Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 3. Bewegung der freien Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

reichend genaue Untersuchung, daß sie nur angenäherte Gültigkeit haben und daher nur abgeleitete Zusammenhänge sein können. Die letzten, ursprünglichen Zusammenhänge sind wir gezwungen in der Welt der Atome zu suchen, und sie sind uns unbekannt. Aber auch wenn sie uns bekannt wären, müßten wir auf ihre Benutzung zu praktischen Zwecken verzichten und verfahren, wie wir verfahren. Denn die wirkliche Beherrschung jedes Problems erfordert stets die Beschränkung der Betrachtung auf eine äußerst kleine Zahl von Variabelen, während das Zurückgehen auf die Zusammenhänge der Atome die Einführung einer unermeßlichen Zahl von Veränderlichen nötig machen würde.

Daß wir aber das Grundgesetz so anwenden dürfen, wie wir es anwenden, ist nicht als eine neue Erfahrung neben dem Grundgesetz anzusehen, sondern ist, wie wir sahen, eine notwendige Folge eben dieses Gesetzes selbst.

Abschnitt 3. Bewegung der freien Systeme.

Allgemeine Eigenschaften der Bewegung.

I. Bestimmtheit der Bewegung.

331 **Lehrsatz.** Eine natürliche Bewegung eines freien Systems ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Lage und der Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit.

Denn durch die Lage und die Richtung der Geschwindigkeit ist die Bahn des Systems eindeutig bestimmt (**161**); die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn ist durch die Größe der Geschwindigkeit zur Anfangszeit gegeben.

332 **Folgerung 1.** Durch den gegenwärtigen Zustand (**261**) eines freien Systems sind seine zukünftigen Zustände und seine vergangenen Zustände zu allen Zeiten eindeutig bestimmt.

333 **Folgerung 2.** Könnte man in irgend einer Lage die Geschwindigkeit eines Systems umkehren (was niemals gegen die

Bedingungsgleichungen des Systems verstoßen würde), so würde das System die Lagen seiner vorherigen Bewegung in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

Bemerkung 1. In einem freien holonomen System (**123**) gibt 334
es stets eine natürliche Bewegung, welche das System in gegebener Zeit aus einer willkürlich gegebenen Anfangs- in eine willkürlich gegebene Endlage überführt.

Denn es ist stets eine natürliche Bahn zwischen beiden Lagen möglich (**192**); in dieser Bahn ist jede Geschwindigkeit zulässig, also auch eine solche, welche das System in der gegebenen Zeit die gegebene Strecke durchlaufen läßt.

Anmerkung. Die vorige Bemerkung bleibt richtig, wenn 335
an Stelle der Zeit des Überganges die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder auch die Energie des Systems gesetzt wird.

Bemerkung 2. Ein freies System, welches kein holonomes 336
ist, kann nicht aus jeder möglichen Anfangslage in jede mögliche Endlage durch eine natürliche Bewegung übergeführt werden (**162**).

Lehrsatz. Eine natürliche Bewegung eines freien holo- 337
nomen Systems ist bestimmt durch die Angabe zweier Lagen, in welchen sich das System zu zwei bestimmten Zeiten finden soll.

Denn durch diese Angabe ist die Bahn des Systems bestimmt und die Geschwindigkeit in dieser Bahn.

Anmerkung 1. Die Bestimmung einer natürlichen Be- 338
wegung durch zwei Lagen, zwischen welchen sie stattfindet, ist im allgemeinen eine mehrdeutige; sie ist eine eindeutige, sobald die Entfernung der beiden Lagen ein gewisses endliches Maß nicht überschreitet und die Länge der beschriebenen Bahn von der Ordnung dieser Entfernung sein soll (vgl. **167, 172, 190** u. **176**).

Anmerkung 2. Eine natürliche Bewegung eines freien 339
holonomen Systems ist, abgesehen von dem absoluten Wert

der Zeit, auch bestimmt durch zwei Lagen des Systems und entweder die Zeitdauer des Überganges oder die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder die Energie des Systems.

2. Erhaltung der Energie.

340 **Lehrsatz.** Die Energie eines in beliebiger Bewegung begriffenen freien Systems ändert sich nicht mit der Zeit.

Denn die Energie setzt sich zusammen (282) aus der Masse des Systems, welche unveränderlich ist, und der Geschwindigkeit längs der Bahn, welche ebenfalls unveränderlich ist.

341 **Anmerkung 1.** Von den drei Teilaussagen, in welche wir das Grundgesetz zerlegten (323), bedurften wir zum Beweise des Satzes nur die zweite und dritte. Wir können auch die dritte entbehrlich machen, und den Satz von einer bestimmten Art der Zeitmessung unabhängig aussagen, wenn wir ihm die Form geben:

Das Verhältnis der Energieen irgend zweier in beliebiger Bewegung begriffener freier Systeme ändert sich nicht mit der Zeit.

342 **Anmerkung 2.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Grundgesetzes. Umgekehrt folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Energie die zweite Teilaussage (323) jenes Gesetzes, aber nicht die erste, also nicht das ganze Gesetz. Es wären natürliche Systeme denkbar, für welche der Satz von der Erhaltung der Energie gälte, und welche sich dennoch nicht in geradesten Bahnen bewegten. Es wäre zum Beispiel denkbar, daß der Satz von der Erhaltung der Energie Gültigkeit hätte auch für belebte Systeme, und daß dieselben dennoch sich unserer Mechanik entzögen. Umgekehrt ließen sich auch natürliche Systeme denken, welche sich nur in geradesten Bahnen bewegten, und für welche dennoch der Satz von der Erhaltung der Energie keine Gültigkeit hätte.

343 **Anmerkung 3.** Es ist in neuerer Zeit mehrfach die Ansicht vorgetragen worden, daß die Energie bewegter Systeme an einen bestimmten Ort gebunden sei und sich von Ort zu

Ort fortpflanze. Man hat deshalb die Energie, wie in Hinsicht der Unzerstörbarkeit, so auch in dieser Hinsicht mit der Materie in Vergleich gestellt. Diese Auffassung der Energie weicht offenbar sehr weit ab von der Auffassung der hier vorgetragenen Mechanik. Mit dem gleichen Rechte, aber nicht mit größerem Rechte, kann man sagen: die Energie eines bewegten Systems sei am Orte des Systems vorhanden, mit welchem man sagen kann: die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers sei an den Ort desselben gebunden. Diese letztere Ausdrucksweise aber ist mit Recht ungebräuchlich.

