

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

II. Systeme durch Kräfte beeinflußt

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

gestellt wurden, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, welche sich auf die absolute Lage beziehen, also allein mit Ausnahme des Lehrsatzes 400 und seiner Folgerungen.

## II. Systeme durch Kräfte beeinflusst.

**Definition.** Zwei materielle Systeme heißen direkt gekoppelt, wenn eine oder mehrere Koordinaten des einen einer oder mehreren Koordinaten des andern dauernd gleich sind. Gekoppelt schlechthin heißen zwei Systeme, wenn ihre Koordinaten so gewählt werden können, daß die Systeme in das Verhältnis der direkten Koppelung treten. Gekoppelte Systeme, welche nicht direkt gekoppelt sind, heißen indirekt gekoppelt. 450

**Folgerung 1.** Die Koppelung zweier Systeme ist eine Beziehung zwischen beiden, welche unabhängig von unserer Willkür, insbesondere unabhängig von der Wahl der Koordinaten besteht. Ob aber eine bestehende Koppelung eine direkte oder eine indirekte sei, hängt ab von der Wahl der Koordinaten, ist also eine Frage unserer willkürlichen Auffassung. 451

**Folgerung 2.** Jede bestehende Koppelung zwischen zwei Systemen kann durch geeignete Wahl der Koordinaten zu einer direkten gemacht werden. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so setzen wir im folgenden voraus, daß dies geschehen sei. Die beständig gleichen Koordinaten der gekoppelten Systeme bezeichnen wir dann auch als ihre gemeinsamen Koordinaten. 452

**Folgerung 3.** Jedes von zwei gekoppelten Systemen ist durch die Koppelung notwendig ein unfreies System, beide bilden aber zusammen oder zusammen mit weiteren Systemen, mit welchen sie gekoppelt sind, ein freies System. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so wird im folgenden angenommen, daß eine Koppelung mit mehreren Systemen nicht stattfindet, so daß die beiden gekoppelten Systeme zusammen bereits ein freies bilden. 453

**Analytische Darstellung.** Sind die  $p_e$  die Koordinaten des einen, die  $p_a$  die Koordinaten des andern Systems, so wird 454



eine Koppelung zwischen beiden Systemen dadurch hergestellt, daß für ein oder mehrere Wertpaare von  $q$  und  $\sigma p_q$  gleich  $p_\sigma$  gemacht wird. Wir können aber offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Indizes so verteilen, daß übereinstimmende Koordinaten in beiden Systemen denselben Index erhalten. Diese Systeme sind dann gekoppelt, wenn für einen oder mehrere Werte von  $q$  dauernd

$$a) \quad \dot{p}_q - p_q = 0$$

wird, von welcher Gleichung die Gleichungen

$$b) \quad \dot{p}_q - \dot{p}_q = 0 \quad \text{oder}$$

$$c) \quad dp_q - dp_q = 0$$

notwendige Folgen sind.

455 **Definition.** Unter einer Kraft verstehen wir den selbständig vorgestellten Einfluß, welchen das eine von zwei gekoppelten Systemen zufolge des Grundgesetzes auf die Bewegung des andern ausübt.

456 **Folgerung.** Zu jeder Kraft gibt es stets notwendig eine Gegenkraft.

Denn die Vorstellung des Einflusses, welchen das in der Definition als das zweite bezeichnete System auf das erste ausübt, ist nach der Definition selbst wieder eine Kraft. Kraft und Gegenkraft sind gleichberechtigt in dem Sinne, daß nach Willkür jede von ihnen als die Kraft oder auch als die Gegenkraft aufgefaßt werden kann.

457 **Aufgabe.** Einen Ausdruck für den Einfluß anzugeben, welche das eine von zwei gekoppelten Systemen auf die Bewegung des andern ausübt.

Es seien  $m$  die Masse und die  $r$  Größen  $p_q$  die Koordinaten des ersten Systems; es seien die  $k$  Gleichungen

$$a) \quad \sum_1^r p_{\sigma q} \dot{p}_q = 0$$

wieder die Bedingungsgleichungen desselben. Es seien  $m$  die (457)  
Masse und die  $r$  Größen  $p_e$  die Koordinaten des zweiten Sy-  
stems; es seien die  $f$  Gleichungen

$$\sum_1^r p_{xq} \dot{p}_q = 0 \quad \text{b)}$$

die Bedingungsgleichungen desselben. Es mögen ferner zwischen  
beiden, für einen oder mehrere, nämlich  $h$  Werte von  $q$ , Koppe-  
lungsgleichungen von der Form

$$\dot{p}_q - \dot{p}_e = 0 \quad \text{c)}$$

bestehen. Wir betrachten nun die Bewegung des ersten  
Systems unter dem Einflusse des zweiten, und behandeln  
es dabei als geleitetes System. Soweit die  $p_e$  in den Glei-  
chungen c) nicht vorkommen, sind die Beschleunigungen nach  
ihnen gegeben durch die Gleichungen (442):

$$m\ddot{f}_q + \sum_1^k p_{xq} P_x = 0 \quad \text{d)}$$

für diejenigen  $p_e$  aber, welche in c) vorkommen, haben wir  
auch diese Gleichungen zu berücksichtigen und also den  
Faktor von  $\dot{p}_e$  in denselben, nämlich  $-1$ , zu multiplizieren  
mit einem unbestimmten Faktor, welcher  $P_e$  heißen möge, und  
das Produkt der linken Seite hinzuzufügen; für diese  $p_e$  wird  
also:

$$m\ddot{f}_q + \sum_1^k p_{xq} P_x - P_e = 0 \quad \text{e)}$$

Das Eintreten der  $h$  Größen  $P_e$  in die Bewegungsgleichungen  
vermehrt die Zahl der Unbekannten in denselben um  $h$ , und  
zur Bestimmung dieser  $h$  Größen ist auch die Zahl der Be-  
dingungsgleichungen um die  $h$  Gleichungen e) vermehrt, in  
welchen wir uns die  $\dot{p}_e$  als Funktionen der Zeit explizite ge-  
geben denken müssen. Nehmen wir aber an, die Größen  $P_e$



rechnen nicht zu den Unbekannten, sondern seien uns als Funktionen der Zeit unmittelbar gegeben, alsdann sind die  $h$  Gleichungen e) und jede Kenntnis der  $\dot{p}_e$  und des zweiten Systems überhaupt entbehrlich, und die  $k+r$  Gleichungen a) d) e) genügen wiederum zur eindeutigen Bestimmung der  $k+r$  Unbekannten  $P_x$  und  $\ddot{p}_e$ . Die  $h$  Multiplikatoren  $P_e$  stellen also den Einfluß des zweiten Systems auf das erste vollständig dar, und ihre Gesamtheit kann als ein analytischer Ausdruck für diesen Einfluß angesehen werden, wie ihn die Aufgabe verlangt.

