Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 4. Bewegung der unfreien Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Anmerkung 1. Lassen wir allgemein und ohne Einschränkung zu, daß außer den unmittelbar, d. h. den mit der Wage bestimmbaren Massen noch andere, hypothetische Massen (301) in den Systemen der Natur sich finden können, so ist es überhaupt unmöglich, in der Erkenntnis des Zusammenhanges natürlicher Systeme weiter zu gelangen, als soweit, daß man Modelle der wirklichen Systeme angeben könne. Wir können dann in der Tat keine Kenntnis haben, ob die Systeme, welche wir in der Mechanik betrachten, mit den wirklichen Systemen der Natur, welche wir zu betrachten meinen, in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein darin, daß die einen Modelle der anderen sind. 427

Anmerkung 2. Das Verhältnis eines dynamischen Modells zu dem System, als dessen Modell es betrachtet wird, ist dasselbe, wie das Verhältnis der Bilder, welche sich unser Geist von den Dingen bildet, zu diesen Dingen. Betrachten wir nämlich den Zustand des Modells als eine Abbildung des Zustandes des Systems, so sind die Folgen der Abbildung, welche nach den Gesetzen dieser Abbildung eintreten müssen, zugleich die Abbildung der Folgen, welche sich an dem ursprünglichen Gegenstand nach den Gesetzen dieses ursprünglichen Gegenstandes entwickeln müssen. Die Übereinstimmung zwischen Geist und Natur läßt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modelle voneinander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, daß der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten. 428

Abschnitt 4. Bewegung der unfreien Systeme.

Vorbemerkung 1. Nach unserer Auffassung ist jedes unfreie System Teil eines größeren freien Systems; unfreie Systeme, für welche diese Annahme nicht zuträfe, kennen wir nicht. Soll aber jenes Verhältnis besonders hervorgehoben 429 werden, so bezeichnen wir das unfreie System als Teilsystem, das freie System aber, von welchem es ein Teil ist, als das vollständige System.

430 **Vorbemerkung 2.** Indem wir einen Teil eines freien Systems als unfreies System behandeln, setzen wir voraus, daß das übrige System uns mehr oder weniger unbekannt ist, so daß die unmittelbare Anwendung des Grundgesetzes unmöglich wird. Dieser Mangel unserer Kenntnis muß in irgend einer Weise durch besondere Angaben ausgeglichen sein. Solche Angaben können in verschiedener Weise gemacht werden. Ohne die Möglichkeiten erschöpfen zu wollen, ziehen wir nur zwei Formen für jene Angaben in Betracht, welche in der bisherigen Entwickelung der Mechanik besondere Bedeutung gewonnen haben.

Die erste Form ist diejenige, bei welcher wir die Bewegung des unfreien Systems als eine geleitete bezeichnen; die zweite ist diejenige, bei welcher wir sagen, die Bewegung des unfreien Systems sei durch Kräfte beeinflußt.

I. Geleitetes unfreies System.

431 **Definition.** Geleitete Bewegung eines unfreien Systems heißt jede Bewegung, welche das System ausführt, während die übrigen Massen des vollständigen Systems eine ganz bestimmte, vorgeschriebene Bewegung ausführen. Ein System, welches geleitete Bewegungen ausführt, nennen wir ein geleitetes System.

432 **Zusatz 1.** Mögliche Bewegung eines geleiteten Systems heißt jede Bewegung desselben, welche dem Zusammenhange des vollständigen Systems und der bestimmten Bewegung der übrigen Massen desselben nicht widerspricht.

433 **Zusatz 2.** Natürliche Bewegung eines geleiteten Systems heißt jede Bewegung desselben, welche mit der bestimmten Bewegung der übrigen Massen zusammen eine natürliche Bewegung des vollständigen Systems bildet.

Aufgabe. Die möglichen Bewegungen eines geleiteten Systems analytisch darzustellen. 434

Seien die r Größen p_ϱ allgemeine Koordinaten des betrachteten Teilsystems, die $\mathfrak{r}$ Größen $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen Massen des vollständigen Systems. Die $r+\mathfrak{r}$ Größen p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ sind alsdann allgemeine Koordinaten des vollständigen Systems, und die Zusammenhänge dieses sind dargestellt durch eine Anzahl, etwa h, Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ und auch die $\mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}$ Funktionen sowohl der p_ϱ als auch der $\mathfrak{p}_\varrho$ sein können. Sind nun die Bewegungen der Massen, deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho$ sind, bestimmt, so sind die $\mathfrak{p}_\varrho$ gegebene Funktionen der Zeit. Zum Teil sind die Gleichungen **a)** durch diese Funktionen identisch erfüllt, zum Teil nehmen sie durch Einsetzen derselben die Form der k Gleichungen an:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \qquad \text{b)}$$

oder auch:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho + p_{\varkappa t}\, dt = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

welche die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems heißen, und in welchen die $p_{\varkappa\varrho}$ und $p_{\varkappa t}$ jetzt allein Funktionen der p_ϱ und der Zeit t sind. Alle möglichen Bewegungen des geleiteten Systems genügen diesen Gleichungen, und alle Bewegungen, welche ihnen genügen, sind mögliche Bewegungen.

Anmerkung 1. Ist das geleitete System ein holonomes System, so lassen sich die Differentialgleichungen **b)** und **c)** für dasselbe ersetzen durch ebensoviel endliche Gleichungen zwischen den r Koordinaten des Systems und der Zeit t. Die möglichen Lagen eines geleiteten holonomen Systems lassen sich darstellen durch Koordinaten, welche keinen anderen Bedingungen 435 unterworfen sind, als dieser, daß eine Anzahl unter ihnen gegebene Funktionen der Zeit sind.

436 **Anmerkung 2.** Die Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems enthalten also im allgemeinen die Zeit, und das geleitete System würde für sich betrachtet der Forderung der Gesetzmäßigkeit (**119**) widersprechen. Umgekehrt betrachten wir nun auch jedes System, dessen Bedingungsgleichungen nach der gewöhnlichen Redeweise der Mechanik die Zeit explizite enthalten, und welches also in unserer Redeweise anscheinend ungesetzmäßig ist, als ein geleitetes System, als ein System also, welches zusammen mit anderen unbekannten Massen den Bedingungen der Gesetzmäßigkeit genügt. Ist diese Annahme zulässig, so macht erst sie das Problem zu einem bestimmten mechanischen Problem (**325**). Ist diese Annahme aber bei einer besonderen Form der Bedingungsgleichungen etwa unzulässig, so enthalten diese Bedingungsgleichungen bereits einen Widerspruch gegen das Grundgesetz oder seine Voraussetzungen, und alle in bezug auf das System gestellten Fragen wären keine mechanischen Probleme (**326**).

437 **Anmerkung 3.** Auf ein geleitetes System ist das Grundgesetz nicht unmittelbar anwendbar. Denn der Begriff der geradesten Bahnen ist nur definiert für gesetzmäßige Zusammenhänge (**120**); die inneren Zusammenhänge des geleiteten Systems aber sind ungesetzmäßige. Es müssen daher anderweitige Merkmale aufgesucht werden, durch welche die natürlichen Bewegungen eines geleiteten Systems sich von der größeren Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungen unterscheiden.

438 **Lehrsatz 1.** Wie ein freies System, so bewegt sich auch ein geleitetes System in solcher Weise, daß die Größe der Beschleunigung beständig kleiner ist für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen des Systems genügt, und welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit der wirklichen zusammenfällt.

Denn das Quadrat der Größe der Beschleunigung des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Größen für das Teilsystem und für das übrige System, diese Größen multipliziert mit den Massen ihrer Systeme und dividiert durch die Masse des Gesamtsystems. Diese Summe soll nach **344** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmte und solche Funktion der Zeit vorausgesetzt, für welche das Minimum der Summe eintritt (**436**); dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Lehrsatz 2. Wie ein freies, so bewegt sich auch ein ge- **439**
leitetes holonomes System in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Energie beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen kleiner wird für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen genügt, und welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangs- in die Endlage überführt.

