

# **Badische Landesbibliothek Karlsruhe**

**Digitale Sammlung der Badischen Landesbibliothek Karlsruhe**

## **Gesammelte Werke**

Die Prinzipien der Mechanik

**Hertz, Heinrich**

**Leipzig, 1910**

Allgemeine Eigenschaften der Bewegung

[urn:nbn:de:bsz:31-288857](https://nbn-resolving.org/urn:nbn:de:bsz:31-288857)

reichend genaue Untersuchung, daß sie nur angenäherte Gültigkeit haben und daher nur abgeleitete Zusammenhänge sein können. Die letzten, ursprünglichen Zusammenhänge sind wir gezwungen in der Welt der Atome zu suchen, und sie sind uns unbekannt. Aber auch wenn sie uns bekannt wären, müßten wir auf ihre Benutzung zu praktischen Zwecken verzichten und verfahren, wie wir verfahren. Denn die wirkliche Beherrschung jedes Problems erfordert stets die Beschränkung der Betrachtung auf eine äußerst kleine Zahl von Variablen, während das Zurückgehen auf die Zusammenhänge der Atome die Einführung einer unermesslichen Zahl von Veränderlichen nötig machen würde.

Daß wir aber das Grundgesetz so anwenden dürfen, wie wir es anwenden, ist nicht als eine neue Erfahrung neben dem Grundgesetz anzusehen, sondern ist, wie wir sahen, eine notwendige Folge eben dieses Gesetzes selbst.

### Abschnitt 3. Bewegung der freien Systeme.

#### Allgemeine Eigenschaften der Bewegung.

##### I. Bestimmtheit der Bewegung.

331 **Lehrsatz.** Eine natürliche Bewegung eines freien Systems ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Lage und der Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit.

Denn durch die Lage und die Richtung der Geschwindigkeit ist die Bahn des Systems eindeutig bestimmt (161); die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn ist durch die Größe der Geschwindigkeit zur Anfangszeit gegeben.

332 **Folgerung 1.** Durch den gegenwärtigen Zustand (261) eines freien Systems sind seine zukünftigen Zustände und seine vergangenen Zustände zu allen Zeiten eindeutig bestimmt.

333 **Folgerung 2.** Könnte man in irgend einer Lage die Geschwindigkeit eines Systems umkehren (was niemals gegen die

Bedingungsgleichungen des Systems verstoßen würde), so würde das System die Lagen seiner vorherigen Bewegung in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

**Bemerkung 1.** In einem freien holonomen System (123) gibt es stets eine natürliche Bewegung, welche das System in gegebener Zeit aus einer willkürlich gegebenen Anfangs- in eine willkürlich gegebene Endlage überführt. 334

Denn es ist stets eine natürliche Bahn zwischen beiden Lagen möglich (192); in dieser Bahn ist jede Geschwindigkeit zulässig, also auch eine solche, welche das System in der gegebenen Zeit die gegebene Strecke durchlaufen läßt.

**Anmerkung.** Die vorige Bemerkung bleibt richtig, wenn an Stelle der Zeit des Überganges die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder auch die Energie des Systems gesetzt wird. 335

**Bemerkung 2.** Ein freies System, welches kein holonomes ist, kann nicht aus jeder möglichen Anfangslage in jede mögliche Endlage durch eine natürliche Bewegung übergeführt werden (162). 336

**Lehrsatz.** Eine natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems ist bestimmt durch die Angabe zweier Lagen, in welchen sich das System zu zwei bestimmten Zeiten finden soll. 337

Denn durch diese Angabe ist die Bahn des Systems bestimmt und die Geschwindigkeit in dieser Bahn.

