Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

I. Geleitetes unfreies System

werden, so bezeichnen wir das unfreie System als Teilsystem, das freie System aber, von welchem es ein Teil ist, als das vollständige System.

430 **Vorbemerkung 2.** Indem wir einen Teil eines freien Systems als unfreies System behandeln, setzen wir voraus, daß das übrige System uns mehr oder weniger unbekannt ist, so daß die unmittelbare Anwendung des Grundgesetzes unmöglich wird. Dieser Mangel unserer Kenntnis muß in irgend einer Weise durch besondere Angaben ausgeglichen sein. Solche Angaben können in verschiedener Weise gemacht werden. Ohne die Möglichkeiten erschöpfen zu wollen, ziehen wir nur zwei Formen für jene Angaben in Betracht, welche in der bisherigen Entwickelung der Mechanik besondere Bedeutung gewonnen haben.

Die erste Form ist diejenige, bei welcher wir die Bewegung des unfreien Systems als eine geleitete bezeichnen; die zweite ist diejenige, bei welcher wir sagen, die Bewegung des unfreien Systems sei durch Kräfte beeinflußt.

I. Geleitetes unfreies System.

431 **Definition.** Geleitete Bewegung eines unfreien Systems heißt jede Bewegung, welche das System ausführt, während die übrigen Massen des vollständigen Systems eine ganz bestimmte, vorgeschriebene Bewegung ausführen. Ein System, welches geleitete Bewegungen ausführt, nennen wir ein geleitetes System.

432 **Zusatz 1.** Mögliche Bewegung eines geleiteten Systems heißt jede Bewegung desselben, welche dem Zusammenhange des vollständigen Systems und der bestimmten Bewegung der übrigen Massen desselben nicht widerspricht.

433 **Zusatz 2.** Natürliche Bewegung eines geleiteten Systems heißt jede Bewegung desselben, welche mit der bestimmten Bewegung der übrigen Massen zusammen eine natürliche Bewegung des vollständigen Systems bildet.

Aufgabe. Die möglichen Bewegungen eines geleiteten Systems analytisch darzustellen. 434

Seien die r Größen p_ϱ allgemeine Koordinaten des betrachteten Teilsystems, die $\mathfrak{r}$ Größen $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen Massen des vollständigen Systems. Die $r+\mathfrak{r}$ Größen p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ sind alsdann allgemeine Koordinaten des vollständigen Systems, und die Zusammenhänge dieses sind dargestellt durch eine Anzahl, etwa h, Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ und auch die $\mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}$ Funktionen sowohl der p_ϱ als auch der $\mathfrak{p}_\varrho$ sein können. Sind nun die Bewegungen der Massen, deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho$ sind, bestimmt, so sind die $\mathfrak{p}_\varrho$ gegebene Funktionen der Zeit. Zum Teil sind die Gleichungen **a)** durch diese Funktionen identisch erfüllt, zum Teil nehmen sie durch Einsetzen derselben die Form der k Gleichungen an:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \qquad \text{b)}$$

oder auch:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho + p_{\varkappa t}\, dt = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

welche die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems heißen, und in welchen die $p_{\varkappa\varrho}$ und $p_{\varkappa t}$ jetzt allein Funktionen der p_ϱ und der Zeit t sind. Alle möglichen Bewegungen des geleiteten Systems genügen diesen Gleichungen, und alle Bewegungen, welche ihnen genügen, sind mögliche Bewegungen.

Anmerkung 1. Ist das geleitete System ein holonomes System, so lassen sich die Differentialgleichungen **b)** und **c)** für dasselbe ersetzen durch ebensoviel endliche Gleichungen zwischen den r Koordinaten des Systems und der Zeit t. Die möglichen Lagen eines geleiteten holonomen Systems lassen sich darstellen durch Koordinaten, welche keinen anderen Bedingungen 435 unterworfen sind, als dieser, daß eine Anzahl unter ihnen gegebene Funktionen der Zeit sind.

436 **Anmerkung 2.** Die Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems enthalten also im allgemeinen die Zeit, und das geleitete System würde für sich betrachtet der Forderung der Gesetzmäßigkeit (**119**) widersprechen. Umgekehrt betrachten wir nun auch jedes System, dessen Bedingungsgleichungen nach der gewöhnlichen Redeweise der Mechanik die Zeit explizite enthalten, und welches also in unserer Redeweise anscheinend ungesetzmäßig ist, als ein geleitetes System, als ein System also, welches zusammen mit anderen unbekannten Massen den Bedingungen der Gesetzmäßigkeit genügt. Ist diese Annahme zulässig, so macht erst sie das Problem zu einem bestimmten mechanischen Problem (**325**). Ist diese Annahme aber bei einer besonderen Form der Bedingungsgleichungen etwa unzulässig, so enthalten diese Bedingungsgleichungen bereits einen Widerspruch gegen das Grundgesetz oder seine Voraussetzungen, und alle in bezug auf das System gestellten Fragen wären keine mechanischen Probleme (**326**).

