Badische Landesbibliothek Karlsruhe

Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe

Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Holonome Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Visual Library

weil das Ergebnis des Flächensatzes doch nur in uneigentlichem Sinne ein Integral genannt werden kann. Als wesentlichen Inhalt jener Prinzipien betrachten wir vielmehr, wie uns scheint mit Recht, den Vorteil, daß sie Behauptungen liefern, welche unabhängig von dem besonderen Zusammenhang des Systems allgemeingültig ausgesagt werden können.

Anmerkung 2 zu 402 bis 406. Bei der Ableitung des Satzes vom Schwerpunkt und des Flächensatzes als besonderer Fälle des Satzes **400** haben wir nicht von allen Eigenschaften Gebrauch gemacht, welche wir den α und den ω durch die Definition beilegten. In der Tat hätten wir jene Sätze auch mit Benutzung anderer Koordinaten ableiten können, z. B. aller Koordinaten, welche mit den α und ω gleiche Richtung haben, ohne doch identisch mit ihnen zu sein. Überhaupt würden wir bei beliebiger Wahl der Koordinaten nicht jedesmal 6 Gleichungen erhalten, welche einen neuen physikalischen Sinn ergäben oder von den Gleichungen **403** und **405** völlig unabhängig wären, sondern es würden stets diejenigen Gleichungen sein, welche aus den Gleichungen **403** und **405** durch Transformation auf die gewählten Koordinaten entstehen. Aber für alle diese verschiedenen Formen gibt der Lehrsatz **400** einen gemeinschaftlichen Ausdruck und den physikalischen Sinn. **408**

Holonome Systeme.

Bemerkung. Ist für ein holonomes System die geradeste Entfernung (**217**) bekannt, so lassen sich die Gleichungen der geradesten Bahnen in endlicher Form darstellen (**225**). Diese Bahnen sind aber die natürlichen Bahnen des Systems, sobald dasselbe frei ist, und alle Bewegungen, bei welchen sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, sind natürliche Bewegungen des Systems. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems werden sich also in endlicher Form darstellen lassen. **409**

Aufgabe. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems mit Hilfe der geradesten Entfernung desselben darzustellen. **410**

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK
Baden-Württemberg

(410) Es sei wie früher S die geradeste Entfernung des Systems, gedacht als Funktion der freien Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ihrer Anfangs- und Endlage. Es sei t_0 die Zeit, zu welcher das System die Anfangslage, t_1 die Zeit, zu welcher es die Endlage durchläuft. Es ist dann $t_1 - t_0$ die Dauer des Übergangs, also

a) $$v = \frac{S}{t_1 - t_0}$$

die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, also seine Energie:

b) $$E = \frac{1}{2} m \frac{S^2}{(t_1 - t_0)^2} \quad ,$$

und seine Momente q_{ϱ_0} und q_{ϱ_1} zu den Zeiten t_0 und t_1:

c) $$q_{\varrho_0} = m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0}$$
$$q_{\varrho_1} = m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1} \quad .$$

Für die Gleichungen der geradesten Bahnen finden wir zwei Formen in den Gleichungen **224a** und **226a**. Multiplizieren wir dieselben mit $mS/(t_1 - t_0)$ oder, was nach **b)** dasselbe ist, mit $\sqrt{2mE}$, so erhalten wir die folgenden vier Sätze von je r Gleichungen:

d) $$q_{\varrho_1} = \quad \frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_1}}$$

e) $$q_{\varrho_0} = - \frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_0}}$$

f) $$q_{\varrho_1} = \quad \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}}$$

g) $$q_{\varrho_0} = - \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad .$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst und zwar in mehrfacher Weise.

Denn betrachten wir t_1 als die variabele Zeit, und also die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der mit dieser Zeit sich verändernden Lage, so bestimmen uns die r Gleichungen e) diese r Koordinaten als endliche Funktionen von t_1, und das gleiche leisten uns die Gleichungen g), wenn wir zu diesen noch die Beziehung zwischen E und t_1, also die Gleichung b) hinzunehmen. Die $2r$ Größen p_{ϱ_0} und q_{ϱ_0} spielen dabei die Rolle der $2r$ willkürlichen Konstanten. Bei der gleichen Betrachtungsweise geben uns nebenbei auch die Gleichungen d), oder f) und b), die Bewegungsgleichungen des Systems, und zwar nunmehr als Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die r Größen p_{ϱ_0} die Rolle der r willkürlichen Konstanten übernehmen.

Oder betrachten wir, was nicht minder erlaubt, die Zeit t_0 als die variabele Zeit, also die Lage 0 als die variabele Lage, so geben uns die Gleichungen d), oder auch f) und b), die Bewegungsgleichungen in endlicher Form, mit der Zeit t_0 als unabhängiger, den p_{ϱ_0} als abhängigen Variabelen und den p_{ϱ_1} und q_{ϱ_1} als $2r$ willkürlichen Konstanten. Zugleich geben uns dann nebenbei die Gleichungen e), oder auch g) und b), die Bewegungsgleichungen in der Gestalt von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die p_{ϱ_1} die Rolle von r willkürlichen Konstanten spielen.

