Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Zweites Buch. Mechanik der materiellen Systeme

urn:nbn:de:bsz:31-288857

ZWEITES BUCH.

MECHANIK DER MATERIELLEN SYSTEME.

Vorbemerkung. In diesem zweiten Buch werden wir unter Zeiten, Räumen, Massen Zeichen für Gegenstände der äußeren Erfahrung verstehen, deren Eigenschaften übrigens den Eigenschaften nicht widersprechen, welche wir vorher den gleichbenannten Größen als Formen unserer inneren Anschauung oder durch Definition beigelegt hatten. Unsere Aussagen über die Beziehungen zwischen Zeiten, Räumen und Massen sollen daher nicht mehr allein den Ansprüchen unseres Geistes genügen, sondern sie sollen zugleich auch möglichen, insbesondere zukünftigen Erfahrungen entsprechen. Diese Aussagen stützen sich daher auch nicht mehr allein auf die Gesetze unserer Anschauung und unseres Denkens, sondern außerdem auf vorangegangene Erfahrung. Den Anteil der letzteren aber, soweit er nicht schon in den Grundbegriffen enthalten ist, werden wir zusammenfassen in eine einzige allgemeine Aussage, welche wir als Grundgesetz voranstellen. Eine spätere, nochmalige Berufung auf die Erfahrung findet dann nicht mehr statt. Die Frage nach der Richtigkeit unserer Aussagen fällt also zusammen mit der Frage nach der Richtigkeit oder Allgemeingültigkeit jener einzigen Aussage. 296

Abschnitt 1. Zeit, Raum, Masse.

Zeit, Raum und Masse schlechthin sind unserer Erfahrung in keinem Sinne zugänglich, sondern nur bestimmte Zeiten, bestimmte räumliche Größen, bestimmte Massen. Jede be- 297 stimmte Zeit, räumliche Größe oder Masse aber kann das Ergebnis einer bestimmten Erfahrung bilden. Wir machen nämlich jene Begriffe zu Zeichen für Gegenstände der äußeren Erfahrung, indem wir festsetzen, durch welche sinnlichen Wahrnehmungen wir bestimmte Zeiten, räumliche Größen und Massen festlegen wollen. Die Beziehungen, welche wir aussagen als bestehend zwischen Zeiten, Räumen und Massen sind alsdann in Zukunft Beziehungen zwischen eben diesen sinnlichen Wahrnehmungen.

298 **Festsetzung 1.** Die Dauer der Zeit bestimmen wir mit Hilfe des Chronometers nach der Zahl der Schläge seines Pendels. Die Einheit der Dauer setzen wir durch willkürliche Übereinkunft fest. Als Merkmal eines bestimmten Augenblicks dient uns sein zeitlicher Abstand von einem durch weitere willkürliche Übereinkunft festgesetzten Augenblick.

Diese Festsetzung enthält erfahrungsgemäß nichts, was uns hinderte, die Zeit als stets unabhängige, niemals abhängige, auch stetig von einem Wert zum andern übergehende Variabele zu benutzen. Die Festsetzung ist auch bestimmt und eindeutig, abgesehen von solchen Unsicherheiten, welche es uns überhaupt nicht gelingt aus unserer Erfahrung fern zu halten, weder aus der früheren, noch aus der zukünftigen.

299 **Festsetzung 2.** Die Verhältnisse des Raumes bestimmen wir nach den Regeln der praktischen Geometrie mit Hilfe des Maßstabes. Die Einheit der Länge setzen wir fest durch willkürliche Übereinkunft. Als Merkmal eines bestimmten Ortes im Raume dient uns seine relative Lage gegen ein in Hinsicht des entfernteren Fixsternhimmels ruhendes, im übrigen durch willkürliche Übereinkunft festgesetztes Koordinatensystem.

Bei Anwendung aller Aussagen der Euklidschen Geometrie auf die so bestimmten räumlichen Verhältnisse stoßen wir erfahrungsmäßig auf keine Widersprüche. Unsere Festsetzung ist auch bestimmt und eindeutig, abgesehen von Unsicherheiten, welche es uns nicht gelingt aus unserer wirklichen Erfahrung fernzuhalten, weder aus der früheren, noch aus der zukünftigen.

300 **Festsetzung 3.** Die mit den greifbaren Körpern bewegten Massen bestimmen wir mit Hilfe der Wage. Als Einheit der

Masse dient uns die Masse eines durch willkürliche Übereinkunft festgesetzten Körpers.

Die nach dieser Festsetzung bestimmte Masse der greifbaren Körper besitzt die Eigenschaften, welche wir der begrifflich definierten Masse beilegten. Sie kann nämlich in beliebig viele gleiche Massenteilchen geteilt gedacht werden, deren jedes unzerstörbar und unveränderlich ist und als Merkmal dienen kann, um einen Punkt des Raumes zu einer Zeit einem Punkt des Raumes zu jeder anderen Zeit eindeutig und bestimmt zuzuordnen (3). Die Festsetzung ist auch in Hinsicht der greifbaren Körper bestimmt und eindeutig, abgesehen von den Unsicherheiten, welche es überhaupt nicht gelingt aus unserer wirklichen Erfahrung fernzuhalten, weder aus der früheren, noch aus der zukünftigen.

Zusatz zu Festsetzung 3. Übrigens lassen wir die Ver- **301**
mutung zu, daß es neben den greifbaren Körpern auch andere Körper gebe, welche wir nicht ergreifen, nicht bewegen, nicht auf die Wage legen können, und auf welche daher die Festsetzung 3 keine Anwendung finden kann. Die Massen solcher Körper können nur durch Hypothese bestimmt werden.

Was diese hypothetisch anzunehmenden Massen anlangt, so steht es in unserer Macht, ihnen keine Eigenschaften durch die Hypothese beizulegen, welche den Eigenschaften der begrifflich definierten Masse widersprächen.

Anmerkung 1. Die vorstehenden drei Festsetzungen sind **302**
nicht neue Definitionen für die schon vorher fest definierten Größen Zeit, Raum und Masse. Vielmehr stellen sie die Abbildungsgesetze dar, durch welche wir äußere Erfahrung, d. h. konkrete sinnliche Empfindungen und Wahrnehmungen übertragen in die Zeichensprache unseres inneren Bildes (vergleiche die Einleitung), und durch welche wir rückwärts die denknotwendigen Folgen dieses Bildes wieder übersetzen in die Gestalt möglicher sinnlicher Empfindungen und Wahrnehmungen. Erst durch diese drei Festsetzungen werden also die Zeichen Zeit, Raum und Masse zu Teilen unserer Scheinbilder der äußeren Gegenstände. Erst durch diese drei Festsetzungen auch werden sie weitergehenden Ansprüchen unterworfen, als der Denknotwendigkeit unseres Geistes.

303 **Anmerkung 2.** Die Unbestimmtheiten, welche unsere Festsetzungen enthalten, und welche wir in denselben anerkannten, sind also nicht Unbestimmtheiten unserer Bilder, auch nicht unserer Abbildungsgesetze, sondern es sind Unbestimmtheiten der abzubildenden äußeren Erfahrung selbst. Wir wollen damit sagen, daß wir durch tatsächliche Bestimmung mit Hilfe unserer Sinne doch keine Zeit genauer festlegen können, als sie sich messen läßt mit Hilfe der besten Chronometer, keine Lage genauer als sie sich beziehen läßt auf ein mit dem entfernteren Fixsternhimmel ruhendes Koordinatensystem, keine Masse genauer, als die besten Wagen sie uns liefern.

304 **Anmerkung 3.** Es ist gleichwohl anscheinend die Frage berechtigt, ob durch unsere drei Festsetzungen wahre oder absolute Maße der Zeit, des Raumes und der Masse gegeben seien, und diese Frage ist nach der Wahrscheinlichkeit zu verneinen, da unsere Festsetzungen offenbar Zufälligkeiten und Willkür enthalten. In Wahrheit aber fällt diese Frage aus unserer Betrachtung heraus und berührt ihre Richtigkeit nicht, selbst wenn wir der Frage einen deutlichen Sinn beilegen und sie verneinen wollen. Es genügt, daß unsere Festsetzungen solche Maße bestimmen, in welchen wir frühere und zukünftige Erfahrungen eindeutig bestimmt aussprechen und mitteilen können. Würden wir andere Maße festsetzen, so würde sich die Form unserer Aussagen entsprechend ändern, in solcher Weise aber, daß die ausgesagten Erfahrungen, die vergangenen und die zukünftigen, dieselben blieben.

Materielles System.

305 **Erklärung.** Unter einem materiellen System ist fortan ein System von Massen der Erfahrung verstanden, dessen Eigenschaften den Eigenschaften der begrifflich definierten materiellen Systeme nicht widersprechen. In einem natürlichen materiellen Systeme sind also gewisse Lagen und Verrückungen möglich, andere unmöglich, und es genügt die Gesamtheit der möglichen Lagen und Verrückungen den Be-

dingungen der Stetigkeit (121). In einem natürlichen freien Systeme sind die Zusammenhänge unabhängig von der Lage des Systems gegen alle ihm nicht angehörenden Massen, und unabhängig von der Zeit (122).

Bemerkung dazu. Erfahrungsgemäß entspricht den so 306
definierten Begriffen auch ein wirklicher Inhalt.

Erstens nämlich lehrt uns die Erfahrung, daß es Zusammenhänge und zwar stetige Zusammenhänge zwischen den Massen der Natur gibt. Es gibt also materielle Systeme im Sinne von **305**. Wir dürfen sogar behaupten, daß andere als stetige Zusammenhänge in der Natur nicht gefunden werden, und daß also jedes natürliche System materieller Punkte zugleich ein materielles System sei.

Zweitens lehrt uns die Erfahrung, daß die Zusammenhänge eines materiellen Systems unabhängig sein können von seiner Lage gegen andere Systeme und von seiner absoluten Lage überhaupt. Wir dürfen sogar behaupten, daß diese Unabhängigkeit stets eintritt, sobald ein materielles System von allen anderen Systemen räumlich hinreichend entfernt wird. Es gibt also Systeme, welche nur innere Zusammenhänge haben, und wir besitzen auch ein allgemeines Mittel, solche Systeme zu erkennen und herzustellen.

Endlich lehrt uns die Erfahrung drittens, daß die absolute Zeit ohne Einfluß auf die Vorgänge in natürlichen Systemen ist, welche nur inneren Zusammenhängen unterliegen. Jedes derartige natürliche System ist daher auch nur gesetzmäßigen Zusammenhängen unterworfen und ist daher ein freies System. Es gibt also auch freie Systeme im Sinne von **305**, und wir können freie Systeme herstellen und als solche erkennen unabhängig von den Aussagen, welche wir weiter über freie Systeme vorzutragen haben werden.

Anmerkung. Die gesetzmäßigen Zusammenhänge der 307
freien Systeme bilden die unabhängig von der Zeit bestehenden Eigenschaften derselben. Es fällt der experimentellen Physik die Aufgabe zu, aus der unendlichen Erscheinungswelt solche endliche Gruppen von Massen herauszulösen, welche als freie Systeme selbständig bestehen können, und aus den

in der Zeit und in Verbindung mit anderen Systemen verlaufenden Erscheinungen derselben ihre außerzeitlichen Eigenschaften abzuleiten.

Abschnitt 2. Das Grundgesetz.

308 Wir betrachten es als die Aufgabe der Mechanik, aus den von der Zeit unabhängigen Eigenschaften materieller Systeme die in der Zeit verlaufenden Erscheinungen derselben und ihre von der Zeit abhängigen Eigenschaften abzuleiten. Zur Lösung dieser Aufgabe stellen wir der Mechanik das folgende und nur das folgende, der Erfahrung entnommene Grundgesetz zur Verfügung:

309 **Grundgesetz.** Jedes freie System beharrt in seinem Zustande der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geradesten Bahn.

Systema omne liberum perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directissimam.

Bemerkungen dazu.

310 **1.** Das Grundgesetz enthält nach dem Wortlaut nur Aussagen, welche sich auf freie Systeme beziehen. Da aber jeder Teil eines freien Systems ein unfreies System ist, so lassen sich aus dem Grundgesetz auch Folgerungen ableiten, welche sich auf unfreie Systeme beziehen.

311 **2.** Die Gesamtheit der Folgerungen, welche aus dem Grundgesetz in Hinsicht freier Systeme und ihrer unfreien Teile abgeleitet werden können, bildet den Inhalt der Mechanik. Andere Ursachen der Bewegung, als welche aus dem Grundgesetz entspringen, kennt unsere Mechanik nicht. Die Kenntnis des Grundgesetzes ist nach unserer Auffassung desselben nicht allein notwendig zur Lösung der Aufgabe der Mechanik, son-

dern auch hinreichend zu diesem Zwecke, und dies ist ein wesentlicher Teil unserer Behauptung.

3. (**Definition.**) Jede Bewegung eines freien materiellen Systems oder seiner Teile, welche im Einklange mit dem Grundgesetz erfolgt, nennen wir eine natürliche Bewegung des Systems im Gegensatz zu den denkbaren und den möglichen Bewegungen desselben (**257**, **258**). 312

Die Mechanik handelt also von den natürlichen Bewegungen der freien materiellen Systeme und ihrer Teile.

4. Wir betrachten eine Erscheinung der Körperwelt als mechanisch und damit als physikalisch erklärt, wenn wir sie erkannt haben als denknotwendige Folge des Grundgesetzes und der von der Zeit unabhängigen Eigenschaften materieller Systeme. 313

5. Die vollständige Erklärung der Erscheinungen der Körperwelt würde also erfordern: 1. ihre mechanische oder physikalische Erklärung; 2. eine Erklärung des Grundgesetzes; 3. die Erklärung der außerzeitlichen Eigenschaften der Körperwelt. Die zweite und dritte dieser Erklärungen aber rechnen wir nicht mehr in das Gebiet der Physik. 314

Berechtigung des Grundgesetzes.

Das Grundgesetz betrachten wir als das wahrscheinliche Ergebnis allgemeinster Erfahrung. Genauer gesprochen ist das Grundgesetz eine Hypothese oder Annahme, welche viele Erfahrungen einschließt, welche durch keine Erfahrung widerlegt wird, welche aber mehr aussagt, als durch sichere Erfahrungen zurzeit erwiesen werden kann. Hinsichtlich ihres Verhaltens zum Grundgesetz lassen sich nämlich die materiellen Systeme der Natur in drei Klassen einteilen. 315

1. Die erste Klasse umfaßt solche Körpersysteme oder Teile solcher Körpersysteme, welche den Bedingungen der freien Systeme nach dem unmittelbaren Ergebnis der Erfahrung genügen, und auf welche das Grundgesetz ohne weiteres An- 316

wendung findet. Hierher gehören z. B. starre Körper, welche sich im leeren Raum, oder vollkommene Flüssigkeiten, welche sich in geschlossenen Gefäßen bewegen.

Aus den Erfahrungen an solchen Körpersystemen ist das Grundgesetz abgeleitet. In Hinsicht dieser ersten Klasse stellt es eine nackte Erfahrungstatsache dar.

317 2. Die zweite Klasse umfaßt solche Körpersysteme, welche dann, aber auch nur dann den Voraussetzungen des Grundgesetzes sich fügen, oder welche dann, aber auch nur dann dem Grundgesetze folgen, wenn der unmittelbaren sinnlichen Erfahrung gewisse angebbare Hypothesen über ihre Natur hinzugefügt werden.

a) Hierher gehören erstens diejenigen Systeme, welche der Bedingung der Stetigkeit in einzelnen Lagen nicht zu genügen scheinen, also diejenigen Systeme, in welchen Stöße im weitesten Sinne vorkommen. Hier genügt die im höchsten Grade wahrscheinliche Hypothese, daß alle Unstetigkeiten scheinbare sind und verschwinden, sobald es uns gelingt, hinreichend kleine Raum- und Zeitteile in Betracht zu ziehen.

b) Hierher gehören zweitens diejenigen Systeme, in welchen Fernkräfte, die Kräfte der Wärme, und andere, nicht immer vollständig verstandene Bewegungsursachen tätig sind. Wenn wir die greifbaren Körper solcher Systeme zur Ruhe bringen, so verharren sie nicht in diesem Zustande, sondern setzen sich, freigemacht, aufs neue in Bewegung. Sie folgen also scheinbar nicht dem Grundgesetz. Hier wird die Hypothese immer wahrscheinlicher, daß die greifbaren Körper nicht die einzigen Massen, ihre sichtbaren Bewegungen nicht die einzigen Bewegungen solcher Systeme sind, sondern daß, wenn wir die sichtbaren Bewegungen der greifbaren Körper zur Ruhe gebracht haben, noch andere, verborgene Bewegungen in den Systemen bestehen, welche sich dann, wenn wir die greifbaren Körper freigeben, diesen aufs neue mitteilen. Über diese verborgenen Bewegungen lassen sich, wie es scheint, stets solche Annahmen machen, daß die vollständigen Systeme dem Gesetze gehorchen.

In Hinsicht dieser zweiten Klasse von natürlichen Systemen trägt das Grundgesetz den Charakter einer teils sehr, teils ziemlich wahrscheinlichen, aber stets, soweit wir sehen, einer zulässigen Hypothese.

3. Die dritte Klasse der Körpersysteme enthält solche 318
Systeme, deren Bewegungen sich nicht ohne weiteres als notwendige Folgen des Grundgesetzes darstellen lassen, und für welche auch keine bestimmten Hypothesen angegeben werden können, durch welche sie unter das Gesetz gefügt würden. Hierher gehören z. B. alle Systeme, welche organische oder belebte Wesen enthalten. Unsere Unkenntnis aller hierher gehörigen Systeme ist aber so groß, daß auch der Beweis nicht geführt werden kann, daß solche Hypothesen unmöglich seien und daß die Erscheinungen an diesen Systemen dem Gesetz widersprechen.

Hinsichtlich dieser dritten Klasse von Körpersystemen trägt also das Grundgesetz den Charakter einer zulässigen Hypothese.

Anmerkung. Wenn es zulässig ist, anzunehmen, daß es 319
in der Natur kein freies System gibt, welches dem Grundgesetze nicht gehorchte, so ist es zulässig, jedes System überhaupt anzusehen als ein solches freies System oder als Teil eines solchen freien Systems, so daß es dann in der Tat kein System in der Natur gibt, dessen Bewegungen nicht durch seine Zusammenhänge und das Grundgesetz bestimmt wären.

Einschränkung des Grundgesetzes.

In einem Körpersystem, welches dem Grundgesetze ge- 320
horcht, gibt es keine neue Bewegung, noch auch Ursachen neuer Bewegung, sondern nur die Fortsetzung der bisherigen Bewegung in gewisser einfacher Weise. Man kann kaum umhin, ein solches Körpersystem als ein lebloses oder totes zu bezeichnen. Wollte man also den Satz auf die gesamte Natur als das allgemeinste freie materielle System erweitern, und aussagen: die gesamte Natur verfolge mit gleichbleibender Geschwindigkeit eine geradeste Bahn, so würde man sich in Widerspruch setzen zu einem gesunden und natürlichen Ge-

fühl. Es erscheint daher vorsichtiger, die wahrscheinliche Gültigkeit des Satzes zu beschränken auf leblose Systeme. Es trifft dies zusammen mit der Aussage, daß der Satz, angewandt auf die Systeme der dritten Klasse (318), eine unwahrscheinliche Hypothese bilde.

321 Auf diese Erwägung ist indessen im folgenden keine Rücksicht genommen, und es ist auch nicht nötig, Rücksicht auf sie zu nehmen, weil, wie wir sahen, das Grundgesetz auch in Hinsicht dieser Systeme eine wenn auch nicht wahrscheinliche, so doch zulässige Hypothese bildet. Könnte der Nachweis geführt werden, daß die belebten Systeme dem Satz widersprechen, so würden diese dadurch aus der Mechanik ausscheiden. Zugleich würde dann, aber auch erst dann, unsere Mechanik eine Ergänzung erfordern in bezug auf diejenigen unfreien Systeme, welche zwar selber leblos, aber doch Teile solcher freier Systeme sind, welche belebte Wesen enthalten.

Nach allem, was wir wissen, könnte diese Ergänzung indessen dann auch geleistet werden, und zwar durch die Erfahrung, daß belebte Systeme auf unbelebte niemals einen anderen Einfluß auszuüben vermögen, als welcher auch durch ein unbelebtes System ausgeübt werden könnte. Darnach ist es möglich, jedem belebten System ein unbelebtes unterzuschieben, welches jenes in den gerade behandelten Problemen zu vertreten vermag, und dessen Angabe wir verlangen dürfen, um das gegebene Problem zu einem rein mechanischen zu machen.

322 **Anmerkung.** In der gewöhnlichen Darstellung der Mechanik wird ein ähnlicher Vorbehalt für überflüssig gehalten, und als sicher angenommen, daß die Grundgesetze die belebte wie die unbelebte Natur in gleicher Weise umfassen. Es ist dies in jener Darstellung auch erlaubt, da man den Formen der Kräfte, welche dort in die Grundgesetze eintreten, zunächst den weitesten Spielraum läßt und sich vorbehält, später und außerhalb der Mechanik zu erörtern, ob die Kräfte der belebten und der unbelebten Natur verschieden seien, und welche Eigenschaften etwa die einen vor den anderen auszeichnen. In unserer Darstellung ist größere Vorsicht geboten, da eine bedeutende Zahl von Erfahrungen,

welche sich zunächst nur auf die unbelebte Natur beziehen, in das Grundgesetz selbst schon einbezogen ist, und die Möglichkeit späterer Abgrenzung eine weit beschränktere ist.

Zerlegung des Grundgesetzes.

Die gewählte Fassung des Gesetzes schließt sich absicht- 323
lich an die Fassung von NEWTONS erstem Bewegungsgesetz unmittelbar an. Offenbar aber enthält diese Fassung drei von einander unabhängige Aussagen, nämlich die folgenden:

1. Ein freies System verfolgt keine anderen seiner möglichen Bahnen, als nur die geradesten Bahnen;
2. Verschiedene freie Systeme beschreiben in identischen Zeiträumen einander proportionale Längen ihrer Bahnen;
3. Die am Chronometer gemessene Zeit (298) wächst proportional der Bahnlänge irgend eines bewegten freien Systems.

Nur die beiden ersten Aussagen enthalten Erfahrungstatsachen von großer Allgemeinheit. Die dritte rechtfertigt nur unsere willkürliche Festsetzung der Zeitmessung und enthält nur die besondere Erfahrung, daß ein Chronometer in gewisser Hinsicht sich verhält wie ein freies System, obgleich es genau genommen kein solches ist.

Methode der Anwendung des Gesetzes.

Wird eine bestimmte Frage in Hinsicht der Bewegung 324
eines materiellen Systemes gestellt, so muß von den folgenden drei Fällen notwendig einer eintreten:

1. Es kann die Frage so gestellt sein, daß das Grundgesetz zu einer bestimmten Beantwortung derselben ausreicht. In diesem Falle ist das Problem ein bestimmtes mechanisches Problem, und die Anwendung des Grundgesetzes gibt seine Lösung.

2. Es kann die Frage so gestellt sein, daß das Grundgesetz 325
zu einer bestimmten Beantwortung derselben unmittelbar nicht

ausreicht, daß aber der Fragestellung eine oder mehrere Annahmen hinzugefügt werden können, durch welche die bestimmte Anwendung des Grundgesetzes möglich gemacht wird.

Ist nur eine einzige solche Annahme möglich, und setzen wir voraus, daß das Problem überhaupt ein mechanisches Problem sei, so muß diese Annahme auch zutreffend sein; das Problem kann also als ein bestimmtes mechanisches Problem betrachtet werden, und die Anwendung der hinzugefügten Annahme und des Grundgesetzes gibt die Lösung.

Sind mehrere Annahmen möglich, und setzen wir voraus, daß das Problem überhaupt ein mechanisches Problem sei, so muß eine dieser Annahmen zutreffen; das Problem kann alsdann als ein unbestimmtes mechanisches Problem betrachtet werden, und die Anwendung des Grundgesetzes auf die verschiedenen möglichen Annahmen gibt die möglichen Lösungen.

326 **3.** Es kann die Frage so gestellt sein, daß das Grundgesetz zur Beantwortung nicht ausreicht, und daß auch keine Annahmen hinzugefügt werden können, durch welche die Anwendung des Grundgesetzes möglich gemacht würde. In diesem Falle muß in den Voraussetzungen der Fragestellung selbst ein Widerspruch liegen gegen das Grundgesetz oder gegen die Eigenschaften der Systeme, auf welche sie sich bezieht; die gestellte Frage kann alsdann überhaupt nicht als ein mechanisches Problem betrachtet werden.

Angenäherte Anwendung des Grundgesetzes.

327 **Bemerkung.** Wenn aus den gegebenen Bedingungsgleichungen eines Systems zusammen mit dem Grundgesetze Gleichungen folgen, welche genau die Form der Bedingungsgleichungen haben, so ist es für die Bestimmung der Bewegung des Systems gleichgültig, ob wir allein jene ursprünglichen oder neben und statt derselben die abgeleiteten Bedingungsgleichungen als Darstellungen des Zusammenhanges des Systems betrachten.

Denn wenn wir auch aus der Reihe der ursprünglichen Bedingungsgleichungen alle diejenigen streichen, welche schon analytisch aus den übrigen und aus den abgeleiteten Bedingungsgleichungen folgen, so genügen doch den jetzt übrig bleibenden ursprünglichen und abgeleiteten Gleichungen sicherlich nur mögliche Verrückungen, wenn auch im allgemeinen nicht alle Verrückungen, welche nach den ursprünglichen Gleichungen möglich waren. Eine Bahn, welche unter der ursprünglichen größeren Mannigfaltigkeit eine geradeste war, wird es um so mehr unter der jetzigen beschränkten Mannigfaltigkeit sein. Und da sich die natürlichen Bahnen unter dieser beschränkteren Mannigfaltigkeit finden müssen, so sind die natürlichen Bahnen die geradesten unter denjenigen, welche nach den jetzigen Bedingungsgleichungen möglich sind. Dies ist aber die Behauptung.

Folgerung 1. Gewinnen wir aus der Erfahrung die 328
Kenntnis, daß ein System gewissen Bedingungsgleichungen tatsächlich genügt, so ist es für die Anwendung des Grundgesetzes vollständig gleichgültig, ob jene Zusammenhänge ursprüngliche, d. h. physikalisch nicht weiter erklärbare (313) sind, oder ob es Zusammenhänge sind, welche sich darstellen lassen als die notwendige Folge anderer Zusammenhänge und des Grundgesetzes, welche also eine mechanische Erklärung zulassen.

Folgerung 2. Gewinnen wir aus der Erfahrung die 329
Kenntnis, daß gewissen Bedingungsgleichungen eines materiellen Systems nur angenähert, nicht aber genau genügt werde, so ist es gleichwohl zulässig, jene Bedingungsgleichungen als angenäherte Darstellungen eines wahren Zusammenhanges bestehen zu lassen und durch Anwendung des Grundgesetzes auf sie angenäherte Aussagen über die Bewegung des Systems zu gewinnen, obwohl es unzweifelhaft feststeht, daß jene angenäherten Bedingungsgleichungen nicht einen ursprünglichen, stetigen, gesetzmäßigen Zusammenhang darstellen, sondern nur als die angenäherte Folge unbekannter Zusammenhänge und des Grundgesetzes angesehen werden können.

Anmerkung. Auf der vorstehenden Folgerung beruht jede 330
praktische Anwendung unserer Mechanik. Denn bei allen Zusammenhängen zwischen grobsinnlichen Massen, welche die Physik entdeckt und die Mechanik verwertet, lehrt eine hin-

reichend genaue Untersuchung, daß sie nur angenäherte Gültigkeit haben und daher nur abgeleitete Zusammenhänge sein können. Die letzten, ursprünglichen Zusammenhänge sind wir gezwungen in der Welt der Atome zu suchen, und sie sind uns unbekannt. Aber auch wenn sie uns bekannt wären, müßten wir auf ihre Benutzung zu praktischen Zwecken verzichten und verfahren, wie wir verfahren. Denn die wirkliche Beherrschung jedes Problems erfordert stets die Beschränkung der Betrachtung auf eine äußerst kleine Zahl von Variabelen, während das Zurückgehen auf die Zusammenhänge der Atome die Einführung einer unermeßlichen Zahl von Veränderlichen nötig machen würde.

Daß wir aber das Grundgesetz so anwenden dürfen, wie wir es anwenden, ist nicht als eine neue Erfahrung neben dem Grundgesetz anzusehen, sondern ist, wie wir sahen, eine notwendige Folge eben dieses Gesetzes selbst.

Abschnitt 3. Bewegung der freien Systeme.

Allgemeine Eigenschaften der Bewegung.

I. Bestimmtheit der Bewegung.

331 **Lehrsatz.** Eine natürliche Bewegung eines freien Systems ist eindeutig bestimmt durch die Angabe der Lage und der Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit.

Denn durch die Lage und die Richtung der Geschwindigkeit ist die Bahn des Systems eindeutig bestimmt (**161**); die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn ist durch die Größe der Geschwindigkeit zur Anfangszeit gegeben.

332 **Folgerung 1.** Durch den gegenwärtigen Zustand (**261**) eines freien Systems sind seine zukünftigen Zustände und seine vergangenen Zustände zu allen Zeiten eindeutig bestimmt.

333 **Folgerung 2.** Könnte man in irgend einer Lage die Geschwindigkeit eines Systems umkehren (was niemals gegen die

Bedingungsgleichungen des Systems verstoßen würde), so würde das System die Lagen seiner vorherigen Bewegung in umgekehrter Reihenfolge durchlaufen.

Bemerkung 1. In einem freien holonomen System (**123**) gibt 334
es stets eine natürliche Bewegung, welche das System in gegebener Zeit aus einer willkürlich gegebenen Anfangs- in eine willkürlich gegebene Endlage überführt.

Denn es ist stets eine natürliche Bahn zwischen beiden Lagen möglich (**192**); in dieser Bahn ist jede Geschwindigkeit zulässig, also auch eine solche, welche das System in der gegebenen Zeit die gegebene Strecke durchlaufen läßt.

Anmerkung. Die vorige Bemerkung bleibt richtig, wenn 335
an Stelle der Zeit des Überganges die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder auch die Energie des Systems gesetzt wird.

Bemerkung 2. Ein freies System, welches kein holonomes 336
ist, kann nicht aus jeder möglichen Anfangslage in jede mögliche Endlage durch eine natürliche Bewegung übergeführt werden (**162**).

Lehrsatz. Eine natürliche Bewegung eines freien holo- 337
nomen Systems ist bestimmt durch die Angabe zweier Lagen, in welchen sich das System zu zwei bestimmten Zeiten finden soll.

Denn durch diese Angabe ist die Bahn des Systems bestimmt und die Geschwindigkeit in dieser Bahn.

Anmerkung 1. Die Bestimmung einer natürlichen Be- 338
wegung durch zwei Lagen, zwischen welchen sie stattfindet, ist im allgemeinen eine mehrdeutige; sie ist eine eindeutige, sobald die Entfernung der beiden Lagen ein gewisses endliches Maß nicht überschreitet und die Länge der beschriebenen Bahn von der Ordnung dieser Entfernung sein soll (vgl. **167, 172, 190** u. **176**).

Anmerkung 2. Eine natürliche Bewegung eines freien 339
holonomen Systems ist, abgesehen von dem absoluten Wert

der Zeit, auch bestimmt durch zwei Lagen des Systems und entweder die Zeitdauer des Überganges oder die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn oder die Energie des Systems.

2. Erhaltung der Energie.

340 **Lehrsatz.** Die Energie eines in beliebiger Bewegung begriffenen freien Systems ändert sich nicht mit der Zeit.

Denn die Energie setzt sich zusammen (282) aus der Masse des Systems, welche unveränderlich ist, und der Geschwindigkeit längs der Bahn, welche ebenfalls unveränderlich ist.

341 **Anmerkung 1.** Von den drei Teilaussagen, in welche wir das Grundgesetz zerlegten (323), bedurften wir zum Beweise des Satzes nur die zweite und dritte. Wir können auch die dritte entbehrlich machen, und den Satz von einer bestimmten Art der Zeitmessung unabhängig aussagen, wenn wir ihm die Form geben:

Das Verhältnis der Energieen irgend zweier in beliebiger Bewegung begriffener freier Systeme ändert sich nicht mit der Zeit.

342 **Anmerkung 2.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Grundgesetzes. Umgekehrt folgt aus dem Satz von der Erhaltung der Energie die zweite Teilaussage (323) jenes Gesetzes, aber nicht die erste, also nicht das ganze Gesetz. Es wären natürliche Systeme denkbar, für welche der Satz von der Erhaltung der Energie gälte, und welche sich dennoch nicht in geradesten Bahnen bewegten. Es wäre zum Beispiel denkbar, daß der Satz von der Erhaltung der Energie Gültigkeit hätte auch für belebte Systeme, und daß dieselben dennoch sich unserer Mechanik entzögen. Umgekehrt ließen sich auch natürliche Systeme denken, welche sich nur in geradesten Bahnen bewegten, und für welche dennoch der Satz von der Erhaltung der Energie keine Gültigkeit hätte.