437 **Anmerkung 3.** Auf ein geleitetes System ist das Grundgesetz nicht unmittelbar anwendbar. Denn der Begriff der geradesten Bahnen ist nur definiert für gesetzmäßige Zusammenhänge (**120**); die inneren Zusammenhänge des geleiteten Systems aber sind ungesetzmäßige. Es müssen daher anderweitige Merkmale aufgesucht werden, durch welche die natürlichen Bewegungen eines geleiteten Systems sich von der größeren Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungen unterscheiden.

438 **Lehrsatz 1.** Wie ein freies System, so bewegt sich auch ein geleitetes System in solcher Weise, daß die Größe der Beschleunigung beständig kleiner ist für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen des Systems genügt, und welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit der wirklichen zusammenfällt.

Denn das Quadrat der Größe der Beschleunigung des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Größen für das Teilsystem und für das übrige System, diese Größen multipliziert mit den Massen ihrer Systeme und dividiert durch die Masse des Gesamtsystems. Diese Summe soll nach **344** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmte und solche Funktion der Zeit vorausgesetzt, für welche das Minimum der Summe eintritt (**436**); dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Lehrsatz 2. Wie ein freies, so bewegt sich auch ein ge- **439**
leitetes holonomes System in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Energie beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen kleiner wird für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen genügt, und welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangs- in die Endlage überführt.

Denn das Zeitintegral der Energie des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Größen für das Teilsystem und für das übrige System. Diese Summe soll nach **358** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmt und als solcher vorausgesetzt, für welchen das Minimum der Summe eintritt; dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Anmerkung 1. Die vorstehenden beiden Lehrsätze (**438**, **440**
439) enthalten offenbar die Anpassung der Sätze **344** und **358** an die besonderen Voraussetzungen dieses Abschnittes. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik können wir ihren Inhalt in die Form der Aussage kleiden: Der Satz von der kleinsten Beschleunigung und das Hamiltonsche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

Anmerkung 2. Die Sätze von der Energie, vom kürzesten **441**
Wege, von der kürzesten Zeit (**340**, **347**, **352**) lassen sich nicht in gleich unmittelbarer Weise den Voraussetzungen der geleiteten Systeme anpassen. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik nimmt diese Aussage die Form an: Das

Prinzip der Energie und das Prinzip der kleinsten Wirkung verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

442 **Aufgabe.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems anzugeben.

Es seien wieder m die Masse, die p_ϱ die Koordinaten und die f_ϱ die Beschleunigungen nach den p_ϱ für das geleitete System. Es seien ferner $\mathfrak{m}$ die Masse und die $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen materiellen Punkte des vollständigen Systems. Die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ können auch als Koordinaten des vollständigen Systems gelten; es mögen bei dieser Auffassung die Komponenten der Beschleunigung des vollständigen Systems nach diesen Koordinaten mit f'_ϱ und $\mathfrak{f}'_\varrho$ bezeichnet werden. Dann ist die Bewegung des vollständigen Systems eindeutig bestimmt durch seine h Bedingungsgleichungen von der Form **434a** und durch $r+\mathfrak{r}$ Bewegungsgleichungen von der Form (**372**):

a) $$(m+\mathfrak{m})\, f'_\varrho + \sum_1^h {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0$$

b) $$(m+\mathfrak{m})\, \mathfrak{f}'_\varrho + \sum_1^h {}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Nun haben wir nach der Voraussetzung uns die $\mathfrak{p}_\varrho$ bereits bestimmt zu denken als solche Funktionen der Zeit, durch welche die Gleichungen **b)** identisch erfüllt werden, und durch deren Einsetzen die h Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems übergehen in die k Bedingungsgleichungen (**434b**) des geleiteten Systems. Ferner haben wir nach **255**:

c) $$(m+\mathfrak{m})\, f'_\varrho = m f_\varrho \quad .$$

Hiernach erhalten wir als zu berücksichtigende Gleichungen die r Bewegungsgleichungen:

d) $$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0$$

und die k Bedingungsgleichungen:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \quad , \qquad \text{e)}$$

welche $r+k$ Gleichungen nun eine Beziehung auf die unbekannten Massen des vollständigen Systems nicht mehr enthalten, welche zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ ausreichen, und welche daher die Lösung der gestellten Aufgabe bilden.

