

Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Innerer Zwang

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

des Systems eindeutig bestimmt sind, so sind doch die Komponenten in Richtung einer jeden möglichen Verrückung des Systems durch seine Bewegung eindeutig bestimmt.

Folgerung. Von der Kraft, welche ein bewegtes System 493 ausübt, sind die Komponenten in Richtung einer jeden freien Koordinate des Systems durch die Bewegung eindeutig bestimmt.

Ist nämlich p_e eine freie Koordinate, so verschwinden die $p_{\nu e}$ und damit die unbestimmten Glieder, und es kann die Komponente der Kraft des Systems nach p_e geschrieben werden in den Formen:

$$P'_e = -mf_e \quad (491) \text{ a)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_e} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_e} \right) \quad (291a) \text{ b)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_e} - \dot{q}_e \quad (291b) \text{ c)}$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_e} - \dot{q}_e \quad (294) \text{ d)}$$

Innerer Zwang.

Lehrsatz. Die Beschleunigung eines Systems materieller 494 Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, findet statt in Richtung der Kraft, welche auf das System wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Systems.

Denn wenn zwischen den n Punkten eines Systems keine Zusammenhänge bestehen, so ist für jede der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems (482):

$$\frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m} ;$$

die linken Seiten der Gleichungen aber stellen die Komponenten der Beschleunigung des Systems nach den x_ν dar (275).

495 **Folgerung.** Die Beschleunigung eines einzelnen materiellen Punktes geschieht in Richtung der Kraft, welche auf den Punkt wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Punktes. (NEWTONS Lex secunda.)

496 **Anmerkung.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems, auf welches eine Kraft wirkt, so weicht die Beschleunigung des Systems im allgemeinen ab von der durch den Lehrsatz 494 gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems ansehen, und die Abweichung selbst haben wir nach 385 als den inneren Zwang des Systems zu bezeichnen.

497 **Aufgabe.** Den inneren Zwang eines Systems zu bestimmen, welches sich unter dem Einfluß von Kräften bewegt.

Die wirkliche Komponente der Beschleunigung des Systems nach der allgemeinen Koordinate p_e ist f_e , die Komponente, welche nach Aufhebung der Bedingungsgleichungen eintreten würde, ist (494) P_e/m , der Unterschied beider Größen, oder:

$$a) \quad z_q = f_q - \frac{P_q}{m} ,$$

also die Komponente des Zwanges nach p_e .

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reicht die Kenntnis der Komponenten desselben nach den p_e im allgemeinen nicht aus (245). Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an, so erhalten wir für die Komponente nach x_v :

$$b) \quad z_v = \frac{1}{m} (m_v \ddot{x}_v - X_v) ,$$

also die Größe z des Zwanges als die positive Wurzel der Gleichung (244):

$$mz^2 = \sum_1^{3n} \frac{1}{m_v} (m_v \ddot{x}_v - X_v)^2$$

$$c) \quad = \sum_1^{3n} m_v \left(\ddot{x}_v - \frac{X_v}{m_v} \right)^2 .$$

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges eines materiellen 498 Systems unter dem Einfluß von Kräften ist wie bei einem freien System in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der X_v die Größe $\frac{1}{2}mz^2$ ein Minimum werde, erhalten wir nach derselben Methode wie in 155 die $3n$ Gleichungen:

$$m_v \ddot{x}_v - X_v + \sum_1^i x_{iv} X_i = 0 \quad ,$$

in welchen die X_i i unbestimmte Multiplikatoren bezeichnen, welche zusammen mit den $3n$ Größen \ddot{x}_v aus jenen $3n$ Gleichungen und den i Bedingungsgleichungen des Systems eindeutig zu bestimmen sind. Die vorstehenden Gleichungen aber ergeben dieselben Werte der \ddot{x}_v und X_i , wie die mit ihnen übereinstimmenden Gleichungen der natürlichen Bewegung (482).

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz enthält das voll- 499 ständige GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Wir können den Lehrsatz 388 als einen besonderen Fall desselben bezeichnen. Aber nach unserer ganzen Auffassung werden wir lieber jenen Lehrsatz als den allgemeinen ansehen und den vorliegenden als die Anpassung desselben an besondere, verwickeltere Verhältnisse betrachten.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der 500 natürlichen Bewegung eines Systems unter dem Einfluß einer Kraft, wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Denn zufolge 497 a und 481 lassen sich die Komponenten des Zwanges nach den p_e auch schreiben in der Form:

$$z_q = -\frac{1}{m} \sum_1^k p_{zq} P_z \quad ;$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (250) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

- 501 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit δp_e die Änderungen der Koordinaten p_e für irgend eine beliebige mögliche Verrückung des Systems, so können wir den vorstehenden Satz in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden (vergl. 393):

$$a) \quad \sum_1^r \left(f_e - \frac{P_e}{m} \right) \delta p_e = 0 \quad ,$$

welche unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Form annimmt:

$$b) \quad \sum_1^{3n} (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu) \delta x_\nu = 0 \quad .$$