Denn das Zeitintegral der Energie des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Größen für das Teilsystem und für das übrige System. Diese Summe soll nach **358** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmt und als solcher vorausgesetzt, für welchen das Minimum der Summe eintritt; dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Anmerkung 1. Die vorstehenden beiden Lehrsätze (**438**, **440**
439) enthalten offenbar die Anpassung der Sätze **344** und **358** an die besonderen Voraussetzungen dieses Abschnittes. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik können wir ihren Inhalt in die Form der Aussage kleiden: Der Satz von der kleinsten Beschleunigung und das Hamiltonsche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

Anmerkung 2. Die Sätze von der Energie, vom kürzesten **441**
Wege, von der kürzesten Zeit (**340**, **347**, **352**) lassen sich nicht in gleich unmittelbarer Weise den Voraussetzungen der geleiteten Systeme anpassen. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik nimmt diese Aussage die Form an: Das

Prinzip der Energie und das Prinzip der kleinsten Wirkung verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

442 **Aufgabe.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems anzugeben.

Es seien wieder m die Masse, die p_ϱ die Koordinaten und die f_ϱ die Beschleunigungen nach den p_ϱ für das geleitete System. Es seien ferner $\mathfrak{m}$ die Masse und die $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen materiellen Punkte des vollständigen Systems. Die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ können auch als Koordinaten des vollständigen Systems gelten; es mögen bei dieser Auffassung die Komponenten der Beschleunigung des vollständigen Systems nach diesen Koordinaten mit f'_ϱ und $\mathfrak{f}'_\varrho$ bezeichnet werden. Dann ist die Bewegung des vollständigen Systems eindeutig bestimmt durch seine h Bedingungsgleichungen von der Form **434a** und durch $r+\mathfrak{r}$ Bewegungsgleichungen von der Form (**372**):

a) $$(m+\mathfrak{m})\, f'_\varrho + \sum_1^h{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = 0$$

b) $$(m+\mathfrak{m})\, \mathfrak{f}'_\varrho + \sum_1^h{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = 0 \quad .$$

Nun haben wir nach der Voraussetzung uns die $\mathfrak{p}_\varrho$ bereits bestimmt zu denken als solche Funktionen der Zeit, durch welche die Gleichungen **b)** identisch erfüllt werden, und durch deren Einsetzen die h Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems übergehen in die k Bedingungsgleichungen (**434b**) des geleiteten Systems. Ferner haben wir nach **255**:

c) $$(m+\mathfrak{m})\, f'_\varrho = m f_\varrho \quad .$$

Hiernach erhalten wir als zu berücksichtigende Gleichungen die r Bewegungsgleichungen:

d) $$m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = 0$$

und die k Bedingungsgleichungen:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho} \dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \quad , \qquad \text{e)}$$

welche $r+k$ Gleichungen nun eine Beziehung auf die unbekannten Massen des vollständigen Systems nicht mehr enthalten, welche zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ ausreichen, und welche daher die Lösung der gestellten Aufgabe bilden.

Folgerung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems haben dieselbe Form wie diejenigen eines freien Systems. 443

In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir sagen, die Gültigkeit jener Form hänge nicht davon ab, ob die Bedingungsgleichungen des Systems die Zeit explizite enthalten oder nicht. Die Bewegungsgleichungen eines geleiteten Systems werden daher auch genau dieselben Umformungen zulassen, wie diejenigen eines freien Systems (**368** ff.); diejenigen Formen allerdings, welche alle Koordinaten als freie voraussetzen, werden ihre Anwendbarkeit verlieren.

Folgerung 2. Eine natürliche Bewegung eines geleiteten Systems ist eindeutig bestimmt durch Angabe der Lage und Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit (vergl. **331**). 444

Bemerkung. Wie in einem freien, so ist in einem geleiteten System der Zwang des Systems gleich seiner Beschleunigung. 445

Denn wenn die sämtlichen Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems aufgelöst werden, so werden die materiellen Punkte des Systems freie Punkte und die Beschleunigung der natürlichen Bewegung des Systems gleich Null (**385**).

Lehrsatz 1. Wie in einem freien, so ist in einem geleiteten System die Größe des Zwanges in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere 446 mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Der Satz folgt aus **445** und **438**.

447 **Lehrsatz 2.** Wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, so steht auch bei der natürlichen Bewegung eines geleiteten Systems die Richtung des Zwanges beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Der Satz folgt aus **445** und **442** wie in **392**.

448 **Anmerkung.** Die vorstehenden beiden Sätze **446** und **447** enthalten die Anpassung der Sätze **388** und **392** an die besonderen Verhältnisse der geleiteten Systeme. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir ihren Inhalt in der Fassung wiedergeben: Das GAUSSsche Prinzip des kleinsten Zwanges und das D'ALEMBERTsche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

449 **Bemerkung.** Wenn die Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ des vollständigen Systems, welche in den Gleichungen **434a** mit den p_ϱ in denselben Gleichungen auftreten, nicht Funktionen der Zeit, sondern konstant in derselben sind, so nehmen die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems die Form an:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ die Zeit nicht enthalten. Das geleitete System erscheint in diesem Falle als ein gesetzmäßiges, aber es hört nicht notwendig auf, ein unfreies zu sein, da die $p_{\varkappa\varrho}$ Funktionen des absoluten Ortes sein können, während sie in den Bedingungsgleichungen eines freien Systems von der absoluten Lage unabhängig sind.

In solchen unfreien, aber gesetzmäßigen Systemen behält der Begriff der geradesten Bahn seine Anwendbarkeit. Auch das Grundgesetz ist daher auf solche Systeme unmittelbar anwendbar, und es gelten daher für ein solches System auch alle Lehrsätze, welche für die Bewegung eines freien Systems aufgestellt wurden, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, welche sich auf die absolute Lage beziehen, also allein mit Ausnahme des Lehrsatzes 400 und seiner Folgerungen.

II. Systeme durch Kräfte beeinflußt.

Definition. Zwei materielle Systeme heißen direkt gekoppelt, wenn eine oder mehrere Koordinaten des einen einer oder mehreren Koordinaten des andern dauernd gleich sind. Gekoppelt schlechthin heißen zwei Systeme, wenn ihre Koordinaten so gewählt werden können, daß die Systeme in das Verhältnis der direkten Koppelung treten. Gekoppelte Systeme, welche nicht direkt gekoppelt sind, heißen indirekt gekoppelt. 450

Folgerung 1. Die Koppelung zweier Systeme ist eine Beziehung zwischen beiden, welche unabhängig von unserer Willkür, insbesondere unabhängig von der Wahl der Koordinaten besteht. Ob aber eine bestehende Koppelung eine direkte oder eine indirekte sei, hängt ab von der Wahl der Koordinaten, ist also eine Frage unserer willkürlichen Auffassung. 451

Folgerung 2. Jede bestehende Koppelung zwischen zwei Systemen kann durch geeignete Wahl der Koordinaten zu einer direkten gemacht werden. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so setzen wir im folgenden voraus, daß dies geschehen sei. Die beständig gleichen Koordinaten der gekoppelten Systeme bezeichnen wir dann auch als ihre gemeinsamen Koordinaten. 452

Folgerung 3. Jedes von zwei gekoppelten Systemen ist durch die Koppelung notwendig ein unfreies System, beide bilden aber zusammen oder zusammen mit weiteren Systemen, mit welchen sie gekoppelt sind, ein freies System. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so wird im folgenden angenommen, daß eine Koppelung mit mehreren Systemen nicht stattfindet, so daß die beiden gekoppelten Systeme zusammen bereits ein freies bilden. 453

Analytische Darstellung. Sind die p_ϱ die Koordinaten des einen, die $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des andern Systems, so wird 454 eine Koppelung zwischen beiden Systemen dadurch hergestellt, daß für ein oder mehrere Wertpaare von ϱ und σ p_ϱ gleich $\mathfrak{p}_\sigma$ gemacht wird. Wir können aber offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Indizes so verteilen, daß übereinstimmende Koordinaten in beiden Systemen denselben Index erhalten. Diese Systeme sind dann gekoppelt, wenn für einen oder mehrere Werte von ϱ dauernd

a) $$\mathfrak{p}_\varrho - p_\varrho = 0$$

wird, von welcher Gleichung die Gleichungen

b) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \qquad \text{oder}$$

c) $$d\mathfrak{p}_\varrho - dp_\varrho = 0$$

notwendige Folgen sind.