**Anmerkung 1.** Die Bestimmung einer natürlichen Bewegung durch zwei Lagen, zwischen welchen sie stattfindet, ist im allgemeinen eine mehrdeutige; sie ist eine eindeutige, sobald die Entfernung der beiden Lagen ein gewisses endliches Maß nicht überschreitet und die Länge der beschriebenen Bahn von der Ordnung dieser Entfernung sein soll (vgl. 167, 172, 190 u. 176). 338

**Anmerkung 2.** Eine natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems ist, abgesehen von dem absoluten Wert 339

der Zeit, auch bestimmt durch zwei Lagen des Systems und entweder die Zeitdauer des Überganges oder die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder die Energie des Systems.

## 2. Erhaltung der Energie.

340 **Lehrsatz.** Die Energie eines in beliebiger Bewegung begriffenen freien Systems ändert sich nicht mit der Zeit.

Denn die Energie setzt sich zusammen (282) aus der Masse des Systems, welche unveränderlich ist, und der Geschwindigkeit längs der Bahn, welche ebenfalls unveränderlich ist.

341 **Anmerkung 1.** Von den drei Teilaussagen, in welche wir das Grundgesetz zerlegten (323), bedurften wir zum Beweise des Satzes nur die zweite und dritte. Wir können auch die dritte entbehrlich machen, und den Satz von einer bestimmten Art der Zeitmessung unabhängig aussagen, wenn wir ihm die Form geben:

Das Verhältnis der Energieen irgend zweier in beliebiger Bewegung begriffener freier Systeme ändert sich nicht mit der Zeit.

342 **Anmerkung 2.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Grundgesetzes. Umgekehrt folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Energie die zweite Teilaussage (323) jenes Gesetzes, aber nicht die erste, also nicht das ganze Gesetz. Es wären natürliche Systeme denkbar, für welche der Satz von der Erhaltung der Energie gälte, und welche sich dennoch nicht in geradesten Bahnen bewegten. Es wäre zum Beispiel denkbar, daß der Satz von der Erhaltung der Energie Gültigkeit hätte auch für belebte Systeme, und daß dieselben dennoch sich unserer Mechanik entzögen. Umgekehrt ließen sich auch natürliche Systeme denken, welche sich nur in geradesten Bahnen bewegten, und für welche dennoch der Satz von der Erhaltung der Energie keine Gültigkeit hätte.

343 **Anmerkung 3.** Es ist in neuerer Zeit mehrfach die Ansicht vorgetragen worden, daß die Energie bewegter Systeme an einen bestimmten Ort gebunden sei und sich von Ort zu

Ort fortpflanze. Man hat deshalb die Energie, wie in Hinsicht der Unzerstörbarkeit, so auch in dieser Hinsicht mit der Materie in Vergleich gestellt. Diese Auffassung der Energie weicht offenbar sehr weit ab von der Auffassung der hier vortragenen Mechanik. Mit dem gleichen Rechte, aber nicht mit größerem Rechte, kann man sagen: die Energie eines bewegten Systems sei am Orte des Systems vorhanden, mit welchem man sagen kann: die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers sei an den Ort desselben gebunden. Diese letztere Ausdrucksweise aber ist mit Recht ungebräuchlich.

### 3. Kleinste Beschleunigung.

**Lehrsatz.** Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, 344 daß die Größe seiner Beschleunigung in jedem Augenblick die kleinste ist, welche mit der augenblicklichen Lage, der augenblicklichen Geschwindigkeit und dem Zusammenhange des Systems sich verträgt.

Denn das Quadrat der Größe der Beschleunigung ist nach 280 und 281 gleich

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2 .$$

Da nun für die natürliche Bewegung  $\dot{v} = 0$  ist,  $v$  einen durch die augenblickliche Geschwindigkeit gegebenen Wert hat und  $c$  den kleinsten Wert hat, welcher mit der gegebenen Richtung der Bewegung und dem Zusammenhange des Systems verträglich ist, so nimmt der Ausdruck selbst den kleinsten, mit den genannten Nebenumständen verträglichen Wert an.