- 458 **Zusatz 1.** Wollen wir in symmetrischer Weise den Einfluß des ersten Systems auf das zweite darstellen, so haben wir die Koppelungsgleichungen zu schreiben in der Form:

$$a) \quad \dot{p}_e - \dot{\mathfrak{p}}_e = 0 \quad ,$$

und es werden nun für diejenigen  $p_e$ , welche sich in a) nicht finden, die Bewegungsgleichungen:

$$b) \quad m \ddot{f}_e + \sum_1^r p_{xq} \mathfrak{P}_x = 0 \quad ,$$

während sie für die übrigen  $p_e$  die Form annehmen:

$$c) \quad m \ddot{f}_e + \sum_1^r p_{xq} \mathfrak{P}_x - \mathfrak{P}_e = 0 \quad ,$$

unter den  $\mathfrak{P}_e$  die unbestimmten Multiplikatoren der Gleichungen a) verstanden. Die Gesamtheit der  $\mathfrak{P}_e$  gibt uns einen Ausdruck für den Einfluß, welchen das erste System in jedem Augenblick auf die Bewegung des zweiten ausübt.

- 459 **Zusatz 2.** Offenbar können wir alle Bewegungsgleichungen des ersten Systems in der Form:

$$a) \quad m \ddot{f}_e + \sum_1^k p_{xq} P_x - P_e = 0$$



und alle Bewegungsgleichungen des zweiten Systems in der Form:

$$\text{III } \ddot{f}_e + \sum_1^f p_{xe} \mathfrak{P}_x - \mathfrak{P}_e = 0 \quad \text{b)}$$

schreiben, wenn wir in zulässiger, wenn auch willkürlicher Weise festsetzen, daß für alle nicht gekoppelten Koordinaten die Größen  $P_e$  und  $\mathfrak{P}_e$  den Wert Null haben sollen. Allerdings verliert die Gesamtheit der  $P_e$  und  $\mathfrak{P}_e$  dabei ihre Bedeutung als System der Multiplikatoren der Gleichungen 457c und 458a, aber sie behält ihre Bedeutung als Ausdruck des Einflusses, welchen das eine System auf das andere ausübt.

**Analytische Darstellung der Kraft.** Wir können und 460 wollen daher im Einklang mit der Definition 455 festsetzen, daß die Gesamtheit der für alle  $p_e$  nach 459 eindeutig bestimmten Größen  $P_e$  den analytischen Ausdruck für die Kraft bilden solle, welche das System der  $p_e$  auf das System der  $p_e$  ausübt. Entsprechend bildet dann die Gesamtheit der Größen  $\mathfrak{P}_e$  den analytischen Ausdruck für die Kraft, welche das System der  $p_e$  auf das der  $p_e$  ausübt. Die einzelnen Größen  $P_e$  bez.  $\mathfrak{P}_e$  heißen die Komponenten der Kraft nach den entsprechenden Koordinaten  $p_e$  bez.  $p_e$ , auch wohl kurz die Kräfte nach diesen Koordinaten.

Durch diese Bestimmung setzen wir uns zugleich in Einklang mit der bestehenden Bezeichnung der Mechanik, und die Notwendigkeit, diesen Einklang herzustellen, rechtfertigt hinreichend, warum wir unter mehreren zulässigen Bestimmungen gerade diese getroffen haben.

**Folgerung 1.** Die Kraft, welche ein System auf ein 461 zweites ausübt, kann betrachtet werden als eine Vektorgröße in bezug auf das zweite System, als eine Vektorgröße nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten nach solchen Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.



462 **Folgerung 2.** Die Kraft, welche ein System auf ein zweites ausübt, kann aber auch betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das erstere System, als eine Vektorgröße nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten in Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.

463 **Anmerkung.** Betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein System enthält also jede Kraft Komponenten, welche abhängen von der Wahl der Koordinaten, d. h. von unserer willkürlichen Auffassung. Es rührt dies daher, daß von der Wahl der Koordinaten die Mannigfaltigkeit derjenigen Bewegungen des Systems abhängt, welche wir überhaupt in Betracht ziehen, in deren Richtung wir also einen möglichen Einfluß zulassen wollen.

464 **Bemerkung 1.** Wird ein System nacheinander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und erleidet es dabei von diesen Systemen die gleiche Kraft, so ist seine Bewegung die gleiche, wie verschieden auch immer diese anderen Systeme unter sich sein mögen.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Bewegung eines Systems unter dem Einfluß oder der Einwirkung oder dem Angriff einer Kraft schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, von welchen sie ausgeht, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

465 **Bemerkung 2.** Wird ein System nacheinander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und führt es dabei die gleiche Bewegung aus, so kann es dabei auf jene anderen Systeme gleiche Kraft ausüben, obwohl jene Systeme unter sich vollkommen verschieden sein können.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, auf welche jene Kraft ausgeübt wird, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.



**Bemerkung 3.** Da aber alle Kräfte, von welchen schlechthin die Rede ist, doch keine anderen sein können, als welche von materiellen Systemen zufolge des Grundgesetzes auf materielle Systeme ausgeübt werden, so haben alle Kräfte von vornherein gewisse Eigenschaften gemeinsam. Die Quelle aller solcher gemeinsamen Eigenschaften sind die Eigenschaften der materiellen Systeme und das Grundgesetz.

### Wirkung und Gegenwirkung.

**Bezeichnung.** 1. Die Komponenten der Kraft, welche das System der  $p_e$  auf das der  $p_e$  ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der  $p_e$ , haben wir in 460 bereits bezeichnet mit  $P_e$ . Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der  $p_e$ , so wollen wir ihre Komponenten nach den  $p_e$  bezeichnen mit  $\mathfrak{P}'_e$ . Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$P_e = \mathfrak{P}'_e .$$

2. Die Komponenten der Kraft, welche das System der  $p_e$  auf das der  $p_e$  ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der  $p_e$ , haben wir in 460 bereits bezeichnet mit  $\mathfrak{P}_e$ . Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der  $p_e$ , so wollen wir ihre Komponenten nach den  $p_e$  bezeichnen mit  $P'_e$ . Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$\mathfrak{P}_e = P'_e .$$

Die auf ein System ausgeübten Kräfte sind also durch nicht akzentuierte, die von dem System ausgeübten Kräfte durch akzentuierte Buchstaben bezeichnet, sobald wir sie als Vektorgrößen in bezug auf das System selbst betrachten.

**Lehrsatz.** Kraft und Gegenkraft sind einander stets entgegengesetzt gleich. Es soll damit gesagt sein, daß die Komponenten beider nach jeder der benutzten Koordinaten entgegengesetzt gleich sind, und zwar sowohl wenn wir Kraft



(468) und Gegenkraft betrachten als Vektorgrößen in bezug auf das eine, als auch in bezug auf das andere System.

