Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

I. Cyklische Bewegung

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Die zweite Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und der Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt. In der Physik wird diese Methode als die dynamische Messung der Kraft bezeichnet. Sie wurde z. B. von NEWTON angewandt, als er die auf die Planeten wirkende Kraft aus deren Bewegung ableitete. 543

Die dritte Methode bestimmt die Kraft, indem sie sie mit bekannten Kräften ins Gleichgewicht bringt. Diese Methode wird die statische genannt. Auf ihr beruhen z. B. alle Kräftemessungen mit der Wage. 544

Angewandt zur Bestimmung einer und derselben Kraft unter Beobachtung der von uns abgeleiteten Beziehungen müssen aber diese drei verschiedenen Methoden unter allen Umständen zu dem gleichen Resultate führen, wenn anders das Grundgesetz, auf welches sich unsere Überlegungen stützen, wirklich alle mögliche mechanische Erfahrung richtig zusammenfaßt. 545

Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen.

I. Cyklische Bewegung.

Definition 1. Cyklische Koordinate eines Systems heißt eine freie Koordinate des Systems dann, wenn die Länge einer unendlich kleinen Verrückung des Systems nicht von dem Werte der Koordinate, sondern nur von dem ihrer Änderung abhängt. 546

Anmerkung 1. Es gibt cyklische Koordinaten. Denn es genügt z. B. eine rechtwinklige Koordinate des Systems, wenn sie frei ist, der Voraussetzung. Cyklische Koordinaten können stets eingeführt werden, wenn unendlich kleine Verrückungen des Systems möglich sind, welche nicht eine Änderung der Massenverteilung im Raume zur Folge haben, sondern nur eine cyklische Vertauschung der Massen unter sich. 547

Daher der Name. Es können aber auch unter anderen Verhältnissen cyklische Koordinaten auftreten, wie es das Beispiel der rechtwinkligen Koordinaten zeigt.

548 **Anmerkung 2.** Die Energie eines Systems hängt nicht ab von dem Werte seiner cyklischen Koordinaten, sondern nur von deren Änderungsgeschwindigkeiten mit der Zeit.

549 **Definition 2.** Cyklisches System heißt ein materielles System, dessen Energie mit hinreichender Annäherung als eine homogene quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeiten seiner cyklischen Koordinaten erscheint.

Ein cyklisches System heißt ein monocyklisches, dicyklisches, usw., je nachdem es eine, zwei, usw. cyklische Koordinaten besitzt.

In einem cyklischen System werden die nicht cyklischen Koordinaten auch die Parameter des Systems genannt; die Änderungsgeschwindigkeiten der cyklischen Koordinaten nennen wir auch die cyklischen Intensitäten.

550 **Anmerkung 1.** Die Bedingung, deren angenäherte Erfüllung für cyklische Systeme erfordert wurde, kann mit Strenge überhaupt nicht erfüllt sein, abgesehen von dem Falle, daß das System nur cyklische Koordinaten besitzt.

Denn ist eine Größe Koordinate eines Systems, so bedingt ihre Änderung eine Verrückung mindestens eines materiellen Punktes des Systems; die Energie dieses Punktes ist also quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeit jener Koordinate, und für die Energie des Systems gilt demnach das gleiche. Die Energie eines jeden Systems enthält daher in Strenge notwendig die Änderungsgeschwindigkeiten aller Größen, welche überhaupt Koordinaten des Systems sind, also auch die Energie eines cyklischen Systems die Änderungsgeschwindigkeiten seiner Parameter.

551 **Anmerkung 2.** Jene Bedingung für das Auftreten eines cyklischen Systems kann aber mit jedem beliebigen Grade der Annäherung erfüllt sein, sobald das System überhaupt cyklische Koordinaten besitzt.

Sie ist nämlich erfüllt in dem Falle, daß die Teile der Energie, welche die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter enthalten, verschwinden gegen die Teile, welche von den cyklischen Intensitäten abhängen, und dies kann stets dadurch erreicht werden, daß die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter hinreichend klein, oder daß die cyklischen Intensitäten hinreichend groß angenommen werden. Wie groß diese oder wie klein jene angenommen werden müssen, damit ein bestimmter Grad der Annäherung erzielt werde, hängt ab von den besonderen Werten der Koeffizienten im Ausdruck der Energie.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die Bedingung der cyklischen Systeme mit so großer Annäherung erfüllt sei, daß wir so reden können, als sei sie genau erfüllt.

