Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Bewegung unter dem Einfluß von Kräften

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Denn jede Elementarkraft ist Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen Punkt.

Folgerung 2. Die Zusammensetzung der Elementarkräfte, 478 welche an demselben Punkte angreifen, geschieht nach der Methode der geometrischen Zusammensetzung und Zerlegung von Strecken.

Insbesondere setzen sich also zwei Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, zusammen zu einer einzigen Kraft, welche nach Größe und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt ist, dessen Seiten nach Größe und Richtung jene Kräfte darstellen (Parallelogramm der Kräfte).

Folgerung 3. Jede Lagrangesche Kraft ist darstellbar 479 als eine Summe von Elementarkräften, also zerlegbar in Elementarkräfte.

Denn jede Verrückung eines Systems kann aufgefaßt werden als eine Summe von Verrückungen seiner einzelnen Punkte.

Folgerung 4. Die Komponenten einer Kraft nach den 480 rechtwinkligen Koordinaten des Systems, auf welches die Kraft wirkt, oder welches die Kraft ausübt, können unmittelbar aufgefaßt werden als Elementarkräfte, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

Bewegung unter dem Einfluß von Kräften.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems 481 unter dem Einfluß einer gegebenen Kraft zu bestimmen.

Die Auflösung folgt unmittelbar aus 457. Sind die P_ϱ die gegebenen Komponenten der wirkenden Kraft nach den p_ϱ, so benutze man die r Gleichungen

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho$$

zusammen mit den k Bedingungsgleichungen des Systems zur Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$, zu deren eindeutiger Bestimmung jene Gleichungen ausreichen.

482 **Anmerkung 1.** Die Bewegungsgleichungen eines Systems, auf welches Kräfte wirken, haben in den rechtwinkligen Koordinaten desselben die Form der $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i {}_\iota x_{\iota\nu} X_\iota = X_\nu \quad ,$$

wenn unter X_ν die Komponente der Kraft nach x_ν verstanden wird, und im übrigen die Bezeichnung von **368** benutzt wird.

483 **Anmerkung 2.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so nimmt die ihr entsprechende Bewegungsgleichung die einfache Form an:

$$m f_\varrho = P_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle p_ϱ freie Koordinaten, so nehmen alle Bewegungsgleichungen des Systems diese Form an, und diese r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Größen $\ddot{p}_\varrho$.

484 **Folgerung.** Die natürliche Bewegung eines materiellen Systems von einem bestimmten Augenblick an ist eindeutig bestimmt durch die Lage und Geschwindigkeit des Systems in jenem Augenblick und die Angabe der auf das System wirkenden Kraft für alle Zeiten von jenem Augenblick an (vergl. **331**, **444**).

485 **Lehrsatz.** Die Beschleunigung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte einem System erteilen, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Kräfte einzeln wirkend dem System erteilen würden.

Denn die Bewegungsgleichungen **481** sind linear in den f_ϱ und den $P_\varkappa$. Sind also die Wertsysteme $f_{\varrho_1} P_{\varkappa_1}$, $f_{\varrho_2} P_{\varkappa_2}$, usw. die Auflösungen dieser Gleichungen für die Kräfte P_{ϱ_1}, P_{ϱ_2}, usw., so ist das Wertsystem $f_{\varrho_1} + f_{\varrho_2} +$ usw., $P_{\varkappa_1} + P_{\varkappa_2} +$ usw. die Auflösung für die Kraft $P_{\varrho_1} + P_{\varrho_2} +$ usw.

486 **Anmerkung.** Der Inhalt des Lehrsatzes kann auch wiedergegeben werden in der Aussage, daß mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte sich hinsichtlich der Beschleunigung, welche

sie erzeugen, nicht stören. Ohne einen besonderen Namen erhalten zu haben, ist dieser Satz seit Galileis Zeiten stets als Prinzip angenommen und benutzt worden.