3. Kleinste Beschleunigung.

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, daß die Größe seiner Beschleunigung in jedem Augenblick die kleinste ist, welche mit der augenblicklichen Lage, der augenblicklichen Geschwindigkeit und dem Zusammenhange des Systems sich verträgt. 344

Denn das Quadrat der Größe der Beschleunigung ist nach 280 und 281 gleich

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2 \quad .$$

Da nun für die natürliche Bewegung $\dot{v} = 0$ ist, v einen durch die augenblickliche Geschwindigkeit gegebenen Wert hat und c den kleinsten Wert hat, welcher mit der gegebenen Richtung der Bewegung und dem Zusammenhange des Systems verträglich ist, so nimmt der Ausdruck selbst den kleinsten, mit den genannten Nebenumständen verträglichen Wert an.

Anmerkung 1. Die in dem vorigen Lehrsatz ausgesagte Eigenschaft der natürlichen Bewegung bestimmt diese Bewegung eindeutig, und es kann daher der Lehrsatz das Grundgesetz vollständig vertreten. 345

Denn soll der Ausdruck

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2$$

ein Minimum werden, so muß zunächst $\dot{v} = 0$ sein, also das

System seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, zweitens muß entweder $v = 0$ sein — alsdann ruht das System — oder c muß den kleinsten, bei der Richtung der Bahn möglichen Wert haben, — dann ist die Bahn eine geradeste.

346 **Anmerkung 2.** Der Lehrsatz **344** würde, als Grundgesetz vorangestellt, vor der benutzten Form sogar den Vorzug haben, daß er das Gesetz in eine einzige unteilbare Aussage zusammenfaßte, nicht nur äußerlich in einen Satz. Die benutzte Form hat aber den Vorzug, daß sie ihre Bedeutung klarer und durchsichtiger erkennen läßt.

4. Kürzeste Bahn.

347 **Lehrsatz.** Die natürliche Bahn eines freien holonomen Systems zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten Lagen ist kürzer als irgend eine andere mögliche Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn in einem holonomen System ist eine geradeste Bahn zwischen hinreichend benachbarten Lagen zugleich die kürzeste (**190**, **176**).

348 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nicht mehr behauptet werden, daß die natürliche Bahn kürzer sei als alle anderen Bahnen, nicht einmal, daß sie kürzer sei als alle benachbarten Bahnen; es gilt aber immer noch die in dem vorigen Satz enthaltene Behauptung, daß die Variation der Länge der Bahn verschwinde beim Übergang zu irgend einer benachbarten möglichen Bahn (**190**, **171**).

349 **Anmerkung 2.** Der vorige Lehrsatz entspricht dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form, welche Jacobi diesem Prinzip gegeben hat. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse, ds_ν die Weglänge des ν ten der n Punkte des Systems in einem bestimmten Zeitelement, so sagt der Lehrsatz aus, daß die Variation des Integrals

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_1^n {}_\nu \, m_\nu \, ds_\nu^2}$$

verschwinde bei der natürlichen Bewegung des Systems, und dies ist die Jacobische Form jenes Prinzips.

Anmerkung 3. Um das Verhältnis zwischen dem Lehrsatz **347** und dem Jacobischen Satz genauer festzustellen müssen wir aussagen: Nach der gewöhnlichen Auffassung der Mechanik enthält der Lehrsatz einen besonderen Fall des Jacobischen Satzes, den Fall nämlich, daß keine Kräfte wirken. 350

Nach unserer Auffassung sind umgekehrt die Voraussetzungen des vollständigen Jacobischen Satzes als die engeren zu bezeichnen, und der Jacobische Satz ist nach dieser Auffassung eine Anpassung des Lehrsatzes an besondere Verhältnisse und seine Umformung auf die Voraussetzungen derselben.

Anmerkung 4. Der Lehrsatz **347** hat den Satz von der Erhaltung der Energie weder zur Voraussetzung, noch zur Folge, sondern ist von demselben ganz unabhängig. Zusammen mit dem Satz von der Energie vermag er das Grundgesetz vollständig zu ersetzen, jedoch nur für holonome Systeme. Angewandt auf andere Systeme würde der Satz allerdings auch bestimmte Bewegungen ergeben, aber diese Bewegungen würden dem Grundgesetz widersprechen (**194**), also falsche Lösungen der gestellten mechanischen Probleme sein. 351

5. Kürzeste Zeit.

Lehrsatz. Die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems führt das System in kürzerer Zeit aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage, als es durch irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung geschehen könnte. 352

Denn ist für alle verglichenen Bewegungen die Energie, also die Bahngeschwindigkeit die gleiche, so ist die Dauer des Übergangs der Bahnlänge proportional, also die kleinste für die kürzeste Bahn, also für die natürliche Bahn.

353 **Anmerkung.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird die Zeit des Übergangs nicht mehr notwendig ein Minimum, aber sie behält immer noch die Eigenschaft, gleich zu sein für die natürliche Bahn und alle ihr unendlich benachbarten möglichen Bahnen (vergl. **348**).

354 **Folgerung 1.** Für die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems zwischen gegebenen, hinreichend benachbarten Endlagen ist das Zeitintegral der Energie kleiner, als für irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung.

Denn es ist jenes Zeitintegral gleich dem Produkt aus dem gegebenen konstanten Wert der Energie und der Zeitdauer des Übergangs.

355 **Anmerkung 1.** Der Lehrsatz **352**, insbesondere in der Form der Folgerung **354**, entspricht dem Maupertuisschen Prinzip der kleinsten Wirkung. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns in derselben Weise ausdrücken, wie dies in **350** geschehen ist.

356 **Anmerkung 2.** Die Folgerung **354** und auch der Lehrsatz **352** setzen für die miteinander verglichenen Bewegungen die Konstanz der Energie mit der Zeit voraus. Zusammen mit der Voraussetzung, daß die natürliche Bewegung sich überhaupt unter den verglichenen finde, genügen sie also zur Bestimmung derselben und können das Grundgesetz vertreten, jedoch nur für holonome Systeme. Ihre Voraussetzungen auf andere Systeme angewandt, würden zu falschen mechanischen Lösungen führen.