Denn wir können auch die beiden gekoppelten Systeme (457) betrachten als ein einziges, freies System. Seine Masse ist  $m + m$ , seine Koordinaten sind die  $p_e$  und  $p_e$ . Seine Bedingungsgleichungen sind die Gleichungen 457a und b und die Koppelungsgleichungen, etwa in der Form 457c. Bezeichnen wir nunmehr die Multiplikatoren jener Gleichungen a) mit  $P'_z$ , die der Gleichungen b) mit  $\mathfrak{P}'_z$ , die die Gleichungen c) mit  $P'_e$ , so nehmen die Bewegungsgleichungen des gesamten Systems (vergl. 442) die Form an:

$$a) \quad m\bar{f}_e + \sum_1^k p_{zq} P'_z - P'_e = 0 \quad ,$$

$$b) \quad m\bar{f}_e + \sum_1^r p_{zq} \mathfrak{P}'_z + P'_e = 0 \quad ,$$

in welchen für die Koordinaten, welche in den Koppelungsgleichungen nicht vorkommen, die  $P'_e$  gleich Null zu setzen sind.

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung ist nun aber dieselbe, welche wir vorhin als Bewegung der einzelnen Systeme betrachteten. Eine mögliche Lösung der gegenwärtigen Gleichungen erhalten wir also, wenn wir für die  $f_e$  und  $\bar{f}_e$  ihre früheren Werte setzen, wenn wir machen

$$c) \quad P'_z = P_z \quad , \quad \mathfrak{P}'_z = \mathfrak{P}_z \quad ,$$

außerdem in a)

$$d) \quad P'_e = P_e$$

und in b)

$$e) \quad P'_e = -\mathfrak{P}_e \quad .$$

Aber da durch die Gleichungen a) und b) die unbestimmten Multiplikatoren eindeutig bestimmt sind, so ist diese mögliche Lösung zugleich die einzig mögliche Lösung. Daher

gelten die Gleichungen d) und e) mit Notwendigkeit; aus ihnen folgt:

$$P_q = -\mathfrak{P}_q \quad , \quad \text{f)}$$

oder mit Benutzung der Bezeichnung 467:

$$\begin{aligned} P_q &= -P'_q \\ \mathfrak{P}_q &= -\mathfrak{P}'_q \quad , \end{aligned}$$

welches die Behauptung ist.

**Anmerkung 1.** Der vorstehende Lehrsatz entspricht der **469** Lex tertia NEWTONS und wird auch wohl das Prinzip der Reaktion genannt. Doch deckt sich sein Inhalt nicht vollständig mit dem Inhalt jenes dritten Gesetzes, sondern das genaue Verhältnis ist das folgende:

Das NEWTONSche Gesetz enthält unsern Lehrsatz 468 vollständig, nach der Absicht des Begründers, wie die dem Gesetze beigefügten Beispiele zeigen.

Das NEWTONSche Gesetz enthält aber mehr. Wenigstens wird es auch allgemein angewandt auf die Wirkung von Fernkräften, d. h. von Kräften zwischen Körpern, welche keine gemeinsamen Koordinaten haben. Solche Kräfte aber kennt unsere Mechanik nicht. Damit man also beispielsweise aus unserem Lehrsatz die Folgerung ziehen könne, daß ein Planet die Sonne mit gleicher Kraft anziehe wie diese ihn, ist nötig, daß nähere Angaben über die Natur des Zusammenhangs zwischen beiden Körpern gemacht werden.

**Anmerkung 2.** Es darf aber als fraglich bezeichnet werden, **470** ob der Überschuß dieser Anwendung des Reaktionsprinzipes über den Inhalt des Lehrsatzes 468 nach Form und Inhalt mit Recht zu den Grundgesetzen der Mechanik könne gerechnet werden, und ob nicht vielmehr der wesentliche und allgemein gültige Inhalt jenes Prinzipes bereits durch den Lehrsatz 468 erschöpft werde.

Was die Form anlangt, so ist offenbar die Fassung des dritten Gesetzes, sobald es auf Fernkräfte angewandt wird, nicht völlig klar bestimmt. Denn wenn Kraft und Gegen-



kraft an verschiedenen Körpern angreifen, so ist nicht schlechthin deutlich, was unter entgegengesetzter Richtung zu verstehen sei. Dies tritt zum Beispiel hervor, wenn es sich um die Wechselwirkung zwischen Stromelementen handelt.

Was den Inhalt anlangt, so stellt die Anwendung des Reaktionsprinzips auf die Fernkräfte der gewöhnlichen Mechanik offenbar eine Erfahrungstatsache dar, über deren genaues Zutreffen in allen Fällen man anfängt zweifelhaft zu werden. So ist die Elektrodynamik bereits fast überzeugt davon, daß die Wechselwirkung zwischen bewegten Magneten dem Prinzip nicht in allen Fällen genau unterworfen sei.

### Zusammensetzung der Kräfte.

- 471 **Lehrsatz.** Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist die Kraft, welche die Gesamtheit jener Systeme auf das erste System ausübt, gleich der Summe der Kräfte, welche die einzelnen Systeme auf dasselbe ausüben.

Es sei nämlich das System 1 von der Masse  $m$  und den Koordinaten  $p_e$ , dessen Bedingungsgleichungen die  $k$  Gleichungen

$$a) \quad \sum_1^r p_{xq} \dot{p}_q = 0$$

sind, gleichzeitig gekoppelt mit den Systemen 2, 3, usw., deren Koordinaten die  $\dot{p}_e''$ ,  $\dot{p}_e'''$ , usw. sind.

Betrachten wir die Systeme 2, 3, usw. zunächst als getrennte Systeme, so sind die Koppelungsgleichungen für jede gemeinsame Koordinate  $p_e$  zu schreiben in der Form:

$$b) \quad \dot{p}_e'' - \dot{p}_e = 0$$

$$c) \quad \dot{p}_e''' - \dot{p}_e = 0$$

usw.

Behandeln wir nun das aus 1, 2, 3, usw. zusammengesetzte System als freies und bezeichnen wieder die Multiplikatoren

der Gleichungen a) mit  $P_x$ , dagegen die von b) mit  $P'_e$ , die (471) von c) mit  $P''_e$ , usw., so erhalten wir die Bewegungsgleichungen des Systems 1 in der Form:

$$mf_q + \sum_1^k p_{xq} P_x - P'_q - P''_q - \text{usw.} = 0 \quad , \quad \text{d)}$$

worin die sämtlichen  $P'_e$ ,  $P''_e$ , usw. ebenso wie die  $P_x$  eindeutig bestimmte Größen sind. Die  $P'_e$ ,  $P''_e$ , usw. stellen die Komponenten der Kräfte dar, welche die einzelnen Systeme 2, 3, usw. auf das System 1 ausüben.