455 **Definition.** Unter einer Kraft verstehen wir den selbständig vorgestellten Einfluß, welchen das eine von zwei gekoppelten Systemen zufolge des Grundgesetzes auf die Bewegung des andern ausübt.

456 **Folgerung.** Zu jeder Kraft gibt es stets notwendig eine Gegenkraft.

Denn die Vorstellung des Einflusses, welchen das in der Definition als das zweite bezeichnete System auf das erste ausübt, ist nach der Definition selbst wieder eine Kraft. Kraft und Gegenkraft sind gleichberechtigt in dem Sinne, daß nach Willkür jede von ihnen als die Kraft oder auch als die Gegenkraft aufgefaßt werden kann.

457 **Aufgabe.** Einen Ausdruck für den Einfluß anzugeben, welche das eine von zwei gekoppelten Systemen auf die Bewegung des andern ausübt.

Es seien m die Masse und die r Größen p_ϱ die Koordinaten des ersten Systems; es seien die k Gleichungen

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0$$

wieder die Bedingungsgleichungen desselben. Es seien $\mathfrak{m}$ die **(457)**
Masse und die $\mathfrak{r}$ Größen $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des zweiten Systems; es seien die $\mathfrak{k}$ Gleichungen

$$\sum_1^{\mathfrak{r}}{}^\varrho\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \qquad \textbf{b)}$$

die Bedingungsgleichungen desselben. Es mögen ferner zwischen beiden, für einen oder mehrere, nämlich h Werte von ϱ, Koppelungsgleichungen von der Form

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \qquad \textbf{c)}$$

bestehen. Wir betrachten nun die Bewegung des ersten Systems unter dem Einflusse des zweiten, und behandeln es dabei als geleitetes System. Soweit die p_ϱ in den Gleichungen **c)** nicht vorkommen, sind die Beschleunigungen nach ihnen gegeben durch die Gleichungen (**442**):

$$m f_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad ; \qquad \textbf{d)}$$

für diejenigen p_ϱ aber, welche in **c)** vorkommen, haben wir auch diese Gleichungen zu berücksichtigen und also den Faktor von $\dot{p}_\varrho$ in denselben, nämlich -1, zu multiplizieren mit einem unbestimmten Faktor, welcher P_ϱ heißen möge, und das Produkt der linken Seite hinzuzufügen; für diese p_ϱ wird also:

$$m f_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa - P_\varrho = 0 \quad . \qquad \textbf{e)}$$

Das Eintreten der h Größen P_ϱ in die Bewegungsgleichungen vermehrt die Zahl der Unkekannten in denselben um h, und zur Bestimmung dieser h Größen ist auch die Zahl der Bedingungsgleichungen um die h Gleichungen **c)** vermehrt, in welchen wir uns die $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ als Funktionen der Zeit explizite gegeben denken müssen. Nehmen wir aber an, die Größen P_ϱ

rechnen nicht zu den Unbekannten, sondern seien uns als Funktionen der Zeit unmittelbar gegeben, alsdann sind die h Gleichungen **c)** und jede Kenntnis der $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ und des zweiten Systems überhaupt entbehrlich, und die $k+r$ Gleichungen **a) d) e)** genügen wiederum zur eindeutigen Bestimmung der $k+r$ Unbekannten $P_\varkappa$ und $\ddot{p}_\varrho$. Die h Multiplikatoren P_ϱ stellen also den Einfluß des zweiten Systems auf das erste vollständig dar, und ihre Gesamtheit kann als ein analytischer Ausdruck für diesen Einfluß angesehen werden, wie ihn die Aufgabe verlangt.

458 **Zusatz 1.** Wollen wir in symmetrischer Weise den Einfluß des ersten Systems auf das zweite darstellen, so haben wir die Koppelungsgleichungen zu schreiben in der Form:

a) $$\dot{p}_\varrho - \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

und es werden nun für diejenigen $\mathfrak{p}_\varrho$, welche sich in **a)** nicht finden, die Bewegungsgleichungen:

b) $$\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \mathfrak{P}_\varkappa = 0 \quad ,$$

während sie für die übrigen $\mathfrak{p}_\varrho$ die Form annehmen:

c) $$\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\varrho = 0 \quad ,$$

unter den $\mathfrak{P}_\varrho$ die unbestimmten Multiplikatoren der Gleichungen **a)** verstanden. Die Gesamtheit der $\mathfrak{P}_\varrho$ gibt uns einen Ausdruck für den Einfluß, welchen das erste System in jedem Augenblick auf die Bewegung des zweiten ausübt.

459 **Zusatz 2.** Offenbar können wir a l l e Bewegungsgleichungen des ersten Systems in der Form:

a) $$m f_\varrho + \sum_1^{k}{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa - P_\varrho = 0$$

und alle Bewegungsgleichungen des zweiten Systems in der Form:

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\,\mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\varrho = 0 \qquad \text{b)}$$

schreiben, wenn wir in zulässiger, wenn auch willkürlicher Weise festsetzen, daß für alle nicht gekoppelten Koordinaten die Größen P_ϱ und $\mathfrak{P}_\varrho$ den Wert Null haben sollen. Allerdings verliert die Gesamtheit der P_ϱ und $\mathfrak{P}_\varrho$ dabei ihre Bedeutung als System der Multiplikatoren der Gleichungen **457c** und **458a**, aber sie behält ihre Bedeutung als Ausdruck des Einflusses, welchen das eine System auf das andere ausübt.

Analytische Darstellung der Kraft. Wir können und 460
wollen daher im Einklang mit der Definition **455** festsetzen, daß die Gesamtheit der für alle p_ϱ nach **459** eindeutig bestimmten Größen P_ϱ den analytischen Ausdruck für die Kraft bilden solle, welche das System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das System der p_ϱ ausübt. Entsprechend bildet dann die Gesamtheit der Größen $\mathfrak{P}_\varrho$ den analytischen Ausdruck für die Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt. Die einzelnen Größen P_ϱ bez. $\mathfrak{P}_\varrho$ heißen die Komponenten der Kraft nach den entsprechenden Koordinaten p_ϱ bez. $\mathfrak{p}_\varrho$, auch wohl kurz die Kräfte nach diesen Koordinaten.

Durch diese Bestimmung setzen wir uns zugleich in Einklang mit der bestehenden Bezeichnung der Mechanik, und die Notwendigkeit, diesen Einklang herzustellen, rechtfertigt hinreichend, warum wir unter mehreren zulässigen Bestimmungen gerade diese getroffen haben.

Folgerung 1. Die Kraft, welche ein System auf ein 461
zweites ausübt, kann betrachtet werden als eine Vektorgröße in bezug auf das zweite System, als eine Vektorgröße nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten nach solchen Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.

462 **Folgerung 2.** Die Kraft, welche ein System auf ein zweites ausübt, kann aber auch betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das erstere System, als eine Vektorgröße nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten in Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.

463 **Anmerkung.** Betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein System enthält also jede Kraft Komponenten, welche abhängen von der Wahl der Koordinaten, d. h. von unserer willkürlichen Auffassung. Es rührt dies daher, daß von der Wahl der Koordinaten die Mannigfaltigkeit derjenigen Bewegungen des Systems abhängt, welche wir überhaupt in Betracht ziehen, in deren Richtung wir also einen möglichen Einfluß zulassen wollen.