- 502 **Anmerkung.** Der Lehrsatz 500 enthält das vollständige D'ALEMBERTSche Prinzip, die Gleichungen 501a und b die gewöhnliche Fassung desselben. Über das Verhältnis des Satzes 500 zu dem Satz 392 ist dasselbe zu bemerken, wie unter 499.
- 503 **Folgerung 1.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung einer jeden möglichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach dieser Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
Denn die Komponente des Zwanges nach der Richtung jeder möglichen Bewegung verschwindet.
- 504 **Folgerung 2.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung seiner wirklichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
- 505 **Folgerung 3.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems nach jeder freien Koordinate des Systems ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
- 506 **Lehrsatz.** Bei der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluß von Kräften ist die Komponente der Beschleunigung nach jeder Koordinate der absoluten

Lage beständig gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch der innere Zusammenhang des Systems ist.

Folgerung 1. Wählen wir die Koordinaten eines Systems 507
übrigens beliebig, jedoch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden, so können wir bei vorhandener Kenntnis der auf das System wirkenden Kräfte, aber ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs des Systems doch stets sechs der Bewegungsgleichungen des Systems angeben.

Folgerung 2. Treffen wir insbesondere über die Koordinaten 508
der absoluten Lage dieselbe Verfügung wie in 402 und wenden den Lehrsatz zunächst an auf die Richtung der 3 Koordinaten $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, so ergibt er uns die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sum_1^n m_v \ddot{x}_{3v} &= \sum_1^n X_{3v} \\ \sum_1^n m_v \ddot{x}_{3v-1} &= \sum_1^n X_{3v-1} \\ \sum_1^n m_v \ddot{x}_{3v-2} &= \sum_1^n X_{3v-2} .\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen, welche sich dahin interpretieren lassen, daß der Schwerpunkt sich so bewegt, als sei die ganze Masse des Systems in ihm vereinigt, und griffen an ihm alle Elementarkräfte an, bilden das sogenannte erweiterte Prinzip des Schwerpunkts. (Vergleiche 404.)

Folgerung 3. Angewandt auf die Richtung der drei Ko- 509
ordinaten der absoluten Lage $\omega_1 \omega_2 \omega_3$ ergibt der Lehrsatz die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned}\sum_1^n m_v (x_{3v-2} \ddot{x}_{3v-1} - x_{3v-1} \ddot{x}_{3v-2}) &= \sum_1^n (x_{3v-2} X_{3v-1} - x_{3v-1} X_{3v-2}) \\ \sum_1^n m_v (x_{3v} \ddot{x}_{3v-2} - x_{3v-2} \ddot{x}_{3v}) &= \sum_1^n (x_{3v} X_{3v-2} - x_{3v-2} X_{3v}) \\ \sum_1^n m_v (x_{3v-1} \ddot{x}_{3v} - x_{3v} \ddot{x}_{3v-1}) &= \sum_1^n (x_{3v-1} X_{3v} - x_{3v} X_{3v-1}) .\end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen bilden das sogenannte erweiterte Prinzip der Flächen. (Vergleiche 406.)

Energie, Arbeit.

- 510 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems vorgestellt als Folge einer auf das System ausgeübten Kraft, wird die Arbeit jener Kraft genannt.

Die Arbeit, welche eine Kraft in bestimmter Zeit leistet, wird gemessen durch die Zunahme der Energie des Systems, auf welches sie wirkt, in jener Zeit.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Vorhandenseins der Kraft rechnen wir als negative Zunahme. Die Arbeit einer Kraft kann also positiv oder negativ sein.

- 511 **Folgerung.** Während die auf ein System wirkende Kraft eine gewisse Arbeit leistet, leistet die von dem System ausgeübte Gegenkraft stets die entgegengesetzt gleiche Arbeit.

Denn die letztere Arbeit ist gleich der Zunahme der Energie desjenigen Systems, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist; die Summe der Energien beider Systeme aber ist konstant.

- 512 **Lehrsatz.** Die Arbeit, welche die auf ein System wirkende Kraft während der Durchlaufung eines Bahnelements leistet, ist gleich dem Produkt aus der Länge des Elements und der Komponente der Kraft in seiner Richtung.

Denn die Zunahme dE der Energie während des Zeitelements dt , in welchem das Bahnelement ds zurückgelegt wird, ist (283):

$$dE = m v \dot{v} dt = m \dot{v} ds .$$

Nach 280 ist aber \dot{v} die Komponente der Beschleunigung des Systems in Richtung seiner Bahn, also nach 504 $m\dot{v}$ die Komponente der Kraft in Richtung der Bahn.

- 513 **Anmerkung 1.** Die in Rede stehende Arbeit ist mit demselben Rechte auch gleich dem Produkt aus der Größe der