Betrachten wir nun aber zweitens die Systeme 2, 3, usw. zusammen als ein System, so können die nach Gleichungen b) c) usw. gleichen Größen  $p'_e$ ,  $p''_e$ , usw. als eine einzige Koordinate  $p_e$  desselben angesehen werden, und an Stelle jener Koppelungsgleichungen tritt dann für jede gemeinsame Koordinate  $p_e$  die eine Gleichung:

$$\dot{p}_e - \check{p}_e = 0 \quad . \quad \text{e)}$$

Ist  $P_e$  der Multiplikator derselben, und bezeichnen wir mit  $P'_x$  die Multiplikatoren der Gleichungen a), welche dem jetzigen System der Bewegungsgleichungen entsprechen, so nehmen diese die Form an:

$$mf_q + \sum_1^k p_{xq} P'_x - P_e = 0 \quad . \quad \text{f)}$$

Die  $P_e$  stellen die Komponenten der Gesamtkraft dar, welche auf das System 1 wirkt.

Die verschiedene Auffassung kann nun die nach dem Grundgesetze erfolgende Bewegung selbst nicht ändern. Eine mögliche Lösung der Gleichungen f) erhalten wir daher, indem wir mit Benutzung der früheren Lösung setzen:

$$P'_x = P_x \quad \text{g)}$$

$$P_e = P'_e + P''_e + \text{usw.} \quad \text{h)}$$

Aber da es nur eine einzige mögliche Lösung gibt, so



ist die vorstehende eben diese, und die Gleichung *h*), welche unsere Behauptung enthält, muß mit Notwendigkeit zutreffen.

- 472 **Folgerung 1.** Eine jede Zahl von Kräften, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefaßt werden als eine einzige Kraft, und zwar als diejenige Kraft, welche als Vektorgröße in bezug auf das System betrachtet gleich der Summe jener Kräfte ist.

Fassen wir eine Zahl von Kräften in dieser Weise auf, so sagen wir, daß wir sie zusammensetzen. Das Ergebnis der Zusammensetzung nennen wir auch die Resultante der einzelnen Kräfte.

- 473 **Folgerung 2.** Eine jede Kraft, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefaßt werden als Summe einer beliebigen Zahl von Kräften, und zwar jeder Zahl von Kräften, deren Summe als Vektorgrößen in bezug auf das System gleich jener ursprünglichen Kraft ist.

Fassen wir eine Kraft in dieser Weise auf, so sagen wir, daß wir sie zerlegen; die Kräfte, welche das Ergebnis einer solchen Zerlegung sind, nennen wir die Komponenten der ursprünglichen Kraft.

- 474 **Anmerkung.** Die geometrischen Komponenten einer Kraft nach den Koordinaten können zugleich als Komponenten derselben im Sinne von 473 aufgefaßt werden.

- 475 **Definition.** Eine Kraft, welche von einem einzelnen materiellen Punkte ausgeübt wird, oder welche auf einen einzelnen materiellen Punkt wirkt, heißt eine Elementarkraft.

- 476 **Anmerkung.** Die elementare Mechanik versteht gewöhnlich unter Kräften nur Elementarkräfte. Im Gegensatz zu denselben bezeichnet man dann wohl die bisher von uns betrachteten allgemeineren Kraftformen als LAGRANGESCHE Kräfte. Man könnte dementsprechend die Elementarkräfte selbst auch passend als GALILEISCHE oder NEWTONSCHE Kräfte bezeichnen.

- 477 **Folgerung 1.** Jede Elementarkraft ist darstellbar durch die geometrische Verrückung eines Punktes, also durch eine nach Größe und Richtung gegebene Strecke.



Denn jede Elementarkraft ist Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen Punkt.

**Folgerung 2.** Die Zusammensetzung der Elementarkräfte, 478 welche an demselben Punkte angreifen, geschieht nach der Methode der geometrischen Zusammensetzung und Zerlegung von Strecken.

Insbesondere setzen sich also zwei Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, zusammen zu einer einzigen Kraft, welche nach Größe und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt ist, dessen Seiten nach Größe und Richtung jene Kräfte darstellen (Parallelogramm der Kräfte).

**Folgerung 3.** Jede LAGRANGESCHE Kraft ist darstellbar 479 als eine Summe von Elementarkräften, also zerlegbar in Elementarkräfte.

Denn jede Verrückung eines Systems kann aufgefaßt werden als eine Summe von Verrückungen seiner einzelnen Punkte.

**Folgerung 4.** Die Komponenten einer Kraft nach den 480 rechtwinkligen Koordinaten des Systems, auf welches die Kraft wirkt, oder welches die Kraft ausübt, können unmittelbar aufgefaßt werden als Elementarkräfte, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

### Bewegung unter dem Einfluß von Kräften.

**Aufgabe 1.** Die Bewegung eines materiellen Systems 481 unter dem Einfluß einer gegebenen Kraft zu bestimmen.

Die Auflösung folgt unmittelbar aus 457. Sind die  $P_q$  die gegebenen Komponenten der wirkenden Kraft nach den  $p_q$ , so benutze man die  $r$  Gleichungen

$$mf_q + \sum_1^k p_{xq} P_x = P_q$$

zusammen mit den  $k$  Bedingungsbedingungen des Systems zur Bestimmung der  $r+k$  Größen  $\ddot{p}_q$  und  $P_x$ , zu deren eindeutiger Bestimmung jene Gleichungen ausreichen.



- 482 **Anmerkung 1.** Die Bewegungsgleichungen eines Systems, auf welches Kräfte wirken, haben in den rechtwinkligen Koordinaten desselben die Form der  $3n$  Gleichungen:

$$m_v \ddot{x}_v + \sum_1^i x_{iv} X_i = X_v \quad ,$$

wenn unter  $X_v$  die Komponente der Kraft nach  $x_v$  verstanden wird, und im übrigen die Bezeichnung von 368 benutzt wird.

- 483 **Anmerkung 2.** Ist die Koordinate  $p_q$  eine freie Koordinate, so nimmt die ihr entsprechende Bewegungsgleichung die einfache Form an:

$$mf_q = P_q \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle  $p_q$  freie Koordinaten, so nehmen alle Bewegungsgleichungen des Systems diese Form an, und diese  $r$  Gleichungen genügen zur Bestimmung der  $r$  Größen  $\ddot{p}_q$ .

- 484 **Folgerung.** Die natürliche Bewegung eines materiellen Systems von einem bestimmten Augenblick an ist eindeutig bestimmt durch die Lage und Geschwindigkeit des Systems in jenem Augenblick und die Angabe der auf das System wirkenden Kraft für alle Zeiten von jenem Augenblick an (vergl. 331, 444).