343 **Anmerkung 3.** Es ist in neuerer Zeit mehrfach die Ansicht vorgetragen worden, daß die Energie bewegter Systeme an einen bestimmten Ort gebunden sei und sich von Ort zu

Ort fortpflanze. Man hat deshalb die Energie, wie in Hinsicht der Unzerstörbarkeit, so auch in dieser Hinsicht mit der Materie in Vergleich gestellt. Diese Auffassung der Energie weicht offenbar sehr weit ab von der Auffassung der hier vorgetragenen Mechanik. Mit dem gleichen Rechte, aber nicht mit größerem Rechte, kann man sagen: die Energie eines bewegten Systems sei am Orte des Systems vorhanden, mit welchem man sagen kann: die Geschwindigkeit eines bewegten Körpers sei an den Ort desselben gebunden. Diese letztere Ausdrucksweise aber ist mit Recht ungebräuchlich.

3. Kleinste Beschleunigung.

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, 344
daß die Größe seiner Beschleunigung in jedem Augenblick die kleinste ist, welche mit der augenblicklichen Lage, der augenblicklichen Geschwindigkeit und dem Zusammenhange des Systems sich verträgt.

Denn das Quadrat der Größe der Beschleunigung ist nach 280 und 281 gleich

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2 \quad .$$

Da nun für die natürliche Bewegung $\dot{v} = 0$ ist, v einen durch die augenblickliche Geschwindigkeit gegebenen Wert hat und c den kleinsten Wert hat, welcher mit der gegebenen Richtung der Bewegung und dem Zusammenhange des Systems verträglich ist, so nimmt der Ausdruck selbst den kleinsten, mit den genannten Nebenumständen verträglichen Wert an.

Anmerkung 1. Die in dem vorigen Lehrsatz ausgesagte 345
Eigenschaft der natürlichen Bewegung bestimmt diese Bewegung eindeutig, und es kann daher der Lehrsatz das Grundgesetz vollständig vertreten.

Denn soll der Ausdruck

$$v^4 c^2 + \dot{v}^2$$

ein Minimum werden, so muß zunächst $\dot{v} = 0$ sein, also das

System seine Bahn mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen, zweitens muß entweder $v = 0$ sein — alsdann ruht das System — oder c muß den kleinsten, bei der Richtung der Bahn möglichen Wert haben, — dann ist die Bahn eine geradeste.

346 **Anmerkung 2.** Der Lehrsatz **344** würde, als Grundgesetz vorangestellt, vor der benutzten Form sogar den Vorzug haben, daß er das Gesetz in eine einzige unteilbare Aussage zusammenfaßte, nicht nur äußerlich in einen Satz. Die benutzte Form hat aber den Vorzug, daß sie ihre Bedeutung klarer und durchsichtiger erkennen läßt.

4. Kürzeste Bahn.

347 **Lehrsatz.** Die natürliche Bahn eines freien holonomen Systems zwischen irgend zwei hinreichend benachbarten Lagen ist kürzer als irgend eine andere mögliche Bahn zwischen beiden Lagen.

Denn in einem holonomen System ist eine geradeste Bahn zwischen hinreichend benachbarten Lagen zugleich die kürzeste (**190**, **176**).

348 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nicht mehr behauptet werden, daß die natürliche Bahn kürzer sei als alle anderen Bahnen, nicht einmal, daß sie kürzer sei als alle benachbarten Bahnen; es gilt aber immer noch die in dem vorigen Satz enthaltene Behauptung, daß die Variation der Länge der Bahn verschwinde beim Übergang zu irgend einer benachbarten möglichen Bahn (**190**, **171**).

349 **Anmerkung 2.** Der vorige Lehrsatz entspricht dem Prinzip der kleinsten Wirkung in der Form, welche Jacobi diesem Prinzip gegeben hat. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse, ds_ν die Weglänge des νten der n Punkte des Systems in einem bestimmten Zeitelement, so sagt der Lehrsatz aus, daß die Variation des Integrals

$$\int ds = \frac{1}{\sqrt{m}} \int \sqrt{\sum_{1}^{n}{}_{\nu}\, m_\nu\, ds_\nu^2}$$

verschwinde bei der natürlichen Bewegung des Systems, und dies ist die JACOBIsche Form jenes Prinzips.

Anmerkung 3. Um das Verhältnis zwischen dem Lehrsatz **347** und dem JACOBIschen Satz genauer festzustellen müssen wir aussagen: Nach der gewöhnlichen Auffassung der Mechanik enthält der Lehrsatz einen besonderen Fall des JACOBIschen Satzes, den Fall nämlich, daß keine Kräfte wirken. 350

Nach unserer Auffassung sind umgekehrt die Voraussetzungen des vollständigen JACOBIschen Satzes als die engeren zu bezeichnen, und der JACOBIsche Satz ist nach dieser Auffassung eine Anpassung des Lehrsatzes an besondere Verhältnisse und seine Umformung auf die Voraussetzungen derselben.

Anmerkung 4. Der Lehrsatz **347** hat den Satz von der Erhaltung der Energie weder zur Voraussetzung, noch zur Folge, sondern ist von demselben ganz unabhängig. Zusammen mit dem Satz von der Energie vermag er das Grundgesetz vollständig zu ersetzen, jedoch nur für holonome Systeme. Angewandt auf andere Systeme würde der Satz allerdings auch bestimmte Bewegungen ergeben, aber diese Bewegungen würden dem Grundgesetz widersprechen (**194**), also falsche Lösungen der gestellten mechanischen Probleme sein. 351

5. Kürzeste Zeit.

Lehrsatz. Die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems führt das System in kürzerer Zeit aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage, als es durch irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung geschehen könnte. 352

Denn ist für alle verglichenen Bewegungen die Energie, also die Bahngeschwindigkeit die gleiche, so ist die Dauer des Übergangs der Bahnlänge proportional, also die kleinste für die kürzeste Bahn, also für die natürliche Bahn.

353 **Anmerkung.** Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird die Zeit des Übergangs nicht mehr notwendig ein Minimum, aber sie behält immer noch die Eigenschaft, gleich zu sein für die natürliche Bahn und alle ihr unendlich benachbarten möglichen Bahnen (vergl. 348).

354 **Folgerung 1.** Für die natürliche Bewegung eines freien holonomen Systems zwischen gegebenen, hinreichend benachbarten Endlagen ist das Zeitintegral der Energie kleiner, als für irgend eine andere mögliche, mit dem gleichen konstanten Wert der Energie ausgeführte Bewegung.

Denn es ist jenes Zeitintegral gleich dem Produkt aus dem gegebenen konstanten Wert der Energie und der Zeitdauer des Übergangs.

355 **Anmerkung 1.** Der Lehrsatz 352, insbesondere in der Form der Folgerung 354, entspricht dem Maupertuisschen Prinzip der kleinsten Wirkung. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns in derselben Weise ausdrücken, wie dies in 350 geschehen ist.

356 **Anmerkung 2.** Die Folgerung 354 und auch der Lehrsatz 352 setzen für die miteinander verglichenen Bewegungen die Konstanz der Energie mit der Zeit voraus. Zusammen mit der Voraussetzung, daß die natürliche Bewegung sich überhaupt unter den verglichenen finde, genügen sie also zur Bestimmung derselben und können das Grundgesetz vertreten, jedoch nur für holonome Systeme. Ihre Voraussetzungen auf andere Systeme angewandt, würden zu falschen mechanischen Lösungen führen.

357 **Folgerung 2.** Ein freies holonomes System wird aus seiner Anfangslage in gegebener Zeit auf größere geradeste Entfernung fortgetragen durch seine natürliche Bewegung, als durch irgend eine andere mögliche Bewegung, welche mit dem

gleichen konstanten Wert der Energie erfolgt, wie die natürliche Bewegung.

6. Kleinstes Zeitintegral der Energie.

Lehrsatz. Das Zeitintegral der Energie ist beim Übergang eines freien holonomen Systems aus einer gegebenen Anfangslage in eine hinreichend benachbarte Endlage kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangslage in die gegebene Endlage überführt. 358

Vergleichen wir nämlich zunächst nur Bewegungen in einer und derselben Bahn von der Länge S, so erreicht unter diesen das Zeitintegral der Energie sein Minimum für diejenige Bewegung, für welche die Bahngeschwindigkeit v konstant ist. Denn da die Summe der Größen vdt den gegebenen Wert S hat, so wird die Summe der Größen v^2dt dann und nur dann ihren kleinsten Wert erreichen, wenn alle v gleich sind. Ist aber die Bahngeschwindigkeit konstant, so ist das Zeitintegral der Energie gleich $\frac{1}{2}mS^2/T$, wenn T die Dauer des Übergangs ist. Da T gegeben ist, so verhält sich für verschiedene Bahnen des Systems das Zeitintegral der Energie wie das Quadrat der Bahnlänge, erstere Größe hat also wie die letztere ihren Minimalwert für die natürliche Bahn.

Anmerkung 1. Fällt die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fort, so wird das Zeitintegral der Energie nicht mehr notwendig ein Minimum, aber seine Variation verschwindet immer noch beim Übergang zu einer anderen der in Betracht gezogenen Bewegungen (vgl. 348). 359

Anmerkung 2. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem Hamiltonschen Prinzip. Wollen wir sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genauer feststellen, so müssen wir uns derselben Ausdrucksweise bedienen wie in 350. 360

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 358 und die Folgerung 354 stimmen darin überein, daß sie unter gewissen Klassen möglicher Bewegungen die natürliche Bewegung auszeichnen durch 361 ein und dasselbe Merkmal, nämlich den Minimalwert des Zeitintegrals der Energie; sie unterscheiden sich aber wesentlich voneinander dadurch, daß sie ganz verschiedene Klassen möglicher Bewegungen in Betracht ziehen.

362 **Anmerkung 4.** Der Satz von der Erhaltung der Energie ist eine notwendige Folge des Lehrsatzes **358**, und dieser Lehrsatz kann daher, als Prinzip vorangestellt, als vollständiger Ersatz für das Grundgesetz dienen, jedoch nur in der Anwendung desselben auf holonome Systeme. Läßt man die Beschränkung auf holonome Systeme fallen, so ergibt der Satz zwar auch bestimmte Bewegungen der materiellen Systeme, aber diese widersprechen im allgemeinen dem Grundgesetz und sind also, mechanisch betrachtet, falsche Lösungen der gestellten Probleme.

363 **Rückblick auf 347 bis 362.** Benutzen wir die in den Lehrsätzen **347**, **352**, **354**, **358** ausgesprochenen Eigenschaften der natürlichen Bewegung als Prinzipien zur vollständigen oder teilweisen Bestimmung dieser Bewegung, so machen wir die gegenwärtig eintretenden Änderungen im Zustand des Systems abhängig von solchen Eigentümlichkeiten der Bewegung, welche erst in der Zukunft hervortreten können, und welche oft in menschlichen Verrichtungen als erstrebenswerte Ziele erscheinen. Dieser Umstand hat bisweilen Physiker und Philosophen dazu geführt, in den Gesetzen der Mechanik den Ausdruck einer bewußten Absicht auf zukünftige Ziele, verbunden mit Voraussicht der zweckmäßigen Mittel, zu erblicken. Eine solche Auffassung ist aber weder notwendig, noch auch nur zulässig.

364 Daß nämlich eine solche Auffassung jener Prinzipien nicht notwendig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht anzudeuten scheinen, als denknotwendige Folgen eines Gesetzes erkannt wurden, in welchem man den Ausdruck einer Voraussicht in die Zukunft nicht findet.

365 Daß jene Auffassung der Prinzipien aber sogar unzulässig ist, ergibt sich daraus, daß die Eigenschaften der natürlichen Bewegung, welche eine Absicht auf zukünftigen Erfolg anzudeuten scheinen, nicht bei allen natürlichen Bewegungen sich

finden. Hätte die Natur wirklich die Absicht, einen kürzesten Weg, einen kleinsten Aufwand an Energie, eine kürzeste Zeit zu erzielen, so wäre es unmöglich zu verstehen, wie es Systeme geben könnte, in welchen diese Absicht, obwohl erreichbar, dennoch der Natur regelmäßig fehlschlüge.

Will man darin, daß ein System unter allen möglichen 366
Bahnelementen beständig ein geradestes auswählt, den Ausdruck eines bestimmten Willens erkennen, so steht dies frei; man sieht alsdann eben schon darin den Ausdruck eines bestimmten Willens, daß ein natürliches System überhaupt unter allen möglichen Bewegungen keine willkürliche, sondern stets eine durch besondere Merkmale bezeichnete, im voraus bestimmbare Bewegung auswählt.

Analytische Darstellung. Differentialgleichungen der Bewegung.

Erläuterung. Unter den Differentialgleichungen der Be- 367
wegung eines Systems verstehen wir einen Satz von Differentialgleichungen, in welchen die Zeit die unabhängige Variabele, die Koordinaten des Systems die abhängigen Variabelen sind, und welche zusammen mit einer Anfangslage und einer Anfangsgeschwindigkeit die Bewegung des Systems eindeutig bestimmen (**331**).

Aufgabe 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung 368
eines freien Systems in den rechtwinkligen Koordinaten desselben darzustellen.

In **155d** haben wir die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen des Systems in den rechtwinkligen Koordinaten abgeleitet. In diese Gleichungen führen wir anstatt der Bahnlänge die Zeit t als unabhängige Variabele ein. Nach dem Grundgesetz ist $ds/dt = v$ von t, also auch von s unabhängig, und wir haben:

$$\dot{x}_\nu = x'_\nu v \quad , \qquad \ddot{x}_\nu = x''_\nu v^2 \quad .$$

Multiplizieren wir demnach die Gleichungen **155d** mit mv^2 und setzen zur Abkürzung für $mv^2\Xi_\iota$ jetzt X_ι, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die $3n$ Gleichungen:

a) $$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i{}^\iota x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den i Gleichungen (vgl. **155b**):

b) $$\sum_1^{3n}{}^\nu x_{\iota\nu} \ddot{x}_\nu + \sum_1^{3n}{}^\nu \sum_1^{3n}{}^\mu \frac{\partial x_{\iota\nu}}{\partial x_\mu} \dot{x}_\nu \dot{x}_\mu = 0$$

die $3n+i$ Größen $\ddot{x}_\nu$ und X_ι als eindeutige Funktionen der x_ν und $\dot{x}_\nu$ bestimmen.

369 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen der Bewegung des freien Systems in der Form 368 werden gewöhnlich als LAGRANGES Gleichungen der ersten Form bezeichnet.

370 **Anmerkung 2.** Jede einzelne der Gleichungen **368a** gibt uns, nachdem wir die X_ι zuerst bestimmt haben, die Komponente der Beschleunigung des Systems nach einer bestimmten der rechtwinkligen Koordinaten des Systems.

371 **Aufgabe 2.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines freien Systems in den allgemeinen Koordinaten p_ϱ desselben auszudrücken.

Die Differentialgleichungen der geradesten Bahnen in den p_ϱ finden wir in **158d**. In diese führen wir statt der Bahnlänge die Zeit als unabhängige Variabele ein, indem wir wiederum bemerken, daß nach dem Grundgesetz ist:

$$\dot{p}_\varrho = p'_\varrho v \quad , \quad \ddot{p}_\varrho = p''_\varrho v^2 \quad .$$

Indem wir also die Gleichungen **158d** multiplizieren mit mv^2 und setzen für $mv^2 \Pi_\varkappa$ jetzt $P_\varkappa$, so erhalten wir als Lösung der Aufgabe die r Gleichungen:

a) $$m\left\{\sum_1^r{}^\sigma a_{\varrho\sigma}\ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}^\sigma \sum_1^r{}^\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\right)\dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau\right\} + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0,$$

welche zusammen mit den k Gleichungen (vgl. **158b**):

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\ddot{p}_\varrho + \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial p_{\varkappa\varrho}}{\partial p_\sigma}\dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma = 0 \qquad \textbf{b)}$$

die $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ als eindeutige Funktionen der p_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ bestimmen.

372 **Anmerkung.** Indem wir Gebrauch machen von der Beziehung **277**, können wir die Bewegungsgleichungen **371a** in der Form schreiben:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Denken wir uns die $P_\varkappa$ zuerst bestimmt, so gibt uns eine jede dieser Gleichungen die Komponente der Beschleunigung nach einer bestimmten der Koordinaten p_ϱ, ausgedrückt als Funktion der augenblicklichen Lage und Geschwindigkeit des Systems.

373 **Folgerung 1.** Drücken wir mit Hilfe der Beziehung **291a** die Komponenten der Beschleunigung durch die Energie aus, so nehmen die Bewegungsgleichungen eines freien Systems die Form an:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

374 **Anmerkung 1.** Die Differentialgleichungen der Bewegung in dieser Form heißen auch die allgemeinen LAGRANGEschen Gleichungen der Bewegung oder LAGRANGES Gleichungen der zweiten Form (vgl. **369**).

375 **Anmerkung 2.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so kommt sie in den Bedingungsgleichungen des Systems nicht vor (**140**), die Größen $p_{\varkappa\varrho}$ sind also sämtlich gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Bedingungsgleichung wird:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = 0 \quad .$$

In einem holonomen System können (**144**) stets die sämtlichen Gleichungen der Bewegung in dieser einfachen Form dargestellt werden.

376 **Folgerung 2.** Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**289, 375**):

a) $$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

b) $$\dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungstatsachen enthalten. Man kann die Bewegungsgleichungen in dieser Form auffassen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Größen für alle Zeiten bestimmen.

377 **Anmerkung 1.** Die Gleichungen **376 a** und **b** würde man wohl mit Recht als die Poissonsche Form der Bewegungsgleichungen bezeichnen.

378 **Anmerkung 2.** Aus den Gleichungen **376** folgen zwei reziproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen:

a) $$\frac{\partial_p \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{(aus } \mathbf{b})\text{)}$$

b) $$\frac{\partial_p q_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_p \dot{q}_\sigma}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad , \qquad \text{(aus } \mathbf{a}) \text{ und } \mathbf{b})\text{)}$$

und welche einen einfachen physikalischen Sinn besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und würden nicht für jede mögliche Bewegung des Systems gelten, können also auch unter Umständen zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **376a** abgeleitete Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein.

Folgerung 3. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems in irgend welchen r freien Koordinaten p_ϱ des Systems können geschrieben werden in der Form der $2r$ Gleichungen (**290, 289, 292, 375**): 379

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho}\,, \qquad \text{b)}$$

von welchen die ersteren nur Definitionen, die letzteren aber Erfahrungstatsachen enthalten. Auch in dieser Form erscheinen die Bewegungsgleichungen als $2r$ Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ, welche Gleichungen zusammen mit $2r$ Anfangswerten den Verlauf jener Größen für alle Zeiten bestimmen.

Anmerkung 1. Die vorstehenden Gleichungen **379a** und **b** werden gewöhnlich als die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen für ein freies System bezeichnet. 380

Anmerkung 2. Aus den Gleichungen **379** folgen zwei reziproke Beziehungen, welche analytisch dargestellt sind durch die Gleichungen: 381

$$\frac{\partial_q \dot{q}_\varrho}{\partial p_\sigma} = \frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial p_\varrho} \qquad \text{a)}$$

$$\frac{\partial_q \dot{p}_\varrho}{\partial p_\sigma} = -\frac{\partial_q \dot{q}_\sigma}{\partial q_\varrho}\,, \qquad \text{b)}$$

und welche eine einfache physikalische Bedeutung besitzen. Beide Beziehungen enthalten Elemente der Erfahrung und zeichnen die natürliche Bewegung vor andern möglichen Bewegungen aus, können also auch unter Umständen rückwärts zur Prüfung des Grundgesetzes verwertet werden. Eine dritte analoge, allein aus **379a** abzuleitende Beziehung würde nur die Folge unserer Definitionen sein, also keine mechanische Bedeutung besitzen.

Es verdient hervorgehoben zu werden, daß die Gleichungen **378a** und **381a** verschiedene Aussagen darstellen und nicht etwa dieselben Aussagen in verschiedener Form.

Innerer Zwang der Systeme.

382 **Lehrsatz.** Ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung längs einer geraden Bahn.

Denn für ein solches System ist die gerade Bahn zugleich die geradeste.

383 **Folgerung 1.** Ein freier materieller Punkt beharrt in seinem Zustand der Ruhe oder der gleichförmigen Bewegung in einer geraden Bahn (GALILEIS Trägheitsgesetz oder NEWTONS Lex prima).

384 **Folgerung 2.** Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, ist Null. Die Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems können also als die Ursache aufgefaßt werden, aus welcher die Beschleunigung im allgemeinen von Null abweicht.

385 **Definition.** Die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines materiellen Systems an seiner Beschleunigung hervorrufen, heißt der Zwang, welchen die Zusammenhänge dem System auferlegen; jene Abänderung wird auch kurz der innere Zwang oder noch kürzer der Zwang des Systems genannt.

Der Zwang wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Beschleunigung des Systems und der Beschleunigung derjenigen natürlichen Bewegung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich der ersteren vermindert um die letztere.

386 **Folgerung 1.** Der innere Zwang eines Systems ist wie die Beschleunigung eine Vektorgröße in bezug auf das System.

Folgerung 2. In einem freien System ist der innere Zwang gleich der Beschleunigung des Systems; er ist hier in der Tat nur eine andere Auffassung der Beschleunigung (382). 387

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges ist in jedem Augenblick für die natürliche Bewegung eines freien Systems kleiner als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage der Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt. 388

Denn diese Behauptung ist nach **387** nur im Ausdruck verschieden von dem Lehrsatz **344**.

Folgerung. Ein jeder Zusammenhang, welcher den vorhandenen Zusammenhängen des Systems hinzugefügt wird, vergrößert den Zwang des Systems. Die Auflösung irgend eines Zusammenhanges ändert die natürliche Bewegung in solcher Weise, daß sich der Zwang verkleinert. 389

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht dem Gaussschen Prinzip des kleinsten Zwanges. Um sein Verhältnis zu diesem Prinzipe genau darzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**. 390

Anmerkung 2. Das Gausssche Prinzip und das Trägheitsgesetz (**383**) zusammen können das Grundgesetz vollständig ersetzen, und zwar für alle Systeme. 391

Denn sie sagen zusammen den Lehrsatz **344** aus.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen (**111**) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 392

Denn die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ sind nach **387** in einem freien System gleich f_ϱ, können also nach **372** geschrieben werden in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ,$$

sind also nach **250** senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

393 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen die δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche oder virtuelle Verrückung des Systems, so gibt die Gleichung:

a) $$\sum_1^r{}_\varrho f_\varrho \delta p_\varrho = 0$$

einen symbolischen Ausdruck des vorigen Lehrsatzes. Denn die Gleichung ersetzt den Lehrsatz nach **249**, und sie ist symbolisch, insofern sie als Symbol für unendlich viele Gleichungen steht.

Wenden wir rechtwinklige Koordinaten an, und bezeichnet δx_ν die Änderung von x_ν für irgend eine mögliche oder virtuelle Verrückung, so nimmt die Gleichung **a)** die Gestalt an:

b) $$\sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu \delta x_\nu = 0 \quad .$$

394 **Anmerkung 1.** Der vorstehende Lehrsatz **392** entspricht dem D'ALEMBERTschen Prinzip; die Gleichungen **393a** und **b** entsprechen der gewöhnlichen Darstellungsweise desselben. Um das Verhältnis zwischen diesem Prinzip und jenem Lehrsatz genau festzustellen, würden wir uns derselben Ausdrucksweise zu bedienen haben wie in **350**.

395 **Anmerkung 2.** Aus der Bedingung, daß der Zwang senkrecht stehe auf jeder virtuellen Verrückung des Systems, folgen nach **250** die Bewegungsgleichungen der freien Systems in der Form **372**. Das D'ALEMBERTsche Prinzip kann also für sich allein das Grundgesetz vertreten und zwar für alle Systeme. Das von uns benutzte Grundgesetz hat vor jenem Prinzip die einfachere und durchsichtigere Bedeutung voraus.

396 **Folgerung 1.** In einem freien System steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

397 **Folgerung 2.** Bei der Bewegung eines freien Systems steht die Beschleunigung beständig senkrecht auf der Richtung der wirklichen augenblicklichen Bewegung.

Folgerung 3. Bei der Bewegung eines freien Systems ist die Komponente der Beschleunigung in jeder Richtung einer möglichen Bewegung beständig gleich Null. 398

Folgerung 4. Die Komponente der Beschleunigung eines freien Systems in der Richtung irgend einer freien Koordinate des Systems ist beständig gleich Null. 399

Lehrsatz. Ein freies System bewegt sich in solcher Weise, daß die Komponente der Beschleunigung in Richtung einer jeden Koordinate der absoluten Lage beständig Null bleibt, welches auch immer der innere Zusammenhang zwischen den Punkten des Systems ist. 400

Denn welches auch der Zusammenhang des Systems ist, jede Koordinate seiner absoluten Lage ist eine freie Koordinate (**142**).

Folgerung. Wählen wir die Koordinaten eines freien Systems übrigens beliebig, aber doch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden (**19**), so können wir auch ohne Kenntnis des Zusammenhanges des Systems, oder ohne vollständige Kenntnis desselben, doch stets sechs Differentialgleichungen der Bewegung des Systems angeben. 401

Besondere Wahl der Koordinaten. Die folgende Wahl von Koordinaten der absoluten Lage ist für jedes System eine zulässige Wahl. 402

Wir bezeichnen mit

$$\alpha_1 \;,\quad \alpha_2 \;,\quad \alpha_3$$

die arithmetischen Mittelwerte derjenigen rechtwinkligen Koordinaten aller Massenteilchen, welche beziehlich mit x_1 x_2 x_3 parallel sind. Die Größen α_1 α_2 α_3 betrachten wir als rechtwinklige Koordinaten eines Punktes von mittlerer Lage, welchen wir den Schwerpunkt des Systems nennen. Durch den Schwerpunkt legen wir drei Gerade parallel den drei Koordinatenachsen; durch diese drei Geraden und alle Massenteilchen legen wir Ebenen und bezeichnen mit

$$\omega_1 \;,\quad \omega_2 \;,\quad \omega_3$$

die arithmetischen Mittelwerte der Winkel aller durch dieselbe Gerade gelegten Ebenen mit einer beliebigen unter ihnen. Die sechs Größen α und ω sind voneinander unabhängig veränderliche Größen, deren Änderung notwendig eine Änderung in der Lage des Systems bedingt, und welche durch die Konfiguration allein nicht bestimmt sind. Wir können also diese sechs Größen zu Koordinaten der absoluten Lage machen (**21**), und wir machen sie zu Koordinaten der absoluten Lage, sobald wir neben ihnen nur noch Konfigurationskoordinaten als weitere Koordinaten einführen.

Erteilen wir den α und ω beliebige Veränderungen, während wir die übrigen Koordinaten festhalten, so bewegt sich das System wie ein starrer Körper. Wir erhalten daher aus rein geometrischen Gründen für die Änderungen der rechtwinkligen Koordinaten, wenn wir den Index ν von 1 bis n laufen lassen (**13**):

$$\text{a)} \quad \begin{cases} dx_{3\nu-2} = d\alpha_1 + (x_{3\nu} - \alpha_3)\, d\omega_2 - (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, d\omega_3 \\ dx_{3\nu-1} = d\alpha_2 + (x_{3\nu-2} - \alpha_1)\, d\omega_3 - (x_{3\nu} - \alpha_3)\, d\omega_1 \\ dx_{3\nu} = d\alpha_3 + (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\, d\omega_1 - (x_{3\nu-2} - \alpha_1)\, d\omega_2 \end{cases} .$$

Hieraus ergeben sich, wenn wir auch nun die x_ν als Funktionen sämtlicher Koordinaten betrachten, die Werte der partiellen Differentialquotienten der x_ν nach den α und ω; also zum Beispiel:

$$\text{b)} \qquad \frac{\partial x_{3\nu-2}}{\partial \alpha_1} = 1 \,, \quad \frac{\partial x_{3\nu-1}}{\partial \alpha_1} = 0 \,, \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \alpha_1} = 0 \,,$$

$$\text{c)} \quad \frac{\partial x_{3\nu-2}}{\partial \omega_1} = 0 \,, \quad \frac{\partial x_{3\nu-1}}{\partial \omega_1} = -(x_{3\nu} - \alpha_3) \,, \quad \frac{\partial x_{3\nu}}{\partial \omega_1} = x_{3\nu-1} - \alpha_2 \,.$$

403 **Folgerung 1.** Zufolge der Bemerkung, daß die Beschleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = 0 \,, \qquad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = 0 \,, \qquad \sum_1^n{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = 0 \,.$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach der Koordinate α_1 des Schwerpunktes gleich:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \alpha_1} \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402b** gleich:

$$\sum_1^{n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_{3\nu} \quad ,$$

und entsprechende Ausdrücke gelten für die Beschleunigungen nach α_2 und α_3.

Anmerkung. Die drei Gleichungen **403**, welche sich un- **404**
mittelbar zweimal integrieren lassen und dann aussagen, daß der Schwerpunkt eines freien Systems sich in gleichförmiger, geradliniger Bewegung befindet, enthalten das sogenannte Prinzip des Schwerpunktes.

Folgerung 2. Zufolge der Bemerkung, daß die Be- **405**
schleunigungen des Systems nach den Koordinaten $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ verschwinden müssen (**400**), gelten die drei Gleichungen:

$$\sum_1^{n}{}_\nu m_\nu (x_{3\nu-1} \ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu} \ddot{x}_{3\nu-1}) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n}{}_\nu m_\nu (x_{3\nu} \ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2} \ddot{x}_{3\nu}) = 0 \quad ,$$

$$\sum_1^{n}{}_\nu m_\nu (x_{3\nu-2} \ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1} \ddot{x}_{3\nu-2}) = 0 \quad .$$

Denn nach **242** und **275** ist die Beschleunigung nach ω_1 gleich:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial \omega_1} \cdot \frac{m_\nu}{m} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

also nach **402c** gleich:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left\{ (x_{3\nu-1} - \alpha_2)\,\ddot{x}_{3\nu} - (x_{3\nu} - \alpha_3)\,\ddot{x}_{3\nu-1} \right\} \quad ,$$

also durch Benutzung von **403** gleich:

$$\sum_1^n{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \left(x_{3\nu-1}\,\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\,\ddot{x}_{3\nu-1} \right) \quad ,$$

und entsprechende Werte gelten für die Beschleunigungen nach ω_2 und ω_3.

406 **Anmerkung.** Die drei Gleichungen **405** enthalten das sogenannte Prinzip der Flächen. Jene Gleichungen lassen sich nämlich unmittelbar einmal integrieren und ergeben dann die Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-1}\,\dot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\,\dot{x}_{3\nu-1} \right) = \mathrm{const}_1 \quad ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu}\,\dot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\,\dot{x}_{3\nu} \right) = \mathrm{const}_2 \quad ,$$

$$\sum_1^n{}_\nu m_\nu \left(x_{3\nu-2}\,\dot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\,\dot{x}_{3\nu-2} \right) = \mathrm{const}_3 \quad ,$$

welche die folgende, den Namen rechtfertigende geometrische Deutung erlauben:

Ziehen wir vom Ursprung der Koordinaten nach jedem Massenteilchen des Systems einen Radius, so wächst die Summe der Projektionen der von diesen Radien beschriebenen Flächen auf jede der drei Koordinatenebenen gleichförmig mit der Zeit.

407 **Anmerkung 1 zu 402 bis 406.** Wir haben die Prinzipien des Schwerpunktes und der Flächen als besondere Fälle des allgemeinen Lehrsatzes **400** eingeführt. Wir hätten hierzu kein Recht gehabt, wenn man, wie es bisweilen geschieht, als den wesentlichen Inhalt jener Prinzipien den Vorteil ansehen wollte, daß sie Integrale der Bewegungsgleichungen liefern. Diese Auffassung scheint uns aber schon deshalb unzulässig,

weil das Ergebnis des Flächensatzes doch nur in uneigentlichem Sinne ein Integral genannt werden kann. Als wesentlichen Inhalt jener Prinzipien betrachten wir vielmehr, wie uns scheint mit Recht, den Vorteil, daß sie Behauptungen liefern, welche unabhängig von dem besonderen Zusammenhang des Systems allgemeingültig ausgesagt werden können.

Anmerkung 2 zu 402 bis 406. Bei der Ableitung des Satzes vom Schwerpunkt und des Flächensatzes als besonderer Fälle des Satzes **400** haben wir nicht von allen Eigenschaften Gebrauch gemacht, welche wir den α und den ω durch die Definition beilegten. In der Tat hätten wir jene Sätze auch mit Benutzung anderer Koordinaten ableiten können, z. B. aller Koordinaten, welche mit den α und ω gleiche Richtung haben, ohne doch identisch mit ihnen zu sein. Überhaupt würden wir bei beliebiger Wahl der Koordinaten nicht jedesmal 6 Gleichungen erhalten, welche einen neuen physikalischen Sinn ergäben oder von den Gleichungen **403** und **405** völlig unabhängig wären, sondern es würden stets diejenigen Gleichungen sein, welche aus den Gleichungen **403** und **405** durch Transformation auf die gewählten Koordinaten entstehen. Aber für alle diese verschiedenen Formen gibt der Lehrsatz **400** einen gemeinschaftlichen Ausdruck und den physikalischen Sinn. **408**

Holonome Systeme.

