Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Wirkung und Gegenwirkung

Bemerkung 3. Da aber alle Kräfte, von welchen schlecht- 466
hin die Rede ist, doch keine anderen sein können, als welche von materiellen Systemen zufolge des Grundgesetzes auf materielle Systeme ausgeübt werden, so haben alle Kräfte von vornherein gewisse Eigenschaften gemeinsam. Die Quelle aller solcher gemeinsamen Eigenschaften sind die Eigenschaften der materiellen Systeme und das Grundgesetz.

Wirkung und Gegenwirkung.

Bezeichnung. 1. Die Komponenten der Kraft, welche das 467
System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das der p_ϱ ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der p_ϱ, haben wir in **460** bereits bezeichnet mit P_ϱ. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, so wollen wir ihre Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen mit $\mathfrak{P}'_\varrho$. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$P_\varrho = \mathfrak{P}'_\varrho \quad .$$

2. Die Komponenten der Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, haben wir in **460** bereits bezeichnet mit $\mathfrak{P}_\varrho$. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der p_ϱ, so wollen wir ihre Komponenten nach den p_ϱ bezeichnen mit P'_ϱ. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$\mathfrak{P}_\varrho = P'_\varrho \quad .$$

Die auf ein System ausgeübten Kräfte sind also durch nicht akzentuierte, die von dem System ausgeübten Kräfte durch akzentuierte Buchstaben bezeichnet, sobald wir sie als Vektorgrößen in bezug auf das System selbst betrachten.

Lehrsatz. Kraft und Gegenkraft sind einander stets ent- 468
gegengesetzt gleich. Es soll damit gesagt sein, daß die Komponenten beider nach jeder der benutzten Koordinaten entgegengesetzt gleich sind, und zwar sowohl wenn wir Kraft

(468) und Gegenkraft betrachten als Vektorgrößen in bezug auf das eine, als auch in bezug auf das andere System.

Denn wir können auch die beiden gekoppelten Systeme (457) betrachten als ein einziges, freies System. Seine Masse ist $m + \mathfrak{m}$, seine Koordinaten sind die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$. Seine Bedingungsgleichungen sind die Gleichungen **457a** und **b** und die Koppelungsgleichungen, etwa in der Form **457c**. Bezeichnen wir nunmehr die Multiplikatoren jener Gleichungen **a)** mit $P^0_\varkappa$, die der Gleichungen **b)** mit $\mathfrak{P}^0_\varkappa$, die die Gleichungen **c)** mit P^0_ϱ, so nehmen die Bewegungsgleichungen des gesamten Systems (vergl. **442**) die Form an:

a) $$m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P^0_\varkappa - P^0_\varrho = 0 \quad ,$$

b) $$\mathfrak{m} \mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{P}^0_\varkappa + P^0_\varrho = 0 \quad ,$$

in welchen für die Koordinaten, welche in den Koppelungsgleichungen nicht vorkommen, die P^0_ϱ gleich Null zu setzen sind.

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung ist nun aber dieselbe, welche wir vorhin als Bewegung der einzelnen Systeme betrachteten. Eine mögliche Lösung der gegenwärtigen Gleichungen erhalten wir also, wenn wir für die f_ϱ und $\mathfrak{f}_\varrho$ ihre früheren Werte setzen, wenn wir machen

c) $$P^0_\varkappa = P_\varkappa \quad , \quad \mathfrak{P}^0_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa \quad ,$$

außerdem in **a)**

d) $$P^0_\varrho = \quad P_\varrho$$

und in **b)**

e) $$P^0_\varrho = -\mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Aber da durch die Gleichungen **a)** und **b)** die unbestimmten Multiplikatoren eindeutig bestimmt sind, so ist diese mögliche Lösung zugleich die einzig mögliche Lösung. Daher gelten die Gleichungen d) und e) mit Notwendigkeit; aus ihnen folgt:

$$P_\varrho = -\mathfrak{P}_\varrho \quad , \qquad \text{f)}$$

oder mit Benutzung der Bezeichnung **467**:

$$P_\varrho = -P'_\varrho$$
$$\mathfrak{P}_\varrho = -\mathfrak{P}'_\varrho \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht der 469
Lex tertia NEWTONs und wird auch wohl das Prinzip der Reaktion genannt. Doch deckt sich sein Inhalt nicht vollständig mit dem Inhalt jenes dritten Gesetzes, sondern das genaue Verhältnis ist das folgende:

