Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Innerer Zwang der Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Gleichungen 378a und 381a verschiedene Aussagen darstellen und nicht etwa dieselben Aussagen in verschiedener Form.

Innerer Zwang der Systeme.

382 **Lehrsatz.** Ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung längs einer geraden Bahn.

Denn für ein solches System ist die gerade Bahn zugleich die geradeste.

383 **Folgerung 1.** Ein freier materieller Punkt beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Bahn (Galileis Trägheitsgesetz oder Newtons Lex prima).

384 **Folgerung 2.** Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, ist Null. Die Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems können also als die Ursache aufgefaßt werden, aus welcher die Beschleunigung im allgemeinen von Null abweicht.

385 **Definition.** Die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines materiellen Systems an seiner Beschleunigung hervorrufen, heißt der Zwang, welchen die Zusammenhänge dem System auferlegen; jene Abänderung wird auch kurz der innere Zwang oder noch kürzer der Zwang des Systems genannt.

Der Zwang wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Beschleunigung des Systems und der Beschleunigung derjenigen natürlichen Bewegung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich der ersteren vermindert um die letztere.

386 **Folgerung 1.** Der innere Zwang eines Systems ist wie die Beschleunigung eine Vektorgröße in bezug auf das System.

Folgerung 2. In einem freien System ist der innere Zwang gleich der Beschleunigung des Systems; er ist hier in der Tat nur eine andere Auffassung der Beschleunigung (382). 387

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges ist in jedem Augenblick für die natürliche Bewegung eines freien Systems kleiner als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage der Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt. 388

Denn diese Behauptung ist nach **387** nur im Ausdruck verschieden von dem Lehrsatz **344**.

Folgerung. Ein jeder Zusammenhang, welcher den vorhandenen Zusammenhängen des Systems hinzugefügt wird, vergrößert den Zwang des Systems. Die Auflösung irgend eines Zusammenhanges ändert die natürliche Bewegung in solcher Weise, daß sich der Zwang verkleinert. 389

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem Gaussschen Prinzip des kleinsten Zwanges. Um sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genau darzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**. 390

Anmerkung 2. Das Gausssche Prinzip und das Trägheitsgesetz (383) zusammen können das Grundgesetz vollständig ersetzen, und zwar für alle Systeme. 391

Denn sie sagen zusammen den Lehrsatz **344** aus.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen (111) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 392

Denn die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ sind nach **387** in einem freien System gleich f_ϱ, können also nach **372** geschrieben werden in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_{1}^{k}{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ,$$

sind also nach **250** senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

393 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen die δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche oder virtuelle Verrückung des Systems, so gibt die Gleichung:

a) $$\sum_1^r {}_\varrho f_\varrho \delta p_\varrho = 0$$

einen symbolischen Ausdruck des vorigen Lehrsatzes. Denn die Gleichung ersetzt den Lehrsatz nach **249**, und sie ist symbolisch, insofern sie als Symbol für unendlich viele Gleichungen steht.

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnet δx_ν die Änderung von x_ν für irgend eine mögliche oder virtuelle Verrückung, so nimmt die Gleichung **a)** die Gestalt an:

b) $$\sum_1^{3n} {}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = 0 \quad .$$

394 **Anmerkung 1.** Der vorstehende Lehrsatz **392** entspricht dem d'Alembertschen Prinzip; die Gleichungen **393a** und **b** entsprechen der gewöhnlichen Darstellungsweise desselben. Um das Verhältnis zwischen diesem Prinzip und jenem Lehrsatz genau festzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**.

395 **Anmerkung 2.** Aus der Bedingung, daß der Zwang senkrecht stehe auf jeder virtuellen Verrückung des Systems, folgen nach **250** die Bewegungsgleichungen der freien Systems in der Form **372**. Das d'Alembertsche Prinzip kann also für sich allein das Grundgesetz vertreten und zwar für alle Systeme. Das von uns benutzte Grundgesetz hat vor jenem Prinzip die einfachere und durchsichtigere Bedeutung voraus.

396 **Folgerung 1.** In einem freien System steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

397 **Folgerung 2.** Bei der Bewegung eines freien Systems steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf der Richtung der wirklichen augenblicklichen Bewegung.