Bezeichnung. Wir bezeichnen die cyklischen Koordinaten 552
des Systems mit $\mathfrak{p}_\varrho$, mit $\mathfrak{r}$ ihre Zahl, die Momente des Systems nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ mit $\mathfrak{q}_\varrho$. Die r nicht cyklischen Koordinaten des Systems mögen mit p_ϱ, die Momente nach ihnen mit q_ϱ bezeichnet werden. Die Masse des cyklischen Systems sei $\mathfrak{m}$.

Die äußeren Kräfte, welche auf das System wirken, mögen nach den p_ϱ die Komponenten P_ϱ, nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ die Komponenten $\mathfrak{P}_\varrho$ haben. Die Kräfte, welche das System selbst ausübt, haben dann nach den p_ϱ, beziehlich den $\mathfrak{p}_\varrho$ Komponenten, welche nach **467** mit P'_ϱ, beziehlich $\mathfrak{P}'_\varrho$ zu bezeichnen sind.

Folgerung 1. Die Energie $\mathfrak{E}$ eines cyklischen Systems 553
kann geschrieben werden in den Formen (**286**):

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_\varrho \dot{\mathfrak{p}}_\sigma$$

$$= \frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\mathfrak{q}_\varrho \mathfrak{q}_\sigma \quad ,$$

in welchen die $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$ und $\mathfrak{b}_{\varrho\sigma}$ Funktionen allein der p_ϱ, nicht aber der $\mathfrak{p}_\varrho$ sind (**548**), übrigens aber dieselben Eigenschaften und denselben Zusammenhang haben, wie die $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ (**59** ff.).

Betrachten wir $\mathfrak{E}$ als Funktion der p_ϱ und der $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$, wie es die erste Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit $\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden; betrachten wir aber $\mathfrak{E}$ als Funktion der p_ϱ und der $\mathfrak{q}_\varrho$, wie es die zweite Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit $\partial_\mathfrak{q}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden (vergl. **288**).

554 **Folgerung 2.** Für alle Werte des ϱ gelten die Gleichungen:

a) (289) $$\frac{\partial_\mathfrak{p}\mathfrak{E}}{\partial \dot{p}_\varrho} = q_\varrho = 0 \quad ,$$

b) (290) $$\frac{\partial_\mathfrak{q}\mathfrak{E}}{\partial q_\varrho} = \dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

c) $$\frac{\partial_\mathfrak{p}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\varrho} = 0 \quad ,$$

d) $$\frac{\partial_\mathfrak{q}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\varrho} = 0 \quad ,$$

Diese Gleichungen enthalten die charakteristischen Merkmale der cyklischen Systeme, und auf ihnen beruhen die besonderen Eigentümlichkeiten derselben.

Die Gleichung **b)** wiederholt die Bemerkung (**550**), daß ein Widerspruch besteht zwischen der Annahme, daß die Form der Energie genau die angenommene sei und daß gleichwohl die p_ϱ mit der Zeit veränderliche Größen seien. Wir haben die Gleichung gemäß **551** dahin zu deuten, daß, wenn $\mathfrak{E}$ sehr angenähert die gewählte Gestalt hat, die p_ϱ als langsam sich verändernde Größen betrachtet werden müssen.

Kräfte und Kräftefunktion.

555 **Aufgabe 1.** Die Kraft P'_ϱ zu bestimmen, welche das cyklische System nach seinem Parameter p_ϱ ausübt.

Zufolge der Gleichungen **493c**, **d** und **554a** erhalten wir:

a) $$P'_\varrho = \frac{\partial_\mathfrak{p}\mathfrak{E}}{\partial p_\varrho} = -\frac{\partial_\mathfrak{q}\mathfrak{E}}{\partial p_\varrho}$$

oder in entwickelter Form:

$$P'_\varrho = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \qquad \text{b)}$$

$$= -\frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{b}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau \quad . \qquad \text{c)}$$

Folgerung. Die Kräfte eines cyklischen Systems nach 556
seinen Parametern sind unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten dieser Parameter.