Bemerkung. Ist für ein holonomes System die geradeste Entfernung (**217**) bekannt, so lassen sich die Gleichungen der geradesten Bahnen in endlicher Form darstellen (**225**). Diese Bahnen sind aber die natürlichen Bahnen des Systems, sobald dasselbe frei ist, und alle Bewegungen, bei welchen sie mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, sind natürliche Bewegungen des Systems. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems werden sich also in endlicher Form darstellen lassen. **409**

Aufgabe. Die Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems mit Hilfe der geradesten Entfernung desselben darzustellen. **410**

(410) Es sei wie früher S die geradeste Entfernung des Systems, gedacht als Funktion der freien Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ihrer Anfangs- und Endlage. Es sei t_0 die Zeit, zu welcher das System die Anfangslage, t_1 die Zeit, zu welcher es die Endlage durchläuft. Es ist dann t_1-t_0 die Dauer des Übergangs, also

a) $$v = \frac{S}{t_1-t_0}$$

die konstante Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, also seine Energie:

b) $$E = \frac{1}{2} m \frac{S^2}{(t_1-t_0)^2} \quad ,$$

und seine Momente q_{ϱ_0} und q_{ϱ_1} zu den Zeiten t_0 und t_1:

c) $$q_{\varrho_0} = m \frac{S}{t_1-t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0}$$
$$q_{\varrho_1} = m \frac{S}{t_1-t_0} \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1} \quad .$$

Für die Gleichungen der geradesten Bahnen finden wir zwei Formen in den Gleichungen **224a** und **226a**. Multiplizieren wir dieselben mit $mS/(t_1-t_0)$ oder, was nach **b)** dasselbe ist, mit $\sqrt{2mE}$, so erhalten wir die folgenden vier Sätze von je r Gleichungen:

d) $$q_{\varrho_1} = \quad \frac{1}{2} \frac{m}{t_1-t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_1}}$$

e) $$q_{\varrho_0} = -\frac{1}{2} \frac{m}{t_1-t_0} \frac{\partial S^2}{\partial p_{\varrho_0}}$$

f) $$q_{\varrho_1} = \quad \sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}}$$

g) $$q_{\varrho_0} = -\sqrt{2mE} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad .$$

Damit ist unsere Aufgabe gelöst und zwar in mehrfacher Weise.

Denn betrachten wir t_1 als die variabele Zeit, und also die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der mit dieser Zeit sich verändernden Lage, so bestimmen uns die r Gleichungen e) diese r Koordinaten als endliche Funktionen von t_1, und das gleiche leisten uns die Gleichungen g), wenn wir zu diesen noch die Beziehung zwischen E und t_1, also die Gleichung b) hinzunehmen. Die $2r$ Größen p_{ϱ_0} und q_{ϱ_0} spielen dabei die Rolle der $2r$ willkürlichen Konstanten. Bei der gleichen Betrachtungsweise geben uns nebenbei auch die Gleichungen d), oder f) und b), die Bewegungsgleichungen des Systems, und zwar nunmehr als Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die r Größen p_{ϱ_0} die Rolle der r willkürlichen Konstanten übernehmen.

Oder betrachten wir, was nicht minder erlaubt, die Zeit t_0 als die variabele Zeit, also die Lage 0 als die variabele Lage, so geben uns die Gleichungen d), oder auch f) und b), die Bewegungsgleichungen in endlicher Form, mit der Zeit t_0 als unabhängiger, den p_{ϱ_0} als abhängigen Variabelen und den p_{ϱ_1} und q_{ϱ_1} als $2r$ willkürlichen Konstanten. Zugleich geben uns dann nebenbei die Gleichungen e), oder auch g) und b), die Bewegungsgleichungen in der Gestalt von Differentialgleichungen erster Ordnung, in welchen die p_{ϱ_1} die Rolle von r willkürlichen Konstanten spielen.

Folgerung 1. Setzen wir 411

$$\sqrt{2Em}\,.\,S = V \quad , \qquad \text{a)}$$

und betrachten V als Funktion der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und von E, so lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems darstellen in der Form:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \qquad \text{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \qquad \text{c)}$$

$$t_1 - t_0 = \quad \frac{\partial V}{\partial E} \quad . \qquad \text{d)}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410f** und **g**, und die Gleichung **d)** folgt aus Gleichung **a)** und **410b**.

412 **Anmerkung.** Die so eingeführte Funktion V ist HAMILTONS charakteristische Funktion des Systems; sie ist bei HAMILTON mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet. Eine solche Funktion besteht also nur für holonome Systeme. Ihrer mechanischen Bedeutung nach gibt die charakteristische Funktion den doppelten Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System mit gegebener Energie aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Energie und der Koordinaten der Anfangs- und der Endlage.

Denn es ist nach Gleichung **411a** und **410b**:

$$V = 2E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir in der rechten Seite die Dauer des Übergangs $t_1 - t_0$ als Funktion von E und den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} dargestellt denken.

413 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}} = E$$

$$\frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}} = E \quad .$$

Denn dieselben werden erhalten durch Multiplikation der Gleichungen **227** für die geradeste Entfernung mit $2mE$ und Beachtung der Gleichung **411a**.

414 **Folgerung 2.** Setzen wir

a) $$\frac{mS^2}{2(t_1 - t_0)} = P \quad ,$$

und betrachten P als Funktion der $p_{\varrho_0}, p_{\varrho_1}$ und von t_0 und t_1, so stellen die Gleichungen:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \qquad \mathbf{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \qquad \mathbf{c)}$$

die natürlichen Bewegungen des Systems dar. Die Energie E des Systems kann aus P unmittelbar abgeleitet werden mit Hilfe der Gleichungen:

$$E = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad . \qquad \mathbf{d)}$$

Denn die Gleichungen **b)** und **c)** fallen zusammen mit den Gleichungen **410d** und **e**, und die Gleichungen **d)** folgen aus Gleichung **a)** und **410b**.

Anmerkung. Die jetzt eingeführte Funktion P ist die HAMILTONsche Prinzipalfunktion des Systems; sie ist bei HAMILTON selbst mit S bezeichnet. Nur für holonome Systeme besteht eine solche Funktion. Ihrer mechanischen Bedeutung nach gibt die Prinzipalfunktion den Wert des Zeitintegrals der Energie an, welcher eintritt, wenn das System in gegebener Zeit aus gegebener Anfangs- in gegebene Endlage übergeht, gedacht als Funktion jener Zeit und der Anfangs- und Endwerte der Koordinaten. 415

Denn es ist nach Gleichungen **414a** und **410b**:

$$P = E(t_1 - t_0)$$

dem Werte nach, der Form nach allerdings nur dann, wenn wir uns in der rechten Seite E als Funktion der $p_{\varrho_1}, p_{\varrho_0}$ und der t_1 und t_0 dargestellt denken.

Lehrsatz. Die Prinzipalfunktion eines freien holonomen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung: 416

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}^\varrho\sum_1^r{}^\sigma b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} = -\frac{\partial P}{\partial t_1}$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}^\varrho\sum_1^r{}^\sigma b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} = \frac{\partial P}{\partial t_0}\quad .$$

Denn dieselben werden erhalten, indem man die Gleichungen **227** multipliziert mit (**410 b**)

$$\frac{mS^2}{2(t_1-t_0)^2} = E$$

und die Beziehungen **414 a** und **d** beachtet.

417 **Anmerkung zu 411 bis 416.** Ebenso wie wir in **232** bis **236** von den Differentialgleichungen **227** ausgehend Funktionen betrachten konnten, welche der geradesten Entfernung verwandt waren und sie in analytischer Hinsicht vollkommen ersetzten, ohne doch eine gleich einfache geometrische Bedeutung wie sie zu haben, ebenso können wir von den Differentialgleichungen **413** und **416** ausgehend zu Funktionen gelangen, welche der charakteristischen Funktion und der Prinzipalfunktion verwandt sind und in analytischer Hinsicht gleiche Dienste leisten oder selbst Vorteile bieten, deren Bedeutung in physikalischer Hinsicht aber durch die mathematische Verwickelung mehr und mehr verdunkelt erscheint. Solche Funktionen würde man passend als Jacobische Prinzipalfunktionen und charakteristische Funktionen bezeichnen.

Es erhellt übrigens, daß auch schon in der charakteristischen Funktion und in der Prinzipalfunktion nur der einfache Sinn der geradesten Entfernung und auch dieser in leichter Verschleierung auftritt, so daß die Einführung jener Funktionen nebeneinander und neben der geradesten Entfernung nur eine geringe Bedeutung haben würde, wenn es sich stets, wie hier, um die Betrachtung vollständig bekannter freier Systeme handelte.

Dynamische Modelle.

Definition. Ein materielles System heißt dynamisches Modell eines zweiten Systems, wenn sich die Zusammenhänge des ersteren durch solche Koordinaten darstellen lassen, daß den Bedingungen genügt ist: 418

1. daß die Zahl der Koordinaten des ersten Systems gleich der Zahl der Koordinaten des andern Systems ist,
2. daß nach passender Zuordnung der Koordinaten für beide Systeme die gleichen Bedingungsgleichungen bestehen,
3. daß der Ausdruck für die Größe einer Verrückung in beiden Systemen bei jener Zuordnung der Koordinaten übereinstimme.

Je zwei einander zugeordnete Koordinaten beider Systeme heißen auch korrespondierende. Korrespondierende Lagen, Verrückungen, usw. heißen solche Lagen, Verrückungen, usw. beider Systeme, welchen gleiche Werte der korrespondierenden Koordinaten und ihrer Änderungen zugehören.

Folgerung 1. Ist ein System Modell eines zweiten Sy- 419
stems, so ist auch umgekehrt das zweite System Modell des ersten. Sind zwei Systeme Modelle eines dritten, so sind sie auch Modelle voneinander. Das Modell des Modells eines Systems ist auch Modell des ursprünglichen Systems.

Alle Systeme, welche Modelle voneinander sind, heißen auch dynamisch ähnlich.

Folgerung 2. Die Eigenschaft eines Systems, Modell 420
eines andern zu sein, ist unabhängig von der Wahl der Koordinaten des einen oder des andern Systems, obwohl sie erst bei besonderer Wahl der Koordinaten unmittelbar hervortritt.

Folgerung 3. Ein System ist noch nicht vollständig be- 421
stimmt dadurch, daß es Modell eines gegebenen Systems ist. Unendlich viele, physikalisch gänzlich verschiedene Systeme können Modelle eines und desselben Systems sein. Ein System ist Modell unendlich vieler, gänzlich verschiedener Systeme.

Denn die Koordinaten der Massen der beiden Systeme, welche Modelle voneinander sind, können der Zahl nach gänzlich verschieden und gänzlich verschiedene Funktionen der korrespondierenden Koordinaten sein.

422 **Folgerung 4.** Modelle holonomer Systeme sind wieder holonome Systeme. Modelle nicht holonomer Systeme sind wieder nicht holonome Systeme.

423 **Anmerkung.** Damit ein holonomes System Modell eines andern sei, genügt es, daß sich solche freie Koordinaten beider angeben lassen, in welchen der Ausdruck für die Größe der Verrückung beider Systeme der gleiche wird.

424 **Lehrsatz.** Haben zwei Modelle voneinander korrespondierende Zustände zu einer bestimmten Zeit, so haben sie korrespondierende Zustände zu allen Zeiten.

Denn durch die Bedingungsgleichungen eines Systems, den Ausdruck für die Größe der Verrückung (**164**) und durch die Anfangswerte der Koordinaten und ihrer Veränderung (**332**) ist der Verlauf dieser Koordinaten für alle Zeiten bestimmt, welche Funktion dieser Koordinaten auch immer die Lage der Massen des Systems ist.

425 **Folgerung 1.** Um den Ablauf der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems vorauszusehen, genügt die Kenntnis eines Modells jenes Systems. Das Modell kann unter Umständen viel einfacher sein, als das System, dessen Bewegungen es darstellt.

426 **Folgerung 2.** Sind von einer Anzahl materieller Systeme, welche Modelle voneinander sind, dieselben Größen korrespondierende Koordinaten, und sind nur diese korrespondierenden Koordinaten der Beobachtung zugänglich, so sind alle diese Systeme in Hinsicht der beschränkten Beobachtung nicht voneinander verschieden, sondern erscheinen als gleiche Systeme, wie verschieden auch in Wahrheit in ihnen Zahl und Zusammenhang der materiellen Punkte sein möge.

Es ist daher auch unmöglich, allein aus der Beobachtung der natürlichen Bewegungen eines freien materiellen Systems, d. h. ohne direkte Bestimmung seiner Massen (**300**), den Zusammenhang des Systems weiter zu erkennen, als soweit, daß man ein Modell des Systems angeben könne.

Anmerkung 1. Lassen wir allgemein und ohne Einschränkung zu, daß außer den unmittelbar, d. h. den mit der Wage bestimmbaren Massen noch andere, hypothetische Massen (301) in den Systemen der Natur sich finden können, so ist es überhaupt unmöglich, in der Erkenntnis des Zusammenhanges natürlicher Systeme weiter zu gelangen, als soweit, daß man Modelle der wirklichen Systeme angeben könne. Wir können dann in der Tat keine Kenntnis haben, ob die Systeme, welche wir in der Mechanik betrachten, mit den wirklichen Systemen der Natur, welche wir zu betrachten meinen, in irgend etwas anderem übereinstimmen, als allein darin, daß die einen Modelle der anderen sind. 427

Anmerkung 2. Das Verhältnis eines dynamischen Modells zu dem System, als dessen Modell es betrachtet wird, ist dasselbe, wie das Verhältnis der Bilder, welche sich unser Geist von den Dingen bildet, zu diesen Dingen. Betrachten wir nämlich den Zustand des Modells als eine Abbildung des Zustandes des Systems, so sind die Folgen der Abbildung, welche nach den Gesetzen dieser Abbildung eintreten müssen, zugleich die Abbildung der Folgen, welche sich an dem ursprünglichen Gegenstand nach den Gesetzen dieses ursprünglichen Gegenstandes entwickeln müssen. Die Übereinstimmung zwischen Geist und Natur läßt sich also vergleichen mit der Übereinstimmung zwischen zwei Systemen, welche Modelle voneinander sind, und wir können uns sogar Rechenschaft ablegen von jener Übereinstimmung, wenn wir annehmen wollen, daß der Geist die Fähigkeit habe, wirkliche dynamische Modelle der Dinge zu bilden und mit ihnen zu arbeiten. 428

Abschnitt 4. Bewegung der unfreien Systeme.

Vorbemerkung 1. Nach unserer Auffassung ist jedes unfreie System Teil eines größeren freien Systems; unfreie Systeme, für welche diese Annahme nicht zuträfe, kennen wir nicht. Soll aber jenes Verhältnis besonders hervorgehoben 429 werden, so bezeichnen wir das unfreie System als Teilsystem, das freie System aber, von welchem es ein Teil ist, als das vollständige System.

430 **Vorbemerkung 2.** Indem wir einen Teil eines freien Systems als unfreies System behandeln, setzen wir voraus, daß das übrige System uns mehr oder weniger unbekannt ist, so daß die unmittelbare Anwendung des Grundgesetzes unmöglich wird. Dieser Mangel unserer Kenntnis muß in irgend einer Weise durch besondere Angaben ausgeglichen sein. Solche Angaben können in verschiedener Weise gemacht werden. Ohne die Möglichkeiten erschöpfen zu wollen, ziehen wir nur zwei Formen für jene Angaben in Betracht, welche in der bisherigen Entwickelung der Mechanik besondere Bedeutung gewonnen haben.

Die erste Form ist diejenige, bei welcher wir die Bewegung des unfreien Systems als eine geleitete bezeichnen; die zweite ist diejenige, bei welcher wir sagen, die Bewegung des unfreien Systems sei durch Kräfte beeinflußt.

I. Geleitetes unfreies System.

431 **Definition.** Geleitete Bewegung eines unfreien Systems heißt jede Bewegung, welche das System ausführt, während die übrigen Massen des vollständigen Systems eine ganz bestimmte, vorgeschriebene Bewegung ausführen. Ein System, welches geleitete Bewegungen ausführt, nennen wir ein geleitetes System.

432 **Zusatz 1.** Mögliche Bewegung eines geleiteten Systems heißt jede Bewegung desselben, welche dem Zusammenhange des vollständigen Systems und der bestimmten Bewegung der übrigen Massen desselben nicht widerspricht.

433 **Zusatz 2.** Natürliche Bewegung eines geleiteten Systems heißt jede Bewegung desselben, welche mit der bestimmten Bewegung der übrigen Massen zusammen eine natürliche Bewegung des vollständigen Systems bildet.

Aufgabe. Die möglichen Bewegungen eines geleiteten 434
Systems analytisch darzustellen.

Seien die r Größen p_ϱ allgemeine Koordinaten des betrachteten Teilsystems, die $\mathfrak{r}$ Größen $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen Massen des vollständigen Systems. Die $r+\mathfrak{r}$ Größen p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ sind alsdann allgemeine Koordinaten des vollständigen Systems, und die Zusammenhänge dieses sind dargestellt durch eine Anzahl, etwa h, Gleichungen von der Form:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}} {}_\varrho\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ und auch die $\mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}$ Funktionen sowohl der p_ϱ als auch der $\mathfrak{p}_\varrho$ sein können. Sind nun die Bewegungen der Massen, deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho$ sind, bestimmt, so sind die $\mathfrak{p}_\varrho$ gegebene Funktionen der Zeit. Zum Teil sind die Gleichungen **a)** durch diese Funktionen identisch erfüllt, zum Teil nehmen sie durch Einsetzen derselben die Form der k Gleichungen an:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \qquad \text{b)}$$

oder auch:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho + p_{\varkappa t}\, dt = 0 \quad , \qquad \text{c)}$$

welche die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems heißen, und in welchen die $p_{\varkappa\varrho}$ und $p_{\varkappa t}$ jetzt allein Funktionen der p_ϱ und der Zeit t sind. Alle möglichen Bewegungen des geleiteten Systems genügen diesen Gleichungen, und alle Bewegungen, welche ihnen genügen, sind mögliche Bewegungen.

Anmerkung 1. Ist das geleitete System ein holonomes 435
System, so lassen sich die Differentialgleichungen **b)** und **c)** für dasselbe ersetzen durch ebensoviel endliche Gleichungen zwischen den r Koordinaten des Systems und der Zeit t. Die möglichen Lagen eines geleiteten holonomen Systems lassen sich darstellen durch Koordinaten, welche keinen anderen Bedingungen

unterworfen sind, als dieser, daß eine Anzahl unter ihnen gegebene Funktionen der Zeit sind.

436 **Anmerkung 2.** Die Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems enthalten also im allgemeinen die Zeit, und das geleitete System würde für sich betrachtet der Forderung der Gesetzmäßigkeit (**119**) widersprechen. Umgekehrt betrachten wir nun auch jedes System, dessen Bedingungsgleichungen nach der gewöhnlichen Redeweise der Mechanik die Zeit explizite enthalten, und welches also in unserer Redeweise anscheinend ungesetzmäßig ist, als ein geleitetes System, als ein System also, welches zusammen mit anderen unbekannten Massen den Bedingungen der Gesetzmäßigkeit genügt. Ist diese Annahme zulässig, so macht erst sie das Problem zu einem bestimmten mechanischen Problem (**325**). Ist diese Annahme aber bei einer besonderen Form der Bedingungsgleichungen etwa unzulässig, so enthalten diese Bedingungsgleichungen bereits einen Widerspruch gegen das Grundgesetz oder seine Voraussetzungen, und alle in bezug auf das System gestellten Fragen wären keine mechanischen Probleme (**326**).

437 **Anmerkung 3.** Auf ein geleitetes System ist das Grundgesetz nicht unmittelbar anwendbar. Denn der Begriff der geradesten Bahnen ist nur definiert für gesetzmäßige Zusammenhänge (**120**); die inneren Zusammenhänge des geleiteten Systems aber sind ungesetzmäßige. Es müssen daher anderweitige Merkmale aufgesucht werden, durch welche die natürlichen Bewegungen eines geleiteten Systems sich von der größeren Mannigfaltigkeit der möglichen Bewegungen unterscheiden.

438 **Lehrsatz 1.** Wie ein freies System, so bewegt sich auch ein geleitetes System in solcher Weise, daß die Größe der Beschleunigung beständig kleiner ist für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen des Systems genügt, und welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit der wirklichen zusammenfällt.

Denn das Quadrat der Größe der Beschleunigung des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Größen für das Teilsystem und für das übrige System, diese Größen multipliziert mit den Massen ihrer Systeme und dividiert durch die Masse des Gesamtsystems. Diese Summe soll nach **344** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmte und solche Funktion der Zeit vorausgesetzt, für welche das Minimum der Summe eintritt (**436**); dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Lehrsatz 2. Wie ein freies, so bewegt sich auch ein ge- **439**
leitetes holonomes System in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Energie beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen kleiner wird für die wirkliche Bewegung, als für irgend eine andere Bewegung, welche den Bedingungsgleichungen genügt, und welche das System in der gleichen Zeit aus der gegebenen Anfangs- in die Endlage überführt.

Denn das Zeitintegral der Energie des vollständigen Systems ist gleich der Summe der entsprechenden Größen für das Teilsystem und für das übrige System. Diese Summe soll nach **358** ein Minimum sein; der zweite Summand wird als bereits bestimmt und als solcher vorausgesetzt, für welchen das Minimum der Summe eintritt; dieses Minimum wird also dann und nur dann erzielt, wenn der erste Summand zu einem Minimum gemacht wird.

Anmerkung 1. Die vorstehenden beiden Lehrsätze (**438**, **440**
439) enthalten offenbar die Anpassung der Sätze **344** und **358** an die besonderen Voraussetzungen dieses Abschnittes. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik können wir ihren Inhalt in die Form der Aussage kleiden: Der Satz von der kleinsten Beschleunigung und das Hamiltonsche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

Anmerkung 2. Die Sätze von der Energie, vom kürzesten **441**
Wege, von der kürzesten Zeit (**340**, **347**, **352**) lassen sich nicht in gleich unmittelbarer Weise den Voraussetzungen der geleiteten Systeme anpassen. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik nimmt diese Aussage die Form an: Das

Prinzip der Energie und das Prinzip der kleinsten Wirkung verlieren ihre Gültigkeit, wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

442 **Aufgabe.** Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems anzugeben.

Es seien wieder m die Masse, die p_ϱ die Koordinaten und die f_ϱ die Beschleunigungen nach den p_ϱ für das geleitete System. Es seien ferner $\mathfrak{m}$ die Masse und die $\mathfrak{p}_\varrho$ irgendwelche Koordinaten der übrigen materiellen Punkte des vollständigen Systems. Die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ können auch als Koordinaten des vollständigen Systems gelten; es mögen bei dieser Auffassung die Komponenten der Beschleunigung des vollständigen Systems nach diesen Koordinaten mit f'_ϱ und $\mathfrak{f}'_\varrho$ bezeichnet werden. Dann ist die Bewegung des vollständigen Systems eindeutig bestimmt durch seine h Bedingungsgleichungen von der Form **434a** und durch $r + \mathfrak{r}$ Bewegungsgleichungen von der Form (**372**):

a) $$(m + \mathfrak{m}) f'_\varrho + \sum_1^h {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0$$

b) $$(m + \mathfrak{m}) \mathfrak{f}'_\varrho + \sum_1^h {}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad .$$

Nun haben wir nach der Voraussetzung uns die $\mathfrak{p}_\varrho$ bereits bestimmt zu denken als solche Funktionen der Zeit, durch welche die Gleichungen **b)** identisch erfüllt werden, und durch deren Einsetzen die h Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems übergehen in die k Bedingungsgleichungen (**434b**) des geleiteten Systems. Ferner haben wir nach **255**:

c) $$(m + \mathfrak{m}) f'_\varrho = m f_\varrho \quad .$$

Hiernach erhalten wir als zu berücksichtigende Gleichungen die r Bewegungsgleichungen:

d) $$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0$$

und die k Bedingungsgleichungen:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho + p_{\varkappa t} = 0 \quad , \qquad \text{e)}$$

welche $r+k$ Gleichungen nun eine Beziehung auf die unbekannten Massen des vollständigen Systems nicht mehr enthalten, welche zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ ausreichen, und welche daher die Lösung der gestellten Aufgabe bilden.

Folgerung 1. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines geleiteten Systems haben dieselbe Form wie diejenigen eines freien Systems. 443

In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir sagen, die Gültigkeit jener Form hänge nicht davon ab, ob die Bedingungsgleichungen des Systems die Zeit explizite enthalten oder nicht. Die Bewegungsgleichungen eines geleiteten Systems werden daher auch genau dieselben Umformungen zulassen, wie diejenigen eines freien Systems (**368** ff.); diejenigen Formen allerdings, welche alle Koordinaten als freie voraussetzen, werden ihre Anwendbarkeit verlieren.

Folgerung 2. Eine natürliche Bewegung eines geleiteten Systems ist eindeutig bestimmt durch Angabe der Lage und Geschwindigkeit des Systems zu einer bestimmten Zeit (vergl. **331**). 444

Bemerkung. Wie in einem freien, so ist in einem geleiteten System der Zwang des Systems gleich seiner Beschleunigung. 445

Denn wenn die sämtlichen Bedingungsgleichungen eines geleiteten Systems aufgelöst werden, so werden die materiellen Punkte des Systems freie Punkte und die Beschleunigung der natürlichen Bewegung des Systems gleich Null (**385**).

Lehrsatz 1. Wie in einem freien, so ist in einem geleiteten System die Größe des Zwanges in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere 446 mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt.

Der Satz folgt aus **445** und **438**.

447 **Lehrsatz 2.** Wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, so steht auch bei der natürlichen Bewegung eines geleiteten Systems die Richtung des Zwanges beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Der Satz folgt aus **445** und **442** wie in **392**.

448 **Anmerkung.** Die vorstehenden beiden Sätze **446** und **447** enthalten die Anpassung der Sätze **388** und **392** an die besonderen Verhältnisse der geleiteten Systeme. In der gewöhnlichen Ausdrucksweise der Mechanik würden wir ihren Inhalt in der Fassung wiedergeben: Das Gausssche Prinzip des kleinsten Zwanges und das d'Alembertsche Prinzip behalten ihre Gültigkeit, auch wenn die Bedingungsgleichungen eines Systems die Zeit explizite enthalten.

449 **Bemerkung.** Wenn die Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ des vollständigen Systems, welche in den Gleichungen **434a** mit den p_ϱ in denselben Gleichungen auftreten, nicht Funktionen der Zeit, sondern konstant in derselben sind, so nehmen die Bedingungsgleichungen des geleiteten Systems die Form an:

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

worin die $p_{\varkappa\varrho}$ die Zeit nicht enthalten. Das geleitete System erscheint in diesem Falle als ein gesetzmäßiges, aber es hört nicht notwendig auf, ein unfreies zu sein, da die $p_{\varkappa\varrho}$ Funktionen des absoluten Ortes sein können, während sie in den Bedingungsgleichungen eines freien Systems von der absoluten Lage unabhängig sind.

In solchen unfreien, aber gesetzmäßigen Systemen behält der Begriff der geradesten Bahn seine Anwendbarkeit. Auch das Grundgesetz ist daher auf solche Systeme unmittelbar anwendbar, und es gelten daher für ein solches System auch alle Lehrsätze, welche für die Bewegung eines freien Systems auf-gestellt wurden, mit alleiniger Ausnahme derjenigen, welche sich auf die absolute Lage beziehen, also allein mit Ausnahme des Lehrsatzes 400 und seiner Folgerungen.

II. Systeme durch Kräfte beeinflußt.

Definition. Zwei materielle Systeme heißen direkt gekoppelt, wenn eine oder mehrere Koordinaten des einen einer oder mehreren Koordinaten des andern dauernd gleich sind. Gekoppelt schlechthin heißen zwei Systeme, wenn ihre Koordinaten so gewählt werden können, daß die Systeme in das Verhältnis der direkten Koppelung treten. Gekoppelte Systeme, welche nicht direkt gekoppelt sind, heißen indirekt gekoppelt. 450

Folgerung 1. Die Koppelung zweier Systeme ist eine Beziehung zwischen beiden, welche unabhängig von unserer Willkür, insbesondere unabhängig von der Wahl der Koordinaten besteht. Ob aber eine bestehende Koppelung eine direkte oder eine indirekte sei, hängt ab von der Wahl der Koordinaten, ist also eine Frage unserer willkürlichen Auffassung. 451

Folgerung 2. Jede bestehende Koppelung zwischen zwei Systemen kann durch geeignete Wahl der Koordinaten zu einer direkten gemacht werden. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so setzen wir im folgenden voraus, daß dies geschehen sei. Die beständig gleichen Koordinaten der gekoppelten Systeme bezeichnen wir dann auch als ihre gemeinsamen Koordinaten. 452

Folgerung 3. Jedes von zwei gekoppelten Systemen ist durch die Koppelung notwendig ein unfreies System, beide bilden aber zusammen oder zusammen mit weiteren Systemen, mit welchen sie gekoppelt sind, ein freies System. Wenn nicht ausdrücklich das Gegenteil bemerkt ist, so wird im folgenden angenommen, daß eine Koppelung mit mehreren Systemen nicht stattfindet, so daß die beiden gekoppelten Systeme zusammen bereits ein freies bilden. 453

Analytische Darstellung. Sind die p_ϱ die Koordinaten des 454
einen, die $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des andern Systems, so wird

eine Koppelung zwischen beiden Systemen dadurch hergestellt, daß für ein oder mehrere Wertpaare von ϱ und σ p_ϱ gleich $\mathfrak{p}_\sigma$ gemacht wird. Wir können aber offenbar ohne Beschränkung der Allgemeinheit die Indizes so verteilen, daß übereinstimmende Koordinaten in beiden Systemen denselben Index erhalten. Diese Systeme sind dann gekoppelt, wenn für einen oder mehrere Werte von ϱ dauernd

a) $$\mathfrak{p}_\varrho - p_\varrho = 0$$

wird, von welcher Gleichung die Gleichungen

b) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \qquad \text{oder}$$

c) $$d\mathfrak{p}_\varrho - dp_\varrho = 0$$

notwendige Folgen sind.

455 **Definition.** Unter einer Kraft verstehen wir den selbständig vorgestellten Einfluß, welchen das eine von zwei gekoppelten Systemen zufolge des Grundgesetzes auf die Bewegung des andern ausübt.

456 **Folgerung.** Zu jeder Kraft gibt es stets notwendig eine Gegenkraft.

Denn die Vorstellung des Einflusses, welchen das in der Definition als das zweite bezeichnete System auf das erste ausübt, ist nach der Definition selbst wieder eine Kraft. Kraft und Gegenkraft sind gleichberechtigt in dem Sinne, daß nach Willkür jede von ihnen als die Kraft oder auch als die Gegenkraft aufgefaßt werden kann.

457 **Aufgabe.** Einen Ausdruck für den Einfluß anzugeben, welche das eine von zwei gekoppelten Systemen auf die Bewegung des andern ausübt.

Es seien m die Masse und die r Größen p_ϱ die Koordinaten des ersten Systems; es seien die k Gleichungen

a) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0$$

wieder die Bedingungsgleichungen desselben. Es seien $\mathfrak{m}$ die Masse und die $\mathfrak{r}$ Größen $\mathfrak{p}_\varrho$ die Koordinaten des zweiten Systems; es seien die $\mathfrak{k}$ Gleichungen **(457)**

$$\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\,\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \qquad \textbf{b)}$$

die Bedingungsgleichungen desselben. Es mögen ferner zwischen beiden, für einen oder mehrere, nämlich h Werte von ϱ, Koppelungsgleichungen von der Form

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \qquad \textbf{c)}$$

bestehen. Wir betrachten nun die Bewegung des ersten Systems unter dem Einflusse des zweiten, und behandeln es dabei als geleitetes System. Soweit die p_ϱ in den Gleichungen **c)** nicht vorkommen, sind die Beschleunigungen nach ihnen gegeben durch die Gleichungen (**442**):

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = 0 \quad ; \qquad \textbf{d)}$$

für diejenigen p_ϱ aber, welche in **c)** vorkommen, haben wir auch diese Gleichungen zu berücksichtigen und also den Faktor von $\dot{p}_\varrho$ in denselben, nämlich -1, zu multiplizieren mit einem unbestimmten Faktor, welcher P_ϱ heißen möge, und das Produkt der linken Seite hinzuzufügen; für diese p_ϱ wird also:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa - P_\varrho = 0 \quad . \qquad \textbf{e)}$$

Das Eintreten der h Größen P_ϱ in die Bewegungsgleichungen vermehrt die Zahl der Unkekannten in denselben um h, und zur Bestimmung dieser h Größen ist auch die Zahl der Bedingungsgleichungen um die h Gleichungen **c)** vermehrt, in welchen wir uns die $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ als Funktionen der Zeit explizite gegeben denken müssen. Nehmen wir aber an, die Größen P_ϱ

rechnen nicht zu den Unbekannten, sondern seien uns als Funktionen der Zeit unmittelbar gegeben, alsdann sind die h Gleichungen **c)** und jede Kenntnis der $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ und des zweiten Systems überhaupt entbehrlich, und die $k+r$ Gleichungen **a) d) e)** genügen wiederum zur eindeutigen Bestimmung der $k+r$ Unbekannten $P_\varkappa$ und $\ddot{p}_\varrho$. Die h Multiplikatoren P_ϱ stellen also den Einfluß des zweiten Systems auf das erste vollständig dar, und ihre Gesamtheit kann als ein analytischer Ausdruck für diesen Einfluß angesehen werden, wie ihn die Aufgabe verlangt.

458 **Zusatz 1.** Wollen wir in symmetrischer Weise den Einfluß des ersten Systems auf das zweite darstellen, so haben wir die Koppelungsgleichungen zu schreiben in der Form:

a) $$\dot{p}_\varrho - \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

und es werden nun für diejenigen $\mathfrak{p}_\varrho$, welche sich in **a)** nicht finden, die Bewegungsgleichungen:

b) $$\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \mathfrak{P}_\varkappa = 0 \quad ,$$

während sie für die übrigen $\mathfrak{p}_\varrho$ die Form annehmen:

c) $$\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\varrho = 0 \quad ,$$

unter den $\mathfrak{P}_\varrho$ die unbestimmten Multiplikatoren der Gleichungen **a)** verstanden. Die Gesamtheit der $\mathfrak{P}_\varrho$ gibt uns einen Ausdruck für den Einfluß, welchen das erste System in jedem Augenblick auf die Bewegung des zweiten ausübt.