357 **Folgerung 2.** Ein freies holonomes System wird aus seiner Anfangslage in gegebener Zeit auf größere geradeste Entfernung fortgetragen durch seine natürliche Bewegung, als durch irgend eine andere mögliche Bewegung, welche mit dem

gleichen konstanten Wert der Energie erfolgt, wie die natürliche Bewegung.

6. Kleinstes Zeitintegral der Energie.

Lehrsatz. Das Zeitintegral der Energie ist beim Übergang eines freien holonomen Systems aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführt. 358

Vergleichen wir nämlich zunächst nur Bewegungen in einer und derselben Bahn von der Länge S, so erreicht unter diesen das Zeitintegral der Energie sein Minimum für diejenige Bewegung, für welche die Bahngeschwindigkeit v konstant ist. Denn da die Summe der Größen vdt den gegebenen Wert S hat, so wird die Summe der Größen v^2dt dann und nur dann ihren kleinsten Wert erreichen, wenn alle v gleich sind. Ist aber die Bahngeschwindigkeit konstant, so ist das Zeitintegral der Energie gleich $\frac{1}{2}mS^2/T$, wenn T die Dauer des Übergangs ist. Da T gegeben ist, so verhält sich für verschiedene Bahnen des Systems das Zeitintegral der Energie wie das Quadrat der Bahnlänge, erstere Größe hat also wie die letztere ihren Minimalwert für die natürliche Bahn.

Anmerkung 1. Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird das Zeitintegral der Energie nicht mehr notwendig ein Minimum, aber seine Variation verschwindet immer noch beim Übergang zu einer anderen der in Betracht gezogenen Bewegungen (vgl. 348). 359

Anmerkung 2. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem Hamiltonschen Prinzip. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns derselben Ausdrucksweise bedienen wie in 350. 360

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 358 und die Folgerung 354 stimmen darin überein, daß sie unter gewissen Klassen möglicher Bewegungen die natürliche Bewegung auszeichnen durch 361 ein und dasselbe Merkmal, nämlich den Minimalwert des Zeitintegrals der Energie; sie unterscheiden sich aber wesentlich voneinander dadurch, daß sie ganz verschiedene Klassen möglicher Bewegungen in Betracht ziehen.

362 **Anmerkung 4.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Lehrsatzes **358**, und dieser Lehrsatz kann daher, als Prinzip vorangestellt, als vollständiger Ersatz für das Grundgesetz dienen, jedoch nur in der Anwendung desselben auf holonome Systeme. Läßt man die Beschränkung auf holonome Systeme fallen, so ergibt der Satz zwar auch bestimmte Bewegungen der materiellen Systeme, aber diese widersprechen im allgemeinen dem Grundgesetz und sind also, mechanisch betrachtet, falsche Lösungen der gestellten Probleme.

363 **Rückblick auf 347 bis 362.** Benutzen wir die in den Lehrsätzen **347**, **352**, **354**, **358** ausgesprochenen Eigenschaften der natürlichen Bewegung als Prinzipien zur vollständigen oder teilweisen Bestimmung dieser Bewegung, so machen wir die gegenwärtig eintretenden Änderungen im Zustand des Systems abhängig von solchen Eigentümlichkeiten der Bewegung, welche erst in der Zukunft hervortreten können, und welche oft in menschlichen Verrichtungen als erstrebenswerte Ziele erscheinen. Dieser Umstand hat bisweilen Physiker und Philosophen dazu geführt, in den Gesetzen der Mechanik den Ausdruck einer bewußten Absicht auf zukünftige Ziele, verbunden mit Voraussicht der zweckmäßigen Mittel, zu erblicken. Eine solche Auffassung ist aber weder notwendig, noch auch nur zulässig.

364 Daß nämlich eine solche Auffassung jener Prinzipien nicht notwendig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht anzudeuten scheinen, als denknotwendige Folgen eines Gesetzes erkannt wurden, in welchem man den Ausdruck einer Voraussicht in die Zukunft nicht findet.

365 Daß jene Auffassung der Prinzipien aber sogar unzulässig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht auf zukünftigen Erfolg anzudeuten scheinen, nicht bei allen natürlichen Bewegungen sich

finden. Hätte die Natur wirklich die Absicht, einen kürzesten Weg, einen kleinsten Aufwand an Energie, eine kürzeste Zeit zu erzielen, so wäre es unmöglich zu verstehen, wie es Systeme geben könnte, in welchen diese Absicht, obwohl erreichbar, dennoch der Natur regelmäßig fehlschlüge.

Will man darin, daß ein System unter allen möglichen 366
Bahnelementen beständig ein geradestes auswählt, den Ausdruck eines bestimmten Willens erkennen, so steht dies frei; man sieht alsdann eben schon darin den Ausdruck eines bestimmten Willens, daß ein natürliches System überhaupt unter allen möglichen Bewegungen keine willkürliche, sondern stets eine durch besondere Merkmale bezeichnete, im voraus bestimmbare Bewegung auswählt.

Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegung.

Erläuterung. Unter den Differentialgleichungen der Be- 367
wegung eines Systems verstehen wir einen Satz von Differentialgleichungen, in welchen die Zeit die unabhängige Variabele, die Koordinaten des Systems die abhängigen Variabelen sind, und welche zusammen mit einer Anfangslage und einer Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung des Systems eindeutig bestimmen (**331**).

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung 368
eines freien Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

In **155d** haben wir die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen des Systems in den rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. In diese Gleichungen führen wir anstatt der Bahnlänge die Zeit t als unabhängige Variabele ein. Nach dem Grundgesetz ist $ds/dt = v$ von t, also auch von s unabhängig, und wir haben:

$$\dot{x}_\nu = x'_\nu v \quad , \qquad \ddot{x}_\nu = x''_\nu v^2 \quad .$$

Multiplizieren wir demnach die Gleichungen **155d** mit mv^2 und setzen zur Abkürzung für $mv^2\Xi_\iota$ jetzt X_ι, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die $3n$ Gleichungen:

$$\text{a)} \qquad m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i{}^\iota x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen (vgl. **155b**):

$$\text{b)} \qquad \sum_1^{3n}{}^\nu x_{\iota\nu} \ddot{x}_\nu + \sum_1^{3n}{}^\nu \sum_1^{3n}{}^\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \dot{x}_\nu \dot{x}_\mu = 0$$

die $3n+i$ Größen $\ddot{x}_\nu$ und X_ι als eindeutige Funktionen der x_ν und $\dot{x}_\nu$ bestimmen.