- 485 **Lehrsatz.** Die Beschleunigung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte einem System erteilen, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Kräfte einzeln wirkend dem System erteilen würden.

Denn die Bewegungsgleichungen 481 sind linear in den  $f_{e_i}$  und den  $P_{x_i}$ . Sind also die Wertsysteme  $f_{e_1} P_{x_1}$ ,  $f_{e_2} P_{x_2}$ , usw. die Auflösungen dieser Gleichungen für die Kräfte  $P_{e_1}$ ,  $P_{e_2}$ , usw., so ist das Wertsystem  $f_{e_1} + f_{e_2} + \text{usw.}$ ,  $P_{x_1} + P_{x_2} + \text{usw.}$  die Auflösung für die Kraft  $P_{e_1} + P_{e_2} + \text{usw.}$

- 486 **Anmerkung.** Der Inhalt des Lehrsatzes kann auch wiedergegeben werden in der Aussage, daß mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte sich hinsichtlich der Beschleunigung, welche

sie erzeugen, nicht stören. Ohne einen besonderen Namen erhalten zu haben, ist dieser Satz seit GALILEIS Zeiten stets als Prinzip angenommen und benutzt worden.

**Folgerung.** Die Beschleunigung, welche eine resultierende Kraft einem System erteilt, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Komponenten, einzeln wirkend, dem System erteilen würden (472, 473).

**Lehrsatz.** Steht eine Kraft als Vektorgröße senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines materiellen Systems, so übt sie keinen Einfluß auf die Bewegung des Systems aus, — und umgekehrt.

Denn ist  $\pi$  eine solche Kraft, so haben ihre Komponenten  $\pi_q$  nach den  $p_q$  die Form (250):

$$\pi_q = \sum_1^k p_{\pi q} \gamma_{\pi} .$$

Lassen wir nun diese Kraft neben der Kraft  $P$  auf das System wirken, so können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden:

$$mf_q + \sum_1^k p_{\pi q} (P_{\pi} - \gamma_{\pi}) = P_q .$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach  $\ddot{p}_q$  und  $P_{\pi}$  erscheinen also nur die  $P_{\pi}$  vergrößert um die  $\gamma_{\pi}$ ; die  $\ddot{p}_q$ , welche allein die Bewegung bestimmen, erscheinen unverändert.

Umgekehrt: Ändert die Hinzufügung der Komponenten  $\pi_q$  zu den rechten Seiten der Gleichungen 481 nicht die  $f_q$ , sondern nur die  $P_{\pi}$ , so lassen sich die  $\pi_q$  schreiben in der Form:

$$\pi_q = \sum_1^k p_{\pi q} \gamma_{\pi} ;$$

die Kraft  $\pi$  steht also senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems (250).



489 **Anmerkung.** Der Lehrsatz gibt die Bedingung an, welcher derjenige Teil einer als Vektorgröße betrachteten Kraft unterworfen ist, welcher von der Wahl der Koordinaten, also von unserer Willkür abhängt (463). Denn dieser Teil muß notwendig ein solcher sein, welcher in der wirklichen Bewegung nicht zur Geltung kommt.

490 **Folgerung.** Obgleich aus der Kenntnis der auf ein System wirkenden Kraft eindeutig geschlossen werden kann auf die Bewegung des Systems, so kann doch aus der Bewegung des Systems nicht eindeutig geschlossen werden auf die Kraft, welche das System beeinflusst.

491 **Aufgabe 2.** Die Kraft zu bestimmen, welche ein materielles System bei gegebener Bewegung ausübt.

Nach 467 bezeichnen wir mit  $P'_e$  die Komponente der gesuchten Kraft nach der Koordinate  $p_e$ ; aus 468 und 481 folgt dann:

$$P'_e = -mf_e - \sum_1^k p_{\kappa e} P_\kappa .$$

In diesen Gleichungen sind die  $f_e$  als gegeben zu betrachten, und zwar müssen sie in den Bedingungsgleichungen an sich genügen. Die Größen  $P_\kappa$  sind ebenfalls bestimmt, wenn auch dasjenige System gegeben wird, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist. Solange aber nur die Bewegung des Systems der  $p_e$  gegeben ist, bleiben die  $P_\kappa$  unbekannt. Die Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, ist also allein durch die Angabe der Bewegung des Systems noch nicht völlig bestimmt, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, dessen Komponenten die Form haben:

$$\pi_e = \sum_1^k p_{\kappa e} \gamma_\kappa ,$$

und welcher daher auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrecht steht.

492 **Anmerkung.** Obwohl von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegung



des Systems eindeutig bestimmt sind, so sind doch die Komponenten in Richtung einer jeden möglichen Verrückung des Systems durch seine Bewegung eindeutig bestimmt.

**Folgerung.** Von der Kraft, welche ein bewegtes System 493 ausübt, sind die Komponenten in Richtung einer jeden freien Koordinate des Systems durch die Bewegung eindeutig bestimmt.

Ist nämlich  $p_e$  eine freie Koordinate, so verschwinden die  $p_{\nu e}$  und damit die unbestimmten Glieder, und es kann die Komponente der Kraft des Systems nach  $p_e$  geschrieben werden in den Formen:

$$P'_e = -mf_e \quad (491) \text{ a)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_e} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_e} \right) \quad (291a) \text{ b)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_e} - \dot{q}_e \quad (291b) \text{ c)}$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_e} - \dot{q}_e \quad (294) \text{ d)}$$

### Innerer Zwang.

**Lehrsatz.** Die Beschleunigung eines Systems materieller 494 Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, findet statt in Richtung der Kraft, welche auf das System wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Systems.

Denn wenn zwischen den  $n$  Punkten eines Systems keine Zusammenhänge bestehen, so ist für jede der  $3n$  rechtwinkligen Koordinaten des Systems (482):

$$\frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m} ;$$

die linken Seiten der Gleichungen aber stellen die Komponenten der Beschleunigung des Systems nach den  $x_\nu$  dar (275).



495 **Folgerung.** Die Beschleunigung eines einzelnen materiellen Punktes geschieht in Richtung der Kraft, welche auf den Punkt wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Punktes. (NEWTONS Lex secunda.)

496 **Anmerkung.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems, auf welches eine Kraft wirkt, so weicht die Beschleunigung des Systems im allgemeinen ab von der durch den Lehrsatz 494 gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems ansehen, und die Abweichung selbst haben wir nach 385 als den inneren Zwang des Systems zu bezeichnen.

497 **Aufgabe.** Den inneren Zwang eines Systems zu bestimmen, welches sich unter dem Einfluß von Kräften bewegt.

