Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

5. Kürzeste Zeit

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_1^n {}_\nu \, m_\nu \, ds_\nu^2}$$

verschwinde bei der natürlichen Bewegung des Systems, und dies ist die JACOBIsche Form jenes Prinzips.

Anmerkung 3. Um das Verhältnis zwischen dem Lehrsatz **347** und dem JACOBIschen Satz genauer festzustellen müssen wir aussagen: Nach der gewöhnlichen Auffassung der Mechanik enthält der Lehrsatz einen besonderen Fall des JACOBIschen Satzes, den Fall nämlich, daß keine Kräfte wirken. 350

Nach unserer Auffassung sind umgekehrt die Voraussetzungen des vollständigen JACOBIschen Satzes als die engeren zu bezeichnen, und der JACOBIsche Satz ist nach dieser Auffassung eine Anpassung des Lehrsatzes an besondere Verhältnisse und seine Umformung auf die Voraussetzungen derselben.

Anmerkung 4. Der Lehrsatz **347** hat den Satz von der Erhaltung der Energie weder zur Voraussetzung, noch zur Folge, sondern ist von demselben ganz unabhängig. Zusammen mit dem Satz von der Energie vermag er das Grundgesetz vollständig zu ersetzen, jedoch nur für holonome Systeme. Angewandt auf andere Systeme würde der Satz allerdings auch bestimmte Bewegungen ergeben, aber diese Bewegungen würden dem Grundgesetz widersprechen (**194**), also falsche Lösungen der gestellten mechanischen Probleme sein. 351

5. Kürzeste Zeit.

Lehrsatz. Die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems führt das System in kürzerer Zeit aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage, als es durch irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung geschehen könnte. 352

Denn ist für alle verglichenen Bewegungen die Energie, also die Bahngeschwindigkeit die gleiche, so ist die Dauer des Übergangs der Bahnlänge proportional, also die kleinste für die kürzeste Bahn, also für die natürliche Bahn.

353 **Anmerkung.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird die Zeit des Übergangs nicht mehr notwendig ein Minimum, aber sie behält immer noch die Eigenschaft, gleich zu sein für die natürliche Bahn und alle ihr unendlich benachbarten möglichen Bahnen (vergl. 348).

354 **Folgerung 1.** Für die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems zwischen gegebenen, hinreichend benachbarten Endlagen ist das Zeitintegral der Energie kleiner, als für irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung.

Denn es ist jenes Zeitintegral gleich dem Produkt aus dem gegebenen konstanten Wert der Energie und der Zeitdauer des Übergangs.

355 **Anmerkung 1.** Der Lehrsatz 352, insbesondere in der Form der Folgerung 354, entspricht dem Maupertuisschen Prinzip der kleinsten Wirkung. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns in derselben Weise ausdrücken, wie dies in 350 geschehen ist.

356 **Anmerkung 2.** Die Folgerung 354 und auch der Lehrsatz 352 setzen für die miteinander verglichenen Bewegungen die Konstanz der Energie mit der Zeit voraus. Zusammen mit der Voraussetzung, daß die natürliche Bewegung sich überhaupt unter den verglichenen finde, genügen sie also zur Bestimmung derselben und können das Grundgesetz vertreten, jedoch nur für holonome Systeme. Ihre Voraussetzungen auf andere Systeme angewandt, würden zu falschen mechanischen Lösungen führen.

357 **Folgerung 2.** Ein freies holonomes System wird aus seiner Anfangslage in gegebener Zeit auf größere geradeste Entfernung fortgetragen durch seine natürliche Bewegung, als durch irgend eine andere mögliche Bewegung, welche mit dem

gleichen konstanten Wert der Energie erfolgt, wie die natürliche Bewegung.

6. Kleinstes Zeitintegral der Energie.

Lehrsatz. Das Zeitintegral der Energie ist beim Übergang eines freien holonomen Systems aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführt. 358

Vergleichen wir nämlich zunächst nur Bewegungen in einer und derselben Bahn von der Länge S, so erreicht unter diesen das Zeitintegral der Energie sein Minimum für diejenige Bewegung, für welche die Bahngeschwindigkeit v konstant ist. Denn da die Summe der Größen vdt den gegebenen Wert S hat, so wird die Summe der Größen v^2dt dann und nur dann ihren kleinsten Wert erreichen, wenn alle v gleich sind. Ist aber die Bahngeschwindigkeit konstant, so ist das Zeitintegral der Energie gleich $\frac{1}{2}mS^2/T$, wenn T die Dauer des Übergangs ist. Da T gegeben ist, so verhält sich für verschiedene Bahnen des Systems das Zeitintegral der Energie wie das Quadrat der Bahnlänge, erstere Größe hat also wie die letztere ihren Minimalwert für die natürliche Bahn.

Anmerkung 1. Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird das Zeitintegral der Energie nicht mehr notwendig ein Minimum, aber seine Variation verschwindet immer noch beim Übergang zu einer anderen der in Betracht gezogenen Bewegungen (vgl. 348). 359

Anmerkung 2. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem Hamiltonschen Prinzip. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns derselben Ausdrucksweise bedienen wie in 350. 360

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 358 und die Folgerung 354 stimmen darin überein, daß sie unter gewissen Klassen möglicher Bewegungen die natürliche Bewegung auszeichnen durch 361