459 **Zusatz 2.** Offenbar können wir alle Bewegungsgleichungen des ersten Systems in der Form:

a) $$m\,f_\varrho + \sum_1^{k}{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa - P_\varrho = 0$$

und alle Bewegungsgleichungen des zweiten Systems in der Form:

$$\mathfrak{m}\,\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho}\, \mathfrak{P}_\varkappa - \mathfrak{P}_\varrho = 0 \qquad \text{b)}$$

schreiben, wenn wir in zulässiger, wenn auch willkürlicher Weise festsetzen, daß für alle nicht gekoppelten Koordinaten die Größen P_ϱ und $\mathfrak{P}_\varrho$ den Wert Null haben sollen. Allerdings verliert die Gesamtheit der P_ϱ und $\mathfrak{P}_\varrho$ dabei ihre Bedeutung als System der Multiplikatoren der Gleichungen **457c** und **458a**, aber sie behält ihre Bedeutung als Ausdruck des Einflusses, welchen das eine System auf das andere ausübt.

Analytische Darstellung der Kraft. Wir können und wollen daher im Einklang mit der Definition **455** festsetzen, daß die Gesamtheit der für alle p_ϱ nach **459** eindeutig bestimmten Größen P_ϱ den analytischen Ausdruck für die Kraft bilden solle, welche das System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das System der p_ϱ ausübt. Entsprechend bildet dann die Gesamtheit der Größen $\mathfrak{P}_\varrho$ den analytischen Ausdruck für die Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt. Die einzelnen Größen P_ϱ bez. $\mathfrak{P}_\varrho$ heißen die Komponenten der Kraft nach den entsprechenden Koordinaten p_ϱ bez. $\mathfrak{p}_\varrho$, auch wohl kurz die Kräfte nach diesen Koordinaten. **460**

Durch diese Bestimmung setzen wir uns zugleich in Einklang mit der bestehenden Bezeichnung der Mechanik, und die Notwendigkeit, diesen Einklang herzustellen, rechtfertigt hinreichend, warum wir unter mehreren zulässigen Bestimmungen gerade diese getroffen haben.

Folgerung 1. Die Kraft, welche ein System auf ein zweites ausübt, kann betrachtet werden als eine Vektorgröße in bezug auf das zweite System, als eine Vektorgröße nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten nach solchen Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben. **461**

462 **Folgerung 2.** Die Kraft, welche ein System auf ein zweites ausübt, kann aber auch betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das erstere System, als eine Vektorgröße nämlich, deren Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten im allgemeinen von Null verschieden sind, deren Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten verschwinden, deren Komponenten in Richtungen aber, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, unbestimmt bleiben.

463 **Anmerkung.** Betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein System enthält also jede Kraft Komponenten, welche abhängen von der Wahl der Koordinaten, d. h. von unserer willkürlichen Auffassung. Es rührt dies daher, daß von der Wahl der Koordinaten die Mannigfaltigkeit derjenigen Bewegungen des Systems abhängt, welche wir überhaupt in Betracht ziehen, in deren Richtung wir also einen möglichen Einfluß zulassen wollen.

464 **Bemerkung 1.** Wird ein System nacheinander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und erleidet es dabei von diesen Systemen die gleiche Kraft, so ist seine Bewegung die gleiche, wie verschieden auch immer diese anderen Systeme unter sich sein mögen.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Bewegung eines Systems unter dem Einfluß oder der Einwirkung oder dem Angriff einer Kraft schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, von welchen sie ausgeht, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

465 **Bemerkung 2.** Wird ein System nacheinander mit mehreren anderen Systemen gekoppelt, und führt es dabei die gleiche Bewegung aus, so kann es dabei auf jene anderen Systeme gleiche Kraft ausüben, obwohl jene Systeme unter sich vollkommen verschieden sein können.

Wir reden daher auch (entsprechend der Definition 455) von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, schlechthin, ohne der anderen Systeme zu erwähnen, auf welche jene Kraft ausgeübt wird, und ohne welche sie nicht denkbar wäre.

Bemerkung 3. Da aber alle Kräfte, von welchen schlechthin die Rede ist, doch keine anderen sein können, als welche von materiellen Systemen zufolge des Grundgesetzes auf materielle Systeme ausgeübt werden, so haben alle Kräfte von vornherein gewisse Eigenschaften gemeinsam. Die Quelle aller solcher gemeinsamen Eigenschaften sind die Eigenschaften der materiellen Systeme und das Grundgesetz. 466

Wirkung und Gegenwirkung.

Bezeichnung. 1. Die Komponenten der Kraft, welche das System der $\mathfrak{p}_\varrho$ auf das der p_ϱ ausübt, betrachtet als Vektor- 467
größen in bezug auf das System der p_ϱ, haben wir in 460 bereits bezeichnet mit P_ϱ. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, so wollen wir ihre Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen mit $\mathfrak{P}'_\varrho$. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$P_\varrho = \mathfrak{P}'_\varrho \quad .$$

2. Die Komponenten der Kraft, welche das System der p_ϱ auf das der $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt, betrachtet als Vektorgrößen in bezug auf das System der $\mathfrak{p}_\varrho$, haben wir in 460 bereits bezeichnet mit $\mathfrak{P}_\varrho$. Betrachten wir dieselbe Kraft als Vektorgröße in bezug auf das System der p_ϱ, so wollen wir ihre Komponenten nach den p_ϱ bezeichnen mit P'_ϱ. Identisch ist dann für alle gemeinsamen Koordinaten:

$$\mathfrak{P}_\varrho = P'_\varrho \quad .$$

Die auf ein System ausgeübten Kräfte sind also durch nicht akzentuierte, die von dem System ausgeübten Kräfte durch akzentuierte Buchstaben bezeichnet, sobald wir sie als Vektorgrößen in bezug auf das System selbst betrachten.

Lehrsatz. Kraft und Gegenkraft sind einander stets ent- 468
gegengesetzt gleich. Es soll damit gesagt sein, daß die Komponenten beider nach jeder der benutzten Koordinaten entgegengesetzt gleich sind, und zwar sowohl wenn wir Kraft

(468) und Gegenkraft betrachten als Vektorgrößen in bezug auf das eine, als auch in bezug auf das andere System.

Denn wir können auch die beiden gekoppelten Systeme (457) betrachten als ein einziges, freies System. Seine Masse ist $m + \mathfrak{m}$, seine Koordinaten sind die p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$. Seine Bedingungsgleichungen sind die Gleichungen **457a** und **b** und die Koppelungsgleichungen, etwa in der Form **457c**. Bezeichnen wir nunmehr die Multiplikatoren jener Gleichungen **a)** mit $P_\varkappa^0$, die der Gleichungen **b)** mit $\mathfrak{P}_\varkappa^0$, die die Gleichungen **c)** mit P_ϱ^0, so nehmen die Bewegungsgleichungen des gesamten Systems (vergl. **442**) die Form an:

a) $$m f_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa^0 - P_\varrho^0 = 0 \quad ,$$

b) $$\mathfrak{m}\mathfrak{f}_\varrho + \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{P}_\varkappa^0 + P_\varrho^0 = 0 \quad ,$$

in welchen für die Koordinaten, welche in den Koppelungsgleichungen nicht vorkommen, die P_ϱ^0 gleich Null zu setzen sind.

Die durch diese Gleichungen dargestellte Bewegung ist nun aber dieselbe, welche wir vorhin als Bewegung der einzelnen Systeme betrachteten. Eine mögliche Lösung der gegenwärtigen Gleichungen erhalten wir also, wenn wir für die f_ϱ und $\mathfrak{f}_\varrho$ ihre früheren Werte setzen, wenn wir machen

c) $$P_\varkappa^0 = P_\varkappa \quad , \quad \mathfrak{P}_\varkappa^0 = \mathfrak{P}_\varkappa \quad ,$$

außerdem in **a)**

d) $$P_\varrho^0 = \quad P_\varrho$$

und in **b)**

e) $$P_\varrho^0 = -\mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Aber da durch die Gleichungen **a)** und **b)** die unbestimmten Multiplikatoren eindeutig bestimmt sind, so ist diese mögliche Lösung zugleich die einzig mögliche Lösung. Daher gelten die Gleichungen d) und e) mit Notwendigkeit; aus ihnen folgt:

$$P_\varrho = -\mathfrak{P}_\varrho \quad , \qquad \text{f)}$$

oder mit Benutzung der Bezeichnung **467**:

$$P_\varrho = -P'_\varrho$$
$$\mathfrak{P}_\varrho = -\mathfrak{P}'_\varrho \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Der vorstehende Lehrsatz entspricht der 469
Lex tertia Newtons und wird auch wohl das Prinzip der Reaktion genannt. Doch deckt sich sein Inhalt nicht vollständig mit dem Inhalt jenes dritten Gesetzes, sondern das genaue Verhältnis ist das folgende:

Das Newtonsche Gesetz enthält unsern Lehrsatz **468** vollständig, nach der Absicht des Begründers, wie die dem Gesetze beigefügten Beispiele zeigen.

Das Newtonsche Gesetz enthält aber mehr. Wenigstens wird es auch allgemein angewandt auf die Wirkung von Fernkräften, d. h. von Kräften zwischen Körpern, welche keine gemeinsamen Koordinaten haben. Solche Kräfte aber kennt unsere Mechanik nicht. Damit man also beispielsweise aus unserem Lehrsatze die Folgerung ziehen könne, daß ein Planet die Sonne mit gleicher Kraft anziehe wie diese ihn, ist nötig, daß nähere Angaben über die Natur des Zusammenhanges zwischen beiden Körpern gemacht werden.

Anmerkung 2. Es darf aber als fraglich bezeichnet wer- 470
den, ob der Überschuß dieser Anwendung des Reaktionsprinzipes über den Inhalt des Lehrsatzes **468** nach Form und Inhalt mit Recht zu den Grundgesetzen der Mechanik könne gerechnet werden, und ob nicht vielmehr der wesentliche und allgemein gültige Inhalt jenes Prinzipes bereits durch den Lehrsatz **468** erschöpft werde.

Was die Form anlangt, so ist offenbar die Fassung des dritten Gesetzes, sobald es auf Fernkräfte angewandt wird, nicht völlig klar bestimmt. Denn wenn Kraft und Gegenkraft an verschiedenen Körpern angreifen, so ist nicht schlechthin deutlich, was unter entgegengesetzter Richtung zu verstehen sei. Dies tritt zum Beispiel hervor, wenn es sich um die Wechselwirkung zwischen Stromelementen handelt.

Was den Inhalt anlangt, so stellt die Anwendung des Reaktionsprinzipes auf die Fernkräfte der gewöhnlichen Mechanik offenbar eine Erfahrungstatsache dar, über deren genaues Zutreffen in allen Fällen man anfängt zweifelhaft zu werden. So ist die Elektrodynamik bereits fast überzeugt davon, daß die Wechselwirkung zwischen bewegten Magneten dem Prinzip nicht in allen Fällen genau unterworfen sei.

Zusammensetzung der Kräfte.

471 **Lehrsatz.** Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Systemen gekoppelt, so ist die Kraft, welche die Gesamtheit jener Systeme auf das erste System ausübt, gleich der Summe der Kräfte, welche die einzelnen Systeme auf dasselbe ausüben.

Es sei nämlich das System 1 von der Masse m und den Koordinaten p_ϱ, dessen Bedingungsgleichungen die k Gleichungen

a) $$\sum_1^r{}_\varrho \, p_{\varkappa\varrho}\dot{p}_\varrho = 0$$

sind, gleichzeitig gekoppelt mit den Systemen 2, 3, usw., deren Koordinaten die $\mathfrak{p}_\varrho''$, $\mathfrak{p}_\varrho'''$, usw. sind.

Betrachten wir die Systeme 2, 3, usw. zunächst als getrennte Systeme, so sind die Koppelungsgleichungen für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ zu schreiben in der Form:

b) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho'' - \dot{p}_\varrho = 0$$

c) $$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho''' - \dot{p}_\varrho = 0$$

usw.

Behandeln wir nun das aus 1, 2, 3, usw. zusammengesetzte System als freies und bezeichnen wieder die Multiplikatoren

der Gleichungen a) mit $P_\varkappa$, dagegen die von b) mit P_ϱ'', die (471)
von c) mit P_ϱ''', usw., so erhalten wir die Bewegungsgleichungen des Systems 1 in der Form:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa - P_\varrho'' - P_\varrho''' - \text{usw.} = 0 \quad , \qquad \text{d)}$$

worin die sämtlichen P_ϱ'', P_ϱ''', usw. ebenso wie die $P_\varkappa$ eindeutig bestimmte Größen sind. Die P_ϱ'', P_ϱ''', usw. stellen die Komponenten der Kräfte dar, welche die einzelnen Systeme 2, 3, usw. auf das System 1 ausüben.

Betrachten wir nun aber zweitens die Systeme 2, 3, usw. zusammen als ein System, so können die nach Gleichungen b) c) usw. gleichen Größen $\mathfrak{p}_\varrho''$, $\mathfrak{p}_\varrho'''$, usw. als eine einzige Koordinate $\mathfrak{p}_\varrho$ desselben angesehen werden, und an Stelle jener Koppelungsgleichungen tritt dann für jede gemeinsame Koordinate p_ϱ die eine Gleichung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho - \dot{p}_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{e)}$$

Ist P_ϱ der Multiplikator derselben, und bezeichnen wir mit $P_\varkappa^0$ die Multiplikatoren der Gleichungen a), welche dem jetzigen System der Bewegungsgleichungen entsprechen, so nehmen diese die Form an:

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}^\varkappa p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa^0 - P_\varrho = 0 \quad . \qquad \text{f)}$$

Die P_ϱ stellen die Komponenten der Gesamtkraft dar, welche auf das System 1 wirkt.

Die verschiedene Auffassung kann nun die nach dem Grundgesetze erfolgende Bewegung selbst nicht ändern. Eine mögliche Lösung der Gleichungen f) erhalten wir daher, indem wir mit Benutzung der früheren Lösung setzen:

$$P_\varkappa^0 = P_\varkappa \qquad \text{g)}$$

$$P_\varrho = P_\varrho'' + P_\varrho''' + \text{usw.} \qquad \text{h)}$$

Aber da es nur eine einzige mögliche Lösung gibt, so ist die vorstehende eben diese, und die Gleichung **h)**, welche unsere Behauptung enthält, muß mit Notwendigkeit zutreffen.

472 **Folgerung 1.** Eine jede Zahl von Kräften, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefaßt werden als eine einzige Kraft, und zwar als diejenige Kraft, welche als Vektorgröße in bezug auf das System betrachtet gleich der Summe jener Kräfte ist.

Fassen wir eine Zahl von Kräften in dieser Weise auf, so sagen wir, daß wir sie zusammensetzen. Das Ergebnis der Zusammensetzung nennen wir auch die Resultante der einzelnen Kräfte.

473 **Folgerung 2.** Eine jede Kraft, welche auf ein System wirkt, oder welche von einem System ausgeübt wird, kann aufgefaßt werden als Summe einer beliebigen Zahl von Kräften, und zwar jeder Zahl von Kräften, deren Summe als Vektorgrößen in bezug auf das System gleich jener ursprünglichen Kraft ist.

Fassen wir eine Kraft in dieser Weise auf, so sagen wir, daß wir sie zerlegen; die Kräfte, welche das Ergebnis einer solchen Zerlegung sind, nennen wir die Komponenten der ursprünglichen Kraft.

474 **Anmerkung.** Die geometrischen Komponenten einer Kraft nach den Koordinaten können zugleich als Komponenten derselben im Sinne von **473** aufgefaßt werden.

475 **Definition.** Eine Kraft, welche von einem einzelnen materiellen Punkte ausgeübt wird, oder welche auf einen einzelnen materiellen Punkt wirkt, heißt eine Elementarkraft.

476 **Anmerkung.** Die elementare Mechanik versteht gewöhnlich unter Kräften nur Elementarkräfte. Im Gegensatz zu denselben bezeichnet man dann wohl die bisher von uns betrachteten allgemeineren Kraftformen als LAGRANGEsche Kräfte. Man könnte dementsprechend die Elementarkräfte selbst auch passend als GALILEIsche oder NEWTONsche Kräfte bezeichnen.

477 **Folgerung 1.** Jede Elementarkraft ist darstellbar durch die geometrische Verrückung eines Punktes, also durch eine nach Größe und Richtung gegebene Strecke.

Denn jede Elementarkraft ist Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen Punkt.

Folgerung 2. Die Zusammensetzung der Elementarkräfte, welche an demselben Punkte angreifen, geschieht nach der Methode der geometrischen Zusammensetzung und Zerlegung von Strecken. 478

Insbesondere setzen sich also zwei Kräfte, welche an demselben Punkte angreifen, zusammen zu einer einzigen Kraft, welche nach Größe und Richtung durch die Diagonale eines Parallelogramms dargestellt ist, dessen Seiten nach Größe und Richtung jene Kräfte darstellen (Parallelogramm der Kräfte).

Folgerung 3. Jede Lagrangesche Kraft ist darstellbar als eine Summe von Elementarkräften, also zerlegbar in Elementarkräfte. 479

Denn jede Verrückung eines Systems kann aufgefaßt werden als eine Summe von Verrückungen seiner einzelnen Punkte.

Folgerung 4. Die Komponenten einer Kraft nach den rechtwinkligen Koordinaten des Systems, auf welches die Kraft wirkt, oder welches die Kraft ausübt, können unmittelbar aufgefaßt werden als Elementarkräfte, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken. 480

Bewegung unter dem Einfluß von Kräften.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluß einer gegebenen Kraft zu bestimmen. 481

Die Auflösung folgt unmittelbar aus 457. Sind die P_ϱ die gegebenen Komponenten der wirkenden Kraft nach den p_ϱ, so benutze man die r Gleichungen

$$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho$$

zusammen mit den k Bedingungsgleichungen des Systems zur Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$, zu deren eindeutiger Bestimmung jene Gleichungen ausreichen.

482 **Anmerkung 1.** Die Bewegungsgleichungen eines Systems, auf welches Kräfte wirken, haben in den rechtwinkligen Koordinaten desselben die Form der $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu + \sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu} X_\iota = X_\nu \quad ,$$

wenn unter X_ν die Komponente der Kraft nach x_ν verstanden wird, und im übrigen die Bezeichnung von **368** benutzt wird.

483 **Anmerkung 2.** Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate, so nimmt die ihr entsprechende Bewegungsgleichung die einfache Form an:

$$m f_\varrho = P_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle p_ϱ freie Koordinaten, so nehmen alle Bewegungsgleichungen des Systems diese Form an, und diese r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Größen $\ddot{p}_\varrho$.

484 **Folgerung.** Die natürliche Bewegung eines materiellen Systems von einem bestimmten Augenblick an ist eindeutig bestimmt durch die Lage und Geschwindigkeit des Systems in jenem Augenblick und die Angabe der auf das System wirkenden Kraft für alle Zeiten von jenem Augenblick an (vergl. **331**, **444**).

485 **Lehrsatz.** Die Beschleunigung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte einem System erteilen, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Kräfte einzeln wirkend dem System erteilen würden.

Denn die Bewegungsgleichungen **481** sind linear in den f_ϱ und den $P_\varkappa$. Sind also die Wertsysteme $f_{\varrho_1} P_{\varkappa_1}$, $f_{\varrho_2} P_{\varkappa_2}$, usw. die Auflösungen dieser Gleichungen für die Kräfte P_{ϱ_1}, P_{ϱ_2}, usw., so ist das Wertsystem $f_{\varrho_1} + f_{\varrho_2} +$ usw., $P_{\varkappa_1} + P_{\varkappa_2} +$ usw. die Auflösung für die Kraft $P_{\varrho_1} + P_{\varrho_2} +$ usw.

486 **Anmerkung.** Der Inhalt des Lehrsatzes kann auch wiedergegeben werden in der Aussage, daß mehrere gleichzeitig wirkende Kräfte sich hinsichtlich der Beschleunigung, welche

sie erzeugen, nicht stören. Ohne einen besonderen Namen erhalten zu haben, ist dieser Satz seit GALILEIS Zeiten stets als Prinzip angenommen und benutzt worden.

Folgerung. Die Beschleunigung, welche eine resultierende Kraft einem System erteilt, ist gleich der Summe der Beschleunigungen, welche die Komponenten, einzeln wirkend, dem System erteilen würden (**472**, **473**). 487

Lehrsatz. Steht eine Kraft als Vektorgröße senkrecht auf jeder möglichen Verrückung eines materiellen Systems, so übt sie keinen Einfluß auf die Bewegung des Systems aus, — und umgekehrt. 488

Denn ist π eine solche Kraft, so haben ihre Komponenten π_ϱ nach den p_ϱ die Form (**250**):

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad .$$

Lassen wir nun diese Kraft neben der Kraft P auf das System wirken, so können die Bewegungsgleichungen in der Form geschrieben werden:

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} (P_\varkappa - \gamma_\varkappa) = P_\varrho \quad .$$

Bei der Auflösung dieser Gleichungen nach $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$ erscheinen also nur die $P_\varkappa$ vergrößert um die $\gamma_\varkappa$; die $\ddot{p}_\varrho$, welche allein die Bewegung bestimmen, erscheinen unverändert.

Umgekehrt: Ändert die Hinzufügung der Komponenten π_ϱ zu den rechten Seiten der Gleichungen 481 nicht die f_ϱ, sondern nur die $P_\varkappa$, so lassen sich die π_ϱ schreiben in der Form:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad ;$$

die Kraft π steht also senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems (**250**).

489 **Anmerkung.** Der Lehrsatz gibt die Bedingung an, welcher derjenige Teil einer als Vektorgröße betrachteten Kraft unterworfen ist, welcher von der Wahl der Koordinaten, also von unserer Willkür abhängt (**463**). Denn dieser Teil muß notwendig ein solcher sein, welcher in der wirklichen Bewegung nicht zur Geltung kommt.

490 **Folgerung.** Obgleich aus der Kenntnis der auf ein System wirkenden Kraft eindeutig geschlossen werden kann auf die Bewegung des Systems, so kann doch aus der Bewegung des Systems nicht eindeutig geschlossen werden auf die Kraft, welche das System beeinflußt.

491 **Aufgabe 2.** Die Kraft zu bestimmen, welche ein materielles System bei gegebener Bewegung ausübt.

Nach **467** bezeichnen wir mit P'_ϱ die Komponente der gesuchten Kraft nach der Koordinate p_ϱ; aus **468** und **481** folgt dann:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad .$$

In diesen Gleichungen sind die f_ϱ als gegeben zu betrachten, und zwar müssen sie in den Bedingungsgleichungen an sich genügen. Die Größen $P_\varkappa$ sind ebenfalls bestimmt, wenn auch dasjenige System gegeben wird, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist. Solange aber nur die Bewegung des Systems der p_ϱ gegeben ist, bleiben die $P_\varkappa$ unbekannt. Die Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, ist also allein durch die Angabe der Bewegung des Systems noch nicht völlig bestimmt, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, dessen Komponenten die Form haben:

$$\pi_\varrho = \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, \gamma_\varkappa \quad ,$$

und welcher daher auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrecht steht.

492 **Anmerkung.** Obwohl von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegung

des Systems eindeutig bestimmt sind, so sind doch die Komponenten in Richtung einer jeden möglichen Verrückung des Systems durch seine Bewegung eindeutig bestimmt.

Folgerung. Von der Kraft, welche ein bewegtes System ausübt, sind die Komponenten in Richtung einer jeden freien Koordinate des Systems durch die Bewegung eindeutig bestimmt. 493

Ist nämlich p_ϱ eine freie Koordinate, so verschwinden die $p_{\varkappa\varrho}$ und damit die unbestimmten Glieder, und es kann die Komponente der Kraft des Systems nach p_ϱ geschrieben werden in den Formen:

$$P'_\varrho = -mf_\varrho \qquad (491)\ \text{a)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) \qquad (291\text{a})\ \text{b)}$$

$$= \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (291\text{b})\ \text{c)}$$

$$= -\frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} - \dot{q}_\varrho \qquad (294).\ \text{d)}$$

Innerer Zwang.

Lehrsatz. Die Beschleunigung eines Systems materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, findet statt in Richtung der Kraft, welche auf das System wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Systems. 494

Denn wenn zwischen den n Punkten eines Systems keine Zusammenhänge bestehen, so ist für jede der $3n$ rechtwinkligen Koordinaten des Systems (482):

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu = \frac{X_\nu}{m} \quad ;$$

die linken Seiten der Gleichungen aber stellen die Komponenten der Beschleunigung des Systems nach den x_ν dar (275).

495 **Folgerung.** Die Beschleunigung eines einzelnen materiellen Punktes geschieht in Richtung der Kraft, welche auf den Punkt wirkt, und ihre Größe ist gleich der Größe der Kraft, dividiert durch die Masse des Punktes. (NEWTONS Lex secunda.)

496 **Anmerkung.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten eines materiellen Systems, auf welches eine Kraft wirkt, so weicht die Beschleunigung des Systems im allgemeinen ab von der durch den Lehrsatz **494** gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems ansehen, und die Abweichung selbst haben wir nach **385** als den inneren Zwang des Systems zu bezeichnen.

497 **Aufgabe.** Den inneren Zwang eines Systems zu bestimmen, welches sich unter dem Einfluß von Kräften bewegt.

Die wirkliche Komponente der Beschleunigung des Systems nach der allgemeinen Koordinate p_ϱ ist f_ϱ, die Komponente, welche nach Aufhebung der Bedingungsgleichungen eintreten würde, ist (**494**) P_ϱ/m, der Unterschied beider Größen, oder:

a) $$z_\varrho = f_\varrho - \frac{P_\varrho}{m} \quad ,$$

also die Komponente des Zwanges nach p_ϱ.

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reicht die Kenntnis der Komponenten desselben nach den p_ϱ im allgemeinen nicht aus (**245**). Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an, so erhalten wir für die Komponente nach x_ν:

b) $$z_\nu = \frac{1}{m}\left(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu\right) \quad ,$$

also die Größe z des Zwanges als die positive Wurzel der Gleichung (**244**):

c) $$\begin{aligned} mz^2 &= \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{1}{m_\nu}\left(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu\right)^2 \\ &= \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \left(\ddot{x}_\nu - \frac{X_\nu}{m_\nu}\right)^2 \quad . \end{aligned}$$

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges eines materiellen Systems unter dem Einfluß von Kräften ist wie bei einem freien System in jedem Augenblick kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in dem betrachteten Augenblick nach Lage und Geschwindigkeit mit jener zusammenfällt. 498

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der X_ν die Größe $\frac{1}{2} m z^2$ ein Minimum werde, erhalten wir nach derselben Methode wie in **155** die $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu + \sum_1^i{}_\iota \, x_{\iota\nu} X_\iota = 0 \quad ,$$

in welchen die X_ι i unbestimmte Multiplikatoren bezeichnen, welche zusammen mit den $3n$ Größen $\ddot{x}_\nu$ aus jenen $3n$ Gleichungen und den i Bedingungsgleichungen des Systems eindeutig zu bestimmen sind. Die vorstehenden Gleichungen aber ergeben dieselben Werte der $\ddot{x}_\nu$ und X_ι, wie die mit ihnen übereinstimmenden Gleichungen der natürlichen Bewegung (**482**).

Anmerkung. Der vorstehende Lehrsatz enthält das vollständige Gausssche Prinzip des kleinsten Zwanges. Wir können den Lehrsatz **388** als einen besonderen Fall desselben bezeichnen. Aber nach unserer ganzen Auffassung werden wir lieber jenen Lehrsatz als den allgemeinen ansehen und den vorliegenden als die Anpassung desselben an besondere, verwickeltere Verhältnisse betrachten. 499

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges steht bei der natürlichen Bewegung eines Systems unter dem Einfluß einer Kraft, wie bei der natürlichen Bewegung eines freien Systems, beständig senkrecht auf jeder möglichen oder virtuellen Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage. 500

Denn zufolge **497a** und **481** lassen sich die Komponenten des Zwanges nach den p_ϱ auch schreiben in der Form:

$$z_\varrho = -\frac{1}{m} \sum_1^k{}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa \quad ;$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (**250**) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems.

501 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit δp_ϱ die Änderungen der Koordinaten p_ϱ für irgend eine beliebige mögliche Verrückung des Systems, so können wir den vorstehenden Satz in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden (vergl. **393**):

a) $$\sum_1^r{}_\varrho \left(f_\varrho - \frac{P_\varrho}{m}\right) \delta p_\varrho = 0 \quad ,$$

welche unter Anwendung rechtwinkliger Koordinaten die Form annimmt:

b) $$\sum_1^{3n}{}_\nu \left(m_\nu \ddot{x}_\nu - X_\nu\right) \delta x_\nu = 0 \quad .$$

502 **Anmerkung.** Der Lehrsatz **500** enthält das vollständige D'ALEMBERTsche Prinzip, die Gleichungen **501a** und **b** die gewöhnliche Fassung desselben. Über das Verhältnis des Satzes **500** zu dem Satz **392** ist dasselbe zu bemerken, wie unter **499**.

503 **Folgerung 1.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung einer jeden möglichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach dieser Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

Denn die Komponente des Zwanges nach der Richtung jeder möglichen Bewegung verschwindet.

504 **Folgerung 2.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems in Richtung seiner wirklichen Bewegung ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

505 **Folgerung 3.** Die Komponente der Beschleunigung eines materiellen Systems nach jeder freien Koordinate des Systems ist gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

506 **Lehrsatz.** Bei der natürlichen Bewegung eines materiellen Systems unter dem Einfluß von Kräften ist die Komponente der Beschleunigung nach jeder Koordinate der absoluten

Lage beständig gleich der Komponente der wirkenden Kraft nach der gleichen Richtung, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch der innere Zusammenhang des Systems ist.

Folgerung 1. Wählen wir die Koordinaten eines Systems 507
übrigens beliebig, jedoch so, daß sich unter ihnen sechs Koordinaten der absoluten Lage finden, so können wir bei vorhandener Kenntnis der auf das System wirkenden Kräfte, aber ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs des Systems doch stets sechs der Bewegungsgleichungen des Systems angeben.

Folgerung 2. Treffen wir insbesondere über die Koordi- 508
naten der absoluten Lage dieselbe Verfügung wie in **402** und wenden den Lehrsatz zunächst an auf die Richtung der 3 Koordinaten $\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3$, so ergibt er uns die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu} = \sum_1^n{}^{\nu}\, X_{3\nu}$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-1} = \sum_1^n{}^{\nu}\, X_{3\nu-1}$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, m_\nu \ddot{x}_{3\nu-2} = \sum_1^n{}^{\nu}\, X_{3\nu-2} \quad .$$

Diese drei Gleichungen, welche sich dahin interpretieren lassen, daß der Schwerpunkt sich so bewegt, als sei die ganze Masse des Systems in ihm vereinigt, und griffen an ihm alle Elementarkräfte an, bilden das sogenannte erweiterte Prinzip des Schwerpunkts. (Vergleiche **404**.)

Folgerung 3. Angewandt auf die Richtung der drei Ko- 509
ordinaten der absoluten Lage $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$ ergibt der Lehrsatz die drei Gleichungen:

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, m_\nu (x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu-2}) = \sum_1^n{}^{\nu}\, (x_{3\nu-2}X_{3\nu-1} - x_{3\nu-1}X_{3\nu-2})$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, m_\nu (x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}\ddot{x}_{3\nu}) = \sum_1^n{}^{\nu}\, (x_{3\nu}X_{3\nu-2} - x_{3\nu-2}X_{3\nu})$$

$$\sum_1^n{}^{\nu}\, m_\nu (x_{3\nu-1}\ddot{x}_{3\nu} - x_{3\nu}\ddot{x}_{3\nu-1}) = \sum_1^n{}^{\nu}\, (x_{3\nu-1}X_{3\nu} - x_{3\nu}X_{3\nu-1}) \,.$$

Diese drei Gleichungen bilden das sogenannte erweiterte Prinzip der Flächen. (Vergleiche **406.**)

Energie, Arbeit.

510 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems vorgestellt als Folge einer auf das System ausgeübten Kraft, wird die Arbeit jener Kraft genannt.

Die Arbeit, welche eine Kraft in bestimmter Zeit leistet, wird gemessen durch die Zunahme der Energie des Systems, auf welches sie wirkt, in jener Zeit.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Vorhandenseins der Kraft rechnen wir als negative Zunahme. Die Arbeit einer Kraft kann also positiv oder negativ sein.

511 **Folgerung.** Während die auf ein System wirkende Kraft eine gewisse Arbeit leistet, leistet die von dem System ausgeübte Gegenkraft stets die entgegengesetzt gleiche Arbeit.

Denn die letztere Arbeit ist gleich der Zunahme der Energie desjenigen Systems, mit welchem das betrachtete gekoppelt ist; die Summe der Energien beider Systeme aber ist konstant.

512 **Lehrsatz.** Die Arbeit, welche die auf ein System wirkende Kraft während der Durchlaufung eines Bahnelements leistet, ist gleich dem Produkt aus der Länge des Elements und der Komponente der Kraft in seiner Richtung.