464 **Bemerkung 1.** Wird ein System nacheinander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und erleidet es dabei von diesen Systemen die gleiche Kraft, so ist seine Bewegung die gleiche, wie verschieden auch immer diese anderen Systeme unter sich sein mögen.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Bewegung eines Systems unter dem Einfluß oder der Einwirkung oder dem Angriff einer Kraft schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, von welchen sie ausgeht, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

465 **Bemerkung 2.** Wird ein System nacheinander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und führt es dabei die gleiche Bewegung aus, so kann es dabei auf jene anderen Systeme gleiche Kraft ausüben, obwohl jene Systeme unter sich vollkommen verschieden sein können.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, auf welche jene Kraft ausgeübt wird, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

Bemerkung 3. Da aber alle Kräfte, von welchen schlechthin die Rede ist, doch keine anderen sein können, als welche von materiellen Systemen zufolge des Grundgesetzes auf materielle Systeme ausgeübt werden, so haben alle Kräfte von vornherein gewisse Eigenschaften gemeinsam. Die Quelle aller solcher gemeinsamen Eigenschaften sind die Eigenschaften der materiellen Systeme und das Grundgesetz. 466

Wirkung und Gegenwirkung.

Bezeichnung. 1. Die Komponenten der Kraft, welche das System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das der p_ϱ ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der p_ϱ, haben wir in **460** bereits bezeichnet mit P_ϱ. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, so wollen wir ihre Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen mit $\mathfrak{P}'_\varrho$. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten: 467

$$P_\varrho = \mathfrak{P}'_\varrho \quad .$$

2. Die Komponenten der Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, haben wir in **460** bereits bezeichnet mit $\mathfrak{P}_\varrho$. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der p_ϱ, so wollen wir ihre Komponenten nach den p_ϱ bezeichnen mit P'_ϱ. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$\mathfrak{P}_\varrho = P'_\varrho \quad .$$

Die auf ein System ausgeübten Kräfte sind also durch nicht akzentuierte, die von dem System ausgeübten Kräfte durch akzentuierte Buchstaben bezeichnet, sobald wir sie als Vektorgrößen in bezug auf das System selbst betrachten.

Lehrsatz. Kraft und Gegenkraft sind einander stets entgegengesetzt gleich. Es soll damit gesagt sein, daß die Komponenten beider nach jeder der benutzten Koordinaten entgegengesetzt gleich sind, und zwar sowohl wenn wir Kraft 468

(468) und Gegenkraft betrachten als Vektorgrößen in bezug auf das eine, als auch in bezug auf das andere System.

Denn wir können auch die beiden gekoppelten Systeme (**457**) betrachten als ein einziges, freies System. Seine Masse ist $m + \mathfrak{m}$, seine Koordinaten sind die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$. Seine Bedingungsgleichungen sind die Gleichungen **457a** und **b** und die Koppelungsgleichungen, etwa in der Form **457c**. Bezeichnen wir nunmehr die Multiplikatoren jener Gleichungen **a)** mit $P^0_\varkappa$, die der Gleichungen **b)** mit $\mathfrak{P}^0_\varkappa$, die die Gleichungen **c)** mit P^0_ϱ, so nehmen die Bewegungsgleichungen des gesamten Systems (vergl. **442**) die Form an:

a) $$m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P^0_\varkappa - P^0_\varrho = 0 \quad ,$$

b) $$\mathfrak{m} \mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{P}^0_\varkappa + P^0_\varrho = 0 \quad ,$$

in welchen für die Koordinaten, welche in den Koppelungsgleichungen nicht vorkommen, die P^0_ϱ gleich Null zu setzen sind.

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung ist nun aber dieselbe, welche wir vorhin als Bewegung der einzelnen Systeme betrachteten. Eine mögliche Lösung der gegenwärtigen Gleichungen erhalten wir also, wenn wir für die f_ϱ und $\mathfrak{f}_\varrho$ ihre früheren Werte setzen, wenn wir machen

c) $$P^0_\varkappa = P_\varkappa \quad , \quad \mathfrak{P}^0_\varkappa = \mathfrak{P}_\varkappa \quad ,$$

außerdem in **a)**

d) $$P^0_\varrho = \quad P_\varrho$$

und in **b)**

e) $$P^0_\varrho = -\mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Aber da durch die Gleichungen **a)** und **b)** die unbestimmten Multiplikatoren eindeutig bestimmt sind, so ist diese mögliche Lösung zugleich die einzig mögliche Lösung. Daher gelten die Gleichungen d) und e) mit Notwendigkeit; aus ihnen folgt:

$$P_\varrho = -\mathfrak{P}_\varrho \quad , \qquad \text{f)}$$

oder mit Benutzung der Bezeichnung **467**:

$$P_\varrho = -P'_\varrho$$
$$\mathfrak{P}_\varrho = -\mathfrak{P}'_\varrho \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht der 469
Lex tertia NEWTONs und wird auch wohl das Prinzip der Reaktion genannt. Doch deckt sich sein Inhalt nicht vollständig mit dem Inhalt jenes dritten Gesetzes, sondern das genaue Verhältnis ist das folgende:

Das NEWTONsche Gesetz enthält unsern Lehrsatz **468** vollständig, nach der Absicht des Begründers, wie die dem Gesetze beigefügten Beispiele zeigen.

Das NEWTONsche Gesetz enthält aber mehr. Wenigstens wird es auch allgemein angewandt auf die Wirkung von Fernkräften, d. h. von Kräften zwischen Körpern, welche keine gemeinsamen Koordinaten haben. Solche Kräfte aber kennt unsere Mechanik nicht. Damit man also beispielsweise aus unserem Lehrsatze die Folgerung ziehen könne, daß ein Planet die Sonne mit gleicher Kraft anziehe wie diese ihn, ist nötig, daß nähere Angaben über die Natur des Zusammenhanges zwischen beiden Körpern gemacht werden.

Anmerkung 2. Es darf aber als fraglich bezeichnet wer- 470
den, ob der Überschuß dieser Anwendung des Reaktionsprinzipes über den Inhalt des Lehrsatzes **468** nach Form und Inhalt mit Recht zu den Grundgesetzen der Mechanik könne gerechnet werden, und ob nicht vielmehr der wesentliche und allgemein gültige Inhalt jenes Prinzipes bereits durch den Lehrsatz **468** erschöpft werde.

Was die Form anlangt, so ist offenbar die Fassung des dritten Gesetzes, sobald es auf Fernkräfte angewandt wird, nicht völlig klar bestimmt. Denn wenn Kraft und Gegenkraft an verschiedenen Körpern angreifen, so ist nicht schlechthin deutlich, was unter entgegengesetzter Richtung zu verstehen sei. Dies tritt zum Beispiel hervor, wenn es sich um die Wechselwirkung zwischen Stromelementen handelt.

Was den Inhalt anlangt, so stellt die Anwendung des Reaktionsprinzipes auf die Fernkräfte der gewöhnlichen Mechanik offenbar eine Erfahrungstatsache dar, über deren genaues Zutreffen in allen Fällen man anfängt zweifelhaft zu werden. So ist die Elektrodynamik bereits fast überzeugt davon, daß die Wechselwirkung zwischen bewegten Magneten dem Prinzip nicht in allen Fällen genau unterworfen sei.

Zusammensetzung der Kräfte.

471 **Lehrsatz.** Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist die Kraft, welche die Gesamtheit jener Systeme auf das erste System ausübt, gleich der Summe der Kräfte, welche die einzelnen Systeme auf dasselbe ausüben.

Es sei nämlich das System 1 von der Masse m und den Koordinaten p_ϱ, dessen Bedingungsgleichungen die k Gleichungen

a) $$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0$$

sind, gleichzeitig gekoppelt mit den Systemen 2, 3, usw., deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho''$, $\mathfrak{p}_\varrho'''$, usw. sind.

Betrachten wir die Systeme 2, 3, usw. zunächst als getrennte Systeme, so sind die Koppelungsgleichungen für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ zu schreiben in der Form:

b) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho'' - \dot{p}_\varrho = 0$$

c) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho''' - \dot{p}_\varrho = 0$$

usw.