Vorausgesetzt ist jedoch immer, daß diese Änderungsgeschwindigkeiten nicht dasjenige Maß übersteigen, welches erlaubt, das System als ein cyklisches zu behandeln. So sind in der Elektrodynamik die Anziehungen zwischen Magneten zwar unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Bewegung, aber doch nur so lange, als diese Geschwindigkeit weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt.

Aufgabe 2. Die Kraft $\mathfrak{P}'_\varrho$ zu bestimmen, welche das 557
cyklische System nach seiner cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt.

Zufolge der Gleichungen **493c** und **554c** erhält man:

$$\mathfrak{P}'_\varrho = -\dot{\mathfrak{q}}_\varrho \quad . \qquad \text{a)}$$

Entwickelt, hat man, da (**270**)

$$\mathfrak{q}_\varrho = \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad , \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{P}'_\varrho = -\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\ddot{\mathfrak{p}}_\sigma - \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau \quad . \qquad \text{c)}$$

Folgerung. Wirkt auf ein cyklisches System eine äußere 558
Kraft, deren Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ die $\mathfrak{P}_\varrho$ sind, so ändern sich die cyklischen Momente nach den Gleichungen:

$$\dot{\mathfrak{q}}_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Lehrsatz. Wenn auf die cyklischen Koordinaten eines 559 cyklischen Systems keine Kräfte wirken, so sind die sämtlichen cyklischen Momente des Systems konstant in der Zeit.

Denn sind die $\mathfrak{P}_\varrho$ gleich Null, so ergeben die vorigen Gleichungen durch Integration

$$\mathfrak{q}_\varrho = \text{constans} \quad .$$

560 **Definition.** Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Momente konstant bleiben, heißt eine adiabatische Bewegung. Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Intensitäten konstant bleiben, heißt eine isocyklische Bewegung.

Adiabatisch, beziehlich isocyklisch wird das cyklische System selbst genannt, wenn es gezwungen ist, keine anderen Bewegungen auszuführen, als nur adiabatische, beziehlich isocyklische.

561 **Anmerkung 1.** Die analytische Bedingung der adiabatischen Bewegung ist diese, daß für alle ϱ:

$$\dot{\mathfrak{q}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \mathfrak{q}_\varrho = \text{constans}$$

sei. Die analytische Bedingung der isocyklischen Bewegung ist diese, daß für alle ϱ:

$$\ddot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \text{constans}$$

sei.

562 **Anmerkung 2.** Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine adiabatische, sobald auf die cyklischen Koordinaten dauernd keine Kräfte wirken. Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine isocyklische, wenn es nach den cyklischen Koordinaten mit anderen Systemen gekoppelt ist, welche konstante Änderungsgeschwindigkeit der gekoppelten Koordinaten besitzen. Damit die Bewegung eine isocyklische sei, müssen also geeignete Kräfte auf die cyklischen Koordinaten wirken.

563 **Definition.** Lassen sich die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern darstellen als die partiellen

Differentialquotienten einer Funktion der Parameter und konstanter Größen, nach den Parametern, so heißt diese Funktion die Kräftefunktion des cyklischen Systems.

Lehrsatz. Sowohl für die adiabatische, als auch für die isocyklische Bewegung besteht eine Kräftefunktion. 564

Denn für die adiabatische Bewegung folgt aus **555c**:

$$P'_\varrho = -\frac{\partial}{\partial p_\varrho} \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \mathfrak{b}_{\sigma\tau} \frac{\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau}{2\mathfrak{m}} \quad , \qquad \text{a)}$$

und hierin sind die Größen $\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau / \mathfrak{m}$ Konstanten und die $\mathfrak{b}_{\sigma\tau}$ Funktionen lediglich der Parameter.

