

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

6. Kleinstes Zeitintegral der Energie

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

gleichen konstanten Wert der Energie erfolgt, wie die natürliche Bewegung.

## 6. Kleinstes Zeitintegral der Energie.

**Lehrsatz.** Das Zeitintegral der Energie ist beim Übergang eines freien holonomen Systems aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführt. 358

Vergleichen wir nämlich zunächst nur Bewegungen in einer und derselben Bahn von der Länge  $S$ , so erreicht unter diesen das Zeitintegral der Energie sein Minimum für diejenige Bewegung, für welche die Bahngeschwindigkeit  $v$  konstant ist. Denn da die Summe der Größen  $v dt$  den gegebenen Wert  $S$  hat, so wird die Summe der Größen  $v^2 dt$  dann und nur dann ihren kleinsten Wert erreichen, wenn alle  $v$  gleich sind. Ist aber die Bahngeschwindigkeit konstant, so ist das Zeitintegral der Energie gleich  $\frac{1}{2}mS^2/T$ , wenn  $T$  die Dauer des Übergangs ist. Da  $T$  gegeben ist, so verhält sich für verschiedene Bahnen des Systems das Zeitintegral der Energie wie das Quadrat der Bahnlänge, erstere Größe hat also wie die letztere ihren Minimalwert für die natürliche Bahn.

**Anmerkung 1.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird das Zeitintegral der Energie nicht mehr notwendig ein Minimum, aber seine Variation verschwindet immer noch beim Übergang zu einer anderen der in Betracht gezogenen Bewegungen (vgl. 348). 359

**Anmerkung 2.** Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem HAMILTONschen Prinzip. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzip genau feststellen, so müssen wir uns derselben Ausdrucksweise bedienen wie in 350. 360

**Anmerkung 3.** Der Lehrsatz 358 und die Folgerung 354 stimmen darin überein, daß sie unter gewissen Klassen möglicher Bewegungen die natürliche Bewegung auszeichnen durch 361



ein und dasselbe Merkmal, nämlich den Minimalwert des Zeitintegrals der Energie; sie unterscheiden sich aber wesentlich voneinander dadurch, daß sie ganz verschiedene Klassen möglicher Bewegungen in Betracht ziehen.

- 362 **Anmerkung 4.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Lehrsatzes 358, und dieser Lehrsatz kann daher, als Prinzip vorangestellt, als vollständiger Ersatz für das Grundgesetz dienen, jedoch nur in der Anwendung desselben auf holonome Systeme. Läßt man die Beschränkung auf holonome Systeme fallen, so ergibt der Satz zwar auch bestimmte Bewegungen der materiellen Systeme, aber diese widersprechen im allgemeinen dem Grundgesetz und sind also, mechanisch betrachtet, falsche Lösungen der gestellten Probleme.
- 363 **Rückblick auf 347 bis 362.** Benutzen wir die in den Lehrsätzen 347, 352, 354, 358 ausgesprochenen Eigenschaften der natürlichen Bewegung als Prinzipien zur vollständigen oder teilweisen Bestimmung dieser Bewegung, so machen wir die gegenwärtig eintretenden Änderungen im Zustand des Systems abhängig von solchen Eigentümlichkeiten der Bewegung, welche erst in der Zukunft hervortreten können, und welche oft in menschlichen Verrichtungen als erstrebenswerte Ziele erscheinen. Dieser Umstand hat bisweilen Physiker und Philosophen dazu geführt, in den Gesetzen der Mechanik den Ausdruck einer bewußten Absicht auf zukünftige Ziele, verbunden mit Voraussicht der zweckmäßigen Mittel, zu erblicken. Eine solche Auffassung ist aber weder notwendig, noch auch nur zulässig.
- 364 Daß nämlich eine solche Auffassung jener Prinzipien nicht notwendig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht anzudeuten scheinen, als denotwendige Folgen eines Gesetzes erkannt wurden, in welchem man den Ausdruck einer Voraussicht in die Zukunft nicht findet.
- 365 Daß jene Auffassung der Prinzipien aber sogar unzulässig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht auf zukünftigen Erfolg anzudeuten scheinen, nicht bei allen natürlichen Bewegungen sich



finden. Hätte die Natur wirklich die Absicht, einen kürzesten Weg, einen kleinsten Aufwand an Energie, eine kürzeste Zeit zu erzielen, so wäre es unmöglich zu verstehen, wie es Systeme geben könnte, in welchen diese Absicht, obwohl erreichbar, dennoch der Natur regelmäßig fehlschläge.

Will man darin, daß ein System unter allen möglichen Bahnelementen beständig ein geradestes auswählt, den Ausdruck eines bestimmten Willens erkennen, so steht dies frei; man sieht alsdann eben schon darin den Ausdruck eines bestimmten Willens, daß ein natürliches System überhaupt unter allen möglichen Bewegungen keine willkürliche, sondern stets eine durch besondere Merkmale bezeichnete, im voraus bestimmbare Bewegung auswählt. 366

### Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegung.

**Erläuterung.** Unter den Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems verstehen wir einen Satz von Differentialgleichungen, in welchen die Zeit die unabhängige Variable, die Koordinaten des Systems die abhängigen Variablen sind, und welche zusammen mit einer Anfangslage und einer Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung des Systems eindeutig bestimmen (331). 367

**Aufgabe 1.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen. 368

In 155 d haben wir die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen des Systems in den rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. In diese Gleichungen führen wir anstatt der Bahnlänge die Zeit  $t$  als unabhängige Variable ein. Nach dem Grundgesetz ist  $ds/dt = v$  von  $t$ , also auch von  $s$  unabhängig, und wir haben:

$$\dot{x}_v = x'_v v \quad , \quad \ddot{x}_v = x''_v v^2 \quad .$$