369 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen der Bewegung des freien Systems in der Form **368** werden gewöhnlich als Lagranges Gleichungen der ersten Form bezeichnet.

370 **Anmerkung 2.** Jede einzelne der Gleichungen **368a** gibt uns, nachdem wir die X_ι zuerst bestimmt haben, die Komponente der Beschleunigung des Systems nach einer bestimmten der rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

371 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben auszudrücken.

Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen in den p_ϱ finden wir in **158d**. In diese führen wir statt der Bahnlänge die Zeit als unabhängige Variabele ein, indem wir wiederum bemerken, daß nach dem Grundgesetz ist:

$$\dot{p}_\varrho = p'_\varrho v \quad , \quad \ddot{p}_\varrho = p''_\varrho v^2 \quad .$$

Indem wir also die Gleichungen **158d** multiplizieren mit mv^2 und setzen für $mv^2\Pi_\varkappa$ jetzt $P_\varkappa$, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die r Gleichungen:

$$\text{a)}\ m\left\{\sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma}\ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^r{}^\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right)\dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau\right\} + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0,$$

welche zusammen mit den k Gleichungen (vgl. **158b**):

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\ddot{p}_\varrho + \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma = 0 \qquad \textbf{b)}$$

die $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ als eindeutige Funktionen der p_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ bestimmen.

Anmerkung. Indem wir Gebrauch machen von der Beziehung **277**, können wir die Bewegungsgleichungen **371a** in der Form schreiben: 372

$$mf_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Denken wir uns die $P_\varkappa$ zuerst bestimmt, so gibt uns eine jede dieser Gleichungen die Komponente der Beschleunigung nach einer bestimmten der Koordinaten p_ϱ, ausgedrückt als Funktion der augenblicklichen Lage und Geschwindigkeit des Systems.

Folgerung 1. Drücken wir mit Hilfe der Beziehung **291a** die Komponenten der Beschleunigung durch die Energie aus, so nehmen die Bewegungsgleichungen eines freien Systems die Form an: 373

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Anmerkung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung in dieser Form heißen auch die allgemeinen LAGRANGEschen Gleichungen der Bewegung oder LAGRANGES Gleichungen der zweiten Form (vgl. **369**). 374

Anmerkung 2. Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so kommt sie in den Bedingungsgleichungen des Systems nicht vor (**140**), die Größen $p_{\varkappa\varrho}$ sind also sämtlich gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Bedingungsgleichung wird: 375

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = 0 \quad .$$

In einem holonomen System können (**144**) stets die sämtlichen Gleichungen der Bewegung in dieser einfachen Form dargestellt werden.

376 **Folgerung 2.** Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**289, 375**):

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungstatsachen enthalten. Man kann die Bewegungsgleichungen in dieser Form auffassen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Größen für alle Zeiten bestimmen.

377 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **376 a** und **b** würde man wohl mit Recht als die Poissonsche Form der Bewegungsgleichungen bezeichnen.

378 **Anmerkung 2.** Aus den Gleichungen **376** folgen zwei reziproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen:

a) $$\frac{\partial_p \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{(aus b))}$$

b) $$\frac{\partial_p q_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad , \qquad \text{(aus a) und b))}$$

und welche einen einfachen physikalischen Sinn besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und würden nicht für jede mögliche Bewegung des Systems gelten, können also auch unter Umständen zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **376a** abgeleitete Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein.

Folgerung 3. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**290, 289, 292, 375**): 379

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho}\,, \qquad \text{b)}$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungstatsachen enthalten. Auch in dieser Form erscheinen die Bewegungsgleichungen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Größen für alle Zeiten bestimmen.

Anmerkung 1. Die vorstehenden Gleichungen **379a** und **b** werden gewöhnlich als die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen für ein freies System bezeichnet. 380

Anmerkung 2. Aus den Gleichungen **379** folgen zwei reziproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen: 381

$$\frac{\partial_q \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\frac{\partial_q \dot{p}_\varrho}{\partial p_\sigma} = -\frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial q_\varrho}\,, \qquad \text{b)}$$

und welche eine einfache physikalische Bedeutung besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und zeichnen die natürliche Bewegung vor andern möglichen Bewegungen aus, können also auch unter Umständen rückwärts zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **379a** abzuleitende Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein, also keine mechanische Bedeutung besitzen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Gleichungen **378a** und **381a** verschiedene Aussagen darstellen und nicht etwa dieselben Aussagen in verschiedener Form.

Innerer Zwang der Systeme.

382 **Lehrsatz.** Ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung längs einer geraden Bahn.

Denn für ein solches System ist die gerade Bahn zugleich die geradeste.

383 **Folgerung 1.** Ein freier materieller Punkt beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Bahn (Galileis Trägheitsgesetz oder Newtons Lex prima).

384 **Folgerung 2.** Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, ist Null. Die Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems können also als die Ursache aufgefaßt werden, aus welcher die Beschleunigung im allgemeinen von Null abweicht.

385 **Definition.** Die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines materiellen Systems an seiner Beschleunigung hervorrufen, heißt der Zwang, welchen die Zusammenhänge dem System auferlegen; jene Abänderung wird auch kurz der innere Zwang oder noch kürzer der Zwang des Systems genannt.

Der Zwang wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Beschleunigung des Systems und der Beschleunigung derjenigen natürlichen Bewegung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich der ersteren vermindert um die letztere.

386 **Folgerung 1.** Der innere Zwang eines Systems ist wie die Beschleunigung eine Vektorgröße in bezug auf das System.

Folgerung 2. In einem freien System ist der innere 387
Zwang gleich der Beschleunigung des Systems; er ist hier in der Tat nur eine andere Auffassung der Beschleunigung (382).

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges ist in jedem Augen- 388
blick für die natürliche Bewegung eines freien Systems kleiner als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage der Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Denn diese Behauptung ist nach 387 nur im Ausdruck verschieden von dem Lehrsatz 344.

Folgerung. Ein jeder Zusammenhang, welcher den vor- 389
handenen Zusammenhängen des Systems hinzugefügt wird, vergrößert den Zwang des Systems. Die Auflösung irgend eines Zusammenhanges ändert die natürliche Bewegung in solcher Weise, daß sich der Zwang verkleinert.

