Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegungen

urn:nbn:de:bsz:31-288857

finden. Hätte die Natur wirklich die Absicht, einen kürzesten Weg, einen kleinsten Aufwand an Energie, eine kürzeste Zeit zu erzielen, so wäre es unmöglich zu verstehen, wie es Systeme geben könnte, in welchen diese Absicht, obwohl erreichbar, dennoch der Natur regelmäßig fehlschlüge.

Will man darin, daß ein System unter allen möglichen 366
Bahnelementen beständig ein geradestes auswählt, den Ausdruck eines bestimmten Willens erkennen, so steht dies frei; man sieht alsdann eben schon darin den Ausdruck eines bestimmten Willens, daß ein natürliches System überhaupt unter allen möglichen Bewegungen keine willkürliche, sondern stets eine durch besondere Merkmale bezeichnete, im voraus bestimmbare Bewegung auswählt.

Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegung.

Erläuterung. Unter den Differentialgleichungen der Be- 367
wegung eines Systems verstehen wir einen Satz von Differentialgleichungen, in welchen die Zeit die unabhängige Variabele, die Koordinaten des Systems die abhängigen Variabelen sind, und welche zusammen mit einer Anfangslage und einer Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung des Systems eindeutig bestimmen (**331**).

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung 368
eines freien Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

In **155d** haben wir die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen des Systems in den rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. In diese Gleichungen führen wir anstatt der Bahnlänge die Zeit t als unabhängige Variabele ein. Nach dem Grundgesetz ist $ds/dt = v$ von t, also auch von s unabhängig, und wir haben:

$$\dot{x}_\nu = x'_\nu v \quad , \qquad \ddot{x}_\nu = x''_\nu v^2 \quad .$$

Multiplizieren wir demnach die Gleichungen **155d** mit mv^2 und setzen zur Abkürzung für $mv^2\Xi_\iota$ jetzt X_ι, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die $3n$ Gleichungen:

a)
$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i {}^\iota x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen (vgl. **155b**):

b)
$$\sum_1^{3n} {}^\nu x_{\iota\nu} \ddot{x}_\nu + \sum_1^{3n} {}^\nu \sum_1^{3n} {}^\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \dot{x}_\nu \dot{x}_\mu = 0$$

die $3n+i$ Größen $\ddot{x}_\nu$ und X_ι als eindeutige Funktionen der x_ν und $\dot{x}_\nu$ bestimmen.

369 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen der Bewegung des freien Systems in der Form 368 werden gewöhnlich als LAGRANGES Gleichungen der ersten Form bezeichnet.

370 **Anmerkung 2.** Jede einzelne der Gleichungen **368a** gibt uns, nachdem wir die X_ι zuerst bestimmt haben, die Komponente der Beschleunigung des Systems nach einer bestimmten der rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

371 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben auszudrücken.

Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen in den p_ϱ finden wir in **158d**. In diese führen wir statt der Bahnlänge die Zeit als unabhängige Variabele ein, indem wir wiederum bemerken, daß nach dem Grundgesetz ist:

$$\dot{p}_\varrho = p'_\varrho v \quad , \quad \ddot{p}_\varrho = p''_\varrho v^2 \quad .$$

Indem wir also die Gleichungen **158d** multiplizieren mit mv^2 und setzen für $mv^2\Pi_\varkappa$ jetzt $P_\varkappa$, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die r Gleichungen:

a)
$$m\left\{\sum_1^r {}^\sigma a_{\varrho\sigma}\ddot{p}_\sigma + \sum_1^r {}^\sigma \sum_1^r {}^\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right)\dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau\right\} + \sum_1^k {}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0,$$

welche zusammen mit den k Gleichungen (vgl. **158b**):

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\ddot{p}_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma = 0 \qquad \textbf{b)}$$

die $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ als eindeutige Funktionen der p_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ bestimmen.