Folgerung. Die Beschleunigung, welche eine resultierende Kraft einem System erteilt, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Komponenten, einzeln wirkend, dem System erteilen würden (**472**, **473**). 487

Lehrsatz. Steht eine Kraft als Vektorgröße senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines materiellen Systems, so übt sie keinen Einfluß auf die Bewegung des Systems aus, — und umgekehrt. 488

Denn ist π eine solche Kraft, so haben ihre Komponenten π_ϱ nach den p_ϱ die Form (**250**):

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad .$$

Lassen wir nun diese Kraft neben der Kraft P auf das System wirken, so können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden:

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} (P_\varkappa - \gamma_\varkappa) = P_\varrho \quad .$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ erscheinen also nur die $P_\varkappa$ vergrößert um die $\gamma_\varkappa$; die $\ddot{p}_\varrho$, welche allein die Bewegung bestimmen, erscheinen unverändert.

Umgekehrt: Ändert die Hinzufügung der Komponenten π_ϱ zu den rechten Seiten der Gleichungen 481 nicht die f_ϱ, sondern nur die $P_\varkappa$, so lassen sich die π_ϱ schreiben in der Form:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ;$$

die Kraft π steht also senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems (**250**).

489 **Anmerkung.** Der Lehrsatz gibt die Bedingung an, welcher derjenige Teil einer als Vektorgröße betrachteten Kraft unterworfen ist, welcher von der Wahl der Koordinaten, also von unserer Willkür abhängt (**463**). Denn dieser Teil muß notwendig ein solcher sein, welcher in der wirklichen Bewegung nicht zur Geltung kommt.

490 **Folgerung.** Obgleich aus der Kenntnis der auf ein System wirkenden Kraft eindeutig geschlossen werden kann auf die Bewegung des Systems, so kann doch aus der Bewegung des Systems nicht eindeutig geschlossen werden auf die Kraft, welche das System beeinflußt.

491 **Aufgabe 2.** Die Kraft zu bestimmen, welche ein materielles System bei gegebener Bewegung ausübt.

Nach **467** bezeichnen wir mit P'_ϱ die Komponente der gesuchten Kraft nach der Koordinate p_ϱ; aus **468** und **481** folgt dann:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad .$$

In diesen Gleichungen sind die f_ϱ als gegeben zu betrachten, und zwar müssen sie in den Bedingungsgleichungen an sich genügen. Die Größen $P_\varkappa$ sind ebenfalls bestimmt, wenn auch dasjenige System gegeben wird, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist. Solange aber nur die Bewegung des Systems der p_ϱ gegeben ist, bleiben die $P_\varkappa$ unbekannt. Die Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, ist also allein durch die Angabe der Bewegung des Systems noch nicht völlig bestimmt, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, dessen Komponenten die Form haben:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

und welcher daher auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrecht steht.

492 **Anmerkung.** Obwohl von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegung

des Systems eindeutig bestimmt sind, so sind doch die Komponenten in Richtung einer jeden möglichen Verrückung des Systems durch seine Bewegung eindeutig bestimmt.

Folgerung. Von der Kraft, welche ein bewegtes System 493
ausübt, sind die Komponenten in Richtung einer jeden freien Koordinate des Systems durch die Bewegung eindeutig bestimmt.

Ist nämlich p_ϱ eine freie Koordinate, so verschwinden die $p_{\varkappa\varrho}$ und damit die unbestimmten Glieder, und es kann die Komponente der Kraft des Systems nach p_ϱ geschrieben werden in den Formen:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho \qquad (491)\ \text{a)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) \qquad (291\text{a})\ \text{b)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (291\text{b})\ \text{c)}$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (294).\ \text{d)}$$

Innerer Zwang.

Lehrsatz. Die Beschleunigung eines Systems materieller 494
Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, findet statt in Richtung der Kraft, welche auf das System wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Systems.

Denn wenn zwischen den n Punkten eines Systems keine Zusammenhänge bestehen, so ist für jede der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems (482):

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m} \quad ;$$

die linken Seiten der Gleichungen aber stellen die Komponenten der Beschleunigung des Systems nach den x_ν dar (275).