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem 390
Gaussschen Prinzip des kleinsten Zwanges. Um sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genau darzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in 350.

Anmerkung 2. Das Gausssche Prinzip und das Träg- 391
heitsgesetz (383) zusammen können das Grundgesetz vollständig ersetzen, und zwar für alle Systeme.

Denn sie sagen zusammen den Lehrsatz 344 aus.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der 392
natürlichen Bewegung eines freien Systems beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen (111) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Denn die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ sind nach 387 in einem freien System gleich f_ϱ, können also nach 372 geschrieben werden in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_{1}^{k}{}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ,$$

sind also nach 250 senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

393 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen die δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche oder virtuelle Verrückung des Systems, so gibt die Gleichung:

a) $$\sum_1^r{}_\varrho f_\varrho \delta p_\varrho = 0$$

einen symbolischen Ausdruck des vorigen Lehrsatzes. Denn die Gleichung ersetzt den Lehrsatz nach **249**, und sie ist symbolisch, insofern sie als Symbol für unendlich viele Gleichungen steht.

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnet δx_ν die Änderung von x_ν für irgend eine mögliche oder virtuelle Verrückung, so nimmt die Gleichung **a)** die Gestalt an:

b) $$\sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = 0 \quad .$$

394 **Anmerkung 1.** Der vorstehende Lehrsatz **392** entspricht dem D'ALEMBERTschen Prinzip; die Gleichungen **393a** und **b** entsprechen der gewöhnlichen Darstellungsweise desselben. Um das Verhältnis zwischen diesem Prinzip und jenem Lehrsatz genau festzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**.

395 **Anmerkung 2.** Aus der Bedingung, daß der Zwang senkrecht stehe auf jeder virtuellen Verrückung des Systems, folgen nach **250** die Bewegungsgleichungen der freien Systems in der Form **372**. Das D'ALEMBERTsche Prinzip kann also für sich allein das Grundgesetz vertreten und zwar für alle Systeme. Das von uns benutzte Grundgesetz hat vor jenem Prinzip die einfachere und durchsichtigere Bedeutung voraus.

396 **Folgerung 1.** In einem freien System steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

397 **Folgerung 2.** Bei der Bewegung eines freien Systems steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf der Richtung der wirklichen augenblicklichen Bewegung.

Folgerung 3. Bei der Bewegung eines freien Systems ist die Komponente der Beschleunigung in jeder Richtung einer möglichen Bewegung beständig gleich Null. 398

Folgerung 4. Die Komponente der Beschleunigung eines freien Systems in der Richtung irgend einer freien Koordinate des Systems ist beständig gleich Null. 399

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, daß die Komponente der Beschleunigung in Richtung einer jeden Koordinate der absoluten Lage beständig Null bleibt, welches auch immer der innere Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems ist. 400

Denn welches auch der Zusammenhang des Systems ist, jede Koordinate seiner absoluten Lage ist eine freie Koordinate (**142**).

Folgerung. Wählen wir die Koordinaten eines freien Systems übrigens beliebig, aber doch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden (**19**), so können wir auch ohne Kenntnis des Zusammenhanges des Systems, oder ohne vollständige Kenntnis desselben, doch stets sechs Differentialgleichungen der Bewegung des Systems angeben. 401

Besondere Wahl der Koordinaten. Die folgende Wahl von Koordinaten der absoluten Lage ist für jedes System eine zulässige Wahl. 402

Wir bezeichnen mit

$$\alpha_1 \, , \quad \alpha_2 \, , \quad \alpha_3$$

die arithmetischen Mittelwerte derjenigen rechtwinkligen Koordinaten aller Massenteilchen, welche beziehlich mit x_1 x_2 x_3 parallel sind. Die Größen α_1 α_2 α_3 betrachten wir als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes von mittlerer Lage, welchen wir den Schwerpunkt des Systems nennen. Durch den Schwerpunkt legen wir drei Gerade parallel den drei Koordinatenachsen; durch diese drei Geraden und alle Massenteilchen legen wir Ebenen und bezeichnen mit

$$\omega_1 \, , \quad \omega_2 \, , \quad \omega_3$$

die arithmetischen Mittelwerte der Winkel aller durch dieselbe Gerade gelegten Ebenen mit einer beliebigen unter ihnen. Die sechs Größen α und ω sind voneinander unabhängig veränderliche Größen, deren Änderung notwendig eine Änderung in der Lage des Systems bedingt, und welche durch die Konfiguration allein nicht bestimmt sind. Wir können also diese sechs Größen zu Koordinaten der absoluten Lage machen (**21**), und wir machen sie zu Koordinaten der absoluten Lage, sobald wir neben ihnen nur noch Konfigurationskoordinaten als weitere Koordinaten einführen.

Erteilen wir den α und ω beliebige Veränderungen, während wir die übrigen Koordinaten festhalten, so bewegt sich das System wie ein starrer Körper. Wir erhalten daher aus rein geometrischen Gründen für die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, wenn wir den Index ν von 1 bis n laufen lassen (**13**):

$$\text{a)}\quad \left\{\begin{aligned} dx_{3\nu-2} &= d\alpha_1 + (x_{3\nu} - \alpha_3)\, d\omega_2 - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, d\omega_3 \\ dx_{3\nu-1} &= d\alpha_2 + (x_{3\nu-2} - \alpha_1)\, d\omega_3 - (x_{3\nu} - \alpha_3)\, d\omega_1 \\ dx_{3\nu} &= d\alpha_3 + (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, d\omega_1 - (x_{3\nu-2} - \alpha_1)\, d\omega_2 \quad . \end{aligned}\right.$$

Hieraus ergeben sich, wenn wir auch nun die x_ν als Funktionen sämtlicher Koordinaten betrachten, die Werte der partiellen Differentialquotienten der x_ν nach den α und ω; also zum Beispiel:

$$\text{b)}\qquad \frac{\partial x_{3\nu-2}}{\partial \alpha_1} = 1 \;, \quad \frac{\partial x_{3\nu-1}}{\partial \alpha_1} = 0 \;, \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_1} = 0 \;,$$

$$\text{c)}\quad \frac{\partial x_{3\nu-2}}{\partial \omega_1} = 0 \;, \quad \frac{\partial x_{3\nu-1}}{\partial \omega_1} = -(x_{3\nu} - \alpha_3) \;, \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_1} = x_{3\nu-1} - \alpha_2 \quad .$$

403 **Folgerung 1.** Zufolge der Bemerkung, daß die Beschleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu\, \ddot{x}_{3\nu-2} = 0 \;, \qquad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu\, \ddot{x}_{3\nu-1} = 0 \;, \qquad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu\, \ddot{x}_{3\nu} = 0 \quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach der Koordinate α_1 des Schwerpunktes gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_1} \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402b** gleich:

$$\sum_1^{n} {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_{3\nu} \quad ,$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die Beschleunigungen nach α_2 und α_3.