Entsprechend folgt für die isocyklische Bewegung aus **555b**:

$$P'_\varrho = \frac{\partial}{\partial p_\varrho} \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \frac{\mathfrak{m}}{2} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad , \qquad \text{b)}$$

und hierin sind wiederum die Größen $\mathfrak{m}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau$ Konstanten und die $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ Funktionen lediglich der Parameter.

Anmerkung. Die Kräftefunktion für die adiabatische und für die isocyklische Bewegung unterscheiden wir auch wohl als adiabatische bez. isocyklische Kräftefunktion. Es gibt weitere Bewegungsformen des Systems, für welche Kräftefunktionen bestehen, aber nicht für jede beliebige Bewegung besteht eine solche. 565

Zusatz 1. Die Kräftefunktion eines adiabatischen Systems ist gleich der Abnahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich einer willkürlichen, d. h. durch die Definition nicht bestimmten Konstanten, vermindert um die Energie des Systems. 566

Zusatz 2. Die Kräftefunktion eines isocyklischen Systems ist gleich der Zunahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich der Energie des Systems, vermindert um eine willkürliche Konstante. 567

Reziproke Eigentümlichkeiten.

568 **Lehrsatz 1a.** Wenn in einem adiabatischen System eine Vergrößerung des Parameters p_μ die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter p_λ steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von p_λ die Kraft nach p_μ. Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn in einem adiabatischen System können wir die p_ϱ als die hinreichenden unabhängigen Bestimmungsstücke der P'_ϱ betrachten, und es liefert uns daher die für adiabatische Systeme gültige Gleichung **564a**:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

569 **Lehrsatz 1b.** Wenn in einem isocyklischen System eine Vergrößerung des Parameters p_μ die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter p_λ steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von p_λ die Kraft nach p_μ. Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn auch in einem isocyklischen System können wir die p_ϱ als hinreichende unabhängige Bestimmungsstücke der P'_ϱ ansehen, und es liefert uns daher die für isocyklische Systeme gültige Gleichung **564b**:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Es ist zu bemerken, daß diese Gleichung von der vorigen dem Sinne nach verschieden, wenn auch der Form nach identisch ist.

570 **Anmerkung.** Damit die vorstehenden beiden Lehrsätze eine physikalische Anwendung gestatten, genügt es, daß von

dem cyklischen System zwei Parameter und die Kräfte nach diesen der unmittelbaren Beobachtung zugänglich seien.

Lehrsatz 2a. Wenn in einem cyklischen System eine 571
Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}_\mu$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_q \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda} \qquad (555\text{a}) \quad , \qquad \dot{\mathfrak{p}}_\mu = \frac{\partial_q \mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_\mu} \qquad (290) \quad ,$$

also ist

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \mathfrak{q}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad , \qquad \text{a)}$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz die richtige Interpretation ist.

Folgerung. Wenn in einem monocyklischen System eine 572
Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}$ hervor, und umgekehrt.

Denn in einem monocyklischen System geht Vermehrung der cyklischen Intensität und Vermehrung des cyklischen Momentes bei festgehaltenen Parametern stets Hand in Hand. Für ein monocyklisches System ist nämlich

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{p}} \quad ,$$

worin $\mathfrak{a}$ eine notwendig positive (62) Funktion der Parameter des Systems ist.

Lehrsatz 2b. Wenn in einem cyklischen System eine 573
Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ bei festgehaltenen

Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Vermehrung des cyklischem Moments $\mathfrak{q}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = \frac{\partial_\mathfrak{p} \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555\,\mathrm{a}) \quad , \qquad \mathfrak{q}_\mu = \frac{\partial_\mathfrak{p} \mathfrak{E}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} \quad (289) \quad ,$$

also ist:

a)
$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{q}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den Ausdruck in Worten gibt.

574 **Folgerung.** Wenn in einem monocyklischen System eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}$ hervor, und umgekehrt.

Der Grund ist derselbe wie in **572**.

575 **Anmerkung.** Die vorstehenden Lehrsätze 2a und 2b gestatten eine physikalische Anwendung dann, wenn es möglich ist, neben einer cyklischen Intensität auch das entsprechende cyklische Moment unmittelbar, d. h. ohne Kenntnis der Koeffizienten $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$, zu bestimmen. Dies kann eintreten. In der Elektrostatik entsprechen z. B. die Potentialdifferenzen der Leiter den cyklischen Intensitäten, die Elektrizitätsmengen der Leiter den cyklischen Momenten, und beide Größen können unabhängig voneinander unmittelbar bestimmt werden.