Die wirkliche Komponente der Beschleunigung des Systems nach der allgemeinen Koordinate  $p_e$  ist  $f_e$ , die Komponente, welche nach Aufhebung der Bedingungsgleichungen eintreten würde, ist (494)  $P_e/m$ , der Unterschied beider Größen, oder:

$$a) \quad z_q = f_q - \frac{P_q}{m} ,$$

also die Komponente des Zwanges nach  $p_e$ .

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reicht die Kenntnis der Komponenten desselben nach den  $p_e$  im allgemeinen nicht aus (245). Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an, so erhalten wir für die Komponente nach  $x_v$ :

$$b) \quad z_v = \frac{1}{m} (m_v \ddot{x}_v - X_v) ,$$

also die Größe  $z$  des Zwanges als die positive Wurzel der Gleichung (244):

$$mz^2 = \sum_1^{3n} \frac{1}{m_v} (m_v \ddot{x}_v - X_v)^2$$

$$c) \quad = \sum_1^{3n} m_v \left( \ddot{x}_v - \frac{X_v}{m_v} \right)^2 .$$

**Lehrsatz 1.** Die Größe des Zwanges eines materiellen Systems unter dem Einfluß von Kräften ist wie bei einem freien System in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt. 498

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der  $X_v$  die Größe  $\frac{1}{2}mz^2$  ein Minimum werde, erhalten wir nach derselben Methode wie in 155 die  $3n$  Gleichungen:

$$m_v \ddot{x}_v - X_v + \sum_1^i x_{iv} X_i = 0 \quad ,$$

in welchen die  $X_i$   $i$  unbestimmte Multiplikatoren bezeichnen, welche zusammen mit den  $3n$  Größen  $\ddot{x}_v$  aus jenen  $3n$  Gleichungen und den  $i$  Bedingungsgleichungen des Systems eindeutig zu bestimmen sind. Die vorstehenden Gleichungen aber ergeben dieselben Werte der  $\ddot{x}_v$  und  $X_i$ , wie die mit ihnen übereinstimmenden Gleichungen der natürlichen Bewegung (482).

**Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält das vollständige GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges. Wir können den Lehrsatz 388 als einen besonderen Fall desselben bezeichnen. Aber nach unserer ganzen Auffassung werden wir lieber jenen Lehrsatz als den allgemeinen ansehen und den vorliegenden als die Anpassung desselben an besondere, verwickeltere Verhältnisse betrachten. 499

**Lehrsatz 2.** Die Richtung des Zwanges steht bei der natürlichen Bewegung eines Systems unter dem Einfluß einer Kraft, wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 500

Denn zufolge 497 a und 481 lassen sich die Komponenten des Zwanges nach den  $p_e$  auch schreiben in der Form:

$$z_q = -\frac{1}{m} \sum_1^k p_{zq} P_z \quad ;$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (250) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.



- 501 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit  $\delta p_e$  die Änderungen der Koordinaten  $p_e$  für irgend eine beliebige mögliche Verrückung des Systems, so können wir den vorstehenden Satz in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden (vergl. 393):

$$a) \quad \sum_1^r \left( f_e - \frac{P_e}{m} \right) \delta p_e = 0 \quad ,$$

welche unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Form annimmt:

$$b) \quad \sum_1^{3n} (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu) \delta x_\nu = 0 \quad .$$

- 502 **Anmerkung.** Der Lehrsatz 500 enthält das vollständige D'ALEMBERTSche Prinzip, die Gleichungen 501a und b die gewöhnliche Fassung desselben. Über das Verhältnis des Satzes 500 zu dem Satz 392 ist dasselbe zu bemerken, wie unter 499.
- 503 **Folgerung 1.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung einer jeden möglichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach dieser Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.  
Denn die Komponente des Zwanges nach der Richtung jeder möglichen Bewegung verschwindet.
- 504 **Folgerung 2.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung seiner wirklichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
- 505 **Folgerung 3.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems nach jeder freien Koordinate des Systems ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.
- 506 **Lehrsatz.** Bei der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluß von Kräften ist die Komponente der Beschleunigung nach jeder Koordinate der absoluten

Lage beständig gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch der innere Zusammenhang des Systems ist.

**Folgerung 1.** Wählen wir die Koordinaten eines Systems 507  
übrigens beliebig, jedoch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden, so können wir bei vorhandener Kenntnis der auf das System wirkenden Kräfte, aber ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs des Systems doch stets sechs der Bewegungsgleichungen des Systems angeben.

**Folgerung 2.** Treffen wir insbesondere über die Koordinaten 508  
der absoluten Lage dieselbe Verfügung wie in 402 und wenden den Lehrsatz zunächst an auf die Richtung der 3 Koordinaten  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$ , so ergibt er uns die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_1^n m_\nu \ddot{x}_{3\nu} &= \sum_1^n X_{3\nu} \\ \sum_1^n m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} &= \sum_1^n X_{3\nu-1} \\ \sum_1^n m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} &= \sum_1^n X_{3\nu-2} . \end{aligned}$$

Diese drei Gleichungen, welche sich dahin interpretieren lassen, daß der Schwerpunkt sich so bewegt, als sei die ganze Masse des Systems in ihm vereinigt, und griffen an ihm alle Elementarkräfte an, bilden das sogenannte erweiterte Prinzip des Schwerpunkts. (Vergleiche 404.)

**Folgerung 3.** Angewandt auf die Richtung der drei Ko- 509  
ordinaten der absoluten Lage  $\omega_1 \omega_2 \omega_3$  ergibt der Lehrsatz die drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} \sum_1^n m_\nu (x_{3\nu-2} \ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1} \ddot{x}_{3\nu-2}) &= \sum_1^n (x_{3\nu-2} X_{3\nu-1} - x_{3\nu-1} X_{3\nu-2}) \\ \sum_1^n m_\nu (x_{3\nu} \ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2} \ddot{x}_{3\nu}) &= \sum_1^n (x_{3\nu} X_{3\nu-2} - x_{3\nu-2} X_{3\nu}) \\ \sum_1^n m_\nu (x_{3\nu-1} \ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu} \ddot{x}_{3\nu-1}) &= \sum_1^n (x_{3\nu-1} X_{3\nu} - x_{3\nu} X_{3\nu-1}) . \end{aligned}$$



Diese drei Gleichungen bilden das sogenannte erweiterte Prinzip der Flächen. (Vergleiche 406.)

### Energie, Arbeit.

- 510 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems vorgestellt als Folge einer auf das System ausgeübten Kraft, wird die Arbeit jener Kraft genannt.

Die Arbeit, welche eine Kraft in bestimmter Zeit leistet, wird gemessen durch die Zunahme der Energie des Systems, auf welches sie wirkt, in jener Zeit.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Vorhandenseins der Kraft rechnen wir als negative Zunahme. Die Arbeit einer Kraft kann also positiv oder negativ sein.