Behandeln wir nun das aus 1, 2, 3, usw. zusammengesetzte System als freies und bezeichnen wieder die Multiplikatoren

der Gleichungen **a)** mit $P_\varkappa$, dagegen die von **b)** mit P_ϱ'', die (471)
von **c)** mit P_ϱ''', usw., so erhalten wir die Bewegungsgleichungen des Systems 1 in der Form:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa - P_\varrho'' - P_\varrho''' - \text{usw.} = 0 \quad , \qquad \text{d)}$$

worin die sämtlichen P_ϱ'', P_ϱ''', usw. ebenso wie die $P_\varkappa$ eindeutig bestimmte Größen sind. Die P_ϱ'', P_ϱ''', usw. stellen die Komponenten der Kräfte dar, welche die einzelnen Systeme 2, 3, usw. auf das System 1 ausüben.

Betrachten wir nun aber zweitens die Systeme 2, 3, usw. zusammen als **ein** System, so können die nach Gleichungen **b) c)** usw. gleichen Größen $\mathfrak{p}_\varrho''$, $\mathfrak{p}_\varrho'''$, usw. als eine einzige Koordinate $\mathfrak{p}_\varrho$ desselben angesehen werden, und an Stelle jener Koppelungsgleichungen tritt dann für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ die eine Gleichung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{e)}$$

Ist P_ϱ der Multiplikator derselben, und bezeichnen wir mit $P_\varkappa^0$ die Multiplikatoren der Gleichungen **a)**, welche dem jetzigen System der Bewegungsgleichungen entsprechen, so nehmen diese die Form an:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa^0 - P_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{f)}$$

Die P_ϱ stellen die Komponenten der Gesamtkraft dar, welche auf das System 1 wirkt.

Die verschiedene Auffassung kann nun die nach dem Grundgesetze erfolgende Bewegung selbst nicht ändern. **Eine** mögliche Lösung der Gleichungen **f)** erhalten wir daher, indem wir mit Benutzung der früheren Lösung setzen:

$$P_\varkappa^0 = P_\varkappa \qquad \text{g)}$$

$$P_\varrho = P_\varrho'' + P_\varrho''' + \text{usw.} \qquad \text{h)}$$

Aber da es nur eine einzige mögliche Lösung gibt, so ist die vorstehende eben diese, und die Gleichung **h)**, welche unsere Behauptung enthält, muß mit Notwendigkeit zutreffen.

472 **Folgerung 1.** Eine jede Zahl von Kräften, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefaßt werden als eine einzige Kraft, und zwar als diejenige Kraft, welche als Vektorgröße in bezug auf das System betrachtet gleich der Summe jener Kräfte ist.

Fassen wir eine Zahl von Kräften in dieser Weise auf, so sagen wir, daß wir sie zusammensetzen. Das Ergebnis der Zusammensetzung nennen wir auch die Resultante der einzelnen Kräfte.

473 **Folgerung 2.** Eine jede Kraft, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefaßt werden als Summe einer beliebigen Zahl von Kräften, und zwar jeder Zahl von Kräften, deren Summe als Vektorgrößen in bezug auf das System gleich jener ursprünglichen Kraft ist.

Fassen wir eine Kraft in dieser Weise auf, so sagen wir, daß wir sie zerlegen; die Kräfte, welche das Ergebnis einer solchen Zerlegung sind, nennen wir die Komponenten der ursprünglichen Kraft.

474 **Anmerkung.** Die geometrischen Komponenten einer Kraft nach den Koordinaten können zugleich als Komponenten derselben im Sinne von **473** aufgefaßt werden.

475 **Definition.** Eine Kraft, welche von einem einzelnen materiellen Punkte ausgeübt wird, oder welche auf einen einzelnen materiellen Punkt wirkt, heißt eine Elementarkraft.

476 **Anmerkung.** Die elementare Mechanik versteht gewöhnlich unter Kräften nur Elementarkräfte. Im Gegensatz zu denselben bezeichnet man dann wohl die bisher von uns betrachteten allgemeineren Kraftformen als LAGRANGEsche Kräfte. Man könnte dementsprechend die Elementarkräfte selbst auch passend als GALILEIsche oder NEWTONsche Kräfte bezeichnen.

477 **Folgerung 1.** Jede Elementarkraft ist darstellbar durch die geometrische Verrückung eines Punktes, also durch eine nach Größe und Richtung gegebene Strecke.

Denn jede Elementarkraft ist Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen Punkt.

Folgerung 2. Die Zusammensetzung der Elementarkräfte, 478
welche an demselben Punkte angreifen, geschieht nach der Methode der geometrischen Zusammensetzung und Zerlegung von Strecken.

Insbesondere setzen sich also zwei Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, zusammen zu einer einzigen Kraft, welche nach Größe und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt ist, dessen Seiten nach Größe und Richtung jene Kräfte darstellen (Parallelogramm der Kräfte).

Folgerung 3. Jede LAGRANGEsche Kraft ist darstellbar 479
als eine Summe von Elementarkräften, also zerlegbar in Elementarkräfte.

Denn jede Verrückung eines Systems kann aufgefaßt werden als eine Summe von Verrückungen seiner einzelnen Punkte.

Folgerung 4. Die Komponenten einer Kraft nach den 480
rechtwinkligen Koordinaten des Systems, auf welches die Kraft wirkt, oder welches die Kraft ausübt, können unmittelbar aufgefaßt werden als Elementarkräfte, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

Bewegung unter dem Einfluß von Kräften.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems 481
unter dem Einfluß einer gegebenen Kraft zu bestimmen.

Die Auflösung folgt unmittelbar aus **457**. Sind die P_ϱ die gegebenen Komponenten der wirkenden Kraft nach den p_ϱ, so benutze man die r Gleichungen

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho$$

zusammen mit den k Bedingungsgleichungen des Systems zur Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$, zu deren eindeutiger Bestimmung jene Gleichungen ausreichen.

482 **Anmerkung 1.** Die Bewegungsgleichungen eines Systems, auf welches Kräfte wirken, haben in den rechtwinkligen Koordinaten desselben die Form der $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i {}_\iota\, x_{\iota\nu} X_\iota = X_\nu \quad ,$$

wenn unter X_ν die Komponente der Kraft nach x_ν verstanden wird, und im übrigen die Bezeichnung von **368** benutzt wird.

483 **Anmerkung 2.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so nimmt die ihr entsprechende Bewegungsgleichung die einfache Form an:

$$mf_\varrho = P_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle p_ϱ freie Koordinaten, so nehmen alle Bewegungsgleichungen des Systems diese Form an, und diese r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Größen $\ddot{p}_\varrho$.

484 **Folgerung.** Die natürliche Bewegung eines materiellen Systems von einem bestimmten Augenblick an ist eindeutig bestimmt durch die Lage und Geschwindigkeit des Systems in jenem Augenblick und die Angabe der auf das System wirkenden Kraft für alle Zeiten von jenem Augenblick an (vergl. **331**, **444**).

485 **Lehrsatz.** Die Beschleunigung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte einem System erteilen, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Kräfte einzeln wirkend dem System erteilen würden.

Denn die Bewegungsgleichungen **481** sind linear in den f_ϱ und den $P_\varkappa$. Sind also die Wertsysteme $f_{\varrho_1} P_{\varkappa_1}$, $f_{\varrho_2} P_{\varkappa_2}$, usw. die Auflösungen dieser Gleichungen für die Kräfte P_{ϱ_1}, P_{ϱ_2}, usw., so ist das Wertsystem $f_{\varrho_1} + f_{\varrho_2} +$ usw., $P_{\varkappa_1} + P_{\varkappa_2} +$ usw. die Auflösung für die Kraft $P_{\varrho_1} + P_{\varrho_2} +$ usw.

486 **Anmerkung.** Der Inhalt des Lehrsatzes kann auch wiedergegeben werden in der Aussage, daß mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte sich hinsichtlich der Beschleunigung, welche

sie erzeugen, nicht stören. Ohne einen besonderen Namen erhalten zu haben, ist dieser Satz seit GALILEIS Zeiten stets als Prinzip angenommen und benutzt worden.

