$\delta_q \int (T + U) dt = \delta_p \int (T - U) dt .$$

Wenden wir diese Gleichung an auf den Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer benachbarten natürlichen Bewegung von gleicher Dauer, so liefert sie uns:

$$\delta_q P = \delta_p P' ,$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial p_{e_0}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{e_0}} , \quad \frac{\partial P}{\partial p_{e_1}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{e_1}} .$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen entfernen wir die verborgenen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen 652. Was die linken Seiten anlangt, so genügt die Bemerkung, daß das Moment  $q_e$  des gesamten Systems nach seiner Koordinate  $p_e$  zugleich das Moment des sichtbaren Teilsystems nach der Größe  $p_e$  als Koordinate dieses Teilsystems ist. Wir erhalten demnach als Bewegungsgleichungen des sichtbaren Teilsystems:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & q_{e_1} = \frac{\partial P}{\partial p_{e_1}} , \\ \text{b)} \quad & q_{e_0} = - \frac{\partial P}{\partial p_{e_0}} , \end{aligned}$$

welches die gesuchten Umformungen sind.

655 **Anmerkung 1.** Die jetzt von uns eingeführte Funktion  $P$  ist diejenige Funktion, welche von HAMILTON mit dem Buchstaben  $S$  bezeichnet und die Prinzipalfunktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage 415, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit  $P$  bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben belegte Funktion über.

**Anmerkung 2.** Der Wert der Prinzipalfunktion für einen bestimmten Übergang hängt mit dem der charakteristischen Funktion in einfacher Weise zusammen. Durch einfache Umformung wird nämlich erhalten:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_1} (T + U) dt &= \int_{t_0}^{t_1} (2U + h) dt \\ &= \sqrt{2m} \int_0^1 \sqrt{U+h} ds - \sqrt{\frac{m}{2}} \int_0^1 \frac{h ds}{\sqrt{U+h}} \end{aligned}$$

Also ist (647, 644):

$$P = V - h(t_1 - t_0) \quad , \quad \text{a)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in  $V$  und im zweiten Summanden, die Größe  $h$  als Funktion von  $t_1 - t_0$  und der  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$  eingesetzt zu denken haben.

Umgekehrt ist also auch

$$V = P + h(t_1 - t_0) \quad , \quad \text{b)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in  $P$  und im zweiten Summanden, die Größe  $t_1 - t_0$  als Funktion von  $h$  und der  $p_{e_0}$  und  $p_{e_1}$  eingesetzt zu denken haben.

**Anmerkung 3.** Die analytische Energie  $h$  kommt in der Prinzipalfunktion nicht vor. Doch kann sie aus derselben mit Hilfe der Gleichungen 654a, b, 286c und 612a mittelbar abgeleitet werden. Sie kann aber auch unmittelbar durch  $P$  ausgedrückt werden. Denn ändern wir in der rechten Seite der Gleichung 656a nicht die  $p_{e_1}$  und  $p_{e_0}$ , sondern nur  $t_1$  und  $t_0$ , und bezeichnen mit  $dh$  die damit notwendig verbundene Änderung von  $h$ , so folgt:

$$dP = \frac{\partial V}{\partial h} dh - h d(t_1 - t_0) - (t_1 - t_0) dh \quad ,$$

also nach 648a:

$$dP = -h d(t_1 - t_0) \quad ,$$



woraus folgt:

$$h = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} .$$

- 658 **Lehrsatz.** Die Prinzipalfunktion  $P$  eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma} \frac{\partial P}{\partial p_{\rho_1}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} + \frac{\partial P}{\partial t_1} = U_1 ,$$

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r \sum_1^r b_{\rho\sigma_0} \frac{\partial P}{\partial p_{\rho_0}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} - \frac{\partial P}{\partial t_0} = U_0 ,$$

welche den Differentialgleichungen 227 für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten, wenn man die analytische Energie  $h$  das eine Mal direkt mit Hilfe von 657, das andere Mal indirekt mit Hilfe von 612a und 654a, b durch die Differentialquotienten von  $P$  ausdrückt.

#### Rückblick auf 644 bis 658.

- 659 1. In den Nummern 644 bis 658 sind vier endliche Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln gegeben. In der ersten und dritten Darstellung waren alle Koordinaten des Systems als beobachtbare angesehen, in der zweiten und vierten Darstellung waren die cyklischen Koordinaten als verborgene behandelt. Die erste und zweite Darstellung, welche auf die charakteristische Funktion führte, gab im Grunde nur die Bahn des Systems und entsprach dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Die dritte und vierte Darstellung, welche auf die Prinzipalfunktion führte, gab vollständig die Bewegung und entsprach dem HAMILTONSchen Prinzip.
- 660 2. Alle vier Darstellungen haben denselben einfachen physikalischen Sinn und für alle ist der Grund der mathematischen Verwickelung derselbe. Der einfache physikalische



Sinn besteht in der Tatsache, daß die natürlichen Bahnen stets geradeste Bahnen sind, und in dem rein geometrischen Zusammenhange dieser Bahnen mit der geradesten Entfernung in holonomen Systemen. Der Grund der mathematischen Verwickelung aber besteht darin, daß wir nicht stets alle wesentlichen Bestimmungsstücke der Bewegung gleichmäßig behandelten, sondern einige derselben als verborgene eliminierten. Wir können auch sagen, die Ungleichmäßigkeit bestehe darin, daß wir für einige Koordinaten die Anfangs- und Endwerte, für andere Koordinaten die Anfangsgeschwindigkeiten als Bestimmungsstücke einfuhrten. Unsere Ableitungsweise war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, dies Verhältnis möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