Folgerung 1. Setzen wir 411

$$\sqrt{2Em}\,.\,S = V \quad , \tag{a}$$

und betrachten V als Funktion der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und von E, so lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems darstellen in der Form:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \tag{b}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \tag{c}$$

$$t_1 - t_0 = \frac{\partial V}{\partial E} \quad . \tag{d}$$

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410 f** und **g**, und die Gleichung **d)** folgt aus Gleichung **a)** und **410 b**.

412 **Anmerkung.** Die so eingeführte Funktion V ist HAMILTONS charakteristische Funktion des Systems; sie ist bei HAMILTON mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet. Eine solche Funktion besteht also nur für holonome Systeme. Ihrer mechanischen Bedeutung nach gibt die charakteristische Funktion den doppelten Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System mit gegebener Energie aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Energie und der Koordinaten der Anfangs- und der Endlage.

Denn es ist nach Gleichung **411 a** und **410 b**:

$$V = 2E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir in der rechten Seite die Dauer des Übergangs $t_1 - t_0$ als Funktion von E und den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} dargestellt denken.

413 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}} = E$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}} = E \quad .$$

Denn dieselben werden erhalten durch Multiplikation der Gleichungen **227** für die geradeste Entfernung mit $2mE$ und Beachtung der Gleichung **411 a**.

414 **Folgerung 2.** Setzen wir

a) $$\frac{mS^2}{2(t_1 - t_0)} = P \quad ,$$

und betrachten P als Funktion der $p_{\varrho_0}, p_{\varrho_1}$ und von t_0 und t_1, so stellen die Gleichungen:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \tag{b}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \tag{c}$$

die natürlichen Bewegungen des Systems dar. Die Energie E des Systems kann aus P unmittelbar abgeleitet werden mit Hilfe der Gleichungen:

$$E = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad . \tag{d}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410d** und **e**, und die Gleichungen **d)** folgen aus Gleichung **a)** und **410b**.

Anmerkung. Die jetzt eingeführte Funktion P ist die HAMILTONsche Prinzipalfunktion des Systems; sie ist bei HAMILTON selbst mit S bezeichnet. Nur für holonome Systeme besteht eine solche Funktion. Ihrer mechanischen Bedeutung nach gibt die Prinzipalfunktion den Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System in gegebener Zeit aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Zeit und der Anfangs- und Endwerte der Koordinaten. 415

Denn es ist nach Gleichungen **414a** und **410b**:

$$P = E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir uns in der rechten Seite E als Funktion der $p_{\varrho_1}, p_{\varrho_0}$ und der t_1 und t_0 dargestellt denken.

Lehrsatz. Die Prinzipalfunktion eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: 416

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}^{\varrho}\sum_1^r{}^{\sigma} b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} = -\frac{\partial P}{\partial t_1}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}^{\varrho}\sum_1^r{}^{\sigma} b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} = \frac{\partial P}{\partial t_0}\ .$$

Denn dieselben werden erhalten, indem man die Gleichungen **227** multipliziert mit (**410b**)

$$\frac{mS^2}{2(t_1-t_0)^2} = E$$

und die Beziehungen **414a** und **d** beachtet.

417 **Anmerkung zu 411 bis 416.** Ebenso wie wir in **232** bis **236** von den Differentialgleichungen **227** ausgehend Funktionen betrachten konnten, welche der geradesten Entfernung verwandt waren und sie in analytischer Hinsicht vollkommen ersetzten, ohne doch eine gleich einfache geometrische Bedeutung wie sie zu haben, ebenso können wir von den Differentialgleichungen **413** und **416** ausgehend zu Funktionen gelangen, welche der charakteristischen Funktion und der Prinzipalfunktion verwandt sind und in analytischer Hinsicht gleiche Dienste leisten oder selbst Vorteile bieten, deren Bedeutung in physikalischer Hinsicht aber durch die mathematische Verwickelung mehr und mehr verdunkelt erscheint. Solche Funktionen würde man passend als Jacobische Prinzipalfunktionen und charakteristische Funktionen bezeichnen.

Es erhellt übrigens, daß auch schon in der charakteristischen Funktion und in der Prinzipalfunktion nur der einfache Sinn der geradesten Entfernung und auch dieser in leichter Verschleierung auftritt, so daß die Einführung jener Funktionen nebeneinander und neben der geradesten Entfernung nur eine geringe Bedeutung haben würde, wenn es sich stets, wie hier, um die Betrachtung vollständig bekannter freier Systeme handelte.

BLB BADISCHE LANDESBIBLIOTHEK Baden-Württemberg