Die Folgerungen verlangen nur die unmittelbare Bestimmbarkeit entweder der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes.

576 **Lehrsatz 3a.** Wenn in einem cyklischen System eine auf die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}_\mu$ ausgeübte Kraft ein zeitliches Anwachsen der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so

ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn denken wir uns in der linken Seite der Gleichung **571a** die Änderungen $\partial P'_\lambda$ und $\partial \mathfrak{q}_\mu$ entstanden in der Zeit dt, dividieren wir den Differentialquotienten im Zähler und Nenner durch diese Zeit dt, und beachten die Gleichung **558**, indem wir die Änderung $\partial \mathfrak{q}_\mu$ als Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}_\mu$ ansehen, so folgt:

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den vervollständigten Ausdruck in Worten gibt.

Lehrsatz 3b. Wenn in einem cyklischen System eine Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der Kraft des Systems nach der cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche. 577

Denken wir uns in der rechten Seite der Gleichung **573a** die Änderungen $\partial \mathfrak{q}_\mu$ und ∂p_λ entstanden in der Zeit dt, so können wir setzen:

$$\partial \mathfrak{q}_\mu = \frac{d}{dt}\mathfrak{q}_\mu \cdot dt = \dot{\mathfrak{q}}_\mu\, dt = -\mathfrak{P}'_\mu\, dt \qquad (\mathbf{557a}) \; ,$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt} p_\lambda \cdot dt = \dot{p}_\lambda\, dt \quad ;$$

es wird also jene Gleichung:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = -\frac{\mathfrak{P}'_\mu}{\dot{p}_\lambda} \quad ,$$

welche Aussage der Lehrsatz in Worten wiedergibt.

578 **Anmerkung.** Die Lehrsätze 3a und 3b gestatten die physikalische Anwendung dann, wenn neben einer cyklischen Intensität auch die entsprechende cyklische Kraftkomponente der unmittelbaren Beobachtung zugänglich ist. Dies trifft zum Beispiel für die Elektrodynamik zu, und man versinnlicht sich die Bedeutung der Lehrsätze 3a und 3b am besten, indem man sie in die Redeweise dieses Zweiges der Physik übersetzt.

Energie und Arbeit.

579 **Lehrsatz 1.** Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die Koppelung seiner cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig das Doppelte der Arbeit, welche es durch die Koppelung seiner Parameter abgibt.

Bei der isocyklischen Bewegung ist $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ für alle ϱ gleich Null, also nach **514** und **557c** die Arbeit, welche die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden äußeren Kräfte in der Zeiteinheit leisten, gleich:

$$-\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \mathfrak{P}'_\varrho \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma} \sum_1^{r}{}_{\tau} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{p}_\tau \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Die Arbeit aber, welche das System durch seine Kräfte nach den Parametern leistet, berechnet auf die Zeiteinheit, wird gefunden mit Hilfe von **555b** gleich:

$$\sum_1^{r}{}_{\varrho}\, P'_\varrho \dot{p}_\varrho = \frac{1}{2}\mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_{\varrho} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\tau} \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \dot{p}_\varrho \quad .$$

Die Summen in beiden Gleichungen sind bis auf die Bezeichnung identisch, und die Glieder der ersten Gleichung sind daher doppelt so groß als die der letzten.

580 **Folgerung.** Wenn ein isocyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein isocyklisches System durch die

Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn die Zunahme der Energie des Systems ist gleich dem Unterschiede der von den cyklischen Koordinaten aufgenommenen und der durch die Parameter abgegebenen Arbeit.

Anmerkung. Wenn ein adiabatisches System durch die 581
Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn in einem adiabatischen System wird durch die cyklischen Koordinaten keine Arbeit aufgenommen (**562**).

Lehrsatz 2. Bei der adiabatischen Verrückung eines 582
cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte nach den Parametern bei der Verrückung negative Arbeit leisten.