**Anmerkung 1.** Die in dem vorigen Lehrsatz ausgesagte 345 Eigenschaft der natürlichen Bewegung bestimmt diese Bewegung eindeutig, und es kann daher der Lehrsatz das Grundgesetz vollständig vertreten.

Denn soll der Ausdruck

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2$$

ein Minimum werden, so muß zunächst  $\dot{v} = 0$  sein, also das

System seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, zweitens muß entweder  $v=0$  sein — alsdann ruht das System — oder  $c$  muß den kleinsten, bei der Richtung der Bahn möglichen Wert haben, — dann ist die Bahn eine geradeste.

- 346 **Anmerkung 2.** Der Lehrsatz 344 würde, als Grundgesetz vorangestellt, vor der benutzten Form sogar den Vorzug haben, daß er das Gesetz in eine einzige unteilbare Aussage zusammenfaßte, nicht nur äußerlich in einen Satz. Die benutzte Form hat aber den Vorzug, daß sie ihre Bedeutung klarer und durchsichtiger erkennen läßt.

#### 4. Kürzeste Bahn.

- 347 **Lehrsatz.** Die natürliche Bahn eines freien holonomen Systems zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten Lagen ist kürzer als irgend eine andere mögliche Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn in einem holonomen System ist eine geradeste Bahn zwischen hinreichend benachbarten Lagen zugleich die kürzeste (190, 176).

- 348 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nicht mehr behauptet werden, daß die natürliche Bahn kürzer sei als alle anderen Bahnen, nicht einmal, daß sie kürzer sei als alle benachbarten Bahnen; es gilt aber immer noch die in dem vorigen Satz enthaltene Behauptung, daß die Variation der Länge der Bahn verschwinde beim Übergang zu irgend einer benachbarten möglichen Bahn (190, 171).

- 349 **Anmerkung 2.** Der vorige Lehrsatz entspricht dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form, welche JACOBI diesem Prinzip gegeben hat. Denn nennen wir für den Augenblick  $m$ , die Masse,  $ds$ , die Weglänge des  $v$ ten der  $n$  Punkte des Systems in einem bestimmten Zeitelement, so sagt der Lehrsatz aus, daß die Variation des Integrals

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_1^n m_v ds_v^2}$$

verschwinde bei der natürlichen Bewegung des Systems, und dies ist die JACOBISCHE Form jenes Prinzips.

**Anmerkung 3.** Um das Verhältnis zwischen dem Lehr- 350  
satz 347 und dem JACOBISCHEN Satz genauer festzustellen  
müssen wir aussagen: Nach der gewöhnlichen Auffassung der  
Mechanik enthält der Lehrsatz einen besonderen Fall des  
JACOBISCHEN Satzes, den Fall nämlich, daß keine Kräfte  
wirken.

Nach unserer Auffassung sind umgekehrt die Voraus-  
setzungen des vollständigen JACOBISCHEN Satzes als die  
engeren zu bezeichnen, und der JACOBISCHE Satz ist nach  
dieser Auffassung eine Anpassung des Lehrsatzes an beson-  
dere Verhältnisse und seine Umformung auf die Voraussetzungen  
derselben.

**Anmerkung 4.** Der Lehrsatz 347 hat den Satz von der 351  
Erhaltung der Energie weder zur Voraussetzung, noch zur  
Folge, sondern ist von demselben ganz unabhängig. Zu-  
sammen mit dem Satz von der Energie vermag er das Grund-  
gesetz vollständig zu ersetzen, jedoch nur für holonome  
Systeme. Angewandt auf andere Systeme würde der Satz  
allerdings auch bestimmte Bewegungen ergeben, aber diese Be-  
wegungen würden dem Grundgesetz widersprechen (194), also  
falsche Lösungen der gestellten mechanischen Probleme sein.

## 5. Kürzeste Zeit.

**Lehrsatz.** Die natürliche Bewegung eines freien holono- 352  
men Systems führt das System in kürzerer Zeit aus einer  
gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte End-  
lage, als es durch irgend eine andere mögliche, mit dem glei-  
chen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung ge-  
schehen könnte.