Denn die Zunahme dE der Energie während des Zeitelements dt, in welchem das Bahnelement ds zurückgelegt wird, ist (**283**):

$$dE = m\,v\,\dot{v}\,dt = m\,\dot{v}\,ds \quad .$$

Nach **280** ist aber $\dot{v}$ die Komponente der Beschleunigung des Systems in Richtung seiner Bahn, also nach **504** $m\dot{v}$ die Komponente der Kraft in Richtung der Bahn.

513 **Anmerkung 1.** Die in Rede stehende Arbeit ist mit demselben Rechte auch gleich dem Produkt aus der Größe der

Kraft und der in ihre Richtung fallenden Komponente des Bahnelements.

Anmerkung 1. Erleiden während der Durchlaufung des Bahnelements ds die Koordinaten p_ϱ die Änderungen dp_ϱ, so ist die Arbeit der wirkenden Kraft dargestellt durch die Gleichung: 514

$$dE = \sum_1^r{}_\varrho P_\varrho \, dp_\varrho \quad .$$

Denn die Komponente der Kraft in Richtung des Bahnelements ist gleich (247):

$$\sum_1^r{}_\varrho P_\varrho \frac{dp_\varrho}{ds} \quad .$$

Folgerung 1. Die Kraft, welche auf ein System wirkt, 515
leistet positive oder negative Arbeit, je nachdem der Winkel, welchen sie mit der Geschwindigkeit des Systems bildet, kleiner oder größer als ein rechter ist. Steht die Kraft senkrecht auf der Bewegungsrichtung, so leistet sie keine Arbeit.

Folgerung 2. Eine Kraft, welche auf ein ruhendes Sy- 516
stem wirkt, leistet keine Arbeit.

Gleichgewicht, Statik.

Definition. Wir sagen, zwei oder mehrere Kräfte, welche 517
auf dasselbe System wirken, halten sich das Gleichgewicht, wenn eine jede von ihnen den Einfluß der anderen aufhebt, d. h. wenn unter dem Einfluß beider oder aller jener Kräfte das System sich so bewegt, als wäre keine von ihnen vorhanden.

Lehrsatz. Zwei oder mehrere Kräfte halten sich das 518
Gleichgewicht, wenn ihre Summe senkrecht steht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt.

Der Satz folgt unmittelbar aus 471 und 488.

519 **Symbolischer Ausdruck.** Bezeichnen wir mit P'_ϱ, P''_ϱ usw. die Komponenten der einzelnen Kräfte nach den p_ϱ, mit δp_ϱ die Änderungen der p_ϱ für irgend eine mögliche Verrückung des Systems, so können wir die Forderung des vorstehenden Satzes in die Gestalt der symbolischen Gleichung kleiden:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, (P'_\varrho + P''_\varrho + \text{usw.}) \, \delta p_\varrho = 0 \quad .$$

Vergleiche **393**, **501**.

520 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält das Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten (Verrückungen, Momente), die Gleichung **519** die gewöhnliche analytische Fassung desselben.

521 **Folgerung 1.** Halten sich mehrere Kräfte an einem System das Gleichgewicht, so verschwindet die Summe der von den Kräften geleisteten Arbeiten bei jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage, — und umgekehrt. (Prinzip der virtuellen Arbeit.)

Denn schreiben wir die Gleichung **519** in der Form:

$$\sum_1^r {}_\varrho \, P'_\varrho \, \delta p_\varrho + \sum_1^r {}_\varrho \, P''_\varrho \, \delta p_\varrho + \text{usw.} = 0 \quad ,$$

so ergibt sich nach **514** die Behauptung.

522 **Folgerung 2.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems.

523 **Folgerung 3.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten nach jeder freien Koordinate des Systems.

524 **Lehrsatz.** Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem System, so verschwindet die Summe ihrer Komponenten in Richtung einer jeden Koordinate der abso-

luten Lage, welches auch immer der innere Zusammenhang des Systems sein möge.

Anmerkung. Auch ohne Kenntnis des inneren Zusammenhangs eines Systems können wir demnach doch stets 6 notwendige Bedingungsgleichungen für sein Gleichgewicht angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die 6 Größen $\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\omega_1\,\omega_2\,\omega_3$, welche wir in **402** einführten, so liefert uns der vorige Lehrsatz diejenigen 6 Gleichungen, welche dem Prinzip des Schwerpunkts und der Flächen entsprechen, und welche Lagrange im 3. Abschnitt § 1 und § 2 des ersten Teils der Mécanique analytique behandelt. 525

Bemerkung 1. Halten sich zwei oder mehr Kräfte in einer bestimmten Lage des Systems das Gleichgewicht bei einer gewissen Geschwindigkeit, so halten sich dieselben Kräfte in derselben Lage das Gleichgewicht auch bei jeder anderen Geschwindigkeit. 526

Denn die Bedingung des Gleichgewichts enthält nicht die wirkliche Geschwindigkeit des Systems.

Bemerkung 2. Halten sich zwei oder mehr Kräfte das Gleichgewicht an einem ruhenden System, so beharrt das System in seinem Zustand der Ruhe; und umgekehrt: Beharrt ein System trotz des Angriffs zweier oder mehrerer Kräfte in der Ruhe, so halten sich die Kräfte an dem System das Gleichgewicht. 527

Folgerung 1. Zwei Kräfte, welche, gleichzeitig an demselben ruhenden System angreifend, die Ruhe des Systems nicht stören, haben entgegengesetzt gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems. 528

Folgerung 2. Zwei Kräfte, welche, nacheinander auf dasselbe ruhende System zugleich mit denselben andern Kräften wirkend, das System in Ruhe lassen, haben gleiche Komponenten in Richtung jeder möglichen Bewegung des Systems. 529

Anmerkung. Auf den letzten beiden Folgerungen beruht die statische Vergleichung der Kräfte. 530

Maschinen und innere Kräfte.

531 **Definition.** Ein System, dessen Massen als verschwindend klein betrachtet werden gegen die Massen der Systeme, mit welchen es gekoppelt ist, wird eine Maschine genannt.

Eine Maschine ist also hinsichtlich ihres Einflusses auf die Bewegung der übrigen Systeme vollständig dargestellt durch ihre Bedingungsgleichungen; die Kenntnis des Ausdrucks der Energie der Maschine in ihren Koordinaten ist nicht erforderlich.

Einfach heißt eine Maschine, welche nur einen Grad der Bewegungsfreiheit hat.

532 **Lehrsatz.** Solange eine Maschine sich mit endlicher Geschwindigkeit bewegt, halten sich die auf die Maschine wirkenden Kräfte beständig das Gleichgewicht.

Denn ergäben diese Kräfte eine Komponente in Richtung irgend einer möglichen Bewegung der Maschine, so würde die Komponente der Beschleunigung in dieser Richtung wegen der verschwindenden Masse unendlich groß (**504**).

533 **Folgerung.** Zwischen den Komponenten der auf eine Maschine wirkenden Kräfte nach ihren Koordinaten besteht eine Anzahl homogener linearer Gleichungen, deren Zahl gleich der Zahl der Bewegungsfreiheiten der Maschine ist. Eine einfache Maschine wird vertreten durch eine einzige homogene lineare Gleichung zwischen den auf ihre Koordinaten wirkenden Kräften.

534 **Bemerkung 1.** Wird eine Maschine nach allen ihren Koordinaten gekoppelt mit zwei oder mehr materiellen Systemen, so kann die auf diese Art hergestellte mechanische Verbindung zwischen den letzteren analytisch dargestellt werden durch einen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten der verbundenen Systeme. Denn wir können in den Bedingungsgleichungen der Maschine die Koordinaten derselben ersetzen durch die ihnen gleichen Koordinaten der verbundenen Systeme.

Umgekehrt können wir daher auch jeden analytisch gegebenen Satz homogener linearer Differentialgleichungen zwischen den Koordinaten zweier oder mehrerer Systeme physikalisch deuten als eine mechanische Verbindung der angegebenen Art, welche wir bezeichnen als eine Koppelung jener Systeme durch die Maschine.

Folgerung. Sind zwei oder mehr Systeme durch eine 535
Maschine gekoppelt, so ist die von jedem der Systeme geleistete Arbeit engegengesetzt gleich der Summe der von den übrigen Systemen geleisteten Arbeit. Bei der Koppelung der Systeme mittels einer Maschine wird also Arbeit nicht gewonnen.

Denn die von den Systemen ausgeübten Kräfte halten sich an der Maschine das Gleichgewicht, die Summe der von ihnen geleisteten Arbeit ist also Null.

Bemerkung 2. Ein jedes materielle System kann auf 536
mannigfaltige Art aufgefaßt werden als bestehend aus zwei oder mehr Systemen, welche durch Maschinen gekoppelt sind. Denn teilen wir die Massen des Systems in mehrere Teile, und sind die p'_ϱ Koordinaten des ersten Teiles, die p''_ϱ Koordinaten des zweiten Teiles, usw., so können wir diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche nur die p'_ϱ enthalten, betrachten als Bedingungsgleichungen des ersten Teilsystems, diejenigen Gleichungen, welche nur die p''_ϱ enthalten, als Bedingungsgleichungen des zweiten Teilsystems, usw., während diejenigen Bedingungsgleichungen des vollständigen Systems, welche die p'_ϱ, p''_ϱ usw. gemischt enthalten, aufgefaßt werden als die Gleichungen der die Teilsysteme koppelnden Maschinen.

Die Kräfte, welche bei dieser zulässigen, wenn auch willkürlichen Auffassung auf die Teilsysteme von den sie koppelnden Maschinen ausgeübt werden, bezeichnen wir als innere Kräfte des Systems.

Folgerung 1. Ein jeder Satz innerer Kräfte kann einen 537
Teil des Zusammenhanges eines Systems ersetzen. Lassen wir nämlich diejenigen Bedingungsgleichungen des ganzen Systems fort, welche die Maschinen zwischen den Teilsystemen darstellen, behalten aber die von den Maschinen ausgeübten Kräfte bei, so bewegt sich das System wie vorher.

538 **Folgerung 2.** Der gesamte Zusammenhang eines Systems kann aufgelöst werden in und ersetzt werden durch eine Anzahl von Elementarkräften, welche auf die einzelnen materiellen Punkte des Systems wirken.

Denn wir können die einzelnen Punkte als Teilsysteme betrachten und das ganze System als Gesamtheit dieser durch Maschinen gekoppelten Teilsysteme.

539 **Folgerung 3.** Die inneren Kräfte, welche den Zusammenhang eines Systems vollständig oder teilweise ersetzen, halten sich, an dem ursprünglichen System angreifend, beständig das Gleichgewicht.

Denn sie halten sich nach **532** das Gleichgewicht an den Maschinen, welche Teile des ursprünglichen Systems bilden.

540 **Anmerkung.** Diese letztere Überlegung ist es, mit deren Hilfe in der gewöhnlichen Entwickelung der Mechanik der Übergang von den Gesetzen des Gleichgewichts (dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten) zu den Gesetzen der Bewegung (dem d'Alembertschen Prinzip) gemacht wird.

Messung der Kräfte.

541 Aus unseren Überlegungen ergeben sich im ganzen drei unabhängige Methoden, um diejenigen Komponenten der Kräfte unmittelbar zu messen, welche überhaupt Einfluß auf die Erscheinungen haben. Durch Anwendung einer jeden dieser drei Methoden können auch die Kräfte aus Rechnungsgrößen zu Gegenständen der unmittelbaren Erfahrung gemacht werden, d. h. zu Zeichen für bestimmte Verbindungen sinnlicher Empfindungen und Wahrnehmungen.

542 Die erste Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und Bewegungen des Systems, von welchem sie ausgeübt wird. Physikalisch wird diese Methode die Messung der Kraft nach ihrem Ursprunge genannt. Sie wird z. B. angewandt in der Annahme, daß gleich gespannte Federn, gleiche Mengen explodierenden Pulvers usw. unter übrigens gleichen Verhältnissen gleiche Kräfte ausüben.

Die zweite Methode bestimmt die Kraft aus den Massen und der Bewegung des Systems, auf welches sie wirkt. In der Physik wird diese Methode als die dynamische Messung der Kraft bezeichnet. Sie wurde z. B. von NEWTON angewandt, als er die auf die Planeten wirkende Kraft aus deren Bewegung ableitete. 543

Die dritte Methode bestimmt die Kraft, indem sie sie mit bekannten Kräften ins Gleichgewicht bringt. Diese Methode wird die statische genannt. Auf ihr beruhen z. B. alle Kräftemessungen mit der Wage. 544

Angewandt zur Bestimmung einer und derselben Kraft unter Beobachtung der von uns abgeleiteten Beziehungen müssen aber diese drei verschiedenen Methoden unter allen Umständen zu dem gleichen Resultate führen, wenn anders das Grundgesetz, auf welches sich unsere Überlegungen stützen, wirklich alle mögliche mechanische Erfahrung richtig zusammenfaßt. 545

Abschnitt 5. Systeme mit verborgenen Massen.

I. Cyklische Bewegung.

Definition 1. Cyklische Koordinate eines Systems heißt eine freie Koordinate des Systems dann, wenn die Länge einer unendlich kleinen Verrückung des Systems nicht von dem Werte der Koordinate, sondern nur von dem ihrer Änderung abhängt. 546

Anmerkung 1. Es gibt cyklische Koordinaten. Denn es genügt z. B. eine rechtwinklige Koordinate des Systems, wenn sie frei ist, der Voraussetzung. Cyklische Koordinaten können stets eingeführt werden, wenn unendlich kleine Verrückungen des Systems möglich sind, welche nicht eine Änderung der Massenverteilung im Raume zur Folge haben, sondern nur eine cyklische Vertauschung der Massen unter sich. 547

Daher der Name. Es können aber auch unter anderen Verhältnissen cyklische Koordinaten auftreten, wie es das Beispiel der rechtwinkligen Koordinaten zeigt.

548 **Anmerkung 2.** Die Energie eines Systems hängt nicht ab von dem Werte seiner cyklischen Koordinaten, sondern nur von deren Änderungsgeschwindigkeiten mit der Zeit.

549 **Definition 2.** Cyklisches System heißt ein materielles System, dessen Energie mit hinreichender Annäherung als eine homogene quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeiten seiner cyklischen Koordinaten erscheint.

Ein cyklisches System heißt ein monocyklisches, dicyklisches, usw., je nachdem es eine, zwei, usw. cyklische Koordinaten besitzt.

In einem cyklischen System werden die nicht cyklischen Koordinaten auch die Parameter des Systems genannt; die Änderungsgeschwindigkeiten der cyklischen Koordinaten nennen wir auch die cyklischen Intensitäten.

550 **Anmerkung 1.** Die Bedingung, deren angenäherte Erfüllung für cyklische Systeme erfordert wurde, kann mit Strenge überhaupt nicht erfüllt sein, abgesehen von dem Falle, daß das System nur cyklische Koordinaten besitzt.

Denn ist eine Größe Koordinate eines Systems, so bedingt ihre Änderung eine Verrückung mindestens eines materiellen Punktes des Systems; die Energie dieses Punktes ist also quadratische Funktion der Änderungsgeschwindigkeit jener Koordinate, und für die Energie des Systems gilt demnach das gleiche. Die Energie eines jeden Systems enthält daher in Strenge notwendig die Änderungsgeschwindigkeiten aller Größen, welche überhaupt Koordinaten des Systems sind, also auch die Energie eines cyklischen Systems die Änderungsgeschwindigkeiten seiner Parameter.

551 **Anmerkung 2.** Jene Bedingung für das Auftreten eines cyklischen Systems kann aber mit jedem beliebigen Grade der Annäherung erfüllt sein, sobald das System überhaupt cyklische Koordinaten besitzt.

Sie ist nämlich erfüllt in dem Falle, daß die Teile der Energie, welche die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter enthalten, verschwinden gegen die Teile, welche von den cyklischen Intensitäten abhängen, und dies kann stets dadurch erreicht werden, daß die Änderungsgeschwindigkeiten der Parameter hinreichend klein, oder daß die cyklischen Intensitäten hinreichend groß angenommen werden. Wie groß diese oder wie klein jene angenommen werden müssen, damit ein bestimmter Grad der Annäherung erzielt werde, hängt ab von den besonderen Werten der Koeffizienten im Ausdruck der Energie.

Im folgenden wird stets vorausgesetzt, daß die Bedingung der cyklischen Systeme mit so großer Annäherung erfüllt sei, daß wir so reden können, als sei sie genau erfüllt.

Bezeichnung. Wir bezeichnen die cyklischen Koordinaten des Systems mit $\mathfrak{p}_\varrho$, mit $\mathfrak{r}$ ihre Zahl, die Momente des Systems nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ mit $\mathfrak{q}_\varrho$. Die r nicht cyklischen Koordinaten des Systems mögen mit p_ϱ, die Momente nach ihnen mit q_ϱ bezeichnet werden. Die Masse des cyklischen Systems sei $\mathfrak{m}$. 552

Die äußeren Kräfte, welche auf das System wirken, mögen nach den p_ϱ die Komponenten P_ϱ, nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ die Komponenten $\mathfrak{P}_\varrho$ haben. Die Kräfte, welche das System selbst ausübt, haben dann nach den p_ϱ, beziehlich den $\mathfrak{p}_\varrho$ Komponenten, welche nach **467** mit P'_ϱ, beziehlich $\mathfrak{P}'_\varrho$ zu bezeichnen sind.

Folgerung 1. Die Energie $\mathfrak{E}$ eines cyklischen Systems kann geschrieben werden in den Formen (**286**): 553

$$\mathfrak{E} = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\,\dot{\mathfrak{p}}_\varrho\,\dot{\mathfrak{p}}_\sigma$$

$$= \frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\, \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\,\mathfrak{q}_\varrho\,\mathfrak{q}_\sigma \quad ,$$

in welchen die $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$ und $\mathfrak{b}_{\varrho\sigma}$ Funktionen allein der p_ϱ, nicht aber der $\mathfrak{p}_\varrho$ sind (**548**), übrigens aber dieselben Eigenschaften und denselben Zusammenhang haben, wie die $a_{\varrho\sigma}$ und $b_{\varrho\sigma}$ (**59** ff.).

Betrachten wir $\mathfrak{E}$ als Funktion der p_ϱ und der $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$, wie es die erste Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit $\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden; betrachten wir aber $\mathfrak{E}$ als Funktion der p_ϱ und der $\mathfrak{q}_\varrho$, wie es die zweite Form darstellt, so möge sein partielles Differential mit $\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}$ bezeichnet werden (vergl. **288**).

554 **Folgerung 2.** Für alle Werte des ϱ gelten die Gleichungen:

a) (289) $$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial \dot{p}_\varrho} = q_\varrho = 0 \quad ,$$

b) (290) $$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial q_\varrho} = \dot{p}_\varrho = 0 \quad ,$$

c) $$\frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\varrho} = 0 \quad ,$$

d) $$\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{p}_\varrho} = 0 \quad ,$$

Diese Gleichungen enthalten die charakteristischen Merkmale der cyklischen Systeme, und auf ihnen beruhen die besonderen Eigentümlichkeiten derselben.

Die Gleichung **b)** wiederholt die Bemerkung (**550**), daß ein Widerspruch besteht zwischen der Annahme, daß die Form der Energie genau die angenommene sei und daß gleichwohl die p_ϱ mit der Zeit veränderliche Größen seien. Wir haben die Gleichung gemäß **551** dahin zu deuten, daß, wenn $\mathfrak{E}$ sehr angenähert die gewählte Gestalt hat, die p_ϱ als langsam sich verändernde Größen betrachtet werden müssen.

Kräfte und Kräftefunktion.

555 **Aufgabe 1.** Die Kraft P'_ϱ zu bestimmen, welche das cyklische System nach seinem Parameter p_ϱ ausübt.

Zufolge der Gleichungen **493c**, **d** und **554a** erhalten wir:

a) $$P'_\varrho = \frac{\partial_{\mathfrak{p}}\mathfrak{E}}{\partial p_\varrho} = -\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial p_\varrho}$$

oder in entwickelter Form:

$$P'_\varrho = \frac{1}{2}\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\dot{\mathfrak{p}}_\tau \qquad \text{b)}$$

$$= -\frac{1}{2\mathfrak{m}}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{b}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\mathfrak{q}_\sigma\mathfrak{q}_\tau \quad . \qquad \text{c)}$$

Folgerung. Die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern sind unabhängig von den Änderungsgeschwindigkeiten dieser Parameter. 556

Vorausgesetzt ist jedoch immer, daß diese Änderungsgeschwindigkeiten nicht dasjenige Maß übersteigen, welches erlaubt, das System als ein cyklisches zu behandeln. So sind in der Elektrodynamik die Anziehungen zwischen Magneten zwar unabhängig von der Geschwindigkeit ihrer Bewegung, aber doch nur so lange, als diese Geschwindigkeit weit unterhalb der Lichtgeschwindigkeit liegt.

Aufgabe 2. Die Kraft $\mathfrak{P}'_\varrho$ zu bestimmen, welche das 557
cyklische System nach seiner cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}_\varrho$ ausübt.

Zufolge der Gleichungen **493c** und **554c** erhält man:

$$\mathfrak{P}'_\varrho = -\dot{\mathfrak{q}}_\varrho \quad . \qquad \text{a)}$$

Entwickelt, hat man, da (**270**)

$$\mathfrak{q}_\varrho = \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad , \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{P}'_\varrho = -\mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\ddot{\mathfrak{p}}_\sigma - \mathfrak{m}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma\dot{p}_\tau \quad . \qquad \text{c)}$$

Folgerung. Wirkt auf ein cyklisches System eine äußere 558
Kraft, deren Komponenten nach den $\mathfrak{p}_\varrho$ die $\mathfrak{P}_\varrho$ sind, so ändern sich die cyklischen Momente nach den Gleichungen:

$$\dot{\mathfrak{q}}_\varrho = \mathfrak{P}_\varrho \quad .$$

Lehrsatz. Wenn auf die cyklischen Koordinaten eines 559 cyklischen Systems keine Kräfte wirken, so sind die sämtlichen cyklischen Momente des Systems konstant in der Zeit.

Denn sind die $\mathfrak{P}_\varrho$ gleich Null, so ergeben die vorigen Gleichungen durch Integration

$$\mathfrak{q}_\varrho = \text{constans} \quad .$$

560 **Definition.** Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Momente konstant bleiben, heißt eine adiabatische Bewegung. Eine Bewegung eines cyklischen Systems, bei welcher seine cyklischen Intensitäten konstant bleiben, heißt eine isocyklische Bewegung.

Adiabatisch, beziehlich isocyklisch wird das cyklische System selbst genannt, wenn es gezwungen ist, keine anderen Bewegungen auszuführen, als nur adiabatische, beziehlich isocyklische.

561 **Anmerkung 1.** Die analytische Bedingung der adiabatischen Bewegung ist diese, daß für alle ϱ:

$$\dot{\mathfrak{q}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \mathfrak{q}_\varrho = \text{constans}$$

sei. Die analytische Bedingung der isocyklischen Bewegung ist diese, daß für. alle ϱ:

$$\ddot{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad , \qquad \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \text{constans}$$

sei.

562 **Anmerkung 2.** Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine adiabatische, sobald auf die cyklischen Koordinaten dauernd keine Kräfte wirken. Die Bewegung eines cyklischen Systems ist eine isocyklische, wenn es nach den cyklischen Koordinaten mit anderen Systemen gekoppelt ist, welche konstante Änderungsgeschwindigkeit der gekoppelten Koordinaten besitzen. Damit die Bewegung eine isocyklische sei, müssen also geeignete Kräfte auf die cyklischen Koordinaten wirken.

563 **Definition.** Lassen sich die Kräfte eines cyklischen Systems nach seinen Parametern darstellen als die partiellen

Differentialquotienten einer Funktion der Parameter und konstanter Größen, nach den Parametern, so heißt diese Funktion die Kräftefunktion des cyklischen Systems.

Lehrsatz. Sowohl für die adiabatische, als auch für die isocyklische Bewegung besteht eine Kräftefunktion. 564

Denn für die adiabatische Bewegung folgt aus **555c**:

$$P'_\varrho = -\frac{\partial}{\partial p_\varrho}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau\, \mathfrak{b}_{\sigma\tau}\frac{\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau}{2\mathfrak{m}} \quad , \qquad \text{a)}$$

und hierin sind die Größen $\mathfrak{q}_\sigma \mathfrak{q}_\tau / \mathfrak{m}$ Konstanten und die $\mathfrak{b}_{\sigma\tau}$ Funktionen lediglich der Parameter.

Entsprechend folgt für die isocyklische Bewegung aus **555b**:

$$P'_\varrho = \frac{\partial}{\partial p_\varrho}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\frac{\mathfrak{m}}{2}\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad , \qquad \text{b)}$$

und hierin sind wiederum die Größen $\mathfrak{m}\,\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \dot{\mathfrak{p}}_\tau$ Konstanten und die $\mathfrak{a}_{\sigma\tau}$ Funktionen lediglich der Parameter.

Anmerkung. Die Kräftefunktion für die adiabatische und für die isocyklische Bewegung unterscheiden wir auch wohl als adiabatische bez. isocyklische Kräftefunktion. Es gibt weitere Bewegungsformen des Systems, für welche Kräftefunktionen bestehen, aber nicht für jede beliebige Bewegung besteht eine solche. 565

Zusatz 1. Die Kräftefunktion eines adiabatischen Systems ist gleich der Abnahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich einer willkürlichen, d. h. durch die Definition nicht bestimmten Konstanten, vermindert um die Energie des Systems. 566

Zusatz 2. Die Kräftefunktion eines isocyklischen Systems ist gleich der Zunahme der Energie des Systems, gerechnet von einem willkürlich gewählten Anfangszustand aus. Sie ist daher auch gleich der Energie des Systems, vermindert um eine willkürliche Konstante. 567

Reziproke Eigentümlichkeiten.

568 **Lehrsatz 1a.** Wenn in einem adiabatischen System eine Vergrößerung des Parameters p_μ die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter p_λ steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von p_λ die Kraft nach p_μ. Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn in einem adiabatischen System können wir die p_ϱ als die hinreichenden unabhängigen Bestimmungsstücke der P'_ϱ betrachten, und es liefert uns daher die für adiabatische Systeme gültige Gleichung **564a**:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

569 **Lehrsatz 1b.** Wenn in einem isocyklischen System eine Vergrößerung des Parameters p_μ die Komponente der Kraft nach dem anderen Parameter p_λ steigert, so steigert auch umgekehrt eine Vergrößerung von p_λ die Kraft nach p_μ. Und zwar ist bei unendlich kleiner Vergrößerung das quantitative Verhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn auch in einem isocyklischen System können wir die p_ϱ als hinreichende unabhängige Bestimmungsstücke der P'_ϱ ansehen, und es liefert uns daher die für isocyklische Systeme gültige Gleichung **564b**:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial p_\mu} = \frac{\partial P'_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Es ist zu bemerken, daß diese Gleichung von der vorigen dem Sinne nach verschieden, wenn auch der Form nach identisch ist.

570 **Anmerkung.** Damit die vorstehenden beiden Lehrsätze eine physikalische Anwendung gestatten, genügt es, daß von

dem cyklischen System zwei Parameter und die Kräfte nach diesen der unmittelbaren Beobachtung zugänglich seien.

Lehrsatz 2a. Wenn in einem cyklischen System eine 571
Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}_\mu$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = -\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial p_\lambda} \qquad (555\text{a}) \quad , \qquad \dot{\mathfrak{p}}_\mu = \frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial \mathfrak{q}_\mu} \qquad (290) \quad ,$$

also ist

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \mathfrak{q}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad , \qquad \text{a)}$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz die richtige Interpretation ist.

Folgerung. Wenn in einem monocyklischen System eine 572
Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}$ hervor, und umgekehrt.

Denn in einem monocyklischen System geht Vermehrung der cyklischen Intensität und Vermehrung des cyklischen Momentes bei festgehaltenen Parametern stets Hand in Hand. Für ein monocyklisches System ist nämlich

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{m}\,\mathfrak{a}\,\dot{\mathfrak{p}} \quad ,$$

worin $\mathfrak{a}$ eine notwendig positive (62) Funktion der Parameter des Systems ist.

Lehrsatz 2b. Wenn in einem cyklischen System eine 573
Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ bei festgehaltenen

Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Vermehrung des cyklischem Moments $\mathfrak{q}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn wir haben:

$$P'_\lambda = \frac{\partial_\mathfrak{p} \mathfrak{E}}{\partial p_\lambda} \quad (555\,\mathrm{a}) \quad , \qquad \mathfrak{q}_\mu = \frac{\partial_\mathfrak{p} \mathfrak{E}}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} \quad (289) \quad ,$$

also ist:

a)
$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = \frac{\partial \mathfrak{q}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den Ausdruck in Worten gibt.

574 **Folgerung.** Wenn in einem monocyklischen System eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Vermehrung des cyklischen Momentes $\mathfrak{q}$ hervor, und umgekehrt.

Der Grund ist derselbe wie in **572**.

575 **Anmerkung.** Die vorstehenden Lehrsätze 2a und 2b gestatten eine physikalische Anwendung dann, wenn es möglich ist, neben einer cyklischen Intensität auch das entsprechende cyklische Moment unmittelbar, d. h. ohne Kenntnis der Koeffizienten $\mathfrak{a}_{\varrho\sigma}$, zu bestimmen. Dies kann eintreten. In der Elektrostatik entsprechen z. B. die Potentialdifferenzen der Leiter den cyklischen Intensitäten, die Elektrizitätsmengen der Leiter den cyklischen Momenten, und beide Größen können unabhängig voneinander unmittelbar bestimmt werden.

Die Folgerungen verlangen nur die unmittelbare Bestimmbarkeit entweder der cyklischen Intensität oder des cyklischen Momentes.

576 **Lehrsatz 3a.** Wenn in einem cyklischen System eine auf die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}_\mu$ ausgeübte Kraft ein zeitliches Anwachsen der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so

ruft die adiabatische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche.

Denn denken wir uns in der linken Seite der Gleichung **571a** die Änderungen $\partial P'_\lambda$ und $\partial \mathfrak{q}_\mu$ entstanden in der Zeit dt, dividieren wir den Differentialquotienten im Zähler und Nenner durch diese Zeit dt, und beachten die Gleichung **558**, indem wir die Änderung $\partial \mathfrak{q}_\mu$ als Wirkung der Kraft $\mathfrak{P}_\mu$ ansehen, so folgt:

$$\frac{\dot{P}'_\lambda}{\mathfrak{P}_\mu} = -\frac{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu}{\partial p_\lambda} \quad ,$$

von welcher Gleichung der Lehrsatz den vervollständigten Ausdruck in Worten gibt.

Lehrsatz 3b. Wenn in einem cyklischen System eine Vermehrung der cyklischen Intensität $\dot{\mathfrak{p}}_\mu$ bei festgehaltenen Parametern eine Steigerung der Kraft nach dem Parameter p_λ zur Folge hat, so ruft die isocyklische Vergrößerung des Parameters p_λ eine Verminderung der Kraft des Systems nach der cyklischen Koordinate $\mathfrak{p}_\mu$ hervor, und umgekehrt. Und zwar ist bei unendlich kleiner Änderung das Größenverhältnis zwischen Ursache und Wirkung in beiden Fällen das gleiche. 577

Denken wir uns in der rechten Seite der Gleichung **573a** die Änderungen $\partial \mathfrak{q}_\mu$ und ∂p_λ entstanden in der Zeit dt, so können wir setzen:

$$\partial \mathfrak{q}_\mu = \frac{d}{dt}\mathfrak{q}_\mu \cdot dt = \dot{\mathfrak{q}}_\mu \, dt = -\mathfrak{P}'_\mu \, dt \qquad (\mathbf{557a}) \; ,$$

$$\partial p_\lambda = \frac{d}{dt} p_\lambda \cdot dt = \dot{p}_\lambda \, dt \quad ;$$

es wird also jene Gleichung:

$$\frac{\partial P'_\lambda}{\partial \dot{\mathfrak{p}}_\mu} = -\frac{\mathfrak{P}'_\mu}{\dot{p}_\lambda} \quad ,$$

welche Aussage der Lehrsatz in Worten wiedergibt.

578 **Anmerkung.** Die Lehrsätze 3a und 3b gestatten die physikalische Anwendung dann, wenn neben einer cyklischen Intensität auch die entsprechende cyklische Kraftkomponente der unmittelbaren Beobachtung zugänglich ist. Dies trifft zum Beispiel für die Elektrodynamik zu, und man versinnlicht sich die Bedeutung der Lehrsätze 3a und 3b am besten, indem man sie in die Redeweise dieses Zweiges der Physik übersetzt.

Energie und Arbeit.

579 **Lehrsatz 1.** Bei der isocyklischen Bewegung eines cyklischen Systems ist die Arbeit, welche das System durch die Koppelung seiner cyklischen Koordinaten aufnimmt, beständig das Doppelte der Arbeit, welche es durch die Koppelung seiner Parameter abgibt.

Bei der isocyklischen Bewegung ist $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ für alle ϱ gleich Null, also nach **514** und **557c** die Arbeit, welche die auf die cyklischen Koordinaten wirkenden äußeren Kräfte in der Zeiteinheit leisten, gleich:

$$-\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{P}'_\varrho\, \dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \quad \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{r}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma\, \dot{p}_\tau\, \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Die Arbeit aber, welche das System durch seine Kräfte nach den Parametern leistet, berechnet auf die Zeiteinheit, wird gefunden mit Hilfe von **555b** gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho\, P'_\varrho\, \dot{p}_\varrho = \frac{1}{2}\, \mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma\, \dot{\mathfrak{p}}_\tau\, \dot{p}_\varrho \quad .$$

Die Summen in beiden Gleichungen sind bis auf die Bezeichnung identisch, und die Glieder der ersten Gleichung sind daher doppelt so groß als die der letzten.