Es mögen bei der Verrückung die p_ϱ die Änderungen δp_ϱ und die Intensitäten $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ die Änderungen $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ erleiden. Fänden nur die letzteren Änderungen statt, so würden sich die Kräfte P'_ϱ ändern um die Beträge (**555b**):

$$\delta P'_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und diese $\delta P'_\varrho$ sind es, welche der Lehrsatz als die von den $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ hervorgerufenen Kräfte bezeichnet. Die von ihnen geleistete Arbeit ist gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho \, \delta P'_\varrho \, \delta p_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \, \delta p_\varrho$$

$$= \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \, \delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau} \, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und die Behauptung geht dahin, daß diese Arbeit notwendig negativ sei. Nun ist aber für die adiabatische Bewegung:

$$\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = \text{constans} \quad ,$$

also:

$$\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = - \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad .$$

Bilden wir diese Gleichungen für alle τ, multiplizieren sie der Reihe nach mit $\mathfrak{m}\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ und addieren, so erhalten wir links den vorigen Ausdruck für die betrachtete Arbeit, rechts eine notwendig negative Größe (62), womit die Behauptung erwiesen ist.

583 **Folgerung.** Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte die erzeugende Bewegung aufzuhalten streben.

Dies ist in der Tat nur eine andere Form, den vorigen Lehrsatz auszusagen. Sie entspricht der Ausdrucksweise der Lenzschen Regel in der Elektrodynamik.

584 **Bemerkung.** Bei jeder unendlich kleinen Bewegung eines monocyklischen Systems verhält sich die durch die cyklische Koordinate aufgenommene Arbeit zur Energie des Systems, wie der doppelte Zuwachs, welchen das cyklische Moment des Systems erfährt, zu diesem Moment.

Denn die während der Zeit dt durch die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$ aufgenommene Arbeit $d\mathfrak{Q}$ ist gleich:

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, \dot{\mathfrak{p}}\, dt = \dot{\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{q} \quad ,$$

während die Energie $\mathfrak{E}$ geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{q}\, \dot{\mathfrak{p}} \quad .$$

Also ist:

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}} = 2\, \frac{d\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung 1. Bei beliebiger Bewegung eines mono- 585
cyklischen Systems ist der Ausdruck

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

das vollständige Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems, nämlich der Funktion

$$2 \log \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0} \quad ,$$

in welcher $\mathfrak{q}_0$ das cyklische Moment für eine willkürlich gewählte Anfangslage bedeutet. Diese Funktion wird auch die Entropie des monocyklischen Systems genannt.

Folgerung 2. Der Wert des für eine beliebige endliche 586
Bewegung eines monocyklischen Systems gebildeten Integrales

$$\int \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

hängt nur ab von den Zuständen des Systems in der Anfangs- und Endlage der Bewegung, nicht aber von den zwischen beiden Lagen durchlaufenen Zuständen. Der Wert jenes Integrales wird Null für jede Bewegung, welche das System zu seinem Anfangszustand zurückführt.

Denn der Wert jenes Integrales ist gleich dem Unterschiede der Entropie im Anfangs- und im Endzustande der Bewegung.

Folgerung 3. Bei der adiabatischen Bewegung eines 587
monocyklischen Systems bleibt die Entropie konstant. Denn für die adiabatische Bewegung ist $\mathfrak{P}$, also auch $d\mathfrak{Q}$ gleich Null. Die adiabatische Bewegung eines monocyklischen Systems wird deshalb auch eine isentropische genannt.

Zeitintegral der Energie.

Bemerkung 1. Ändern sich bei der adiabatischen Be- 588
wegung eines cyklischen Systems die cyklischen Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$

in einer gewissen endlichen Zeit um die Beträge $\bar{\mathfrak{p}}_\varrho$, so ist das Zeitintegral der Energie des Systems, genommen über jene Zeit, gleich

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Denn es kann die Energie des Systems geschrieben werden in der Form (**286b**):

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad ,$$

und hierin sind für die adiabatische Bewegung die $\mathfrak{q}_\varrho$ Konstanten.