Denn ist für alle verglichenen Bewegungen die Energie, also die Bahngeschwindigkeit die gleiche, so ist die Dauer des Übergangs der Bahnlänge proportional, also die kleinste für die kürzeste Bahn, also für die natürliche Bahn.

- 353 **Anmerkung.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird die Zeit des Übergangs nicht mehr notwendig ein Minimum, aber sie behält immer noch die Eigenschaft, gleich zu sein für die natürliche Bahn und alle ihr unendlich benachbarten möglichen Bahnen (vergl. 348).
- 354 **Folgerung 1.** Für die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems zwischen gegebenen, hinreichend benachbarten Endlagen ist das Zeitintegral der Energie kleiner, als für irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung.  
Denn es ist jenes Zeitintegral gleich dem Produkt aus dem gegebenen konstanten Wert der Energie und der Zeitdauer des Übergangs.
- 355 **Anmerkung 1.** Der Lehrsatz 352, insbesondere in der Form der Folgerung 354, entspricht dem MAUPERTUISschen Prinzip der kleinsten Wirkung. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzip genauer feststellen, so müssen wir uns in derselben Weise ausdrücken, wie dies in 350 geschehen ist.
- 356 **Anmerkung 2.** Die Folgerung 354 und auch der Lehrsatz 352 setzen für die miteinander verglichenen Bewegungen die Konstanz der Energie mit der Zeit voraus. Zusammen mit der Voraussetzung, daß die natürliche Bewegung sich überhaupt unter den verglichenen finde, genügen sie also zur Bestimmung derselben und können das Grundgesetz vertreten, jedoch nur für holonome Systeme. Ihre Voraussetzungen auf andere Systeme angewandt, würden zu falschen mechanischen Lösungen führen.
- 357 **Folgerung 2.** Ein freies holonomes System wird aus seiner Anfangslage in gegebener Zeit auf größere geradeste Entfernung fortgetragen durch seine natürliche Bewegung, als durch irgend eine andere mögliche Bewegung, welche mit dem

gleichen konstanten Wert der Energie erfolgt, wie die natürliche Bewegung.

## 6. Kleinstes Zeitintegral der Energie.

**Lehrsatz.** Das Zeitintegral der Energie ist beim Übergang eines freien holonomen Systems aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführt. 358

Vergleichen wir nämlich zunächst nur Bewegungen in einer und derselben Bahn von der Länge  $S$ , so erreicht unter diesen das Zeitintegral der Energie sein Minimum für diejenige Bewegung, für welche die Bahngeschwindigkeit  $v$  konstant ist. Denn da die Summe der Größen  $v dt$  den gegebenen Wert  $S$  hat, so wird die Summe der Größen  $v^2 dt$  dann und nur dann ihren kleinsten Wert erreichen, wenn alle  $v$  gleich sind. Ist aber die Bahngeschwindigkeit konstant, so ist das Zeitintegral der Energie gleich  $\frac{1}{2}mS^2/T$ , wenn  $T$  die Dauer des Übergangs ist. Da  $T$  gegeben ist, so verhält sich für verschiedene Bahnen des Systems das Zeitintegral der Energie wie das Quadrat der Bahnlänge, erstere Größe hat also wie die letztere ihren Minimalwert für die natürliche Bahn.

**Anmerkung 1.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird das Zeitintegral der Energie nicht mehr notwendig ein Minimum, aber seine Variation verschwindet immer noch beim Übergang zu einer anderen der in Betracht gezogenen Bewegungen (vgl. 348). 359

**Anmerkung 2.** Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem HAMILTONschen Prinzip. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzip genau feststellen, so müssen wir uns derselben Ausdrucksweise bedienen wie in 350. 360

**Anmerkung 3.** Der Lehrsatz 358 und die Folgerung 354 stimmen darin überein, daß sie unter gewissen Klassen möglicher Bewegungen die natürliche Bewegung auszeichnen durch 361

ein und dasselbe Merkmal, nämlich den Minimalwert des Zeitintegrals der Energie; sie unterscheiden sich aber wesentlich voneinander dadurch, daß sie ganz verschiedene Klassen möglicher Bewegungen in Betracht ziehen.