3. Man kann weitere Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems geben, indem man weitere Koordinaten eliminiert, oder indem man auch für die sichtbaren Koordinaten nicht die Anfangs- und Endwerte, sondern andere Größen als Bestimmungsstücke einführt, oder indem man von den partiellen Differentialgleichungen 650 oder 658 ausgeht, in ähnlicher Weise, wie dies für die geradeste Entfernung in 232 u. ff. geschehen ist. Solche Darstellungen können in besonderen Fällen mathematische Vorteile bieten, wie JACOBI in umfassender Weise gezeigt hat. Je mehr man aber in dieser Richtung fortschreitet, desto mehr verbirgt sich der physikalische Sinn der Operationen hinter deren mathematischer Form, desto mehr nehmen die benutzten Funktionen den Charakter von Hilfskonstruktionen an, welchen es nicht mehr möglich ist, eine physikalische Bedeutung beizulegen. 661

### Nicht-konservative Systeme.

#### Erläuterungen und Bemerkungen.

1. Enthält ein materielles System keine anderen verborgenen Massen, als solche, welche in adiabatischer cyklischer Bewegung begriffen sind, so ist es bei freier Verfügung über die sichtbaren Koordinaten jederzeit möglich, Energie, welche in die Energie der verborgenen Massen übergegangen ist, in 662



die Energie der sichtbaren Massen zurückzuverwandeln. Die einmal im System vorhandene sichtbare Energie kann also dauernd als sichtbare Energie erhalten bleiben.

Dies ist die Eigenschaft, auf Grund deren wir solche Systeme als konservative bezeichneten. Aus dem gleichen Grunde bezeichnen wir die von den verborgenen Massen solcher Systeme ausgeübten Kräfte als konservative Kräfte.

- 663     2. Im Gegensatz dazu werden solche Systeme, bei welchen die freie Verfügung über die sichtbaren Koordinaten nicht ausreicht, verborgene Energie jederzeit in sichtbare zurückzuverwandeln, als nicht-konservative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme als nicht-konservative Kräfte bezeichnet. Nicht-konservative Systeme, in welchen die Energie sich vorzugsweise aus der Energie sichtbarer Massen in die Energie der verborgenen Massen verwandelt, nicht aber umgekehrt, heißen dissipative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme dissipative Kräfte.
- 664     3. Im allgemeinen sind die Systeme und Kräfte der Natur nicht-konservativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand ist eine notwendige Folge davon, daß die konservativen Systeme nur Ausnahmefälle, sogar nur mit mehr oder weniger Annäherung erreichte (550) Ausnahmefälle bilden, daß also für ein beliebig herausgegriffenes natürliches System eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, daß es ein konservatives sei. Erfahrungsmäßig aber sind weiter die Systeme und Kräfte der Natur dissipativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand findet eine hinreichende Erklärung in der Hypothese, daß in der Natur die Zahl der verborgenen Massen und ihrer Bewegungsfreiheiten unendlich groß sei gegen die Zahl der sichtbaren Massen und deren sichtbarer Koordinaten, so daß für eine beliebig herausgegriffene Bewegung eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, daß sich die Energie gerade in der besonderen und ausgezeichneten Richtung von jener großen Zahl von Massen auf diese ganz bestimmte kleine Zahl hin konzentrierte.
- 665     4. Übrigens steht der Unterschied zwischen konservativen



und dissipativen Systemen und Kräften nicht in der Natur, sondern beruht lediglich auf der freiwilligen Beschränkung unserer Auffassung oder der unfreiwilligen Beschränktheit unserer Kenntnis der natürlichen Systeme. Werden alle Massen der Natur als sichtbare Massen betrachtet, so fällt jener Unterschied fort, und alle Kräfte der Natur können alsdann als konservative Kräfte bezeichnet werden.

5. Die konservativen Kräfte erscheinen im allgemeinen 666 als Differentialquotienten von Kräftefunktionen, also als solche Funktionen der sichtbaren Koordinaten der Systeme, welche unabhängig von der Zeit sind. Die nicht-konservativen Kräfte hängen außerdem im allgemeinen von den ersten und von höheren Differentialquotienten der sichtbaren Koordinaten nach der Zeit ab. Bei jeder analytisch gegebenen Form einer Kraft beider Arten kann die Frage aufgeworfen werden, ob diese Form mit den Voraussetzungen unserer Mechanik verträglich sei, oder ihr widerspreche.

6. Auf diese letztere Frage kann im allgemeinen Ant- 667 wort nicht erteilt werden; im einzelnen ist sie nach folgenden Gesichtspunkten zu beurteilen:

1. Wenn irgend ein gesetzmäßiges stetiges System aufgewiesen werden kann, welches Kräfte der gegebenen Form ausübt, so ist bewiesen, daß die gegebene Form den Ansprüchen unserer Mechanik genügt.

2. Wenn die Unmöglichkeit nachgewiesen werden kann, ein solches System aufzufinden, so ist gezeigt, daß die gegebene Form unserer Mechanik widerspricht.

3. Wenn in der Natur irgend ein System aufgewiesen werden kann, welches erfahrungsmäßig Kräfte der gegebenen Form ausübt, so betrachten wir dadurch zunächst als bewiesen, daß die gegebene Form mit unserer Mechanik verträglich ist.

Trifft keiner der Fälle 1. 2. 3. zu, so muß die gestellte Frage eine offene bleiben. Sollte sich eine Form der Kraft finden, welche nach 2. zurückzuweisen wäre, nach 3. aber zugelassen werden müßte, so wäre damit die Unzulänglichkeit der Hypothese, welche unserer Mechanik zugrunde liegt, und damit die Unzulänglichkeit dieser Mechanik selbst erwiesen.