580 **Folgerung.** Wenn ein isocyklisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein isocyklisches System durch die

Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn die Zunahme der Energie des Systems ist gleich dem Unterschiede der von den cyklischen Koordinaten aufgenommenen und der durch die Parameter abgegebenen Arbeit.

Anmerkung. Wenn ein adiabatisches System durch die 581
Kräfte nach seinen Parametern Arbeit leistet, so nimmt gleichzeitig die Energie des Systems ab, und zwar um den Betrag der geleisteten Arbeit; wenn ein adiabatisches System durch die Kräfte nach seinen Parametern Arbeit aufnimmt, so wächst gleichzeitig die Energie des Systems, und zwar um den Betrag der aufgenommenen Arbeit.

Denn in einem adiabatischen System wird durch die cyklischen Koordinaten keine Arbeit aufgenommen (**562**).

Lehrsatz 2. Bei der adiabatischen Verrückung eines 582
cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte nach den Parametern bei der Verrückung negative Arbeit leisten.

Es mögen bei der Verrückung die p_ϱ die Änderungen δp_ϱ und die Intensitäten $\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ die Änderungen $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\varrho$ erleiden. Fänden nur die letzteren Änderungen statt, so würden sich die Kräfte P'_ϱ ändern um die Beträge (**555b**):

$$\delta P'_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und diese $\delta P'_\varrho$ sind es, welche der Lehrsatz als die von den $\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ hervorgerufenen Kräfte bezeichnet. Die von ihnen geleistete Arbeit ist gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho \, \delta P'_\varrho \, \delta p_\varrho = \mathfrak{m} \sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \frac{\partial \mathfrak{a}_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \, \delta p_\varrho$$

$$= \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\tau \, \delta \mathfrak{a}_{\sigma\tau} \, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma \, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau \quad ,$$

und die Behauptung geht dahin, daß diese Arbeit notwendig negativ sei. Nun ist aber für die adiabatische Bewegung:

$$\mathfrak{q}_\tau = \mathfrak{m} \sum_1^{\mathfrak{r}} {}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = \text{constans} \quad ,$$

also:

$$\sum_1^{\mathfrak{r}} {}_\sigma\, \delta\mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \dot{\mathfrak{p}}_\sigma = - \sum_1^{\mathfrak{r}} {}_\sigma\, \mathfrak{a}_{\sigma\tau}\, \delta\dot{\mathfrak{p}}_\sigma \quad .$$

Bilden wir diese Gleichungen für alle τ, multiplizieren sie der Reihe nach mit $\mathfrak{m}\delta\dot{\mathfrak{p}}_\tau$ und addieren, so erhalten wir links den vorigen Ausdruck für die betrachtete Arbeit, rechts eine notwendig negative Größe (62), womit die Behauptung erwiesen ist.

583 **Folgerung.** Bei der adiabatischen Verrückung eines cyklischen Systems erleiden die cyklischen Intensitäten stets Änderungen in solchem Sinne, daß die von diesen Änderungen hervorgerufenen Kräfte die erzeugende Bewegung aufzuhalten streben.

Dies ist in der Tat nur eine andere Form, den vorigen Lehrsatz auszusagen. Sie entspricht der Ausdrucksweise der Lenzschen Regel in der Elektrodynamik.

584 **Bemerkung.** Bei jeder unendlich kleinen Bewegung eines monocyklischen Systems verhält sich die durch die cyklische Koordinate aufgenommene Arbeit zur Energie des Systems, wie der doppelte Zuwachs, welchen das cyklische Moment des Systems erfährt, zu diesem Moment.

Denn die während der Zeit dt durch die cyklische Koordinate $\mathfrak{p}$ aufgenommene Arbeit $d\mathfrak{Q}$ ist gleich:

$$d\mathfrak{Q} = \mathfrak{P}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, d\mathfrak{p} = \dot{\mathfrak{q}}\, \dot{\mathfrak{p}}\, dt = \dot{\mathfrak{p}}\, d\mathfrak{q} \quad ,$$

während die Energie $\mathfrak{E}$ geschrieben werden kann:

$$\mathfrak{E} = \tfrac{1}{2}\, \mathfrak{q}\, \dot{\mathfrak{p}} \quad .$$

Also ist:

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}} = 2 \frac{d\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung 1. Bei beliebiger Bewegung eines monocyklischen Systems ist der Ausdruck 585

$$\frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

das vollständige Differential einer Funktion der Parameter und der cyklischen Intensität des Systems, nämlich der Funktion

$$2 \log \frac{\mathfrak{q}}{\mathfrak{q}_0} \quad ,$$

in welcher $\mathfrak{q}_0$ das cyklische Moment für eine willkürlich gewählte Anfangslage bedeutet. Diese Funktion wird auch die Entropie des monocyklischen Systems genannt.

Folgerung 2. Der Wert des für eine beliebige endliche Bewegung eines monocyklischen Systems gebildeten Integrales 586

$$\int \frac{d\mathfrak{Q}}{\mathfrak{E}}$$

hängt nur ab von den Zuständen des Systems in der Anfangs- und Endlage der Bewegung, nicht aber von den zwischen beiden Lagen durchlaufenen Zuständen. Der Wert jenes Integrales wird Null für jede Bewegung, welche das System zu seinem Anfangszustand zurückführt.

Denn der Wert jenes Integrales ist gleich dem Unterschiede der Entropie im Anfangs- und im Endzustande der Bewegung.

Folgerung 3. Bei der adiabatischen Bewegung eines monocyklischen Systems bleibt die Entropie konstant. Denn für die adiabatische Bewegung ist $\mathfrak{P}$, also auch $d\mathfrak{Q}$ gleich Null. Die adiabatische Bewegung eines monocyklischen Systems wird deshalb auch eine isentropische genannt. 587

Zeitintegral der Energie.

Bemerkung 1. Ändern sich bei der adiabatischen Bewegung eines cyklischen Systems die cyklischen Koordinaten $\mathfrak{p}_\varrho$ 588 in einer gewissen endlichen Zeit um die Beträge $\bar{\mathfrak{p}}_\varrho$, so ist das Zeitintegral der Energie des Systems, genommen über jene Zeit, gleich

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \quad .$$

Denn es kann die Energie des Systems geschrieben werden in der Form (**286b**):

$$\frac{1}{2}\sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho\, \dot{\mathfrak{p}}_\varrho \quad ,$$

und hierin sind für die adiabatische Bewegung die $\mathfrak{q}_\varrho$ Konstanten.

589 **Bemerkung 2.** Die Variation des Zeitintegrales der Energie eines adiabatischen Systems bei variierter Bewegung des Systems hängt ab erstens von der Variation der Parameter während der ganzen Zeit, über welche das Integral gebildet ist, zweitens aber auch von den in der Zeit konstanten Variationen, welche die in der Zeit konstanten cyklischen Momente des Systems erleiden.

590 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen im folgenden:

mit δ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente willkürliche Variationen erleiden,

mit $\delta_{\mathfrak{q}}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente keine Variationen erleiden,

endlich mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ eine Variation, bei welcher die cyklischen Momente solche Variationen erleiden, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

591 **Folgerung.** Aus der Bezeichnung folgt von selbst für alle ϱ:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\, \mathfrak{q}_\varrho = 0 \quad , \quad \delta_{\mathfrak{p}} \bar{\mathfrak{p}}_\varrho = 0 \quad ,$$

also wird nach **588** für beliebige Variationen der Parameter:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int \mathfrak{E}\, dt = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \mathfrak{q}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{q}}\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho \qquad \text{a)}$$

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int \mathfrak{E}\, dt = \frac{1}{2} \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{q}_\varrho \quad . \qquad \text{b)}$$

Anmerkung. In einem adiabatischen System ist es stets, 592
und zwar im allgemeinen nur auf eine Weise möglich, bei beliebiger Variation der Parameter den cyklischen Momenten solche Variationen zu erteilen, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn aus der allgemeinen Beziehung:

$$\dot{\mathfrak{p}}_\varrho = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma$$

folgt für ein adiabatisches System, in welchem sich die $\mathfrak{p}_\varrho$ von den Werten $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$ auf die Werte $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$ ändern:

$$\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt \quad ,$$

also bei beliebiger Variation der Parameter und der cyklischen Momente:

$$\delta\mathfrak{p}_{\varrho_1} - \delta\mathfrak{p}_{\varrho_0} = \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \mathfrak{q}_\sigma\, \delta \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt + \frac{1}{\mathfrak{m}} \sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\sigma}\, \delta\mathfrak{q}_\sigma \int_0^1 \mathfrak{b}_{\varrho\sigma}\, dt \quad .$$

Diese Gleichungen aber bilden $\mathfrak{r}$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $\mathfrak{r}$ Größen $\delta\mathfrak{q}_\sigma$, welche also stets eine und zwar im allgemeinen nur eine Lösung zulassen, insbesondere auch dann, wenn die links stehenden Variationen verschwinden.

Variationen der Art, welche wir mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ bezeichneten, sind also auch bei beliebiger Variation der Parameter stets möglich.

Lehrsatz. Bei gleicher, übrigens willkürlicher Variation 593
der Parameter während einer gewissen Zeit fällt die Variation

des Zeitintegrals der Energie in einem adiabatischen System entgegengesetzt gleich aus, wenn man das eine Mal die cyklischen Momente des Systems unvariiert läßt, das andere Mal sie so variiert, daß Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten unvariiert bleiben.

Denn für eine beliebige Variation ist:

$$\delta\int\mathfrak{E}\,dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt+\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\int\frac{\partial_{\mathfrak{q}}\mathfrak{E}}{\partial\mathfrak{q}_{\varrho}}\,\delta\dot{\mathfrak{q}}_{\varrho}\,dt$$

$$=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt+\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\,\bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\,\delta\mathfrak{q}_{\varrho}\quad,$$

also insbesondere für eine Variation, bei welcher Anfangs- und Endwerte der $\mathfrak{p}_{\varrho}$ unvariiert bleiben.

$$\delta_{\mathfrak{p}}\int\mathfrak{E}\,dt=\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt+\sum_{1}^{\mathfrak{r}}{}_{\varrho}\,\bar{\mathfrak{p}}_{\varrho}\,\delta_{\mathfrak{p}}\,\mathfrak{q}_{\varrho}\quad.$$

Subtrahiert man hiervon zweimal die Gleichung **591b**, so folgt:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\int\mathfrak{E}\,dt=-\delta_{\mathfrak{p}}\int\mathfrak{E}\,dt\quad,$$

welches die Behauptung ist.

Man vergleiche übrigens die verwandten Sätze **96** und **293**.

II. Verborgene cyklische Bewegung.

Erläuterungen und Definitionen.

594 **1.** Wir sagen, ein System enthalte verborgene Massen, wenn durch die der Beobachtung zugänglichen Koordinaten des Systems noch nicht die Lage aller Massen des Systems bestimmt ist, sondern nur die Lage eines Teiles derselben.

595 **2.** Diejenigen Massen, deren Lagen bei vollständiger Angabe der beobachtbaren Koordinaten des Systems dennoch unbekannt bleibt, heißen verborgene Massen, ihre Bewegungen

verborgene Bewegungen, ihre Koordinaten verborgene Koordinaten. Im Gegensatz dazu heißen die übrigen Massen des Systems sichtbare Massen, ihre Bewegungen sichtbare Bewegungen, ihre Koodinaten sichtbare Koordinaten.

3. Die Aufgabe, welche der Mechanik in Hinsicht der 596
Systeme mit verborgenen Massen zufällt, ist diese: die Bewegungen der sichtbaren Massen des Systems oder auch die Veränderungen der sichtbaren Koordinaten des Systems vorauszubestimmen trotz der vorhandenen Unkenntnis über die Lage der verborgenen Massen.

4. Ein System, welches verborgene Massen enthält, unter- 597
scheidet sich von einem System ohne verborgene Massen allein in Hinsicht unserer Kenntnis des Systems. Alle bisherigen Aussagen unserer Mechanik bleiben daher anwendbar auf Systeme mit verborgenen Bewegungen, sobald wir unter den Massen, Koordinaten usw. die sämtlichen Massen, Koordinaten usw. verstehen. Erst dann werden Änderungen nötig, wenn wir unsere Aussagen auf die sichtbaren Größen beschränken wollen. Die zu stellende Aufgabe kann daher auch dahin formuliert werden, daß anzugeben sei, welche Änderungen die bisherigen Aussagen unserer Mechanik erleiden müssen, wenn unter den Massen, Koordinaten usw. schlechthin nur die sichtbaren Massen, Koordinaten usw. verstanden werden.

5. Es ist klar, daß die in der einen oder der anderen 598
Form gestellte Aufgabe nicht zu lösen ist ohne gewisse Angaben über den Einfluß, welchen die verborgenen Massen auf die Bewegung der sichtbaren Massen ausüben. Solche Angaben aber sind möglich. Ein geleitetes System oder ein von Kräften beeinflußtes System kann bereits als ein System mit verborgenen Massen aufgefaßt werden, indem man die unbekannten Massen des leitenden Systems oder des beeinflussenden Systems als verborgene ansieht. Im allgemeinen ist es indessen in diesen Fällen möglich, auch die Massen des leitenden oder des Kräfte ausübenden Systems physikalisch zu erkennen, und die Auffassung derselben als verborgener ist alsdann eine freiwillige. Jetzt indessen fassen wir vorwiegend solche Fälle ins Auge, in welchen die Erkenntnis der ver-

borgenen Massen in der Tat durch keine physikalische Beobachtung möglich ist.

599 6. In sich zurücklaufende Bewegungen, also cyklische Bewegungen, sind häufig verborgene Bewegungen, da sie, allein bestehend, eine Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt, nicht hervorrufen. So ist die Bewegung einer homogenen Flüssigkeit in einem geschlossenen Gefäße für den Anblick eine verborgene; sie wird erst sichtbar gemacht, wenn ihr durch Einbringen von Staub oder dergleichen die Eigenschaft der streng cyklischen Bewegung geraubt wird.

Umgekehrt sind verborgene Bewegungen fast stets cyklische Bewegungen. Nicht in sich zurücklaufende Bewegungen führen nämlich stets über kurz oder lang eine größere Änderung in der Massenverteilung, also im Anblick der Welt hervor und werden dadurch sichtbar.

600 7. Auch cyklische Bewegungen können ihre Verborgenheit nicht lange bewahren, sobald wir Mittel gewinnen, auf die einzelnen cyklischen Koordinaten zu wirken und die cyklischen Intensitäten beliebig abzuändern. Die Mannigfaltigkeit unseres Einflusses auf das System ist in diesem Falle ebenso groß wie die wirkliche Mannigfaltigkeit des Systems, und wir können von jener auf diese schließen. Anders aber verhält es sich, wenn ein freiwilliger unmittelbarer Einfluß auf die cyklischen Koordinaten dauernd ausgeschlossen ist. Dies kann eintreten in adiabatischen cyklischen Systemen (**560**), und in diesen werden wir daher vorzugsweise die für unsere Beobachtung dauernd verborgenen Bewegungen zu suchen haben.

Auf solche Fälle beschränken wir daher zunächst die Betrachtung der verborgenen Bewegung. Unsere Behandlungsart aber bringt es mit sich, daß wir auch in solchen Fällen die verborgene Bewegung so behandeln, als wäre sie sichtbar, und erst nachträglich untersuchen, welche unserer Aussagen anwendbar bleiben trotz der nunmehr vorausgesetzten Verborgenheit.

Konservative Systeme.

Definition 1. Ein materielles System, welches keine anderen verborgenen Massen enthält, als solche, welche adiabatische cyklische Systeme bilden, heißt ein konservatives System. 601

Der Name ist veranlaßt durch eine Eigenschaft solcher Systeme, welche später hervortreten wird; er ist zunächst durch den Anschluß an den feststehenden Gebrauch der Mechanik genügend gerechtfertigt.

Anmerkung. Jedes konservative System kann betrachtet werden als bestehend aus zwei Teilsystemen, von denen das eine alle sichtbaren Massen, das andere alle verborgenen Massen des ganzen Systems enthält. Die Koordinaten des sichtbaren Teilsystems, also die sichtbaren Koordinaten des ganzen Systems, sind zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems. 602

Wir bezeichnen dauernd die Masse des sichtbaren Teilsystems mit m, seine Koordinaten mit p_ϱ, seine Momente nach den p_ϱ mit q_ϱ. Die Masse des verborgenen Teilsystems werde mit $\mathfrak{m}$ bezeichnet, seine Koordinaten mit $\mathfrak{p}_\varrho$, seine Momente nach diesen mit $\mathfrak{q}_\varrho$.

Definition 2. Unter der Kräftefunktion eines konservativen Systems verstehen wir die Kräftefunktion seines verborgenen Teilsystems (**563**). 603

Die Kräftefunktion eines konservativen Systems ist also im allgemeinen gegeben als Funktion der sichtbaren Koordinaten und konstanter Größen, ohne daß der Zusammenhang dieser Konstanten mit den Momenten des cyklischen Teilsystems offen gegeben sei. Die Form dieser Funktion ist durch unsere Betrachtungen keiner Einschränkung unterworfen.

Wir bezeichnen die Kräftefunktion des konservativen Systems dauernd mit U.

Bemerkung. Damit die Bewegung der sichtbaren Massen eines konservativen Systems vollständig bestimmt sei, genügt es, daß seine Kräftefunktion gegeben sei als Funktion seiner sichtbaren Koordinaten, und es macht diese Angabe jede weitere Angabe über die verborgenen Massen des Systems entbehrlich. 604

Denn aus der Kräftefunktion in der angegebenen Form folgen vollständig die Kräfte, welche das verborgene Teilsystem auf das sichtbare ausübt, und diese Kräfte vertreten vollständig den Einfluß des ersteren auf das letztere (**457** ff.).

605 **Definition 3.** Derjenige Teil der Energie eines konservativen Systems, welcher von der Bewegung seiner sichtbaren Massen herrührt, heißt die kinetische Energie des ganzen Systems. Im Gegensatz dazu wird die Energie der verborgenen Massen die potentielle Energie des ganzen Systems genannt.

Die kinetische Energie wird auch wohl als lebendige Kraft bezeichnet; nach einer anderen, älteren Redeweise wird das Doppelte der kinetischen Energie mit diesem Namen belegt.

606 **Bezeichnung.** Wir bezeichnen die kinetische Energie dauernd mit T. T ist demnach eine homogene quadratische Funktion der $\dot{p}_\varrho$, mit gleichem Rechte der q_ϱ; die Koeffizienten dieser Funktion sind Funktionen der p_ϱ. Mit $\partial_p T$ bezeichnen wir das partielle Differential von T, sobald wir die p_ϱ und die $\dot{p}_\varrho$ als unabhängig voneinander veränderliche Variabele betrachten, mit $\partial_q T$ aber dann, wenn wir die p_ϱ und die q_ϱ als unabhängig voneinander veränderliche Variabele betrachten.

Die Energie des verborgenen cyklischen Teilsystems, also die potentielle Energie des ganzen Systems, möge unter Beibehaltung einer bereits benutzten Bezeichnung (**553**) mit $\mathfrak{E}$ bezeichnet werden.

607 **Anmerkung.** Die kinetische und die potentielle Energie eines konservativen Systems unterscheiden sich voneinander nicht durch ihre Natur, sondern nur durch den freiwilligen Standpunkt unserer Auffassung, oder die unfreiwillige Beschränktheit unserer Kenntnis von den Massen des Systems. Dieselbe Energie, welche bei einem gewissen Stand unserer Auffassung oder unserer Kenntnis als potentielle zu bezeichnen ist, ist bei verändertem Stand unserer Auffassung oder Kenntnis als kinetische anzusprechen.

608 **Folgerung 1.** Die Energie eines konservativen Systems ist gleich der Summe seiner kinetischen und seiner potentiellen Energie.

Wir bezeichnen die Gesamtenergie des konservativen Systems dauernd mit E und haben alsdann:

$$E = T + \mathfrak{E} \quad .$$

Folgerung 2. In einem freien konservativen System ist die Summe der potentiellen und der kinetischen Energie konstant in der Zeit; die kinetische Energie wächst nur auf Kosten der potentiellen, und umgekehrt (**340**). 609

Folgerung 3. In einem freien konservativen System ist die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion konstant in der Zeit; kinetische Energie und Kräftefunktion nehmen gleichzeitig zu und ab und zwar um gleiche Beträge (**566**). 610

Definition 4. Die Differenz zwischen kinetischer Energie und Kräftefunktion eines konservativen Systems nennen wir die mathematische oder analytische Energie des Systems. 611

Wir bezeichnen die mathematische Energie dauernd mit h. Sie unterscheidet sich von der Energie des Systems nur durch eine von Zeit und Lage des Systems unabhängige, im allgemeinen aber unbekannte Konstante. Für die mathematische Anwendung kann sie die Energie vollständig vertreten, es fehlt ihr aber die physikalische Bedeutung, welche diese besitzt.

Anmerkung. Die Definition wird wiedergegeben durch die Gleichung: 612

$$T - U = h \quad , \qquad \textbf{a)}$$

oder in anderer Schreibart:

$$U + h = T \quad . \qquad \textbf{b)}$$

Ist das konservative System ein freies, so ist in dieser Gleichung die Größe h eine von der Zeit unabhängige Konstante und die Gleichung wird alsdann auch wohl als die Gleichung der Energie für das konservative System bezeichnet.

Aus **b)** und **608** leiten wir noch die Beziehung her:

$$U + h = E - \mathfrak{E} \quad . \qquad \textbf{c)}$$

613 **Definition 5.** Das Zeitintegral der kinetischen Energie eines Systems, genommen zwischen zwei bestimmten Zeiten als Grenzen, wird die Wirkung oder der Kraftaufwand während der Zwischenzeit genannt.

Die Wirkung bei der Bewegung eines konservativen Systems während einer gegebenen Zeit wird also dargestellt durch das Integral

$$\int T\,dt \quad ,$$

genommen zwischen dem Anfangs- und dem Endwerte jener Zeit.

614 **Anmerkung 1.** Bezeichnet ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, v die Geschwindigkeit desselben in seiner Bahn, so kann die Wirkung auch dargestellt werden in der Form des Integrals

$$\frac{1}{2}\,m\int v\,ds \quad ,$$

genommen zwischen den Lagen, in welchen sich das System zu Anfang und zu Ende der betrachteten Zeit befindet.

615 **Anmerkung 2.** Der Name „Wirkung" für das in Rede stehende Integral ist oft als unpassend verurteilt worden. Es ist aber nicht wohl einzusehen, warum der von Jacobi vorgeschlagene Name „Kraftaufwand" besser wäre, noch auch was der ursprünglich von Maupertuis gewählte Ausdruck „action" vor jenen voraushabe. Alle diese Benennungen erwecken Vorstellungen, welche mit dem bekannten Gegenstande nichts zu schaffen haben. Es ist auch schwer verständlich, wie die Summation der zu verschiedenen Zeiten vorhandenen Energien etwas anderes liefern könne, als eine Rechnungsgröße, und es ist daher wohl nicht nur schwierig, sondern unmöglich, für das in Rede stehende Integral eine passende Bezeichnung von einfachem Sinne zu finden.

Auch die übrigen in diesem Abschnitt eingeführten Namen und Bezeichnungen sind weniger durch ihre innere Zweckmäßigkeit gerechtfertigt, als durch die Notwendigkeit, uns der bestehenden Redeweise der Mechanik so viel als möglich anzuschließen.

Differentialgleichungen der Bewegung.

Aufgabe. Die Differentialgleichungen der Bewegung eines konservativen Systems aufzustellen. 616

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Bewegungsgleichungen für das sichtbare Teilsystem. Die Masse dieses Teilsystems ist m, seine Koordinaten sind die p_ϱ; es seien die k Gleichungen:

$$\sum_1^r {}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, dp_\varrho = 0 \qquad \text{a)}$$

seine Bedingungsgleichungen. Da die p_ϱ zugleich die Parameter des verborgenen Teilsystems sind, so sind die Komponenten der Kräfte, welche dieses auf das sichtbare Teilsystem ausübt, gleich $\partial U / \partial p_\varrho$ (**563**). Wirkt auf das sichtbare Teilsystem durch Koppelung mit anderen sichtbaren Systemen noch eine weitere Kraft, so mögen deren Komponenten P_ϱ sein. Dann sind die Bewegungsgleichungen des Systems nach **481**:

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} + P_\varrho \quad , \qquad \text{b)}$$

und diese r Gleichungen zusammen mit den k Gleichungen **a)** reichen wieder aus zur eindeutigen Bestimmung der $r+k$ Größen $\ddot{p}_\varrho$ und $P_\varkappa$.

Anmerkung 1. Ist das betrachtete konservative System ein freies, wirkt also auf dasselbe keine äußere Kraft, so sind die P_ϱ gleich Null, und die Bewegungsgleichungen haben die Form: 617

$$m f_\varrho + \sum_1^k {}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho}\, P_\varkappa = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Anmerkung 2. Ist insbesondere die Koordinate p_ϱ eine freie Koordinate des sichtbaren Teilsystems, so nimmt die dem Index ϱ zugehörige Bewegungsgleichung die Form an: 618

$$mf_\varrho = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

da die $p_{\varkappa\varrho}$ alsdann sämtlich verschwinden.

619 **Anmerkung 3.** Indem wir in die Gleichungen **616** bis **618** für die Beschleunigungen nach den p_ϱ ihre verschiedenen Ausdrücke nach **291** einsetzen, erhalten wir für diese Gleichungen eine Reihe verschiedener Formen, welche den Formen entsprechen, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **368** u. ff. erhalten haben.

620 **Folgerung 1.** Sind in einem holonomen konservativen System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung:

$$T + U = L \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

$$\text{a)} \qquad q_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial \dot{p}_\varrho}$$

$$\text{b)} \qquad \dot{q}_\varrho = \frac{\partial_p L}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von L ein, entwickeln die partiellen Differentialquotienten, und beachten, daß U die $\dot{p}_\varrho$ nicht enthält, daß also

$$\frac{\partial_p U}{\partial \dot{p}_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_p U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so erkennen wir, daß die Gleichungen **a)** mit der aus den Definitionen folgenden Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ zusammenfallen, die Gleichungen **b)** aber mit den Bewegungsgleichungen in der Form **618**. (**289**, **291**)

Anmerkung. Die Funktion L, durch deren Benutzung die Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Form der Gleichungen **620a** und **b** annehmen, hat man bisweilen die LAGRANGEsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur in einem holonomen System, und sie ist hier gleich der Differenz der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten. 621

Folgerung 2. Sind in einem holonomen konservativen System die p_ϱ sämtlich freie Koordinaten, und setzen wir zur Abkürzung: 622

$$T - U = H \quad ,$$

so lassen sich die Bewegungsgleichungen des Systems darstellen in der Form der $2r$ Gleichungen:

$$\dot{p}_\varrho = \quad \frac{\partial_q H}{\partial q_\varrho} \qquad \textbf{a)}$$

$$\dot{q}_\varrho = -\frac{\partial_q H}{\partial p_\varrho} \quad , \qquad \textbf{b)}$$

welche als ebensoviele Differentialgleichungen erster Ordnung für die $2r$ Größen p_ϱ und q_ϱ aufgefaßt werden können, und welche zusammen mit bestimmten Anfangswerten den Verlauf dieser Größen eindeutig bestimmen.

Denn setzen wir den Wert von H ein, und beachten, daß U die q_ϱ nicht enthält, daß also:

$$\frac{\partial_q U}{\partial q_\varrho} = 0 \quad , \qquad \frac{\partial_q U}{\partial p_\varrho} = \frac{\partial U}{\partial p_\varrho}$$

ist, so sehen wir, daß die Gleichungen **a)** die aus den Definitionen folgende Beziehung der q_ϱ und der $\dot{p}_\varrho$ darstellen, während die Gleichungen **b)** mit den aus der Erfahrung abgeleiteten Bewegungsgleichungen (**618**) des Systems zusammenfallen. (**290**, **294**)

Anmerkung. Die Funktion H, durch deren Benutzung die Differentialgleichungen der Bewegung die einfache Gestalt der 623

Gleichungen **622a** und **b** annehmen, hat man wohl die HAMILTONsche Funktion des Systems genannt. Diese Funktion besteht also nur für ein holonomes System, und sie ist für ein solches gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie, abgesehen von einer willkürlich bleibenden Konstanten; sie ist also auch gleich der Gesamtenergie des Systems, von einer willkürlichen Konstanten abgesehen.

Allgemein ist es zulässig, für ein System mit beliebigen, nicht notwendig cyklischen, verborgenen Bewegungen die HAMILTONsche Funktion zu definieren durch die Gleichungen **622a** und **b**, nämlich als eine Funktion der sichtbaren p_ϱ und q_ϱ, durch deren Benutzung (vorausgesetzt, daß es eine solche Funktion gibt) die Bewegungsgleichungen eben jene einfache Form annehmen. Bei dieser allgemeineren Definition ist die HAMILTONsche Funktion nicht immer gleich der Summe der kinetischen und der potentiellen Energie.

624 **Bemerkung.** Aus den Gleichungen **620** und **622** können für ein System mit verborgenen Cykeln dieselben reziproken Eigenschaften der Bewegung abgeleitet werden, welche wir für ein vollständig bekanntes System in **378** und **381** abgeleitet haben. Es ist aber diese neue Ableitung nicht erforderlich, sondern es liegt schon im Wesen jener Beziehungen, daß jede von ihnen Gültigkeit hat unabhängig davon, ob die in ihnen nicht vorkommenden Koordinaten, Momente usw. sichtbare oder verborgene Koordinaten, Momente, usw. sind.

Integralsätze für holonome Systeme.

625 **Bemerkung 1.** Das Integral

$$\int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürliche Bewegung des Systems, als für jede andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen

Zeit sowohl die sichtbaren, als auch die verborgenen Koordinaten aus den Anfangswerten in die Endwerte überführt.

Denn da $T - U$ gleich ist der Energie des Systems, vermehrt um eine für alle möglichen Bewegungen gleiche Konstante (611), so ist die Bemerkung nichts anderes, als der Lehrsatz 358, ausgesagt unter Anwendung der gegenwärtigen Bezeichnung.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Endlagen weggelassen, so kann nur behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet beim Übergang zu irgend einer anderen der in Betracht kommenden Bewegungen. Unter Anwendung der Bezeichnung 590 nimmt alsdann die Aussage die Form an, daß 626

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_{t_0}^{t_1} (T - U)\, dt = 0$$

sei beim Übergang von der natürlichen Bewegung zu irgend einer anderen möglichen, während die Variationen der Anfangs- und Endzeiten und der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten verschwinden. (Vergl. 359.)

Anmerkung 2. Die Bemerkung 1 unterscheidet die natürlichen Bewegungen eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung, und sie kann daher dazu dienen, die natürliche Bewegung zu bestimmen, sobald es möglich ist, die Variation der Anmerkung 1 wirklich zu bilden. Sind aber, wie wir es ja voraussetzen, die cyklischen Koordinaten verborgene, so ist die Bildung der Variationen der Form $\delta_{\mathfrak{p}}$ nicht möglich, und der Satz verliert daher nicht zwar seine Richtigkeit, wohl aber seine Anwendbarkeit. 627

Lehrsatz 1. Das Integral 628

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt$$

ist beim Übergang eines freien holonomen Systems mit verborgenen adiabatischen Cykeln zwischen hinreichend benachbarten Lagen seiner sichtbaren Massen kleiner für die natürliche Bewegung, als für irgend eine andere mögliche Bewegung, welche in der gleichen Zeit und mit denselben Momenten der verborgenen cyklischen Bewegungen die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführt.

Wir führen den Beweis, indem wir den Satz auf die Bemerkung **625** zurückführen. Wir ordnen deshalb, wie es nach **592** möglich ist, einer jeden nach den Ansprüchen des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation beim Übergang zu einer Bewegung der ersten Art haben wir nach **590** mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden Bewegung zweiter Art mit $\delta_{\mathfrak{p}}$ zu bezeichnen.

Nun ist erstens, da T nur von den sichtbaren Koordinaten abhängt:

a) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int T\,dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int T\,dt \quad .$$

Zweitens ist, da die Dauer der Bewegung nicht variiert wird und $-U$ sich nur durch eine Konstante von der Energie der cyklischen Bewegung unterscheidet (**566**), zufolge von **593**:

b) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int U\,dt = -\delta_{\mathfrak{p}} \int U\,dt \quad .$$

Durch Addition von **a)** und **b)** ergibt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int (T+U)\,dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int (T-U)\,dt \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat (**626**, **625**) für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen notwendig negativen Wert, also auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

629 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, daß die Variation des Integrales verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu der Aussage von 626):

$$\delta_q \int_{t_0}^{t_1} (T+U)\, dt = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Die in dem Lehrsatz ausgesprochene Eigenschaft der natürlichen Bewegung unterscheidet dieselbe eindeutig von jeder anderen möglichen Bewegung. Die Variation δ_q kann gebildet werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene angesehen sind, denn ihre Bildung erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse. Der Lehrsatz kann deshalb benutzt werden zur Bestimmung der natürlichen Bewegung konservativer Systeme. Seine Gültigkeit ist allerdings streng beschränkt auf holonome Systeme. 630

Anmerkung 3. Der vorstehende Lehrsatz, benutzt in der Auffassung der Anmerkung 2, führt den Namen des HAMILTONschen Prinzips. Seine physikalische Bedeutung kann nach unserer Anschauung keine andere sein, als die des Lehrsatzes 358, aus welchem wir das Prinzip hergeleitet haben. Das Prinzip selbst stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze 358 geben müssen, damit er trotz unserer Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. 631

Bemerkung 2. Bezeichnen wir mit ds das Bahnelement der sichtbaren Massen eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, so ist das Integral 632

$$\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}}$$

beim Übergang zwischen hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 kleiner für die natürlichen Bahnen des Systems, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche sowohl die

Werte der sichtbaren, als auch die Werte der cyklischen Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen. Die Größe h ist dabei als eine von einer natürlichen Bahn zur anderen wechselnde, übrigens für alle jedesmal verglichenen Bahnen gleiche Konstante zu betrachten.