Folgerung. Die Beschleunigung, welche eine resultierende Kraft einem System erteilt, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Komponenten, einzeln wirkend, dem System erteilen würden (**472**, **473**). 487

Lehrsatz. Steht eine Kraft als Vektorgröße senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines materiellen Systems, so übt sie keinen Einfluß auf die Bewegung des Systems aus, — und umgekehrt. 488

Denn ist π eine solche Kraft, so haben ihre Komponenten π_ϱ nach den p_ϱ die Form (**250**):

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad .$$

Lassen wir nun diese Kraft neben der Kraft P auf das System wirken, so können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden:

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} (P_\varkappa - \gamma_\varkappa) = P_\varrho \quad .$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ erscheinen also nur die $P_\varkappa$ vergrößert um die $\gamma_\varkappa$; die $\ddot{p}_\varrho$, welche allein die Bewegung bestimmen, erscheinen unverändert.

Umgekehrt: Ändert die Hinzufügung der Komponenten π_ϱ zu den rechten Seiten der Gleichungen 481 nicht die f_ϱ, sondern nur die $P_\varkappa$, so lassen sich die π_ϱ schreiben in der Form:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad ;$$

die Kraft π steht also senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems (**250**).

489 **Anmerkung.** Der Lehrsatz gibt die Bedingung an, welcher derjenige Teil einer als Vektorgröße betrachteten Kraft unterworfen ist, welcher von der Wahl der Koordinaten, also von unserer Willkür abhängt (**463**). Denn dieser Teil muß notwendig ein solcher sein, welcher in der wirklichen Bewegung nicht zur Geltung kommt.

490 **Folgerung.** Obgleich aus der Kenntnis der auf ein System wirkenden Kraft eindeutig geschlossen werden kann auf die Bewegung des Systems, so kann doch aus der Bewegung des Systems nicht eindeutig geschlossen werden auf die Kraft, welche das System beeinflußt.

491 **Aufgabe 2.** Die Kraft zu bestimmen, welche ein materielles System bei gegebener Bewegung ausübt.

Nach **467** bezeichnen wir mit P'_ϱ die Komponente der gesuchten Kraft nach der Koordinate p_ϱ; aus **468** und **481** folgt dann:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad .$$

In diesen Gleichungen sind die f_ϱ als gegeben zu betrachten, und zwar müssen sie in den Bedingungsgleichungen an sich genügen. Die Größen $P_\varkappa$ sind ebenfalls bestimmt, wenn auch dasjenige System gegeben wird, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist. Solange aber nur die Bewegung des Systems der p_ϱ gegeben ist, bleiben die $P_\varkappa$ unbekannt. Die Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, ist also allein durch die Angabe der Bewegung des Systems noch nicht völlig bestimmt, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, dessen Komponenten die Form haben:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

und welcher daher auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrecht steht.

492 **Anmerkung.** Obwohl von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegung

des Systems eindeutig bestimmt sind, so sind doch die Komponenten in Richtung einer jeden möglichen Verrückung des Systems durch seine Bewegung eindeutig bestimmt.

Folgerung. Von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, sind die Komponenten in Richtung einer jeden freien Koordinate des Systems durch die Bewegung eindeutig bestimmt. 493

Ist nämlich p_ϱ eine freie Koordinate, so verschwinden die $p_{\varkappa\varrho}$ und damit die unbestimmten Glieder, und es kann die Komponente der Kraft des Systems nach p_ϱ geschrieben werden in den Formen:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho \qquad (491)\ \text{a)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) \qquad (291\text{a})\ \text{b)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (291\text{b})\ \text{c)}$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (294).\ \text{d)}$$

Innerer Zwang.

Lehrsatz. Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, findet statt in Richtung der Kraft, welche auf das System wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Systems. 494

Denn wenn zwischen den n Punkten eines Systems keine Zusammenhänge bestehen, so ist für jede der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems (482):

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m} \quad ;$$

die linken Seiten der Gleichungen aber stellen die Komponenten der Beschleunigung des Systems nach den x_ν dar (275).

495 **Folgerung.** Die Beschleunigung eines einzelnen materiellen Punktes geschieht in Richtung der Kraft, welche auf den Punkt wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Punktes. (NEWTONS Lex secunda.)

496 **Anmerkung.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems, auf welches eine Kraft wirkt, so weicht die Beschleunigung des Systems im allgemeinen ab von der durch den Lehrsatz **494** gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems ansehen, und die Abweichung selbst haben wir nach **385** als den inneren Zwang des Systems zu bezeichnen.

497 **Aufgabe.** Den inneren Zwang eines Systems zu bestimmen, welches sich unter dem Einfluß von Kräften bewegt.

Die wirkliche Komponente der Beschleunigung des Systems nach der allgemeinen Koordinate p_ϱ ist f_ϱ, die Komponente, welche nach Aufhebung der Bedingungsgleichungen eintreten würde, ist (**494**) P_ϱ/m, der Unterschied beider Größen, oder:

a) $$z_\varrho = f_\varrho - \frac{P_\varrho}{m} \quad ,$$

also die Komponente des Zwanges nach p_ϱ.

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reicht die Kenntnis der Komponenten desselben nach den p_ϱ im allgemeinen nicht aus (**245**). Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an, so erhalten wir für die Komponente nach x_ν:

b) $$z_\nu = \frac{1}{m}\left(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu\right) \quad ,$$

also die Größe z des Zwanges als die positive Wurzel der Gleichung (**244**):

c) $$\begin{aligned} mz^2 &= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{1}{m_\nu}\left(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu\right)^2 \\ &= \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \left(\ddot{x}_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges eines materiellen 498
Systems unter dem Einfluß von Kräften ist wie bei einem freien System in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der X_ν die Größe $\frac{1}{2} m z^2$ ein Minimum werde, erhalten wir nach derselben Methode wie in **155** die $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu + \sum_1^i{}_\iota \, x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

in welchen die X_ι i unbestimmte Multiplikatoren bezeichnen, welche zusammen mit den $3n$ Größen $\ddot{x}_\nu$ aus jenen $3n$ Gleichungen und den i Bedingungsgleichungen des Systems eindeutig zu bestimmen sind. Die vorstehenden Gleichungen aber ergeben dieselben Werte der $\ddot{x}_\nu$ und X_ι, wie die mit ihnen übereinstimmenden Gleichungen der natürlichen Bewegung (**482**).

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz enthält das voll- 499
ständige Gausssche Prinzip des kleinsten Zwanges. Wir können den Lehrsatz **388** als einen besonderen Fall desselben bezeichnen. Aber nach unserer ganzen Auffassung werden wir lieber jenen Lehrsatz als den allgemeinen ansehen und den vorliegenden als die Anpassung desselben an besondere, verwickeltere Verhältnisse betrachten.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der 500
natürlichen Bewegung eines Systems unter dem Einfluß einer Kraft, wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Denn zufolge **497a** und **481** lassen sich die Komponenten des Zwanges nach den p_ϱ auch schreiben in der Form:

$$z_\varrho = -\frac{1}{m} \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ;$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (**250**) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

501 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche Verrückung des Systems, so können wir den vorstehenden Satz in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden (vergl. **393**):

a) $$\sum_1^r {}_\varrho \left(f_\varrho - \frac{P_\varrho}{m}\right) \delta p_\varrho = 0 \quad ,$$

welche unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Form annimmt:

b) $$\sum_1^{3n} {}_\nu (m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu)\, \delta x_\nu = 0 \quad .$$

502 **Anmerkung.** Der Lehrsatz **500** enthält das vollständige D'ALEMBERTsche Prinzip, die Gleichungen **501a** und **b** die gewöhnliche Fassung desselben. Über das Verhältnis des Satzes **500** zu dem Satz **392** ist dasselbe zu bemerken, wie unter **499**.

503 **Folgerung 1.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung einer jeden möglichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach dieser Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

Denn die Komponente des Zwanges nach der Richtung jeder möglichen Bewegung verschwindet.