- 511 **Folgerung.** Während die auf ein System wirkende Kraft eine gewisse Arbeit leistet, leistet die von dem System ausgeübte Gegenkraft stets die entgegengesetzt gleiche Arbeit.

Denn die letztere Arbeit ist gleich der Zunahme der Energie desjenigen Systems, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist; die Summe der Energien beider Systeme aber ist konstant.

- 512 **Lehrsatz.** Die Arbeit, welche die auf ein System wirkende Kraft während der Durchlaufung eines Bahnelements leistet, ist gleich dem Produkt aus der Länge des Elements und der Komponente der Kraft in seiner Richtung.

Denn die Zunahme  $dE$  der Energie während des Zeitelements  $dt$ , in welchem das Bahnelement  $ds$  zurückgelegt wird, ist (283):

$$dE = m v \dot{v} dt = m \dot{v} ds$$

Nach 280 ist aber  $\dot{v}$  die Komponente der Beschleunigung des Systems in Richtung seiner Bahn, also nach 504  $m\dot{v}$  die Komponente der Kraft in Richtung der Bahn.

- 513 **Anmerkung 1.** Die in Rede stehende Arbeit ist mit demselben Rechte auch gleich dem Produkt aus der Größe der

Kraft und der in ihre Richtung fallenden Komponente des Bahnelements.

**Anmerkung 1.** Erleiden während der Durchlaufung des Bahnelements  $ds$  die Koordinaten  $p_e$  die Änderungen  $dp_e$ , so ist die Arbeit der wirkenden Kraft dargestellt durch die Gleichung:

$$dE = \sum_1^r P_e dp_e .$$

Denn die Komponente der Kraft in Richtung des Bahnelements ist gleich (247):

$$\sum_1^r P_e \frac{dp_e}{ds} .$$

**Folgerung 1.** Die Kraft, welche auf ein System wirkt, leistet positive oder negative Arbeit, je nachdem der Winkel, welchen sie mit der Geschwindigkeit des Systems bildet, kleiner oder größer als ein rechter ist. Steht die Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so leistet sie keine Arbeit.

**Folgerung 2.** Eine Kraft, welche auf ein ruhendes System wirkt, leistet keine Arbeit.

### Gleichgewicht, Statik.

**Definition.** Wir sagen, zwei oder mehrere Kräfte, welche auf dasselbe System wirken, halten sich das Gleichgewicht, wenn eine jede von ihnen den Einfluß der anderen aufhebt, d. h. wenn unter dem Einfluß beider oder aller jener Kräfte das System sich so bewegt, als wäre keine von ihnen vorhanden.

**Lehrsatz.** Zwei oder mehrere Kräfte halten sich das Gleichgewicht, wenn ihre Summe senkrecht steht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt.

Der Satz folgt unmittelbar aus 471 und 488.



- 519 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit  $P'_e, P''_e$  usw. die Komponenten der einzelnen Kräfte nach den  $p_e$ , mit  $\delta p_e$  die Änderungen der  $p_e$  für irgend eine mögliche Verrückung des Systems, so können wir die Forderung des vorstehenden Satzes in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden:

$$\sum_1^r (P'_e + P''_e + \text{usw.}) \delta p_e = 0 \quad .$$

Vergleiche 393, 501.

- 520 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (Verrückungen, Momente), die Gleichung 519 die gewöhnliche analytische Fassung desselben.

- 521 **Folgerung 1.** Halten sich mehrere Kräfte an einem System das Gleichgewicht, so verschwindet die Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten bei jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt. (Prinzip der virtuellen Arbeit.)

Denn schreiben wir die Gleichung 519 in der Form:

$$\sum_1^r P'_e \delta p_e + \sum_1^r P''_e \delta p_e + \text{usw.} = 0 \quad ,$$

so ergibt sich nach 514 die Behauptung.

- 522 **Folgerung 2.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

- 523 **Folgerung 3.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten nach jeder freien Koordinate des Systems.

- 524 **Lehrsatz.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung einer jeden Koordinate der abso-

luten Lage, welches auch immer der innere Zusammenhang des Systems sein möge.

**Anmerkung.** Auch ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs eines Systems können wir demnach doch stets 6 notwendige Bedingungsgleichungen für sein Gleichgewicht angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die 6 Größen  $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$ , welche wir in 402 einführten, so liefert uns der vorige Lehrsatz diejenigen 6 Gleichungen, welche dem Prinzip des Schwerpunkts und der Flächen entsprechen, und welche LAGRANGE im 3. Abschnitt § 1 und § 2 des ersten Teils der *Mécanique analytique* behandelt. 525

**Bemerkung 1.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte in einer bestimmten Lage des Systems das Gleichgewicht bei einer gewissen Geschwindigkeit, so halten sich dieselben Kräfte in derselben Lage das Gleichgewicht auch bei jeder anderen Geschwindigkeit. 526

Denn die Bedingung des Gleichgewichts enthält nicht die wirkliche Geschwindigkeit des Systems.

**Bemerkung 2.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem ruhenden System, so beharrt das System in seinem Zustand der Ruhe; und umgekehrt: Beharrt ein System trotz des Angriffs zweier oder mehrerer Kräfte in der Ruhe, so halten sich die Kräfte an dem System das Gleichgewicht. 527

**Folgerung 1.** Zwei Kräfte, welche, gleichzeitig an demselben ruhenden System angreifend, die Ruhe des Systems nicht stören, haben entgegengesetzt gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems. 528

**Folgerung 2.** Zwei Kräfte, welche, nacheinander auf dasselbe ruhende System zugleich mit denselben andern Kräften wirkend, das System in Ruhe lassen, haben gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems. 529

**Anmerkung.** Auf den letzten beiden Folgerungen beruht die statische Vergleichung der Kräfte. 530



### Maschinen und innere Kräfte.

531 **Definition.** Ein System, dessen Massen als verschwindend klein betrachtet werden gegen die Massen der Systeme, mit welchen es gekoppelt ist, wird eine Maschine genannt.

Eine Maschine ist also hinsichtlich ihres Einflusses auf die Bewegung der übrigen Systeme vollständig dargestellt durch ihre Bedingungsgleichungen; die Kenntnis des Ausdrucks der Energie der Maschine in ihren Koordinaten ist nicht erforderlich.

Einfach heißt eine Maschine, welche nur einen Grad der Bewegungsfreiheit hat.

532 **Lehrsatz.** Solange eine Maschine sich mit endlicher Geschwindigkeit bewegt, halten sich die auf die Maschine wirkenden Kräfte beständig das Gleichgewicht.

Denn ergäben diese Kräfte eine Komponente in Richtung irgend einer möglichen Bewegung der Maschine, so würde die Komponente der Beschleunigung in dieser Richtung wegen der verschwindenden Masse unendlich groß (504).