Denn führen wir die Zeit als Hilfsgröße ein und machen dabei die willkürliche aber zulässige Annahme, das System durchlaufe die betrachteten Bahnen mit konstanter Geschwindigkeit, und zwar mit solcher Geschwindigkeit, daß die Konstante h den Wert der analytischen Energie bezeichnet, so ist:

a) $$T = U + h = \frac{1}{2} m \frac{ds^2}{dt^2} \quad ,$$

also das betrachtete Integral gleich:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} dt \quad .$$

Das Integral ist also, von dem Faktor abgesehen, gleich der Zeitdauer des Überganges. Diese ist aber nach **352** als Folge von **347** für gegebenen Wert der Energie, also der Konstanten h, ein Minimum. Unsere Bemerkung ist demnach nichts anderes, als der Inhalt des Lehrsatzes **352**, ausgesagt unter Benutzung der inzwischen eingeführten Bezeichnungen.

633 **Anmerkung 1.** Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen fortgelassen, so kann nur noch das Verschwinden einer Variation behauptet werden (**353**); welche Aussage in unserer Bezeichnung in der Form darzustellen ist:

$$\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U + h}} = 0 \quad .$$

634 **Anmerkung 2.** Durch die Eigenschaft, welche die Bemerkung 2 aussagt, sind die natürlichen Bahnen, welche den verschiedenen Werten der Konstanten h entsprechen, eindeutig ausgezeichnet vor jeder anderen möglichen Bahn, und der Lehrsatz kann daher zur Bestimmung der natürlichen Bahn des Systems dienen, sobald es möglich ist, die Variation δ_p zu bilden. Sind aber, wie wir voraussetzen, die Einzelheiten der cyklischen Bewegung verborgen, so ist diese Bildung nicht möglich, und die Bemerkung verliert daher nicht zwar ihre Richtigkeit, wohl aber ihre Anwendbarkeit zu dem besagten Zwecke.

Lehrsatz 2*). Beim Übergang eines freien holonomen Systems, welches verborgene adiabatische Cykeln enthält, zwischen zwei hinreichend benachbarten Lagen 0 und 1 der sichtbaren Massen, ist das Integral **635**

$$\int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds$$

kleiner für die natürlichen Bahnen, als für irgend welche andere mögliche Bahnen, welche mit denselben Werten der verborgenen cyklischen Momente und der Konstanten h die sichtbaren Koordinaten aus den gegebenen Anfangswerten in die gegebenen Endwerte überführen.

Wir führen wiederum den Beweis des Satzes, indem wir ihn auf die vorangegangene Bemerkung (**632**) zurückführen. Zu dem Ende benutzen wir wieder die Zeit als Hilfsgröße, indem wir die willkürliche aber zulässige Annahme machen, daß das System die betrachteten Bahnen mit konstanter und solcher Geschwindigkeit durchlaufe, daß die Konstante h gleich der mathematischen Energie wird. Es läßt sich dann das Integral, von dem der Lehrsatz handelt, schreiben in der Form:

$$\sqrt{\frac{2}{m}} \int_{t_0}^{t_1} (U+h)\, dt \quad .$$

Ferner ordnen wir wieder, wie es nach **592** zulässig ist, einer jeden nach der Vorschrift des Lehrsatzes variierten Bewegung eine zweite zu, bei welcher die sichtbaren Koordinaten dieselbe Variation erleiden, für welche auch die Konstante h,

*) Mit dem Originale übereinstimmender Abdruck. — Der Herausgeber.

(635) und also auch die Energie E ihren Wert behält, bei welcher aber die cyklischen Momente so variieren, daß die Anfangs- und Endwerte der cyklischen Koordinaten die ursprünglichen bleiben. Eine Variation, wie sie den Ansprüchen des Lehrsatzes entspricht, bezeichnen wir wieder mit $\delta_{\mathfrak{q}}$, eine Variation zu der entsprechenden zweiten Bewegung mit $\delta_{\mathfrak{p}}$.

Nun ist erstens für beliebige Variationen $\delta \mathfrak{q}_\varrho$ der cyklischen Momente $\mathfrak{q}_\varrho$ (**566**):

$$\delta \int (U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \int \frac{\partial (U+h)}{\partial \mathfrak{q}_\varrho}\,\delta \mathfrak{q}_\varrho\,dt$$

$$= \delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt - \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \delta \mathfrak{q}_\varrho \quad ,$$

also im besonderen für eine Variation $\delta_{\mathfrak{p}}$:

a) $$\delta_{\mathfrak{p}} \int (U+h)\,dt = \delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt - \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{p}} \mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Zweitens erhalten wir aus Gleichung **612c** unter Berücksichtigung der Beziehung **588** und der Konstanz von E:

$$\int (U+h)\,dt = E(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

also durch eine Variation der Art $\delta_{\mathfrak{p}}$:

b) $$\delta_{\mathfrak{p}} \int (U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1 - t_0) - \frac{1}{2} \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho\, \bar{\mathfrak{p}}_\varrho\, \delta_{\mathfrak{p}}\, \mathfrak{q}_\varrho \quad .$$

Durch Subtraktion von **a)** und **b)** ergibt sich:

c) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int (U+h)\,dt = E\,\delta_{\mathfrak{p}}(t_1 - t_0) \quad ,$$

oder indem wir mit Hilfe von **632a** die Zeit wieder eliminieren:

d) $$\delta_{\mathfrak{q}} \int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds = E\,\delta_{\mathfrak{p}} \int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad .$$

Die rechts stehende Variation aber hat nach **632** für die natürliche Bewegung stets einen verschwindenden und für hinreichend benachbarte Endlagen negativen Wert, also, da E notwendig positiv ist, auch die links stehende Variation. Das links stehende Integral selbst hat also für die natürliche Bewegung und hinreichend benachbarte Endlagen einen Minimalwert, welches die Behauptung ist.

Anmerkung 1. Wird die Beschränkung auf hinreichend benachbarte Lagen weggelassen, so kann nur noch behauptet werden, daß die Variation des Integrals verschwindet. Der analytische Ausdruck dieser Behauptung ist in unserer Bezeichnungsweise (im Gegensatz zu **633**): **636**

$$\delta_q \int_0^1 \sqrt{U+h}\, ds = 0 \quad .$$

Anmerkung 2. Für jeden Wert der Konstanten h zeichnet der Lehrsatz eine natürliche Bahn in eindeutiger Weise aus vor jeder anderen möglichen Bahn. Die Eigenschaft der natürlichen Bahnen, welche der Lehrsatz aussagt, kann daher benutzt werden zur Bestimmung dieser Bahnen; und zwar kann sie benutzt werden, obwohl die cyklischen Bewegungen als verborgene vorausgesetzt sind. **637**

Denn die Bildung der Variation δ_q erfordert nur, daß man die in der Kräftefunktion vorkommenden Konstanten unvariiert lasse; die Variation kann also gebildet werden trotz Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegung.

Anmerkung 3. Der Lehrsatz 2, benutzt in der Auffassung der Anmerkung 2, ist die Jacobische Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Denn nennen wir für den Augenblick m_ν die Masse des νten der sichtbaren n Punkte des Systems, ds_ν das Element der Bahn dieses Punktes, so ist **638**

$$m\, ds^2 = \sum_1^n {}_\nu\, m_\nu\, ds_\nu^2 \quad ,$$

und also das Integral, für welches wir einen Minimalwert feststellen bis auf einen Faktor:

$$\int \sqrt{U+h} \sqrt{\sum_1^n {}_\nu\, m_\nu\, ds_\nu^2} \quad ,$$

welches, wiederum bis auf einen konstanten Faktor, das JACOBIsche Integral ist.

Die physikalische Bedeutung des JACOBIschen Prinzips kann nach unserer Auffassung keine andere sein, als die des Lehrsatzes **352**, bez. **347**, aus welchem es abgeleitet ist; es stellt die Umformung dar, welche wir jenem Satze geben müssen, damit er trotz vorhandener Unkenntnis der Einzelheiten der cyklischen Bewegungen zur Bestimmung der Bewegung des sichtbaren Systems anwendbar bleibe. Die Gültigkeit auch des JACOBIschen Satzes erstreckt sich nur auf holonome Systeme.

639 **Lehrsatz 3.** Beim Übergang eines freien holonomen konservativen Systems zwischen hinreichend benachbarten Lagen ist das Zeitintegral der kinetischen Energie kleiner für die natürliche Bewegung, als für jede andere mögliche Bewegung, welche das System von den gegebenen Anfangswerten zu den Endwerten der sichtbaren Koordinaten überführt, und welche mit demselben gegebenen, in der Zeit konstanten Werte der mathematischen Energie ausgeführt wird.

Denn nennen wir h den gegebenen Wert der mathematischen Energie, so ist für alle in Betracht kommenden Bahnen (**611**)

$$T - U = h \quad ,$$

also ist das Integral, von welchem der Satz handelt, nämlich

$$\int_{t_0}^{t_1} T\, dt \quad ,$$

bis auf einen konstanten Faktor dasselbe Integral, von welchem der Lehrsatz 2 handelt; der gegenwärtige Satz ist daher nur eine andere Form, den Inhalt jenes Lehrsatzes auszusagen.

Die zu dem Lehrsatz 2 gemachten Anmerkungen 1 und 2 finden daher auch hier sinnentsprechende Anwendung.

Anmerkung. Der Lehrsatz **639** gibt die ursprüngliche **640**
Maupertuissche Form des Prinzips der kleinsten Wirkung. Diese Form hat vor der Jacobischen den Vorzug, daß sie sich in einfachen Worten aussprechen läßt und daher einen einfachen physikalischen Sinn zu enthalten scheint. Sie hat aber gegenüber der Jacobischen Form den Nachteil, daß sie unnötigerweise die Zeit enthält, obwohl doch die eigentliche Aussage nur die Bahn des Systems bestimmt, nicht die Bewegung in dieser, und obwohl diese Bewegung vielmehr nur durch die hinzugefügte Bemerkung bestimmt ist, daß überhaupt nur Bewegungen mit konstanter Energie in Betracht gezogen werden sollen.

Rückblick auf 625 bis 640.

1. Nach den Ergebnissen unserer Überlegung nimmt für **641**
die natürliche Bewegung eines freien konservativen Systems ein jedes der Integrale:

$$\int (T-U)\,dt \quad , \qquad \int (T+U)\,dt \quad ,$$

$$\int \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad , \qquad \int \sqrt{U+h}\,ds \quad ,$$

$$\int T\,dt \quad ,$$

unter bestimmten Verhältnissen einen ausgezeichneten Wert an. Dabei beziehen sich die beiden oberen Integrale auf die Bewegung des Systems, die übrigen in Wahrheit nur auf die Bahn desselben. Die beiden links stehenden Integrale beziehen sich auf den Fall, daß alle, auch die cyklischen Koordinaten des Systems in Betracht gezogen werden, und daß nur solche Lagen des Systems als gleiche gelten, bei welchen auch die letzteren Koordinaten die gleichen Werte haben. Die übrigen Integrale beziehen sich auf den Fall, daß die cyklischen Koordinaten des Systems verborgen sind, und daß schon solche Lagen des Systems als gleich gelten, bei welchen die sichtbaren Koordinaten gleiche Werte haben. Die Betrachtung des letzten Integrals setzt die Gültigkeit des Prinzips von der Erhaltung der Energie als zugestanden voraus;

die Betrachtung der beiden obersten Integrale läßt diese Gültigkeit folgen; die Betrachtung der beiden mittleren Integrale kann von dieser Gültigkeit unabhängig gehalten werden.

642 2. Die physikalische Bedeutung der beiden links stehenden Integrale ist eine äußerst einfache; die sie betreffenden Aussagen sind unmittelbare Ausflüsse des Grundgesetzes. Die rechts stehenden Integrale haben die einfache physikalische Bedeutung verloren; aber die Aussage, daß sie für die natürliche Bewegung ausgezeichnete Werte annehmen, stellt immer noch eine, wenn auch verwickelte und undurchsichtige Form des Grundgesetzes dar. Verwickelt und undurchsichtig ist aber die Form des Grundgesetzes hier deshalb geworden, weil das Gesetz verwickelten und undurchsichtigen Voraussetzungen angepaßt ist. Die Aussage, welche sich auf das untere Integral bezieht, hat den trügerischen Schein einer selbständigen, einfachen physikalischen Bedeutung.

Unser Beweisverfahren war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, den obigen Zusammenhang möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

643 3. Daß die Natur nicht darauf eingerichtet ist, daß das eine oder das andere jener Integrale ein Minimum werde, geht erstens daraus hervor, daß schon in holonomen Systemen bei ausgedehnterer Bewegung das Minimum im allgemeinen nicht eintritt, und zweitens daraus, daß es natürliche Systeme gibt, für welche das Minimum niemals eintritt, und für welche nicht einmal die Variation jener Integrale verschwindet. Ein umfassender Ausdruck für die Gesetze der natürlichen Bewegung kann daher auch an keines jener Integrale angeknüpft werden, und hieraus nahmen wir auch das Recht her, den Schein einfacher Bedeutung des letzten Integrals für trügerisch zu halten.

Endliche Bewegungsgleichungen für holonome Systeme.

644 **Bemerkung 1.** Bezeichnen wir mit V' den Wert des Integrales

$$\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} \quad ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen zwei Wertsystemen aller Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln, und gedacht als Funktion der Anfangs- und Endwerte jener Koordinaten, also der p_{ϱ_0}, p_{ϱ_1} und der $\mathfrak{p}_{\varrho_0}$, $\mathfrak{p}_{\varrho_1}$, und der Größe h, so stellt der Ausdruck

$$V'\sqrt{\frac{2\,E}{m+\mathfrak{m}}}$$

die geradeste Entfernung des Systems dar. Die Bezeichnung ist dabei dieselbe, welche wir bisher in diesem Abschnitt benutzt haben.

Denn nach **632** ist V' gleich der Zeitdauer des natürlichen Übergangs zwischen den gegebenen Lagen für die mathematische Energie h. Ist also S die geradeste Entfernung beider Lagen, so ist

$$E=\tfrac{1}{2}(m+\mathfrak{m})\frac{S^2}{V'^2} \quad ,$$

woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Mit Hilfe der Funktion V' lassen sich die natürlichen Bahnen des betrachteten Systems in geschlossener Form darstellen. **645**

Denn bezeichnen wir wie bisher mit ds das Bahnelement des sichtbaren Teilsystems, weiter mit $d\mathfrak{s}$ das Bahnelement des cyklischen Teilsystems und mit $d\sigma$ das Bahnelement des vollständigen Systems, so ist

$$(m+\mathfrak{m})\,d\sigma^2 = m\,ds^2 + \mathfrak{m}\,d\mathfrak{s}^2 \quad , \qquad \text{a)}$$

also (**57**) bei der bisher benutzten Bezeichnung:

$$d\sigma^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \frac{m}{m+\mathfrak{m}}\, a_{\varrho\sigma}\, dp_\varrho\, dp_\sigma + \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\varrho \sum_1^{\mathfrak{r}}{}_\sigma \frac{\mathfrak{m}}{m+\mathfrak{m}}\, \mathfrak{a}_{\varrho\sigma}\, d\mathfrak{p}_\varrho\, d\mathfrak{p}_\sigma \;. \qquad \text{b)}$$

Sind also schließlich noch σ,p_ϱ und $\sigma,\mathfrak{p}_\varrho$ die Winkel, welche die Bahn des ganzen Systems mit den Koordinaten p_ϱ und $\mathfrak{p}_\varrho$ des ganzen Systems bildet, so werden die Gleichungen der natürlichen Bahnen zufolge von **224** und **226**, nach Division beider Seiten durch einen konstanten Faktor, erhalten in der Form:

c) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma, p_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}}$$

d) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma, p_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{m}}\,\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}}$$

e) $$\sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_1}}\cos\sigma, \mathfrak{p}_{\varrho_1} = \sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}}$$

f) $$\sqrt{\mathfrak{a}_{\varrho\varrho_0}}\cos\sigma, \mathfrak{p}_{\varrho_0} = -\sqrt{\frac{2E}{\mathfrak{m}}}\,\frac{\partial V'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \quad ,$$

und diese Gleichungen lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die Gleichungen der natürlichen Bahnen als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

646 **Anmerkung.** Die vorstehenden Gleichungen **c)** bis **f)** sind richtig in jedem Falle, ob nun die cyklischen Koordinaten als beobachtbare oder als dauernd verborgene angesehen werden; aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald das letztere vorausgesetzt wird. Denn alsdann ist der vollständige Ausdruck von V' nicht bekannt, und die Gleichungen lassen sich nicht entwickelt hinschreiben.

647 **Aufgabe 1.** Die vorstehenden Bewegungsgleichungen eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit V den Wert des Integrales

$$\sqrt{2m}\int_0^1 \sqrt{U+h}\,ds \quad ,$$

genommen über die natürliche Bahn zwischen irgend zwei Wertsystemen der s i c h t b a r e n Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bahn wollen wir die in der Kräftefunktion vorkommenden cyklischen Momente als unveränderliche Konstanten ansehen, und V soll also gedacht werden als Funktion der Anfangs- und Endwerte allein der sichtbaren Koordinaten und der Konstanten h. Nach **635 d** ist nun beim Übergang von einer natürlichen Bahn zu einer anderen mit beliebig variierten sichtbaren Koordinaten: **(647)**

$$\delta_{\mathfrak{q}}\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds = 2E\,\delta_{\mathfrak{p}}\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{ds}{\sqrt{U+h}}\quad, \qquad \text{a)}$$

also ist auch insbesondere beim Übergang von einer natürlichen zu einer beliebigen benachbarten natürlichen Bahn:

$$\delta_{\mathfrak{q}}\,V = 2E\,\delta_{\mathfrak{p}}\,V'\quad, \qquad \text{b)}$$

also ist:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} &= 2E\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_1}}\quad,\\ \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} &= 2E\frac{\partial V'}{\partial p_{\varrho_0}}\quad. \end{aligned} \qquad \text{c)}$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen können wir die cyklischen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **645 c** und **d** fortschaffen. Was die linken Seiten anlangt, so haben wir die Winkel $\sigma.p_\varrho$ zu ersetzen durch die s,p_ϱ. Nun haben wir nach **645 b (75)**:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,d\sigma\cos\sigma,p_\varrho &= \sum_1^r{}_\sigma\,\frac{m}{m+\mathfrak{m}}\,a_{\varrho\sigma}\,dp_\sigma\\ &= \frac{m}{m+\mathfrak{m}}\sqrt{a_{\varrho\varrho}}\,ds\cos s,p_\varrho\quad, \end{aligned} \qquad \text{d)}$$

und ferner aus den beiden Gleichungen

$$\begin{aligned} U+h = T = \frac{1}{2}\,m\,\frac{ds^2}{dt^2} \qquad &\text{und}\\ E = \frac{1}{2}\,(m+\mathfrak{m})\,\frac{d\sigma^2}{dt^2} \end{aligned} \qquad \text{e)}$$

durch Division:

f) $$d\sigma = \sqrt{\frac{m}{m+\mathfrak{m}}}\sqrt{\frac{E}{U+h}}\,ds \quad ,$$

also aus **d)** und **f)**:

g) $$\cos \sigma, p_\varrho = \sqrt{\frac{U+h}{E}}\cos s, p_\varrho \quad .$$

Indem wir nun das Ergebnis **e)** in die rechten, das Ergebnis **g)** in die linken Seiten der umzuformenden Gleichungen einsetzen, erhalten wir die Gleichungen:

h) $$\begin{aligned} \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}}\cos s, p_{\varrho_1} &= \frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \\ \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}}\cos s, p_{\varrho_0} &= -\frac{1}{\sqrt{2m(U+h)_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \end{aligned}$$

welches die gesuchten Umformungen sind. Denn sie enthalten keine Größen mehr, welche sich auf das verborgene Teilsystem beziehen, und sie lassen sich auf je zwei Weisen so interpretieren, daß sie die natürlichen Bahnen des sichtbaren Teilsystems als Differentialgleichungen erster Ordnung oder auch in endlicher Form angeben.

648 **Anmerkung 1.** Die Funktion V enthält nicht die Zeit und gibt auch nur die natürlichen Bahnen des Systems, nicht aber die Bewegung des Systems in diesen Bahnen. Da aber die natürlichen Bahnen mit gleichbleibender Geschwindigkeit durchlaufen werden, und da wir bereits der in V vorkommenden Konstanten h die Bedeutung der analytischen Energie beilegten, so ist es leicht, die Zeit als unabhängige Variabele in die Gleichungen einzuführen. Zunächst ist die Verknüpfung der Zeit mit der bisher als unabhängige Variabele benutzten Weglänge gegeben durch die Gleichung:

a) $$\frac{\partial V}{\partial h} = \sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1 \frac{ds}{\sqrt{U+h}} = t_1 - t_0 \quad .$$

Sodann erhalten wir durch Multiplikation der Gleichungen **647h** mit

$$\sqrt{2m(U+h)} = \sqrt{2m\,T} = m\frac{ds}{dt} \quad ,$$

und Beachtung von **75** und **270**:

$$q_{\varrho_1} = \quad \frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{b)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{c)}$$

Endlich erhalten wir für den Wert der Funktion selbst:

$$V = 2\int_{t_0}^{t_1} T\,dt \quad . \qquad \text{d)}$$

Der Form nach sind diese Gleichungen weit einfacher als die Gleichungen der vorangegangenen Aufgabe, aber jene Gleichungen haben den Vorzug, eine unabhängige Variabele weniger zu enthalten.

Anmerkung 2. Die Funktion V ist diejenige Funktion, **649**
welche von Hamilton mit dem gleichen Buchstaben bezeichnet und die charakteristische Funktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **412**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit V bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Funktion über.

Übrigens erhellt, daß die charakteristische Funktion eines Systems nach der jetzt erweiterten Definition eine Rechnungsgröße ohne physikalische Bedeutung ist. Denn je nachdem wir größere oder kleinere Teile der cyklischen Bewegungen als verborgene behandeln, können wir für dasselbe System verschiedene charakteristische Funktionen aufstellen, welche den gleichen analytischen Dienst leisten, aber für identische Übergänge des Systems verschiedene Werte besitzen.

650 **Lehrsatz.** Die charakteristische Funktion V eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_1}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_1}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_1}}=(U+h)_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho\sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma_0}\frac{\partial V}{\partial p_{\varrho_0}}\frac{\partial V}{\partial p_{\sigma_0}}=(U+h)_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten durch Einsetzen der Richtungscosinus aus den Gleichungen **647h** in die Gleichung **88**, welcher diese Richtungscosinus genügen.

651 **Bemerkung 2.** Bezeichnen wir mit P' den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1}(T-U)\,dt \quad ,$$

genommen über die natürliche Bewegung zwischen zwei Wertsystemen der sämtlichen Koordinaten eines freien holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln und gedacht als Funktion dieser Werte und der Zeitdauer des Übergangs, so unterscheidet sich P' von der Prinzipalfunktion des Systems (**415**) nur um das Produkt der Zeitdauer des Übergangs in eine (unbekannte) Konstante.

Denn es unterscheidet sich $T-U$ von der Energie des Systems nur um eine (unbekannte) Konstante.

652 **Folgerung.** Mit Hilfe der Funktion P' lassen sich die natürlichen Bewegungen des Systems in geschlossener Form darstellen.

In der Tat hindert der Unterschied zwischen P' und der in **415** definierten Prinzipalfunktion nicht die unmittelbare Anwendung der Gleichungen **414b** und **c**, so daß wir als Bewegungsgleichungen erhalten:

$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{a)}$$

$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \text{b)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1} = \frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_1}} \quad , \qquad \text{c)}$$

$$\mathfrak{q}_{\varrho_0} = -\frac{\partial P'}{\partial \mathfrak{p}_{\varrho_0}} \quad . \qquad \text{d)}$$

Dagegen erfordert die Gleichung **414d** eine leichte Abänderung; an ihrer Stelle wird erhalten:

$$h = -\frac{\partial P'}{\partial t_0} = \frac{\partial P'}{\partial t_1} \quad . \qquad \text{e)}$$

Anmerkung. Die vorstehenden Gleichungen **a)** bis **d)** sind 653
richtig in jedem Falle, ob nun alle Koordinaten in Wahrheit beobachtbar sind oder ob nicht, aber jene Gleichungen verlieren ihre Anwendbarkeit, sobald die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene behandelt werden.

Aufgabe 2. Die vorstehenden Bewegungsgleichungen 654
eines freien holonomen Systems so umzuformen, daß sie ihre Anwendbarkeit behalten, auch wenn die cyklischen Bewegungen des Systems als verborgene gelten.

Wir bezeichnen mit P den Wert des Integrales

$$\int_{t_0}^{t_1} (T + U)\, dt \quad ,$$

genommen für die natürliche Bewegung zwischen zwei zu den Zeiten t_0 und t_1 stattfindenden Wertsystemen der s i c h t b a r e n Koordinaten. Bei Bestimmung dieser natürlichen Bewegung sollen die in den Konstanten der Kräftefunktion enthaltenen cyklischen Momente als unabänderlich angesehen werden, und P soll also gedacht sein als Funktion allein der Anfangs- und Endwerte der sichtbaren Koordinaten und der Zeiten t_0 und t_1.

Nun gilt nach **628c** beim Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer beliebigen benachbarten Bewegung von gleicher Dauer die Gleichung:

$$\delta_{\mathfrak{q}} \int (T + U)\, dt = \delta_{\mathfrak{p}} \int (T - U)\, dt \quad .$$

Wenden wir diese Gleichung an auf den Übergang von einer natürlichen Bewegung zu einer benachbarten natürlichen Bewegung von gleicher Dauer, so liefert sie uns:

$$\delta_{\mathfrak{q}} P = \delta_{\mathfrak{p}} P' \quad ,$$

also:

$$\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_0}} \quad , \qquad \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} = \frac{\partial P'}{\partial p_{\varrho_1}} \quad .$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen entfernen wir die verborgenen Koordinaten aus den rechten Seiten der Gleichungen **652**. Was die linken Seiten anlangt, so genügt die Bemerkung, daß das Moment q_ϱ des gesamten Systems nach seiner Koordinate p_ϱ zugleich das Moment des sichtbaren Teilsystems nach der Größe p_ϱ als Koordinate dieses Teilsystems ist. Wir erhalten demnach als Bewegungsgleichungen des sichtbaren Teilsystems:

a)
$$q_{\varrho_1} = \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

b)
$$q_{\varrho_0} = -\frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \quad ,$$

welches die gesuchten Umformungen sind.

655 **Anmerkung 1.** Die jetzt von uns eingeführte Funktion P ist diejenige Funktion, welche von Hamilton mit dem Buchstaben S bezeichnet und die Prinzipalfunktion des konservativen Systems genannt worden ist. Diese Aussage steht im Einklang mit der Aussage **415**, denn unter der dort gemachten Voraussetzung, daß alle Koordinaten sichtbare seien, geht die jetzt mit P bezeichnete Funktion in die dort mit dem gleichen Buchstaben belegte Funktion über.

Anmerkung 2. Der Wert der Prinzipalfunktion für einen bestimmten Übergang hängt mit dem der charakteristischen Funktion in einfacher Weise zusammen. Durch einfache Umformung wird nämlich erhalten: 656

$$\int_{t_0}^{t_1}(T+U)\,dt=\int_{t_0}^{t_1}(2\,U+h)\,dt$$

$$=\sqrt{2m}\int_0^1\sqrt{U+h}\,ds-\sqrt{\frac{m}{2}}\int_0^1\frac{h\,ds}{\sqrt{U+h}}\quad.$$

Also ist (**647, 644**):

$$P=V-h\,(t_1-t_0)\quad,\qquad\textbf{a)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in V und im zweiten Summanden, die Größe h als Funktion von t_1-t_0 und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Umgekehrt ist also auch

$$V=P+h\,(t_1-t_0)\quad,\qquad\textbf{b)}$$

wobei wir uns in der rechten Seite, in P und im zweiten Summanden, die Größe t_1-t_0 als Funktion von h und der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} eingesetzt zu denken haben.

Anmerkung 3. Die analytische Energie h kommt in der Prinzipalfunktion nicht vor. Doch kann sie aus derselben mit Hilfe der Gleichungen **654a, b, 286c** und **612a** mittelbar abgeleitet werden. Sie kann aber auch unmittelbar durch P ausgedrückt werden. Denn ändern wir in der rechten Seite der Gleichung **656a** nicht die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}, sondern nur t_1 und t_0, und bezeichnen mit dh die damit notwendig verbundene Änderung von h, so folgt: 657

$$dP=\frac{\partial V}{\partial h}\,dh-h\,d(t_1-t_0)-(t_1-t_0)\,dh\quad,$$

also nach **648a**:

$$dP=-h\,d(t_1-t_0)\quad,$$

woraus folgt:

$$h = -\frac{\partial P}{\partial t_1} = \frac{\partial P}{\partial t_0} \quad .$$

658 **Lehrsatz.** Die Prinzipalfunktion P eines konservativen Systems genügt den beiden partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung:

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_1}} + \frac{\partial P}{\partial t_1} = U_1 \quad ,$$

$$\frac{1}{2m}\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial P}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial P}{\partial p_{\sigma_0}} - \frac{\partial P}{\partial t_0} = U_0 \quad ,$$

welche den Differentialgleichungen **227** für die geradeste Entfernung entsprechen.

Denn diese Gleichungen werden erhalten, wenn man die analytische Energie h das eine Mal direkt mit Hilfe von **657**, das andere Mal indirekt mit Hilfe von **612a** und **654a, b** durch die Differentialquotienten von P ausdrückt.

Rückblick auf 644 bis 658.

659 1. In den Nummern **644** bis **658** sind vier endliche Darstellungen der Bewegung eines holonomen Systems mit adiabatischen Cykeln gegeben. In der ersten und dritten Darstellung waren alle Koordinaten des Systems als beobachtbare angesehen, in der zweiten und vierten Darstellung waren die cyklischen Koordinaten als verborgene behandelt. Die erste und zweite Darstellung, welche auf die charakteristische Funktion führte, gab im Grunde nur die Bahn des Systems und entsprach dem Prinzip der kleinsten Wirkung. Die dritte und vierte Darstellung, welche auf die Prinzipalfunktion führte, gab vollständig die Bewegung und entsprach dem Hamiltonschen Prinzip.

660 2. Alle vier Darstellungen haben denselben einfachen physikalischen Sinn und für alle ist der Grund der mathematischen Verwickelung derselbe. Der einfache physikalische

Sinn besteht in der Tatsache, daß die natürlichen Bahnen stets geradeste Bahnen sind, und in dem rein geometrischen Zusammenhange dieser Bahnen mit der geradesten Entfernung in holonomen Systemen. Der Grund der mathematischen Verwickelung aber besteht darin, daß wir nicht stets alle wesentlichen Bestimmungsstücke der Bewegung gleichmäßig behandelten, sondern einige derselben als verborgene eliminierten. Wir können auch sagen, die Ungleichmäßigkeit bestehe darin, daß wir für einige Koordinaten die Anfangs- und Endwerte, für andere Koordinaten die Anfangsgeschwindigkeiten als Bestimmungsstücke einführten. Unsere Ableitungsweise war nicht darauf berechnet, möglichst einfach zu sein, sondern darauf, dies Verhältnis möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

3. Man kann weitere Darstellungen der Bewegung eines 661
holonomen Systems geben, indem man weitere Koordinaten eliminiert, oder indem man auch für die sichtbaren Koordinaten nicht die Anfangs- und Endwerte, sondern andere Größen als Bestimmungsstücke einführt, oder indem man von den partiellen Differentialgleichungen **650** oder **658** ausgeht, in ähnlicher Weise, wie dies für die geradeste Entfernung in **232** u. ff. geschehen ist. Solche Darstellungen können in besonderen Fällen mathematische Vorteile bieten, wie Jacobi in umfassender Weise gezeigt hat. Je mehr man aber in dieser Richtung fortschreitet, desto mehr verbirgt sich der physikalische Sinn der Operationen hinter deren mathematischer Form, desto mehr nehmen die benutzten Funktionen den Charakter von Hilfskonstruktionen an, welchen es nicht mehr möglich ist, eine physikalische Bedeutung beizulegen.

Nicht-konservative Systeme.

Erläuterungen und Bemerkungen.

1. Enthält ein materielles System keine anderen ver- 662
borgenen Massen, als solche, welche in adiabatischer cyklischer Bewegung begriffen sind, so ist es bei freier Verfügung über die sichtbaren Koordinaten jederzeit möglich, Energie, welche in die Energie der verborgenen Massen übergegangen ist, in

die Energie der sichtbaren Massen zurückzuverwandeln. Die einmal im System vorhandene sichtbare Energie kann also dauernd als sichtbare Energie erhalten bleiben.