504 **Folgerung 2.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung seiner wirklichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

505 **Folgerung 3.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems nach jeder freien Koordinate des Systems ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

506 **Lehrsatz.** Bei der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluß von Kräften ist die Komponente der Beschleunigung nach jeder Koordinate der absoluten

Lage beständig gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch der innere Zusammenhang des Systems ist.

Folgerung 1. Wählen wir die Koordinaten eines Systems übrigens beliebig, jedoch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden, so können wir bei vorhandener Kenntnis der auf das System wirkenden Kräfte, aber ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs des Systems doch stets sechs der Bewegungsgleichungen des Systems angeben. 507

Folgerung 2. Treffen wir insbesondere über die Koordinaten der absoluten Lage dieselbe Verfügung wie in **402** und wenden den Lehrsatz zunächst an auf die Richtung der 3 Koordinaten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, so ergibt er uns die drei Gleichungen: 508

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = \sum_1^n{}_\nu\, X_{3\nu}$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = \sum_1^n{}_\nu\, X_{3\nu-1}$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = \sum_1^n{}_\nu\, X_{3\nu-2}\ .$$

Diese drei Gleichungen, welche sich dahin interpretieren lassen, daß der Schwerpunkt sich so bewegt, als sei die ganze Masse des Systems in ihm vereinigt, und griffen an ihm alle Elementarkräfte an, bilden das sogenannte erweiterte Prinzip des Schwerpunkts. (Vergleiche **404**.)

Folgerung 3. Angewandt auf die Richtung der drei Koordinaten der absoluten Lage $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ ergibt der Lehrsatz die drei Gleichungen: 509

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu (x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}) = \sum_1^n{}_\nu\, (x_{3\nu-2}X_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}X_{3\nu-2})$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu (x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu}) = \sum_1^n{}_\nu\, (x_{3\nu}X_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}X_{3\nu})$$

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu (x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1}) = \sum_1^n{}_\nu\, (x_{3\nu-1}X_{3\nu} - x_{3\nu}X_{3\nu-1})\ .$$

Diese drei Gleichungen bilden das sogenannte erweiterte Prinzip der Flächen. (Vergleiche **406**.)

Energie, Arbeit.

510 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems vorgestellt als Folge einer auf das System ausgeübten Kraft, wird die Arbeit jener Kraft genannt.

Die Arbeit, welche eine Kraft in bestimmter Zeit leistet, wird gemessen durch die Zunahme der Energie des Systems, auf welches sie wirkt, in jener Zeit.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Vorhandenseins der Kraft rechnen wir als negative Zunahme. Die Arbeit einer Kraft kann also positiv oder negativ sein.

511 **Folgerung.** Während die auf ein System wirkende Kraft eine gewisse Arbeit leistet, leistet die von dem System ausgeübte Gegenkraft stets die entgegengesetzt gleiche Arbeit.

Denn die letztere Arbeit ist gleich der Zunahme der Energie desjenigen Systems, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist; die Summe der Energien beider Systeme aber ist konstant.

512 **Lehrsatz.** Die Arbeit, welche die auf ein System wirkende Kraft während der Durchlaufung eines Bahnelements leistet, ist gleich dem Produkt aus der Länge des Elements und der Komponente der Kraft in seiner Richtung.

Denn die Zunahme dE der Energie während des Zeitelements dt, in welchem das Bahnelement ds zurückgelegt wird, ist (**283**):

$$dE = m\,v\,\dot{v}\,dt = m\,\dot{v}\,ds \quad .$$

Nach **280** ist aber $\dot{v}$ die Komponente der Beschleunigung des Systems in Richtung seiner Bahn, also nach **504** $m\dot{v}$ die Komponente der Kraft in Richtung der Bahn.

513 **Anmerkung 1.** Die in Rede stehende Arbeit ist mit demselben Rechte auch gleich dem Produkt aus der Größe der

Kraft und der in ihre Richtung fallenden Komponente des Bahnelements.

Anmerkung 1. Erleiden während der Durchlaufung des Bahnelements ds die Koordinaten p_ϱ die Änderungen dp_ϱ, so ist die Arbeit der wirkenden Kraft dargestellt durch die Gleichung: 514

$$dE = \sum_1^r {}_\varrho P_\varrho \, dp_\varrho \quad .$$

Denn die Komponente der Kraft in Richtung des Bahnelements ist gleich (247):

$$\sum_1^r {}_\varrho P_\varrho \frac{dp_\varrho}{ds} \quad .$$

Folgerung 1. Die Kraft, welche auf ein System wirkt, 515
leistet positive oder negative Arbeit, je nachdem der Winkel, welchen sie mit der Geschwindigkeit des Systems bildet, kleiner oder größer als ein rechter ist. Steht die Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so leistet sie keine Arbeit.

Folgerung 2. Eine Kraft, welche auf ein ruhendes Sy- 516
stem wirkt, leistet keine Arbeit.

Gleichgewicht, Statik.

Definition. Wir sagen, zwei oder mehrere Kräfte, welche 517
auf dasselbe System wirken, halten sich das Gleichgewicht, wenn eine jede von ihnen den Einfluß der anderen aufhebt, d. h. wenn unter dem Einfluß beider oder aller jener Kräfte das System sich so bewegt, als wäre keine von ihnen vorhanden.

Lehrsatz. Zwei oder mehrere Kräfte halten sich das 518
Gleichgewicht, wenn ihre Summe senkrecht steht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt.

Der Satz folgt unmittelbar aus 471 und 488.

519 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit P'_ϱ, P''_ϱ usw. die Komponenten der einzelnen Kräfte nach den p_ϱ, mit δp_ϱ die Änderungen der p_ϱ für irgend eine mögliche Verrückung des Systems, so können wir die Forderung des vorstehenden Satzes in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, (P'_\varrho + P''_\varrho + \text{usw.}) \, \delta p_\varrho = 0 \quad .$$

Vergleiche **393**, **501**.

520 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (Verrückungen, Momente), die Gleichung **519** die gewöhnliche analytische Fassung desselben.

521 **Folgerung 1.** Halten sich mehrere Kräfte an einem System das Gleichgewicht, so verschwindet die Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten bei jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt. (Prinzip der virtuellen Arbeit.)

Denn schreiben wir die Gleichung **519** in der Form:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, P'_\varrho \, \delta p_\varrho + \sum_1^r {}_\varrho \, P''_\varrho \, \delta p_\varrho + \text{usw.} = 0 \quad ,$$

so ergibt sich nach **514** die Behauptung.

522 **Folgerung 2.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

523 **Folgerung 3.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten nach jeder freien Koordinate des Systems.

524 **Lehrsatz.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung einer jeden Koordinate der abso-

luten Lage, welches auch immer der innere Zusammenhang des Systems sein möge.

Anmerkung. Auch ohne Kenntnis des inneren Zusammen- 525
hangs eines Systems können wir demnach doch stets 6 notwendige Bedingungsgleichungen für sein Gleichgewicht angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die 6 Größen $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$, welche wir in **402** einführten, so liefert uns der vorige Lehrsatz diejenigen 6 Gleichungen, welche dem Prinzip des Schwerpunkts und der Flächen entsprechen, und welche LAGRANGE im 3. Abschnitt § 1 und § 2 des ersten Teils der Mécanique analytique behandelt.

Bemerkung 1. Halten sich zwei oder mehr Kräfte in 526
einer bestimmten Lage des Systems das Gleichgewicht bei einer gewissen Geschwindigkeit, so halten sich dieselben Kräfte in derselben Lage das Gleichgewicht auch bei jeder anderen Geschwindigkeit.

Denn die Bedingung des Gleichgewichts enthält nicht die wirkliche Geschwindigkeit des Systems.

Bemerkung 2. Halten sich zwei oder mehr Kräfte das 527
Gleichgewicht an einem ruhenden System, so beharrt das System in seinem Zustand der Ruhe; und umgekehrt: Beharrt ein System trotz des Angriffs zweier oder mehrerer Kräfte in der Ruhe, so halten sich die Kräfte an dem System das Gleichgewicht.