Das NEWTONsche Gesetz enthält unsern Lehrsatz **468** vollständig, nach der Absicht des Begründers, wie die dem Gesetze beigefügten Beispiele zeigen.

Das NEWTONsche Gesetz enthält aber mehr. Wenigstens wird es auch allgemein angewandt auf die Wirkung von Fernkräften, d. h. von Kräften zwischen Körpern, welche keine gemeinsamen Koordinaten haben. Solche Kräfte aber kennt unsere Mechanik nicht. Damit man also beispielsweise aus unserem Lehrsatze die Folgerung ziehen könne, daß ein Planet die Sonne mit gleicher Kraft anziehe wie diese ihn, ist nötig, daß nähere Angaben über die Natur des Zusammenhanges zwischen beiden Körpern gemacht werden.

Anmerkung 2. Es darf aber als fraglich bezeichnet wer- 470
den, ob der Überschuß dieser Anwendung des Reaktionsprinzipes über den Inhalt des Lehrsatzes **468** nach Form und Inhalt mit Recht zu den Grundgesetzen der Mechanik könne gerechnet werden, und ob nicht vielmehr der wesentliche und allgemein gültige Inhalt jenes Prinzipes bereits durch den Lehrsatz **468** erschöpft werde.

Was die Form anlangt, so ist offenbar die Fassung des dritten Gesetzes, sobald es auf Fernkräfte angewandt wird, nicht völlig klar bestimmt. Denn wenn Kraft und Gegenkraft an verschiedenen Körpern angreifen, so ist nicht schlechthin deutlich, was unter entgegengesetzter Richtung zu verstehen sei. Dies tritt zum Beispiel hervor, wenn es sich um die Wechselwirkung zwischen Stromelementen handelt.

Was den Inhalt anlangt, so stellt die Anwendung des Reaktionsprinzipes auf die Fernkräfte der gewöhnlichen Mechanik offenbar eine Erfahrungstatsache dar, über deren genaues Zutreffen in allen Fällen man anfängt zweifelhaft zu werden. So ist die Elektrodynamik bereits fast überzeugt davon, daß die Wechselwirkung zwischen bewegten Magneten dem Prinzip nicht in allen Fällen genau unterworfen sei.

Zusammensetzung der Kräfte.

471 **Lehrsatz.** Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist die Kraft, welche die Gesamtheit jener Systeme auf das erste System ausübt, gleich der Summe der Kräfte, welche die einzelnen Systeme auf dasselbe ausüben.

Es sei nämlich das System 1 von der Masse m und den Koordinaten p_ϱ, dessen Bedingungsgleichungen die k Gleichungen

a)
$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\,\dot{p}_\varrho = 0$$

sind, gleichzeitig gekoppelt mit den Systemen 2, 3, usw., deren Koordinaten die $\mathfrak{p}''_\varrho$, $\mathfrak{p}'''_\varrho$, usw. sind.

Betrachten wir die Systeme 2, 3, usw. zunächst als getrennte Systeme, so sind die Koppelungsgleichungen für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ zu schreiben in der Form:

b)
$$\dot{\mathfrak{p}}''_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0$$

c)
$$\dot{\mathfrak{p}}'''_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0$$

usw.

Behandeln wir nun das aus 1, 2, 3, usw. zusammengesetzte System als freies und bezeichnen wieder die Multiplikatoren