Anmerkung. Die drei Gleichungen **403**, welche sich un- 404
mittelbar zweimal integrieren lassen und dann aussagen, daß der Schwerpunkt eines freien Systems sich in gleichförmiger, geradliniger Bewegung befindet, enthalten das sogenannte Prinzip des Schwerpunktes.

Folgerung 2. Zufolge der Bemerkung, daß die Be- 405
schleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^{n} {}_\nu\, m_\nu \left(x_{3\nu-1}\, \ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\, \ddot{x}_{3\nu-1}\right) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n} {}_\nu\, m_\nu \left(x_{3\nu}\, \ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\, \ddot{x}_{3\nu}\right) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n} {}_\nu\, m_\nu \left(x_{3\nu-2}\, \ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\, \ddot{x}_{3\nu-2}\right) = 0 \quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach ω_1 gleich:

$$\sum_1^{3n} {}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \omega_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402c** gleich:

$$\sum_1^n {}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left\{ (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, \ddot{x}_{3\nu} - (x_{3\nu} - \alpha_3)\, \ddot{x}_{3\nu-1} \right\} \quad ,$$

also durch Benutzung von **403** gleich:

$$\sum_1^n {}_\nu \frac{m_\nu}{m} (x_{3\nu-1}\, \ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\, \ddot{x}_{3\nu-1}) \quad ,$$

und entsprechende Werte gelten für die Beschleunigungen nach ω_2 und ω_3.

406 **Anmerkung.** Die drei Gleichungen **405** enthalten das sogenannte Prinzip der Flächen. Jene Gleichungen lassen sich nämlich unmittelbar einmal integrieren und ergeben dann die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\sum_1^n {}_\nu\, m_\nu (x_{3\nu-1}\, \dot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\, \dot{x}_{3\nu-1}) = \text{const}_1 \quad ,$$

$$\sum_1^n {}_\nu\, m_\nu (x_{3\nu}\, \dot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\, \dot{x}_{3\nu}) = \text{const}_2 \quad ,$$

$$\sum_1^n {}_\nu\, m_\nu (x_{3\nu-2}\, \dot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\, \dot{x}_{3\nu-2}) = \text{const}_3 \quad ,$$

welche die folgende, den Namen rechtfertigende geometrische Deutung erlauben:

Ziehen wir vom Ursprung der Koordinaten nach jedem Massenteilchen des Systems einen Radius, so wächst die Summe der Projektionen der von diesen Radien beschriebenen Flächen auf jede der drei Koordinatenebenen gleichförmig mit der Zeit.

407 **Anmerkung 1 zu 402 bis 406.** Wir haben die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen als besondere Fälle des allgemeinen Lehrsatzes **400** eingeführt. Wir hätten hierzu kein Recht gehabt, wenn man, wie es bisweilen geschieht, als den wesentlichen Inhalt jener Prinzipien den Vorteil ansehen wollte, daß sie Integrale der Bewegungsgleichungen liefern. Diese Auffassung scheint uns aber schon deshalb unzulässig,

weil das Ergebnis des Flächensatzes doch nur in uneigentlichem Sinne ein Integral genannt werden kann. Als wesentlichen Inhalt jener Prinzipien betrachten wir vielmehr, wie uns scheint mit Recht, den Vorteil, daß sie Behauptungen liefern, welche unabhängig von dem besonderen Zusammenhang des Systems allgemeingültig ausgesagt werden können.

Anmerkung 2 zu 402 bis 406. Bei der Ableitung des Satzes vom Schwerpunkt und des Flächensatzes als besonderer Fälle des Satzes **400** haben wir nicht von allen Eigenschaften Gebrauch gemacht, welche wir den α und den ω durch die Definition beilegten. In der Tat hätten wir jene Sätze auch mit Benutzung anderer Koordinaten ableiten können, z. B. aller Koordinaten, welche mit den α und ω gleiche Richtung haben, ohne doch identisch mit ihnen zu sein. Überhaupt würden wir bei beliebiger Wahl der Koordinaten nicht jedesmal 6 Gleichungen erhalten, welche einen neuen physikalischen Sinn ergäben oder von den Gleichungen **403** und **405** völlig unabhängig wären, sondern es würden stets diejenigen Gleichungen sein, welche aus den Gleichungen **403** und **405** durch Transformation auf die gewählten Koordinaten entstehen. Aber für alle diese verschiedenen Formen gibt der Lehrsatz **400** einen gemeinschaftlichen Ausdruck und den physikalischen Sinn. **408**

Holonome Systeme.

Bemerkung. Ist für ein holonomes System die geradeste Entfernung (**217**) bekannt, so lassen sich die Gleichungen der geradesten Bahnen in endlicher Form darstellen (**225**). Diese Bahnen sind aber die natürlichen Bahnen des Systems, sobald dasselbe frei ist, und alle Bewegungen, bei welchen sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, sind natürliche Bewegungen des Systems. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems werden sich also in endlicher Form darstellen lassen. **409**

Aufgabe. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems mit Hilfe der geradesten Entfernung desselben darzustellen. **410**

(410) Es sei wie früher S die geradeste Entfernung des Systems, gedacht als Funktion der freien Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ihrer Anfangs- und Endlage. Es sei t_0 die Zeit, zu welcher das System die Anfangslage, t_1 die Zeit, zu welcher es die Endlage durchläuft. Es ist dann $t_1 - t_0$ die Dauer des Übergangs, also

a)
$$v = \frac{S}{t_1 - t_0}$$

die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, also seine Energie:

b)
$$E = \frac{1}{2} m \frac{S^2}{(t_1 - t_0)^2} \quad ,$$

und seine Momente q_{ϱ_0} und q_{ϱ_1} zu den Zeiten t_0 und t_1:

c)
$$q_{\varrho_0} = m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0}$$
$$q_{\varrho_1} = m \frac{S}{t_1 - t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1} \quad .$$

Für die Gleichungen der geradesten Bahnen finden wir zwei Formen in den Gleichungen **224a** und **226a**. Multiplizieren wir dieselben mit $mS/(t_1 - t_0)$ oder, was nach **b)** dasselbe ist, mit $\sqrt{2mE}$, so erhalten wir die folgenden vier Sätze von je r Gleichungen:

d)
$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_1}}$$

e)
$$q_{\varrho_0} = -\frac{1}{2} \frac{m}{t_1 - t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_0}}$$

f)
$$q_{\varrho_1} = \quad \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}}$$

g)
$$q_{\varrho_0} = -\sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad .$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst und zwar in mehrfacher Weise.