533 **Folgerung.** Zwischen den Komponenten der auf eine Maschine wirkenden Kräfte nach ihren Koordinaten besteht eine Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Zahl gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten der Maschine ist. Eine einfache Maschine wird vertreten durch eine einzige homogene lineare Gleichung zwischen den auf ihre Koordinaten wirkenden Kräften.

534 **Bemerkung 1.** Wird eine Maschine nach allen ihren Koordinaten gekoppelt mit zwei oder mehr materiellen Systemen, so kann die auf diese Art hergestellte mechanische Verbindung zwischen den letzteren analytisch dargestellt werden durch einen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten der verbundenen Systeme. Denn wir können in den Bedingungsgleichungen der Maschine die Koordinaten derselben ersetzen durch die ihnen gleichen Koordinaten der verbundenen Systeme.

Umgekehrt können wir daher auch jeden analytisch gegebenen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen



den Koordinaten zweier oder mehrerer Systeme physikalisch deuten als eine mechanische Verbindung der angegebenen Art, welche wir bezeichnen als eine Koppelung jener Systeme durch die Maschine.

**Folgerung.** Sind zwei oder mehr Systeme durch eine Maschine gekoppelt, so ist die von jedem der Systeme geleistete Arbeit entgegengesetzt gleich der Summe der von den übrigen Systemen geleisteten Arbeit. Bei der Koppelung der Systeme mittels einer Maschine wird also Arbeit nicht gewonnen. 535

Denn die von den Systemen ausgeübten Kräfte halten sich an der Maschine das Gleichgewicht, die Summe der von ihnen geleisteten Arbeit ist also Null.

**Bemerkung 2.** Ein jedes materielle System kann auf mannigfaltige Art aufgefaßt werden als bestehend aus zwei oder mehr Systemen, welche durch Maschinen gekoppelt sind. Denn teilen wir die Massen des Systems in mehrere Teile, und sind die  $p'_e$  Koordinaten des ersten Teiles, die  $p''_e$  Koordinaten des zweiten Teiles, usw., so können wir diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche nur die  $p'_e$  enthalten, betrachten als Bedingungsgleichungen des ersten Teilsystems, diejenigen Gleichungen, welche nur die  $p''_e$  enthalten, als Bedingungsgleichungen des zweiten Teilsystems, usw., während diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche die  $p'_e, p''_e$  usw. gemischt enthalten, aufgefaßt werden als die Gleichungen der die Teilsysteme koppelnden Maschinen. 536

Die Kräfte, welche bei dieser zulässigen, wenn auch willkürlichen Auffassung auf die Teilsysteme von den sie koppelnden Maschinen ausgeübt werden, bezeichnen wir als innere Kräfte des Systems.

**Folgerung 1.** Ein jeder Satz innerer Kräfte kann einen Teil des Zusammenhanges eines Systems ersetzen. Lassen wir nämlich diejenigen Bedingungsgleichungen des ganzen Systems fort, welche die Maschinen zwischen den Teilsystemen darstellen, behalten aber die von den Maschinen ausgeübten Kräfte bei, so bewegt sich das System wie vorher. 537



538 **Folgerung 2.** Der gesamte Zusammenhang eines Systems kann aufgelöst werden in und ersetzt werden durch eine Anzahl von Elementarkräften, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

Denn wir können die einzelnen Punkte als Teilsysteme betrachten und das ganze System als Gesamtheit dieser durch Maschinen gekoppelten Teilsysteme.

539 **Folgerung 3.** Die inneren Kräfte, welche den Zusammenhang eines Systems vollständig oder teilweise ersetzen, halten sich, an dem ursprünglichen System angreifend, beständig das Gleichgewicht.

Denn sie halten sich nach 532 das Gleichgewicht an den Maschinen, welche Teile des ursprünglichen Systems bilden.

540 **Anmerkung.** Diese letztere Überlegung ist es, mit deren Hilfe in der gewöhnlichen Entwicklung der Mechanik der Übergang von den Gesetzen des Gleichgewichts (dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) zu den Gesetzen der Bewegung (dem D'ALEMBERTSchen Prinzip) gemacht wird.

### Messung der Kräfte.

541 Aus unseren Überlegungen ergeben sich im ganzen drei unabhängige Methoden, um diejenigen Komponenten der Kräfte unmittelbar zu messen, welche überhaupt Einfluß auf die Erscheinungen haben. Durch Anwendung einer jeden dieser drei Methoden können auch die Kräfte aus Rechnungsgrößen zu Gegenständen der unmittelbaren Erfahrung gemacht werden, d. h. zu Zeichen für bestimmte Verbindungen sinnlicher Empfindungen und Wahrnehmungen.

542 Die erste Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und Bewegungen des Systems, von welchem sie ausgeübt wird. Physikalisch wird diese Methode die Messung der Kraft nach ihrem Ursprunge genannt. Sie wird z. B. angewandt in der Annahme, daß gleich gespannte Federn, gleiche Mengen explodierenden Pulvers usw. unter übrigens gleichen Verhältnissen gleiche Kräfte ausüben.

Die zweite Methode bestimmt die Kraft aus den Massen 543 und der Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt. In der Physik wird diese Methode als die dynamische Messung der Kraft bezeichnet. Sie wurde z. B. von NEWTON angewandt, als er die auf die Planeten wirkende Kraft aus deren Bewegung ableitete.

Die dritte Methode bestimmt die Kraft, indem sie sie mit 544 bekannten Kräften ins Gleichgewicht bringt. Diese Methode wird die statische genannt. Auf ihr beruhen z. B. alle Kräfte-messungen mit der Wage.

Angewandt zur Bestimmung einer und derselben Kraft 545 unter Beobachtung der von uns abgeleiteten Beziehungen müssen aber diese drei verschiedenen Methoden unter allen Umständen zu dem gleichen Resultate führen, wenn anders das Grundgesetz, auf welches sich unsere Überlegungen stützen, wirklich alle mögliche mechanische Erfahrung richtig zusammenfaßt.

## Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen.

### I. Cyklische Bewegung.

**Definition 1.** Cyklische Koordinate eines Systems heißt eine 546 freie Koordinate des Systems dann, wenn die Länge einer unendlich kleinen Verrückung des Systems nicht von dem Werte der Koordinate, sondern nur von dem ihrer Änderung abhängt.

**Anmerkung 1.** Es gibt cyklische Koordinaten. Denn 547 es genügt z. B. eine rechtwinklige Koordinate des Systems, wenn sie frei ist, der Voraussetzung. Cyklische Koordinaten können stets eingeführt werden, wenn unendlich kleine Verrückungen des Systems möglich sind, welche nicht eine Änderung der Massenverteilung im Raume zur Folge haben, sondern nur eine cyklische Vertauschung der Massen unter sich.