589 **Bemerkung 2.** Die Variation des Zeitintegrales der Energie eines adiabatischen Systems bei variierter Bewegung des Systems hängt ab erstens von der Variation der Parameter während der ganzen Zeit, über welche das Integral gebildet ist, zweitens aber auch von den in der Zeit konstanten Variationen, welche die in der Zeit konstanten cyklischen Momente des Systems erleiden.

590 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen im folgenden:

mit δ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente willkürliche Variationen erleiden,

mit $\delta_{\mathfrak{q}}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente keine Variationen erleiden,

endlich mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente solche Variationen erleiden, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

591 **Folgerung.** Aus der Bezeichnung folgt von selbst für alle ϱ:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\, \mathfrak{q}_\varrho = 0 \quad , \quad \delta_{\mathfrak{p}} \bar{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

also wird nach **588** für beliebige Variationen der Parameter:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int \mathfrak{E}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \mathfrak{q}_{\varrho}\,\delta_{\mathfrak{q}}\,\bar{\mathfrak{p}}_{\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int \mathfrak{E}\,dt = \frac{1}{2}\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\,\delta_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}_{\varrho} \quad . \qquad \text{b)}$$

Anmerkung. In einem adiabatischen System ist es stets, 592
und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise möglich, bei beliebiger Variation der Parameter den cyklischen Momenten solche Variationen zu erteilen, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn aus der allgemeinen Beziehung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_{\varrho} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\,\mathfrak{q}_{\sigma}$$

folgt für ein adiabatisches System, in welchem sich die $\mathfrak{p}_{\varrho}$ von den Werten $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$ auf die Werte $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$ ändern:

$$\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \mathfrak{q}_{\sigma}\int_{0}^{1} \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\,dt \quad ,$$

also bei beliebiger Variation der Parameter und der cyklischen Momente:

$$\delta\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \delta\mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \mathfrak{q}_{\sigma}\,\delta\int_{0}^{1} \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\,dt + \frac{1}{\mathfrak{m}}\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \delta\mathfrak{q}_{\sigma}\int_{0}^{1} \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\,dt \quad .$$

Diese Gleichungen aber bilden $\mathfrak{r}$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $\mathfrak{r}$ Größen $\delta\mathfrak{q}_{\sigma}$, welche also stets eine und zwar im allgemeinen nur eine Lösung zulassen, insbesondere auch dann, wenn die links stehenden Variationen verschwinden.

Variationen der Art, welche wir mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ bezeichneten, sind also auch bei beliebiger Variation der Parameter stets möglich.

Lehrsatz. Bei gleicher, übrigens willkürlicher Variation 593
der Parameter während einer gewissen Zeit fällt die Variation

des Zeitintegrals der Energie in einem adiabatischen System entgegengesetzt gleich aus, wenn man das eine Mal die cyklischen Momente des Systems unvariiert läßt, das andere Mal sie so variiert, daß Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn für eine beliebige Variation ist:

$$\delta\int\mathfrak{E}\,dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt+\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\int\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial\mathfrak{q}_{\varrho}}\,\delta\mathfrak{q}_{\varrho}\,dt$$

$$=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt+\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\,\bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\,\delta\mathfrak{q}_{\varrho}\quad,$$

also insbesondere für eine Variation, bei welcher Anfangs- und Endwerte der $\mathfrak{p}_{\varrho}$ unvariiert bleiben.

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int\mathfrak{E}\,dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt+\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\,\bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\,\delta_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}_{\varrho}\quad.$$

Subtrahiert man hiervon zweimal die Gleichung **591b**, so folgt:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt=-\,\delta_{\mathfrak{p}}\int\mathfrak{E}\,dt\quad,$$

welches die Behauptung ist.

Man vergleiche übrigens die verwandten Sätze **96** und **293**.

II. Verborgene cyklische Bewegung.

Erläuterungen und Definitionen.

594 **1.** Wir sagen, ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Koordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Teiles derselben.

595 **2.** Diejenigen Massen, deren Lagen bei vollständiger Angabe der beobachtbaren Koordinaten des Systems dennoch unbekannt bleibt, heißen verborgene Massen, ihre Bewegungen