Folgerung 3. Bei der Bewegung eines freien Systems ist die Komponente der Beschleunigung in jeder Richtung einer möglichen Bewegung beständig gleich Null. 398

Folgerung 4. Die Komponente der Beschleunigung eines freien Systems in der Richtung irgend einer freien Koordinate des Systems ist beständig gleich Null. 399

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, daß die Komponente der Beschleunigung in Richtung einer jeden Koordinate der absoluten Lage beständig Null bleibt, welches auch immer der innere Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems ist. 400

Denn welches auch der Zusammenhang des Systems ist, jede Koordinate seiner absoluten Lage ist eine freie Koordinate (**142**).

Folgerung. Wählen wir die Koordinaten eines freien Systems übrigens beliebig, aber doch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden (**19**), so können wir auch ohne Kenntnis des Zusammenhanges des Systems, oder ohne vollständige Kenntnis desselben, doch stets sechs Differentialgleichungen der Bewegung des Systems angeben. 401

Besondere Wahl der Koordinaten. Die folgende Wahl von Koordinaten der absoluten Lage ist für jedes System eine zulässige Wahl. 402

Wir bezeichnen mit

$$\alpha_1 \,, \quad \alpha_2 \,, \quad \alpha_3$$

die arithmetischen Mittelwerte derjenigen rechtwinkligen Koordinaten aller Massenteilchen, welche beziehlich mit $x_1\ x_2\ x_3$ parallel sind. Die Größen $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ betrachten wir als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes von mittlerer Lage, welchen wir den Schwerpunkt des Systems nennen. Durch den Schwerpunkt legen wir drei Gerade parallel den drei Koordinatenachsen; durch diese drei Geraden und alle Massenteilchen legen wir Ebenen und bezeichnen mit

$$\omega_1 \,, \quad \omega_2 \,, \quad \omega_3$$

die arithmetischen Mittelwerte der Winkel aller durch dieselbe Gerade gelegten Ebenen mit einer beliebigen unter ihnen. Die sechs Größen α und ω sind voneinander unabhängig veränderliche Größen, deren Änderung notwendig eine Änderung in der Lage des Systems bedingt, und welche durch die Konfiguration allein nicht bestimmt sind. Wir können also diese sechs Größen zu Koordinaten der absoluten Lage machen (**21**), und wir machen sie zu Koordinaten der absoluten Lage, sobald wir neben ihnen nur noch Konfigurationskoordinaten als weitere Koordinaten einführen.

Erteilen wir den α und ω beliebige Veränderungen, während wir die übrigen Koordinaten festhalten, so bewegt sich das System wie ein starrer Körper. Wir erhalten daher aus rein geometrischen Gründen für die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, wenn wir den Index ν von 1 bis n laufen lassen (**13**):

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} dx_{3\nu-2} &= d\alpha_1 + (x_{3\nu} - \alpha_3)\,d\omega_2 - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\,d\omega_3 \\ dx_{3\nu-1} &= d\alpha_2 + (x_{3\nu-2} - \alpha_1)\,d\omega_3 - (x_{3\nu} - \alpha_3)\,d\omega_1 \\ dx_{3\nu} &= d\alpha_3 + (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\,d\omega_1 - (x_{3\nu-2} - \alpha_1)\,d\omega_2 \quad . \end{aligned}\right.$$

Hieraus ergeben sich, wenn wir auch nun die x_ν als Funktionen sämtlicher Koordinaten betrachten, die Werte der partiellen Differentialquotienten der x_ν nach den α und ω; also zum Beispiel:

$$\text{b)}\qquad \frac{\partial x_{3\nu-2}}{\partial \alpha_1} = 1\ , \quad \frac{\partial x_{3\nu-1}}{\partial \alpha_1} = 0\ , \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_1} = 0\ ,$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial x_{3\nu-2}}{\partial \omega_1} = 0\ , \quad \frac{\partial x_{3\nu-1}}{\partial \omega_1} = -(x_{3\nu} - \alpha_3)\ , \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_1} = x_{3\nu-1} - \alpha_2\ .$$

403 **Folgerung 1.** Zufolge der Bemerkung, daß die Beschleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = 0\ , \qquad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = 0\ , \qquad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = 0\quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach der Koordinate α_1 des Schwerpunktes gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_1} \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402b** gleich:

$$\sum_1^{n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_{3\nu} \quad ,$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die Beschleunigungen nach α_2 und α_3.