Folgerung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems haben dieselbe Form wie diejenigen eines freien Systems. 443

In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir sagen, die Gültigkeit jener Form hänge nicht davon ab, ob die Bedingungsgleichungen des Systems die Zeit explizite enthalten oder nicht. Die Bewegungsgleichungen eines geleiteten Systems werden daher auch genau dieselben Umformungen zulassen, wie diejenigen eines freien Systems (**368** ff.); diejenigen Formen allerdings, welche alle Koordinaten als freie voraussetzen, werden ihre Anwendbarkeit verlieren.

Folgerung 2. Eine natürliche Bewegung eines geleiteten Systems ist eindeutig bestimmt durch Angabe der Lage und Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit (vergl. **331**). 444

Bemerkung. Wie in einem freien, so ist in einem geleiteten System der Zwang des Systems gleich seiner Beschleunigung. 445

Denn wenn die sämtlichen Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems aufgelöst werden, so werden die materiellen Punkte des Systems freie Punkte und die Beschleunigung der natürlichen Bewegung des Systems gleich Null (**385**).

Lehrsatz 1. Wie in einem freien, so ist in einem geleiteten System die Größe des Zwanges in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere 446 mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Der Satz folgt aus **445** und **438**.

447 **Lehrsatz 2.** Wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, so steht auch bei der natürlichen Bewegung eines geleiteten Systems die Richtung des Zwanges beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Der Satz folgt aus **445** und **442** wie in **392**.

448 **Anmerkung.** Die vorstehenden beiden Sätze **446** und **447** enthalten die Anpassung der Sätze **388** und **392** an die besonderen Verhältnisse der geleiteten Systeme. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir ihren Inhalt in der Fassung wiedergeben: Das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges und das D'ALEMBERTsche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

449 **Bemerkung.** Wenn die Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ des vollständigen Systems, welche in den Gleichungen **434a** mit den p_ϱ in denselben Gleichungen auftreten, nicht Funktionen der Zeit, sondern konstant in derselben sind, so nehmen die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems die Form an:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ die Zeit nicht enthalten. Das geleitete System erscheint in diesem Falle als ein gesetzmäßiges, aber es hört nicht notwendig auf, ein unfreies zu sein, da die $p_{\varkappa\varrho}$ Funktionen des absoluten Ortes sein können, während sie in den Bedingungsgleichungen eines freien Systems von der absoluten Lage unabhängig sind.

In solchen unfreien, aber gesetzmäßigen Systemen behält der Begriff der geradesten Bahn seine Anwendbarkeit. Auch das Grundgesetz ist daher auf solche Systeme unmittelbar anwendbar, und es gelten daher für ein solches System auch alle Lehrsätze, welche für die Bewegung eines freien Systems aufgestellt wurden, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, welche sich auf die absolute Lage beziehen, also allein mit Ausnahme des Lehrsatzes 400 und seiner Folgerungen.

II. Systeme durch Kräfte beeinflußt.

Definition. Zwei materielle Systeme heißen direkt gekoppelt, wenn eine oder mehrere Koordinaten des einen einer oder mehreren Koordinaten des andern dauernd gleich sind. Gekoppelt schlechthin heißen zwei Systeme, wenn ihre Koordinaten so gewählt werden können, daß die Systeme in das Verhältnis der direkten Koppelung treten. Gekoppelte Systeme, welche nicht direkt gekoppelt sind, heißen indirekt gekoppelt. 450

Folgerung 1. Die Koppelung zweier Systeme ist eine Beziehung zwischen beiden, welche unabhängig von unserer Willkür, insbesondere unabhängig von der Wahl der Koordinaten besteht. Ob aber eine bestehende Koppelung eine direkte oder eine indirekte sei, hängt ab von der Wahl der Koordinaten, ist also eine Frage unserer willkürlichen Auffassung. 451

Folgerung 2. Jede bestehende Koppelung zwischen zwei Systemen kann durch geeignete Wahl der Koordinaten zu einer direkten gemacht werden. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so setzen wir im folgenden voraus, daß dies geschehen sei. Die beständig gleichen Koordinaten der gekoppelten Systeme bezeichnen wir dann auch als ihre gemeinsamen Koordinaten. 452

Folgerung 3. Jedes von zwei gekoppelten Systemen ist durch die Koppelung notwendig ein unfreies System, beide bilden aber zusammen oder zusammen mit weiteren Systemen, mit welchen sie gekoppelt sind, ein freies System. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so wird im folgenden angenommen, daß eine Koppelung mit mehreren Systemen nicht stattfindet, so daß die beiden gekoppelten Systeme zusammen bereits ein freies bilden. 453

Analytische Darstellung. Sind die p_ϱ die Koordinaten des 454
einen, die $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des andern Systems, so wird