Anmerkung. Indem wir Gebrauch machen von der Beziehung **277**, können wir die Bewegungsgleichungen **371a** in der Form schreiben: 372

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Denken wir uns die $P_\varkappa$ zuerst bestimmt, so gibt uns eine jede dieser Gleichungen die Komponente der Beschleunigung nach einer bestimmten der Koordinaten p_ϱ, ausgedrückt als Funktion der augenblicklichen Lage und Geschwindigkeit des Systems.

Folgerung 1. Drücken wir mit Hilfe der Beziehung **291a** die Komponenten der Beschleunigung durch die Energie aus, so nehmen die Bewegungsgleichungen eines freien Systems die Form an: 373

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung in dieser Form heißen auch die allgemeinen Lagrangeschen Gleichungen der Bewegung oder Lagranges Gleichungen der zweiten Form (vgl. **369**). 374

Anmerkung 2. Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so kommt sie in den Bedingungsgleichungen des Systems nicht vor (**140**), die Größen $p_{\varkappa\varrho}$ sind also sämtlich gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Bedingungsgleichung wird: 375

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = 0 \quad .$$

In einem holonomen System können (**144**) stets die sämtlichen Gleichungen der Bewegung in dieser einfachen Form dargestellt werden.

376 **Folgerung 2.** Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**289, 375**):

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungstatsachen enthalten. Man kann die Bewegungsgleichungen in dieser Form auffassen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Größen für alle Zeiten bestimmen.

377 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **376 a** und **b** würde man wohl mit Recht als die Poissonsche Form der Bewegungsgleichungen bezeichnen.

378 **Anmerkung 2.** Aus den Gleichungen **376** folgen zwei reziproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen:

a) $$\frac{\partial_p \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{(aus b))}$$

b) $$\frac{\partial_p q_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad , \qquad \text{(aus a) und b))}$$

und welche einen einfachen physikalischen Sinn besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und würden nicht für jede mögliche Bewegung des Systems gelten, können also auch unter Umständen zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **376 a** abgeleitete Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein.

Folgerung 3. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**290**, **289**, **292**, **375**): 379

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho}, \qquad \text{b)}$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungstatsachen enthalten. Auch in dieser Form erscheinen die Bewegungsgleichungen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Größen für alle Zeiten bestimmen.

Anmerkung 1. Die vorstehenden Gleichungen **379a** und **b** werden gewöhnlich als die HAMILTONsche Form der Bewegungsgleichungen für ein freies System bezeichnet. 380

Anmerkung 2. Aus den Gleichungen **379** folgen zwei reziproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen: 381

$$\frac{\partial_q \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\frac{\partial_q \dot{p}_\varrho}{\partial p_\sigma} = -\frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial q_\varrho}, \qquad \text{b)}$$

und welche eine einfache physikalische Bedeutung besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und zeichnen die natürliche Bewegung vor andern möglichen Bewegungen aus, können also auch unter Umständen rückwärts zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **379a** abzuleitende Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein, also keine mechanische Bedeutung besitzen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Gleichungen 378a und 381a verschiedene Aussagen darstellen und nicht etwa dieselben Aussagen in verschiedener Form.

Innerer Zwang der Systeme.

382 **Lehrsatz.** Ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung längs einer geraden Bahn.

Denn für ein solches System ist die gerade Bahn zugleich die geradeste.

383 **Folgerung 1.** Ein freier materieller Punkt beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Bahn (GALILEIS Trägheitsgesetz oder NEWTONS Lex prima).

384 **Folgerung 2.** Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, ist Null. Die Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems können also als die Ursache aufgefaßt werden, aus welcher die Beschleunigung im allgemeinen von Null abweicht.

385 **Definition.** Die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines materiellen Systems an seiner Beschleunigung hervorrufen, heißt der Zwang, welchen die Zusammenhänge dem System auferlegen; jene Abänderung wird auch kurz der innere Zwang oder noch kürzer der Zwang des Systems genannt.

Der Zwang wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Beschleunigung des Systems und der Beschleunigung derjenigen natürlichen Bewegung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich der ersteren vermindert um die letztere.

386 **Folgerung 1.** Der innere Zwang eines Systems ist wie die Beschleunigung eine Vektorgröße in bezug auf das System.