Anmerkung. Die drei Gleichungen **403**, welche sich un- 404
mittelbar zweimal integrieren lassen und dann aussagen, daß der Schwerpunkt eines freien Systems sich in gleichförmiger, geradliniger Bewegung befindet, enthalten das sogenannte Prinzip des Schwerpunktes.

Folgerung 2. Zufolge der Bemerkung, daß die Be- 405
schleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^{n} {}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1}\right) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n} {}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu}\right) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n} {}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}\right) = 0 \quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach ω_1 gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \omega_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402c** gleich:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left\{ (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\,\ddot{x}_{3\nu} - (x_{3\nu} - \alpha_3)\,\ddot{x}_{3\nu-1} \right\} \quad ,$$

also durch Benutzung von **403** gleich:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left(x_{3\nu-1}\,\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\,\ddot{x}_{3\nu-1} \right) \quad ,$$

und entsprechende Werte gelten für die Beschleunigungen nach ω_2 und ω_3.

406 **Anmerkung.** Die drei Gleichungen **405** enthalten das sogenannte Prinzip der Flächen. Jene Gleichungen lassen sich nämlich unmittelbar einmal integrieren und ergeben dann die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-1}\,\dot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\,\dot{x}_{3\nu-1} \right) = \text{const}_1 \quad ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu}\,\dot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\,\dot{x}_{3\nu} \right) = \text{const}_2 \quad ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-2}\,\dot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\,\dot{x}_{3\nu-2} \right) = \text{const}_3 \quad ,$$

welche die folgende, den Namen rechtfertigende geometrische Deutung erlauben:

Ziehen wir vom Ursprung der Koordinaten nach jedem Massenteilchen des Systems einen Radius, so wächst die Summe der Projektionen der von diesen Radien beschriebenen Flächen auf jede der drei Koordinatenebenen gleichförmig mit der Zeit.

407 **Anmerkung 1 zu 402 bis 406.** Wir haben die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen als besondere Fälle des allgemeinen Lehrsatzes **400** eingeführt. Wir hätten hierzu kein Recht gehabt, wenn man, wie es bisweilen geschieht, als den wesentlichen Inhalt jener Prinzipien den Vorteil ansehen wollte, daß sie Integrale der Bewegungsgleichungen liefern. Diese Auffassung scheint uns aber schon deshalb unzulässig,

weil das Ergebnis des Flächensatzes doch nur in uneigentlichem Sinne ein Integral genannt werden kann. Als wesentlichen Inhalt jener Prinzipien betrachten wir vielmehr, wie uns scheint mit Recht, den Vorteil, daß sie Behauptungen liefern, welche unabhängig von dem besonderen Zusammenhang des Systems allgemeingültig ausgesagt werden können.

Anmerkung 2 zu 402 bis 406. Bei der Ableitung des Satzes vom Schwerpunkt und des Flächensatzes als besonderer Fälle des Satzes **400** haben wir nicht von allen Eigenschaften Gebrauch gemacht, welche wir den α und den ω durch die Definition beilegten. In der Tat hätten wir jene Sätze auch mit Benutzung anderer Koordinaten ableiten können, z. B. aller Koordinaten, welche mit den α und ω gleiche Richtung haben, ohne doch identisch mit ihnen zu sein. Überhaupt würden wir bei beliebiger Wahl der Koordinaten nicht jedesmal 6 Gleichungen erhalten, welche einen neuen physikalischen Sinn ergäben oder von den Gleichungen **403** und **405** völlig unabhängig wären, sondern es würden stets diejenigen Gleichungen sein, welche aus den Gleichungen **403** und **405** durch Transformation auf die gewählten Koordinaten entstehen. Aber für alle diese verschiedenen Formen gibt der Lehrsatz **400** einen gemeinschaftlichen Ausdruck und den physikalischen Sinn. **408**

Holonome Systeme.

Bemerkung. Ist für ein holonomes System die geradeste Entfernung (**217**) bekannt, so lassen sich die Gleichungen der geradesten Bahnen in endlicher Form darstellen (**225**). Diese Bahnen sind aber die natürlichen Bahnen des Systems, sobald dasselbe frei ist, und alle Bewegungen, bei welchen sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, sind natürliche Bewegungen des Systems. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems werden sich also in endlicher Form darstellen lassen. **409**

Aufgabe. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems mit Hilfe der geradesten Entfernung desselben darzustellen. **410**