Denn betrachten wir t_1 als die variabele Zeit, und also die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der mit dieser Zeit sich verändernden Lage, so bestimmen uns die r Gleichungen e) diese r Koordinaten als endliche Funktionen von t_1, und das gleiche leisten uns die Gleichungen g), wenn wir zu diesen noch die Beziehung zwischen E und t_1, also die Gleichung b) hinzunehmen. Die $2r$ Größen p_{ϱ_0} und q_{ϱ_0} spielen dabei die Rolle der $2r$ willkürlichen Konstanten. Bei der gleichen Betrachtungsweise geben uns nebenbei auch die Gleichungen d), oder f) und b), die Bewegungsgleichungen des Systems, und zwar nunmehr als Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die r Größen p_{ϱ_0} die Rolle der r willkürlichen Konstanten übernehmen.

Oder betrachten wir, was nicht minder erlaubt, die Zeit t_0 als die variabele Zeit, also die Lage 0 als die variabele Lage, so geben uns die Gleichungen d), oder auch f) und b), die Bewegungsgleichungen in endlicher Form, mit der Zeit t_0 als unabhängiger, den p_{ϱ_0} als abhängigen Variabelen und den p_{ϱ_1} und q_{ϱ_1} als $2r$ willkürlichen Konstanten. Zugleich geben uns dann nebenbei die Gleichungen e), oder auch g) und b), die Bewegungsgleichungen in der Gestalt von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die p_{ϱ_1} die Rolle von r willkürlichen Konstanten spielen.

Folgerung 1. Setzen wir 411

$$\sqrt{2Em}\,.\,S = V \quad , \tag{a}$$

und betrachten V als Funktion der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und von E, so lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems darstellen in der Form:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \tag{b}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \tag{c}$$

$$t_1 - t_0 = \quad \frac{\partial V}{\partial E} \quad . \tag{d}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410f** und **g**, und die Gleichung **d)** folgt aus Gleichung **a)** und **410b**.

412 **Anmerkung.** Die so eingeführte Funktion V ist HAMILTONS charakteristische Funktion des Systems; sie ist bei HAMILTON mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet. Eine solche Funktion besteht also nur für holonome Systeme. Ihrer mechanischen Bedeutung nach gibt die charakteristische Funktion den doppelten Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System mit gegebener Energie aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Energie und der Koordinaten der Anfangs- und der Endlage.

Denn es ist nach Gleichung **411a** und **410b**:

$$V = 2E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir in der rechten Seite die Dauer des Übergangs $t_1 - t_0$ als Funktion von E und den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} dargestellt denken.

413 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}} = E$$

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}} = E \quad .$$

Denn dieselben werden erhalten durch Multiplikation der Gleichungen **227** für die geradeste Entfernung mit $2mE$ und Beachtung der Gleichung **411a**.

414 **Folgerung 2.** Setzen wir

a) $$\frac{m S^2}{2(t_1 - t_0)} = P \quad ,$$

und betrachten P als Funktion der $p_{\varrho_0}, p_{\varrho_1}$ und von t_0 und t_1, so stellen die Gleichungen:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \qquad \text{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \qquad \text{c)}$$

die natürlichen Bewegungen des Systems dar. Die Energie E des Systems kann aus P unmittelbar abgeleitet werden mit Hilfe der Gleichungen:

$$E = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad . \qquad \text{d)}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410d** und **e**, und die Gleichungen **d)** folgen aus Gleichung **a)** und **410b**.

415 **Anmerkung.** Die jetzt eingeführte Funktion P ist die HAMILTONsche Prinzipalfunktion des Systems; sie ist bei HAMILTON selbst mit S bezeichnet. Nur für holonome Systeme besteht eine solche Funktion. Ihrer mechanischen Bedeutung nach gibt die Prinzipalfunktion den Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System in gegebener Zeit aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Zeit und der Anfangs- und Endwerte der Koordinaten.

Denn es ist nach Gleichungen **414a** und **410b**:

$$P = E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir uns in der rechten Seite E als Funktion der $p_{\varrho_1}, p_{\varrho_0}$ und der t_1 und t_0 dargestellt denken.

416 **Lehrsatz.** Die Prinzipalfunktion eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} = -\frac{\partial P}{\partial t_1}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} = \frac{\partial P}{\partial t_0}\ .$$

Denn dieselben werden erhalten, indem man die Gleichungen **227** multipliziert mit (**410b**)

$$\frac{mS^2}{2(t_1-t_0)^2}=E$$

und die Beziehungen **414a** und **d** beachtet.

417 **Anmerkung zu 411 bis 416.** Ebenso wie wir in **232** bis **236** von den Differentialgleichungen **227** ausgehend Funktionen betrachten konnten, welche der geradesten Entfernung verwandt waren und sie in analytischer Hinsicht vollkommen ersetzten, ohne doch eine gleich einfache geometrische Bedeutung wie sie zu haben, ebenso können wir von den Differentialgleichungen **413** und **416** ausgehend zu Funktionen gelangen, welche der charakteristischen Funktion und der Prinzipalfunktion verwandt sind und in analytischer Hinsicht gleiche Dienste leisten oder selbst Vorteile bieten, deren Bedeutung in physikalischer Hinsicht aber durch die mathematische Verwickelung mehr und mehr verdunkelt erscheint. Solche Funktionen würde man passend als Jacobische Prinzipalfunktionen und charakteristische Funktionen bezeichnen.