Folgerung 1. Zwei Kräfte, welche, gleichzeitig an dem- 528
selben ruhenden System angreifend, die Ruhe des Systems nicht stören, haben entgegengesetzt gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

Folgerung 2. Zwei Kräfte, welche, nacheinander auf das- 529
selbe ruhende System zugleich mit denselben andern Kräften wirkend, das System in Ruhe lassen, haben gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

Anmerkung. Auf den letzten beiden Folgerungen beruht 530
die statische Vergleichung der Kräfte.

Maschinen und innere Kräfte.

531 **Definition.** Ein System, dessen Massen als verschwindend klein betrachtet werden gegen die Massen der Systeme, mit welchen es gekoppelt ist, wird eine Maschine genannt.

Eine Maschine ist also hinsichtlich ihres Einflusses auf die Bewegung der übrigen Systeme vollständig dargestellt durch ihre Bedingungsgleichungen; die Kenntnis des Ausdrucks der Energie der Maschine in ihren Koordinaten ist nicht erforderlich.

Einfach heißt eine Maschine, welche nur einen Grad der Bewegungsfreiheit hat.

532 **Lehrsatz.** Solange eine Maschine sich mit endlicher Geschwindigkeit bewegt, halten sich die auf die Maschine wirkenden Kräfte beständig das Gleichgewicht.

Denn ergäben diese Kräfte eine Komponente in Richtung irgend einer möglichen Bewegung der Maschine, so würde die Komponente der Beschleunigung in dieser Richtung wegen der verschwindenden Masse unendlich groß (**504**).

533 **Folgerung.** Zwischen den Komponenten der auf eine Maschine wirkenden Kräfte nach ihren Koordinaten besteht eine Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Zahl gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten der Maschine ist. Eine einfache Maschine wird vertreten durch eine einzige homogene lineare Gleichung zwischen den auf ihre Koordinaten wirkenden Kräften.

534 **Bemerkung 1.** Wird eine Maschine nach allen ihren Koordinaten gekoppelt mit zwei oder mehr materiellen Systemen, so kann die auf diese Art hergestellte mechanische Verbindung zwischen den letzteren analytisch dargestellt werden durch einen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten der verbundenen Systeme. Denn wir können in den Bedingungsgleichungen der Maschine die Koordinaten derselben ersetzen durch die ihnen gleichen Koordinaten der verbundenen Systeme.

Umgekehrt können wir daher auch jeden analytisch gegebenen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten zweier oder mehrerer Systeme physikalisch deuten als eine mechanische Verbindung der angegebenen Art, welche wir bezeichnen als eine Koppelung jener Systeme durch die Maschine.

Folgerung. Sind zwei oder mehr Systeme durch eine Maschine gekoppelt, so ist die von jedem der Systeme geleistete Arbeit engegengesetzt gleich der Summe der von den übrigen Systemen geleisteten Arbeit. Bei der Koppelung der Systeme mittels einer Maschine wird also Arbeit nicht gewonnen. 535

Denn die von den Systemen ausgeübten Kräfte halten sich an der Maschine das Gleichgewicht, die Summe der von ihnen geleisteten Arbeit ist also Null.

Bemerkung 2. Ein jedes materielle System kann auf mannigfaltige Art aufgefaßt werden als bestehend aus zwei oder mehr Systemen, welche durch Maschinen gekoppelt sind. Denn teilen wir die Massen des Systems in mehrere Teile, und sind die p'_ϱ Koordinaten des ersten Teiles, die p''_ϱ Koordinaten des zweiten Teiles, usw., so können wir diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche nur die p'_ϱ enthalten, betrachten als Bedingungsgleichungen des ersten Teilsystems, diejenigen Gleichungen, welche nur die p''_ϱ enthalten, als Bedingungsgleichungen des zweiten Teilsystems, usw., während diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche die p'_ϱ, p''_ϱ usw. gemischt enthalten, aufgefaßt werden als die Gleichungen der die Teilsysteme koppelnden Maschinen. 536

Die Kräfte, welche bei dieser zulässigen, wenn auch willkürlichen Auffassung auf die Teilsysteme von den sie koppelnden Maschinen ausgeübt werden, bezeichnen wir als innere Kräfte des Systems.

Folgerung 1. Ein jeder Satz innerer Kräfte kann einen Teil des Zusammenhanges eines Systems ersetzen. Lassen wir nämlich diejenigen Bedingungsgleichungen des ganzen Systems fort, welche die Maschinen zwischen den Teilsystemen darstellen, behalten aber die von den Maschinen ausgeübten Kräfte bei, so bewegt sich das System wie vorher. 537

538 **Folgerung 2.** Der gesamte Zusammenhang eines Systems kann aufgelöst werden in und ersetzt werden durch eine Anzahl von Elementarkräften, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

Denn wir können die einzelnen Punkte als Teilsysteme betrachten und das ganze System als Gesamtheit dieser durch Maschinen gekoppelten Teilsysteme.

539 **Folgerung 3.** Die inneren Kräfte, welche den Zusammenhang eines Systems vollständig oder teilweise ersetzen, halten sich, an dem ursprünglichen System angreifend, beständig das Gleichgewicht.

Denn sie halten sich nach **532** das Gleichgewicht an den Maschinen, welche Teile des ursprünglichen Systems bilden.

540 **Anmerkung.** Diese letztere Überlegung ist es, mit deren Hilfe in der gewöhnlichen Entwickelung der Mechanik der Übergang von den Gesetzen des Gleichgewichts (dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) zu den Gesetzen der Bewegung (dem D'ALEMBERTschen Prinzip) gemacht wird.

Messung der Kräfte.

541 Aus unseren Überlegungen ergeben sich im ganzen drei unabhängige Methoden, um diejenigen Komponenten der Kräfte unmittelbar zu messen, welche überhaupt Einfluß auf die Erscheinungen haben. Durch Anwendung einer jeden dieser drei Methoden können auch die Kräfte aus Rechnungsgrößen zu Gegenständen der unmittelbaren Erfahrung gemacht werden, d. h. zu Zeichen für bestimmte Verbindungen sinnlicher Empfindungen und Wahrnehmungen.

542 Die erste Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und Bewegungen des Systems, von welchem sie ausgeübt wird. Physikalisch wird diese Methode die Messung der Kraft nach ihrem Ursprunge genannt. Sie wird z. B. angewandt in der Annahme, daß gleich gespannte Federn, gleiche Mengen explodierenden Pulvers usw. unter übrigens gleichen Verhältnissen gleiche Kräfte ausüben.

Die zweite Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und der Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt. In der Physik wird diese Methode als die dynamische Messung der Kraft bezeichnet. Sie wurde z. B. von NEWTON angewandt, als er die auf die Planeten wirkende Kraft aus deren Bewegung ableitete. 543

Die dritte Methode bestimmt die Kraft, indem sie sie mit bekannten Kräften ins Gleichgewicht bringt. Diese Methode wird die statische genannt. Auf ihr beruhen z. B. alle Kräftemessungen mit der Wage. 544

Angewandt zur Bestimmung einer und derselben Kraft unter Beobachtung der von uns abgeleiteten Beziehungen müssen aber diese drei verschiedenen Methoden unter allen Umständen zu dem gleichen Resultate führen, wenn anders das Grundgesetz, auf welches sich unsere Überlegungen stützen, wirklich alle mögliche mechanische Erfahrung richtig zusammenfaßt. 545

Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen.

I. Cyklische Bewegung.

Definition 1. Cyklische Koordinate eines Systems heißt eine freie Koordinate des Systems dann, wenn die Länge einer unendlich kleinen Verrückung des Systems nicht von dem Werte der Koordinate, sondern nur von dem ihrer Änderung abhängt. 546

Anmerkung 1. Es gibt cyklische Koordinaten. Denn es genügt z. B. eine rechtwinklige Koordinate des Systems, wenn sie frei ist, der Voraussetzung. Cyklische Koordinaten können stets eingeführt werden, wenn unendlich kleine Verrückungen des Systems möglich sind, welche nicht eine Änderung der Massenverteilung im Raume zur Folge haben, sondern nur eine cyklische Vertauschung der Massen unter sich. 547