- 362 **Anmerkung 4.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Lehrsatzes 358, und dieser Lehrsatz kann daher, als Prinzip vorangestellt, als vollständiger Ersatz für das Grundgesetz dienen, jedoch nur in der Anwendung desselben auf holonome Systeme. Läßt man die Beschränkung auf holonome Systeme fallen, so ergibt der Satz zwar auch bestimmte Bewegungen der materiellen Systeme, aber diese widersprechen im allgemeinen dem Grundgesetz und sind also, mechanisch betrachtet, falsche Lösungen der gestellten Probleme.
- 363 **Rückblick auf 347 bis 362.** Benutzen wir die in den Lehrsätzen 347, 352, 354, 358 ausgesprochenen Eigenschaften der natürlichen Bewegung als Prinzipien zur vollständigen oder teilweisen Bestimmung dieser Bewegung, so machen wir die gegenwärtig eintretenden Änderungen im Zustand des Systems abhängig von solchen Eigentümlichkeiten der Bewegung, welche erst in der Zukunft hervortreten können, und welche oft in menschlichen Verrichtungen als erstrebenswerte Ziele erscheinen. Dieser Umstand hat bisweilen Physiker und Philosophen dazu geführt, in den Gesetzen der Mechanik den Ausdruck einer bewußten Absicht auf zukünftige Ziele, verbunden mit Voraussicht der zweckmäßigen Mittel, zu erblicken. Eine solche Auffassung ist aber weder notwendig, noch auch nur zulässig.
- 364 Daß nämlich eine solche Auffassung jener Prinzipien nicht notwendig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht anzudeuten scheinen, als denotwendige Folgen eines Gesetzes erkannt wurden, in welchem man den Ausdruck einer Voraussicht in die Zukunft nicht findet.
- 365 Daß jene Auffassung der Prinzipien aber sogar unzulässig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht auf zukünftigen Erfolg anzudeuten scheinen, nicht bei allen natürlichen Bewegungen sich

finden. Hätte die Natur wirklich die Absicht, einen kürzesten Weg, einen kleinsten Aufwand an Energie, eine kürzeste Zeit zu erzielen, so wäre es unmöglich zu verstehen, wie es Systeme geben könnte, in welchen diese Absicht, obwohl erreichbar, dennoch der Natur regelmäßig fehlschläge.

Will man darin, daß ein System unter allen möglichen Bahnelementen beständig ein geradestes auswählt, den Ausdruck eines bestimmten Willens erkennen, so steht dies frei; man sieht alsdann eben schon darin den Ausdruck eines bestimmten Willens, daß ein natürliches System überhaupt unter allen möglichen Bewegungen keine willkürliche, sondern stets eine durch besondere Merkmale bezeichnete, im voraus bestimmbare Bewegung auswählt. 366

### Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegung.

**Erläuterung.** Unter den Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems verstehen wir einen Satz von Differentialgleichungen, in welchen die Zeit die unabhängige Variable, die Koordinaten des Systems die abhängigen Variablen sind, und welche zusammen mit einer Anfangslage und einer Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung des Systems eindeutig bestimmen (331). 367

**Aufgabe 1.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen. 368

In 155 d haben wir die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen des Systems in den rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. In diese Gleichungen führen wir anstatt der Bahnlänge die Zeit  $t$  als unabhängige Variable ein. Nach dem Grundgesetz ist  $ds/dt = v$  von  $t$ , also auch von  $s$  unabhängig, und wir haben:

$$\dot{x}_v = x'_v v \quad , \quad \ddot{x}_v = x''_v v^2 \quad .$$