Es erhellt übrigens, daß auch schon in der charakteristischen Funktion und in der Prinzipalfunktion nur der einfache Sinn der geradesten Entfernung und auch dieser in leichter Verschleierung auftritt, so daß die Einführung jener Funktionen nebeneinander und neben der geradesten Entfernung nur eine geringe Bedeutung haben würde, wenn es sich stets, wie hier, um die Betrachtung vollständig bekannter freier Systeme handelte.

Dynamische Modelle.

Definition. Ein materielles System heißt dynamisches Modell eines zweiten Systems, wenn sich die Zusammenhänge des ersteren durch solche Koordinaten darstellen lassen, daß den Bedingungen genügt ist: 418

1. daß die Zahl der Koordinaten des ersten Systems gleich der Zahl der Koordinaten des andern Systems ist,
2. daß nach passender Zuordnung der Koordinaten für beide Systeme die gleichen Bedingungsgleichungen bestehen,
3. daß der Ausdruck für die Größe einer Verrückung in beiden Systemen bei jener Zuordnung der Koordinaten übereinstimme.

Je zwei einander zugeordnete Koordinaten beider Systeme heißen auch korrespondierende. Korrespondierende Lagen, Verrückungen, usw. heißen solche Lagen, Verrückungen, usw. beider Systeme, welchen gleiche Werte der korrespondierenden Koordinaten und ihrer Änderungen zugehören.

Folgerung 1. Ist ein System Modell eines zweiten Systems, so ist auch umgekehrt das zweite System Modell des ersten. Sind zwei Systeme Modelle eines dritten, so sind sie auch Modelle voneinander. Das Modell des Modells eines Systems ist auch Modell des ursprünglichen Systems. 419

Alle Systeme, welche Modelle voneinander sind, heißen auch dynamisch ähnlich.

Folgerung 2. Die Eigenschaft eines Systems, Modell eines andern zu sein, ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten des einen oder des andern Systems, obwohl sie erst bei besonderer Wahl der Koordinaten unmittelbar hervortritt. 420

Folgerung 3. Ein System ist noch nicht vollständig bestimmt dadurch, daß es Modell eines gegebenen Systems ist. Unendlich viele, physikalisch gänzlich verschiedene Systeme können Modelle eines und desselben Systems sein. Ein System ist Modell unendlich vieler, gänzlich verschiedener Systeme. 421

Denn die Koordinaten der Massen der beiden Systeme, welche Modelle voneinander sind, können der Zahl nach gänzlich verschieden und gänzlich verschiedene Funktionen der korrespondierenden Koordinaten sein.

422 **Folgerung 4.** Modelle holonomer Systeme sind wieder holonome Systeme. Modelle nicht holonomer Systeme sind wieder nicht holonome Systeme.

423 **Anmerkung.** Damit ein holonomes System Modell eines andern sei, genügt es, daß sich solche freie Koordinaten beider angeben lassen, in welchen der Ausdruck für die Größe der Verrückung beider Systeme der gleiche wird.

424 **Lehrsatz.** Haben zwei Modelle voneinander korrespondierende Zustände zu einer bestimmten Zeit, so haben sie korrespondierende Zustände zu allen Zeiten.

Denn durch die Bedingungsgleichungen eines Systems, den Ausdruck für die Größe der Verrückung (**164**) und durch die Anfangswerte der Koordinaten und ihrer Veränderung (**332**) ist der Verlauf dieser Koordinaten für alle Zeiten bestimmt, welche Funktion dieser Koordinaten auch immer die Lage der Massen des Systems ist.

425 **Folgerung 1.** Um den Ablauf der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems vorauszusehen, genügt die Kenntnis eines Modells jenes Systems. Das Modell kann unter Umständen viel einfacher sein, als das System, dessen Bewegungen es darstellt.

426 **Folgerung 2.** Sind von einer Anzahl materieller Systeme, welche Modelle voneinander sind, dieselben Größen korrespondierende Koordinaten, und sind nur diese korrespondierenden Koordinaten der Beobachtung zugänglich, so sind alle diese Systeme in Hinsicht der beschränkten Beobachtung nicht voneinander verschieden, sondern erscheinen als gleiche Systeme, wie verschieden auch in Wahrheit in ihnen Zahl und Zusammenhang der materiellen Punkte sein möge.

Es ist daher auch unmöglich, allein aus der Beobachtung der natürlichen Bewegungen eines freien materiellen Systems, d. h. ohne direkte Bestimmung seiner Massen (**300**), den Zusammenhang des Systems weiter zu erkennen, als soweit, daß man ein Modell des Systems angeben könne.

Anmerkung 1. Lassen wir allgemein und ohne Einschränkung zu, daß außer den unmittelbar, d. h. den mit der Wage bestimmbaren Massen noch andere, hypothetische Massen (301) in den Systemen der Natur sich finden können, so ist es überhaupt unmöglich, in der Erkenntnis des Zusammenhanges natürlicher Systeme weiter zu gelangen, als soweit, daß man Modelle der wirklichen Systeme angeben könne. Wir können dann in der Tat keine Kenntnis haben, ob die Systeme, welche wir in der Mechanik betrachten, mit den wirklichen Systemen der Natur, welche wir zu betrachten meinen, in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein darin, daß die einen Modelle der anderen sind. 427

Anmerkung 2. Das Verhältnis eines dynamischen Modells zu dem System, als dessen Modell es betrachtet wird, ist dasselbe, wie das Verhältnis der Bilder, welche sich unser Geist von den Dingen bildet, zu diesen Dingen. Betrachten wir nämlich den Zustand des Modells als eine Abbildung des Zustandes des Systems, so sind die Folgen der Abbildung, welche nach den Gesetzen dieser Abbildung eintreten müssen, zugleich die Abbildung der Folgen, welche sich an dem ursprünglichen Gegenstand nach den Gesetzen dieses ursprünglichen Gegenstandes entwickeln müssen. Die Übereinstimmung zwischen Geist und Natur läßt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modelle voneinander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, daß der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten. 428

Abschnitt 4. Bewegung der unfreien Systeme.

Vorbemerkung 1. Nach unserer Auffassung ist jedes unfreie System Teil eines größeren freien Systems; unfreie Systeme, für welche diese Annahme nicht zuträfe, kennen wir nicht. Soll aber jenes Verhältnis besonders hervorgehoben 429