Dies ist die Eigenschaft, auf Grund deren wir solche Systeme als konservative bezeichneten. Aus dem gleichen Grunde bezeichnen wir die von den verborgenen Massen solcher Systeme ausgeübten Kräfte als konservative Kräfte.

663 2. Im Gegensatz dazu werden solche Systeme, bei welchen die freie Verfügung über die sichtbaren Koordinaten nicht ausreicht, verborgene Energie jederzeit in sichtbare zurückzuverwandeln, als nicht-konservative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme als nicht-konservative Kräfte bezeichnet. Nicht-konservative Systeme, in welchen die Energie sich vorzugsweise aus der Energie sichtbarer Massen in die Energie der verborgenen Massen verwandelt, nicht aber umgekehrt, heißen dissipative Systeme, und die Kräfte der verborgenen Massen solcher Systeme dissipative Kräfte.

664 3. Im allgemeinen sind die Systeme und Kräfte der Natur nicht-konservativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand ist eine notwendige Folge davon, daß die konservativen Systeme nur Ausnahmefälle, sogar nur mit mehr oder weniger Annäherung erreichte (**550**) Ausnahmefälle bilden, daß also für ein beliebig herausgegriffenes natürliches System eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, daß es ein konservatives sei. Erfahrungsmäßig aber sind weiter die Systeme und Kräfte der Natur dissipativ, sobald überhaupt verborgene Massen in Betracht kommen. Dieser Umstand findet eine hinreichende Erklärung in der Hypothese, daß in der Natur die Zahl der verborgenen Massen und ihrer Bewegungsfreiheiten unendlich groß sei gegen die Zahl der sichtbaren Massen und deren sichtbarer Koordinaten, so daß für eine beliebig herausgegriffene Bewegung eine unendliche Wahrscheinlichkeit dagegen spricht, daß sich die Energie gerade in der besonderen und ausgezeichneten Richtung von jener großen Zahl von Massen auf diese ganz bestimmte kleine Zahl hin konzentriere.

665 4. Übrigens steht der Unterschied zwischen konservativen

und dissipativen Systemen und Kräften nicht in der Natur, sondern beruht lediglich auf der freiwilligen Beschränkung unserer Auffassung oder der unfreiwilligen Beschränktheit unserer Kenntnis der natürlichen Systeme. Werden alle Massen der Natur als sichtbare Massen betrachtet, so fällt jener Unterschied fort, und alle Kräfte der Natur können alsdann als konservative Kräfte bezeichnet werden.

5. Die konservativen Kräfte erscheinen im allgemeinen **666**
als Differentialquotienten von Kräftefunktionen, also als solche Funktionen der sichtbaren Koordinaten der Systeme, welche unabhängig von der Zeit sind. Die nicht-konservativen Kräfte hängen außerdem im allgemeinen von den ersten und von höheren Differentialquotienten der sichtbaren Koordinaten nach der Zeit ab. Bei jeder analytisch gegebenen Form einer Kraft beider Arten kann die Frage aufgeworfen werden, ob diese Form mit den Voraussetzungen unserer Mechanik verträglich sei, oder ihr widerspreche.

6. Auf diese letztere Frage kann im allgemeinen Ant- **667**
wort nicht erteilt werden; im einzelnen ist sie nach folgenden Gesichtspunkten zu beurteilen:

1. Wenn irgend ein gesetzmäßiges stetiges System aufgewiesen werden kann, welches Kräfte der gegebenen Form ausübt, so ist bewiesen, daß die gegebene Form den Ansprüchen unserer Mechanik genügt.

2. Wenn die Unmöglichkeit nachgewiesen werden kann, ein solches System aufzufinden, so ist gezeigt, daß die gegebene Form unserer Mechanik widerspricht.

3. Wenn in der Natur irgend ein System aufgewiesen werden kann, welches erfahrungsmäßig Kräfte der gegebenen Form ausübt, so betrachten wir dadurch zunächst als bewiesen, daß die gegebene Form mit unserer Mechanik verträglich ist.

Trifft keiner der Fälle 1. 2. 3. zu, so muß die gestellte Frage eine offene bleiben. Sollte sich eine Form der Kraft finden, welche nach 2. zurückzuweisen wäre, nach 3. aber zugelassen werden müßte, so wäre damit die Unzulänglichkeit der Hypothese, welche unserer Mechanik zugrunde liegt, und damit die Unzulänglichkeit dieser Mechanik selbst erwiesen.

Abschnitt 6. Von den Unstetigkeiten der Bewegung.

Erläuterungen und Bemerkungen.

668 1. Alle Systeme materieller Punkte, auf welche das Grundgesetz nach seinen Voraussetzungen überhaupt Anwendung finden kann, müssen stetige Zusammenhänge besitzen. Die Koeffizienten aller Bedingungsgleichungen solcher Systeme sind also von vornherein stetige Funktionen der Lage (**124**). Dies hindert aber nicht, daß diese Funktionen sich in der Nähe gewisser Lagen äußerst schnell ändern, so daß die Gleichungen schon in sehr benachbarten Lagen endlich verschiedene Koeffizienten haben.

669 2. Wenn das betrachtete System durch eine solche Lage sehr schneller Änderung hindurchgeht, so erfordert die vollständige Kenntnis seiner Bewegung die vollständige Kenntnis der Bedingungsgleichungen auch während der schnellen Änderung derselben. Gewisse Aussagen über die Bewegung aber lassen sich fällen, auch wenn die Form der Bedingungsgleichungen des Systems nur vor und hinter der Stelle ihrer schnellen Änderung gegeben ist. Beschränken wir uns auf diese Klasse von Aussagen, so ist es analytisch einfacher, auf die besondere Art der Änderung keine Rücksicht zu nehmen, und die Bedingungsgleichungen so zu behandeln, als ob ihre Koeffizienten unstetig wären. In diesem Falle ist die Auffassung des Systems als eines unstetigen bedingt durch die freiwillige Beschränkung unserer Behandlung desselben.

670 3. Es kann aber auch geschehen, daß unsere physikalischen Mittel uns zwar erlauben, den Zusammenhang eines Systems im übrigen vollständig zu erforschen, daß sie aber nicht ausreichen, ihn zu erforschen an den Stellen der sehr schnellen Änderung, obwohl wir überzeugt sind, und etwa auch physikalisch nachweisen können, daß dieser Zusammenhang auch hier ein stetiger ist. Trifft dies ein, so sind wir gezwungen, den Zusammenhang analytisch als einen unstetigen

darzustellen, wenn wir nicht auf eine einheitliche Darstellung desselben überhaupt verzichten wollen. In diesem Falle ist dann die Auffassung des Systems als eines unstetigen bedingt durch die unfreiwillige Beschränktheit unserer Kenntnis von dem System.

4. Sind uns umgekehrt unmittelbar analytisch die Koeffi- 671
zienten der Bedingungsgleichungen eines Systems als unstetige Funktionen der Lage gegeben, ohne Angabe, wie diese Funktionen ermittelt sind, so setzen wir voraus, daß einer der beiden vorher erwähnten Fälle vorliege. Wir betrachten also die gegebenen Gleichungen nur als eine unvollständige und angenäherte Angabe der wahren, stetigen Form derselben. Wir nehmen also auch eo ipso an, daß man nicht eine vollständige Bestimmung der Bewegung eines solchen Systems von uns verlange, sondern nur die Angabe derjenigen Aussagen, welche sich trotz der unvollständigen Kenntnis des Systems tun lassen unter der Voraussetzung, daß an den Unstetigkeitsstellen der unbekannte Zusammenhang in Wirklichkeit ein stetiger sei.

5. Geht ein System mit endlicher Geschwindigkeit durch 672
eine Stelle sehr schneller Änderung hindurch, so erleiden seine Bedingungsgleichungen in verschwindender Zeit endliche Änderungen. Ist das System während des ganzen Verlaufs auch in Wirklichkeit, wie es das Grundgesetz voraussetzt, ein gesetzmäßiges, so gewinnt es doch den Anschein, als erlitte seine Gesetzmäßigkeit zur Zeit des Durchgangs durch jene Lage einen Bruch, ohne daß in Wahrheit ein solcher stattfände. Ist uns also analytisch ein System gegeben, dessen im übrigen von der Zeit unabhängige Bedingungsgleichungen zu einer bestimmten Zeit in neue Formen überspringen, so betrachten wir diese Bedingungsgleichungen zu dieser Zeit nur als angenäherte Vertreter eines anderen, uns unbekannten, vielleicht viel verwickelteren, aber jedenfalls nicht nur stetigen, sondern auch gesetzmäßigen Zusammenhangs. Wir nehmen also auch an, daß man nicht eine vollständige Bestimmung der Bewegung des Systems von uns verlange, sondern nur die Angabe derjenigen Aussagen, welche sich trotz der vorhandenen Unkenntnis

nach dem Grundgesetz aussagen lassen unter der Voraussetzung, daß auch zur Zeit der Unstetigkeit der wahre Zusammenhang des Systems ein stetiger und gesetzmäßiger sei.

673 **6.** Indem wir alle Unstetigkeitslagen und -zeiten in der vorerwähnten Weise auffassen, haben wir freilich auf die Behandlung wirklich unstetiger Systeme verzichtet. Auf solche würde auch das Grundgesetz eine Anwendung gar nicht gestatten. Einen Verzicht auf die Behandlung irgendwelcher natürlicher Systeme bedeutet aber diese Einschränkung nicht, da alles uns zu der Annahme berechtigt, daß in der Natur wohl scheinbare, aber keine wirklichen Unstetigkeiten vorkommen. Daß der Durchgang der Systeme durch scheinbare Unstetigkeitslagen nicht vollständig durch das Grundgesetz allein bestimmt ist, entspricht auch vollständig der physikalischen Erfahrung, daß die Kenntnis eines Systems vor und hinter einer Unstetigkeitsstelle nicht hinreicht, um die Änderung der Bewegung beim Durchgang durch die Stelle vollständig zu ermitteln.

Von der Stoßkraft oder dem Stoß.

674 **Bemerkung.** Durchläuft ein System eine Unstetigkeitslage, so erleidet seine Geschwindigkeit eine Änderung von endlicher Größe. Die Differentialquotienten seiner Koordinaten nach der Zeit springen plötzlich auf neue Werte über.

Denn unmittelbar vor und hinter der Unstetigkeitsstelle müssen diese Differentialquotienten, und also die Komponenten jener Geschwindigkeit, linearen Gleichungen mit endlich verschiedenen Koeffizienten genügen.

675 **Folgerung 1.** Beim Durchgang durch eine Unstetigkeitslage wird die Beschleunigung unendlich groß, jedoch in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Beschleunigung, genommen über die Zeit des Durchgangs, im allgemeinen einen endlichen Wert behält.

Denn dieses Zeitintegral ist die im allgemeinen endliche Änderung der Geschwindigkeit.

Folgerung 2. Erleiden die Bedingungsgleichungen des 676
einen von zwei oder mehreren gekoppelten Systemen eine Unstetigkeit, so wird beim Durchgang durch diese Unstetigkeit die zwischen den Systemen auftretende Kraft im allgemeinen unendlich groß, jedoch in solcher Weise, daß das Zeitintegral der Kraft, genommen über die Zeit des Durchgangs, endlich bleibt.

Denn im allgemeinen werden die Komponenten der Beschleunigung des unstetigen Systems auch nach den gemeinsamen Koordinaten im Sinne der Folgerung 1 unendlich werden. Da aber die Koeffizienten der Bedingungsgleichungen auch während der Unstetigkeit endlich bleiben, so ist die Kraft von der Ordnung der Beschleunigung.

Definition. Stoßkraft oder kurz Stoß heißt das Zeit- 677
integral der während des Durchgangs durch eine Unstetigkeitsstelle von einem System auf ein anderes ausgeübten Kraft, genommen über die Dauer des Durchgangs durch die Unstetigkeitsstelle.

Anmerkung. Bei endlicher Geschwindigkeit aller betrach- 678
teten Systeme können endliche und unendlich kleine, nicht aber unendlich große Stöße vorkommen. Wir setzen die Stöße im folgenden als endlich voraus.

Folgerung 1. Zu jedem Stoß gibt es immer einen 679
Gegenstoß. Er ist das Zeitintegral der Kraft, welche das als zweites bezeichnete System auf das in der Definition zuerst genannte ausübt.

Folgerung 2. Ein Stoß wird stets ausgeübt von einem 680
System, welches eine Unstetigkeit seiner Bewegung erleidet, und ausgeübt auf ein System, welches eine Unstetigkeit seiner Bewegung erleidet; er ist nicht denkbar ohne zwei solcher einander beeinflussender Systeme.

Aus denselben Gründen wie bei der Kraft können wir uns aber erlauben, von Stößen schlechthin zu reden, ohne ausdrücklich der Systeme zu gedenken, von welchen oder auf welche sie ausgeübt werden.

Folgerung 3. Ein Stoß kann stets betrachtet werden 681
als Vektorgröße, sowohl in bezug auf das System, welches

ihn ausübt, als auch in bezug auf das System, auf welches er ausgeübt wird. Seine Komponenten nach den gemeinsamen Koordinaten sind im allgemeinen von Null verschieden; seine Komponenten nach den nicht gemeinsamen Koordinaten sind Null; seine Komponenten in Richtungen, welche sich nicht durch Änderungen der benutzten Koordinaten ausdrücken lassen, bleiben unbestimmt.

Denn die gleiche Behauptung gilt von der Kraft, von welcher der Stoß das Zeitintegral ist.

682 **Bezeichnung.** Erleidet ein System mit den Koordinaten p_ϱ eine Unstetigkeit seiner Bewegung, so wollen wir die Komponenten des Stoßes, welcher auf das System wirkt, nach den p_ϱ mit J_ϱ bezeichnen. Die Komponenten des Stoßes aber, welchen das System ausübt, nach den p_ϱ, sollen mit J'_ϱ bezeichnet werden. Für das zweite System, dessen Koordinaten wir mit $\mathfrak{p}_\varrho$ bezeichnen, mögen die entsprechenden Größen mit $\mathfrak{J}_\varrho$ und $\mathfrak{J}'_\varrho$ bezeichnet werden (vergl. **467**). Identisch ist dann:

$$J_\varrho = \mathfrak{J}'_\varrho \quad ,$$
$$\mathfrak{J}_\varrho = J'_\varrho \quad .$$

683 **Lehrsatz.** Stoß und Gegenstoß sind einander stets entgegengesetzt gleich, d. h. es sind die Komponenten beider nach jeder Koordinate entgegengesetzt gleich, und zwar sowohl wenn wir beide Größen betrachten als Vektorgrößen in bezug auf das eine, als auch in bezug auf das andere System.

Denn Stoß und Gegenstoß können auch betrachtet werden als die Zeitintegrale von Kraft und Gegenkraft (vergl. **468**).

In der eingeführten Bezeichnung wird der Lehrsatz wiedergegeben durch die Gleichungen:

$$J_\varrho = -J'_\varrho \quad ,$$
$$\mathfrak{J}_\varrho = -\mathfrak{J}'_\varrho \quad .$$

Zusammensetzung der Stöße.

Lehrsatz. Ist ein System gleichzeitig mit mehreren Sy- 684
stemen gekoppelt, so ist ein Stoß, welchen die Gesamtheit jener Systeme ausübt, gleich der Summe der Stöße, welche die einzelnen Systeme ausüben.

Denn die Behauptung gilt für jeden Augenblick der Stoßzeit für die wirkenden Kräfte (**471**), also auch für die Integrale derselben, die Stöße.

Folgerung. Gleichzeitig auf dasselbe System ausgeübte, 685
oder von demselben System ausgeübte Stöße können wie Kräfte zusammengesetzt und zerlegt werden nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung von Vektorgrößen überhaupt. Wir reden von den Komponenten eines Stoßes und von resultierenden Stößen in demselben Sinne, in welchem wir von Komponenten der Kraft und von resultierenden Kräften reden. (Vergl. **472** bis **474**.)

Definition. Ein Stoß, welcher von einem einzelnen ma- 686
teriellen Punkt oder auf einen einzelnen materiellen Punkt ausgeübt wird, heißt ein Elementarstoß.

Folgerung 1. Jeder Stoß, welcher von einem mate- 687
riellen System oder auf ein materielles System ausgeübt wird, kann zerlegt werden in eine Anzahl von Elementarstößen. (Vergl. **479**.)

Folgerung 2. Die Zusammensetzung und Zerlegung der 688
Elementarstöße erfolgt nach den Regeln der Zusammensetzung und Zerlegung geometrischer Strecken. (Parallelogramm der Stöße.) (Vergl. **478**.)

Bewegung unter dem Einfluß von Stößen.

Aufgabe 1. Die Bewegung eines materiellen Systems 689
unter dem Einfluß eines gegebenen Stoßes zu bestimmen.

Die Lösung der Aufgabe besteht nur in der Angabe der Änderung, welche die Geschwindigkeit des Systems durch den

(689) Stoß erfährt. Es sei nun das betrachtete System dasselbe wie in **481**; bedeuten die P_ϱ die Komponenten der unendlichen Kraft, welche während der Dauer des Stoßes auf das System wirkt, so ist während dieser Dauer nach **481**:

a) $$mf_\varrho + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} P_\varkappa = P_\varrho \quad .$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit dt und integrieren über die Stoßzeit. Da die Werte der Koordinaten während dieser Zeit konstant sind, so ist

b) $$m\int f_\varrho\, dt = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn wir durch den Index 0 die Größen vor dem Stoße, durch den Index 1 die Größen nach dem Stoße charakterisieren. Wir haben ferner nach **682**:

c) $$\int P_\varrho\, dt = J_\varrho \quad ,$$

und wenn wir noch zur Abkürzung setzen:

d) $$\int P_\varkappa\, dt = J_\varkappa \quad ,$$

so erhalten wir r Gleichungen von der Form:

e) $$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa = J_\varrho \quad .$$

Da die Geschwindigkeit des Systems vor und nach dem Stoße den Zusammenhängen des Systems genügen muß, so erhalten wir weiter aus den k Bedingungsgleichungen des Systems k Gleichungen von der Form:

f) $$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho} (\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) = 0 \quad ,$$

welche zusammen mit den Gleichungen **e)** als $r + k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $k + r$ Größen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$

und $J_\varkappa$ oder auch für die $k+r$ Größen $q_{\varrho_1}-q_{\varrho_0}$ und $J_\varkappa$ angesehen werden können, und welche also diese Größen und damit die Änderung der Geschwindigkeit des Systems eindeutig bestimmen.

Anmerkung 1. Ist uns die Geschwindigkeit des Systems vor dem Stoße gegeben, und sind also die Größen q_{ϱ_0} und $\dot{p}_{\varrho_0}$ bekannt, so können wir die r Gleichungen **689e** zusammen mit den k Gleichungen **689f**, oder, was dasselbe, mit den k Gleichungen **690**

$$\sum_1^r{}_\varrho\, p_{\varkappa\varrho}\, \dot{p}_{\varrho_1} = 0$$

auch auffassen als $r+k$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r+k$ Größen $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $J_\varkappa$, welche also diese Größen und damit die Geschwindigkeit des Systems nach dem Stoße eindeutig bestimmen.

Anmerkung 2. Wenden wir rechtwinklige Koordinaten **691**
an, und bezeichnen wir die Komponente des Stoßes nach der Koordinate x_ν mit I_ν, so nehmen die Gleichungen des Stoßes die Form der $3n$ Gleichungen an:

$$m_\nu\,(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) + \sum_1^i{}_\iota\, x_{\iota\nu}\, I_\iota = I_\nu \quad , \qquad \text{a)}$$

welche zusammen mit den i aus den Bedingungsgleichungen abgeleiteten Gleichungen:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu\, x_{\iota\nu}\,(\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}) = 0 \qquad \text{b)}$$

die $3n$ Komponenten $\dot{x}_{\nu_1}-\dot{x}_{\nu_0}$ der Geschwindigkeitsänderung und die i Hilfsgrößen I_ι eindeutig bestimmen.

Anmerkung 3. Ist die Koordinate p_ϱ eine freie Koordi- **692**
nate, so sind die entsprechenden Größen $p_{\varkappa\varrho}$ gleich Null, und die auf p_ϱ bezügliche Stoßgleichung nimmt die einfache Form an:

$$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} = J_\varrho \quad .$$

Sind in einem holonomen System alle Koordinaten freie Koordinaten, so nehmen alle Gleichungen diese Form an, und die so entstehenden r Gleichungen genügen zur Bestimmung der r Größen $\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}$, welche bekannte lineare Funktionen der durch jene Gleichungen unmittelbar gegebenen $q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0}$ sind.

693 **Folgerung 1** (aus 689). Um ein System aus der Ruhe plötzlich in eine gegebene mögliche Geschwindigkeit zu versetzen, genügt es, dem System einen Stoß zu erteilen, welcher nach Richtung und Größe gleich ist dem Produkt aus der gegebenen Geschwindigkeit und der Masse des Systems.

Denn sind die $q_{\varrho_0} = 0$, und genügen die gegebenen $\dot{p}_{\varrho_1}$ an sich den Bedingungsgleichungen, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = q_{\varrho_1}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

694 **Folgerung 2**. Um ein bewegtes System in seiner augenblicklichen Lage plötzlich zur Ruhe zu bringen, genügt es, dem System einen Stoß zu erteilen, welcher nach Richtung und Größe entgegengesetzt gleich ist dem Produkt aus der Geschwindigkeit des Systems in seine Masse.

Denn sollen die $q_{\varrho_1} = 0$ werden, und genügen die $\dot{p}_{\varrho_0}$ den Bedingungsgleichungen des Systems, so genügt die Annahme:

$$J_\varkappa = 0$$

$$J_\varrho = -q_{\varrho_0}$$

den Gleichungen **689e** und **f**.

695 **Lehrsatz.** Die Geschwindigkeitsänderung, welche mehrere gleichzeitig wirkende Stöße einem System erteilen, ist die Summe der Geschwindigkeitsänderungen, welche die Stöße, einzeln wirkend, dem System erteilen würden.

Als gleichzeitig wirkend sind dabei alle Stöße bezeichnet, welche innerhalb einer verschwindend kleinen Zeit erfolgen, ohne Rücksicht auf ihre etwaigen Zeitunterschiede oder ihre Reihenfolge innerhalb dieser Zeit.

Der Satz folgt (vergl. **485**) aus der linearen Form der Gleichungen **689e, f**, er kann aber auch als unmittelbare Folgerung des Satzes **485** angesehen werden.

Anmerkung. Der Inhalt des vorigen Lehrsatzes kann auch **696**
wiedergegeben werden in der oft benutzten Form der Aussage, daß mehrere gleichzeitig erfolgende Stöße sich hinsichtlich der Geschwindigkeit, welche sie erzeugen, nicht stören.

Lehrsatz. Steht die Richtung eines Stoßes senkrecht auf **697**
jeder möglichen Verrückung des Systems, auf welches er wirkt, so übt der Stoß keinen Einfluß aus auf die Bewegung des Systems. Und umgekehrt: Übt ein Stoß keinen Einfluß aus auf die Bewegung des Systems, auf welches er wirkt, so steht er senkrecht auf jeder möglichen Verrückung desselben.

Der Satz kann als unmittelbare Folgerung des Satzes **488** angesehen werden oder auch in entsprechender Weise aus den Gleichungen **689e, f** abgeleitet werden.

Anmerkung. Obwohl also aus der Angabe eines Stoßes **698**
eindeutig die Bewegungsänderung erschlossen werden kann, welche er erzeugt, so kann doch nicht umgekehrt aus einer plötzlichen Bewegungsänderung eindeutig auf den Stoß geschlossen werden, welcher sie erzeugt hat.

Aufgabe 2. Die Stoßkraft zu bestimmen, welche ein **699**
materielles System bei gegebener plötzlicher Bewegungsänderung ausübt.

Nach **682** sind die Komponenten des gesuchten Stoßes zu bezeichnen mit J'_ϱ, und nach **683** und **689e** sind dieselben:

$$J'_\varrho = -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} - \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa \quad .$$

Hierin sind die q_{ϱ_1} und q_{ϱ_0} durch die Angaben der Aufgabe bestimmt, die $J_\varkappa$ aber sind nicht gegeben, solange nicht auch die Bewegung des zweiten Systems gegeben ist, auf welches der Stoß ausgeübt wird. Die Lösung der Aufgabe ist also nicht eine bestimmte, sondern enthält einen unbestimmt bleibenden Summanden, welcher einen auf jeder möglichen Verrückung des Systems senkrechten Stoß darstellt (**250**).

700 **Anmerkung 1.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so sind doch alle Komponenten in Richtung einer möglichen Bewegung durch jene Bewegungsänderung bestimmt.

701 **Anmerkung 2.** Obwohl von dem Stoß, welchen ein System bei plötzlicher Bewegungsänderung ausübt, nicht alle Komponenten durch die Bewegungsänderung des Systems bestimmt sind, so ist doch jede Komponente in Richtung einer freien Koordinate durch die Bewegungsänderung eindeutig bestimmt.

702 **Anmerkung 3.** Ist p_ϱ eine freie Koordinate, so kann der nach dieser Koordinate ausgeübte Stoß geschrieben werden in den Formen:

$$\begin{aligned} J'_\varrho &= -q_{\varrho_1} + q_{\varrho_0} \quad , \\ &= -\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_1 + \left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right)_0 \quad . \end{aligned}$$

Innerer Zwang beim Stoße.

703 **Bemerkung 1.** Trifft ein Stoß ein System materieller Punkte, zwischen welchen keine Zusammenhänge bestehen, so erfolgt eine Geschwindigkeitsänderung, deren Richtung die Richtung des Stoßes ist, und deren Größe gleich ist der Größe des Stoßes, dividiert durch die Masse des Systems.

704 **Bemerkung 2.** Bestehen Zusammenhänge zwischen den Punkten des gestoßenen Systems, so weicht die Geschwindigkeitsänderung im allgemeinen ab von der durch die vorige Bemerkung gegebenen. Als Ursache dieser Abweichung können wir also die Zusammenhänge des Systems betrachten.

Definition. Inneren Zwang beim Stoße oder kurz Zwang beim Stoße nennen wir die Abänderung, welche die sämtlichen Zusammenhänge eines Systems an der Geschwindigkeitsänderung des Systems beim Stoße hervorbringen. 705

Der Zwang beim Stoße wird gemessen durch den Unterschied zwischen der wirklichen Geschwindigkeitsänderung und derjenigen Geschwindigkeitsänderung, welche bei Aufhebung sämtlicher Bedingungsgleichungen des Systems eintreten würde; er ist gleich ersterer, vermindert um letztere.

Folgerung. Der Zwang beim Stoße ist das Zeitintegral des inneren Zwanges des Systems während des Stoßes, genommen über die ganze Dauer desselben. 706

Aufgabe. Den Zwang eines Systems bei einem Stoße zu bestimmen. 707

Wir bezeichnen die Komponenten des Zwanges nach den Koordinaten p_ϱ mit Z_ϱ. Indem wir nun die Gleichung 497a mit $m\,dt$ multiplizieren, und über die Dauer des Stoßes integrieren, erhalten wir:

$$mZ_\varrho = q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} - J_\varrho \quad . \tag{a}$$

Zur Bestimmung der Größe des Zwanges reichen die Komponenten nach beliebigen Koordinaten im allgemeinen nicht aus. Wenden wir deshalb auch rechtwinklige Koordinaten an und bezeichnen die Komponente des Zwanges nach x_ν mit Z_ν, so erhalten wir:

$$mZ_\nu = m_\nu (\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu \quad , \tag{b}$$

also wird die Größe Z des Zwanges die positive Wurzel der Gleichung:

$$mZ^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu\, m_\nu \left(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0} - \frac{I_\nu}{m_\nu} \right)^2 .$$

Lehrsatz 1. Die Größe des Zwanges beim Stoße fällt kleiner aus für die natürliche Bewegungsänderung, als sie ausfallen würde für irgend eine andere mögliche Bewegungsänderung. 708

Denn als notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß bei gegebenen Werten der I_ν die Größe $\frac{1}{2}mZ^2$ ein Minimum werde, erhalten wir (vergl. **155**, **498**) die $3n$ Gleichungen:

$$m_\nu(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu + \sum_1^i {}_\iota x_{\iota\nu} I_\iota = 0 \quad ,$$

in welchen die I_ι zunächst beliebige unbestimmte Multiplikatoren bedeuten, und welche zusammen mit den i Gleichungen

$$\sum_1^{3n} {}_\nu x_{\iota\nu}(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) = 0$$

die $3n + i$ Größen $\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}$ und I_ι eindeutig bestimmen. Da aber die Gleichungen zusammenfallen mit den Bewegungsgleichungen **691** des Systems, so wird ihnen genügt durch die natürlichen Geschwindigkeitsänderungen und nur durch diese.

709 **Anmerkung.** Der vorstehende Lehrsatz enthält die Anpassung des Gaussschen Prinzips des kleinsten Zwanges an die besonderen Verhältnisse des Stoßes.

710 **Folgerung.** Verhindern die Zusammenhänge des Systems, daß der Winkel zwischen einem Stoße und der durch ihn hervorgerufenen Geschwindigkeitsänderung gleich Null werde (**703**), so fällt doch dieser Winkel so klein aus, als es die Zusammenhänge des Systems irgend gestatten.

Denn zeichnen wir ein ebenes Dreieck, dessen Seiten sind die Größe des Stoßes dividiert durch die Masse des Systems, die Größe einer beliebigen möglichen Geschwindigkeitsänderung und die Größe des Unterschiedes beider, also des Zwanges, welcher jener Geschwindigkeitsänderung entspricht, so stellt der von den ersten beiden Seiten eingeschlossene Winkel ε den Winkel zwischen Stoß und Geschwindigkeitsänderung dar (**34**). Eine mögliche Geschwindigkeitsänderung von gegebener Richtung kann nun alle Größen annehmen; unter allen Geschwindigkeitsänderungen von gegebener Richtung kann aber nur diejenige die natürliche sein, bei welcher der Zwang senkrecht steht auf der Geschwindigkeitsänderung (**708**). Beschränken wir uns also auf diejenigen Geschwindigkeitsänderungen, welche hiernach noch in Betracht kommen, so sind alle in Betracht zu ziehenden Dreiecke rechtwinklig; die Hypotenuse aller ist gleich und gegeben; die dem Winkel ε gegenüberliegende Kathete wird aber für die natürliche Geschwindigkeitsänderung kleiner als für jede andere (**708**), also wird für diese Geschwindigkeitsänderung der Winkel ε selbst ein Minimum, welches die Behauptung ist.

Lehrsatz 2. Die Richtung des Zwanges beim Stoße steht 711
senkrecht auf jeder möglichen (virtuellen) Verrückung des Systems aus seiner augenblicklichen Lage.

Denn nach **707** und **689** lassen sich die Komponenten des Zwanges darstellen in der Form:

$$-\frac{1}{m}\sum_{1}^{k}{}^{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho}\, J_{\varkappa} \quad ,$$

der Zwang als Vektorgröße steht also (**250**) senkrecht auf jeder möglichen Verrückung des Systems. Der Satz kann auch als unmittelbare Folgerung aus dem Satz **500** gezogen werden.

Symbolischer Ausdruck. Bezeichnen wir mit δp_ϱ die 712
Änderungen der Koordinaten p_ϱ für eine jede beliebige mögliche Verrückung des Systems, so kann der vorige Satz in die Form der symbolischen Gleichung gekleidet werden:

$$\sum_{1}^{r}{}^{\varrho}\,(q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} - J_\varrho)\,\delta p_\varrho = 0 \quad , \qquad \text{a)}$$

welche für die rechtwinkligen Koordinaten die Form annimmt:

$$\sum_{1}^{3n}{}^{\nu}\left[m_\nu(\dot{x}_{\nu_1} - \dot{x}_{\nu_0}) - I_\nu\right]\delta x_\nu = 0 \quad . \qquad \text{b)}$$

Vergl. **393**, **501**.

Anmerkung. Der vorige Lehrsatz (**711**) enthält die An- 713
passung des D'ALEMBERTschen Prinzips an die besonderen

Verhältnisse des Stoßes, die symbolische Form **712** den gewöhnlichen Ausdruck dieser Anpassung.

714 **Folgerung 1.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung in der Richtung jeder möglichen Bewegung gleich der Komponente des Stoßes nach derselben Richtung, dividiert durch die Masse des Systems.

715 **Folgerung 2.** Beim Stoße ist die Komponente der erzeugten Bewegungsänderung nach jeder freien Koordinate gleich der Komponente des Stoßes nach dieser Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems.

716 **Folgerung 3.** Die Geschwindigkeitskomponente eines gestoßenen Systems nach jeder Koordinate der absoluten Lage ändert sich um einen Betrag, welcher gleich ist der Komponente des wirkenden Stoßes nach der gleichen Koordinate, dividiert durch die Masse des Systems, — welches auch immer die Zusammenhänge des Systems sind.

717 **Anmerkung.** Auch ohne Kenntnis, oder ohne vollständige Kenntnis des Zusammenhangs der Massen eines Systems können wir demnach doch stets sechs Gleichungen für die Bewegung des Systems unter dem Einfluß eines Stoßes angeben. Wählen wir als Koordinaten der absoluten Lage die sechs Größen $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \omega_1 \omega_2 \omega_3$, welche wir in **402** einführten, so stellen die sechs Gleichungen, welche wir erhalten, die Anpassung des Prinzips des Schwerpunkts und der Flächen an die besonderen Verhältnisse des Stoßes dar.

Energie, Arbeit.

718 **Definition.** Die Vermehrung der Energie eines Systems infolge eines auf das System ausgeübten Stoßes wird die Arbeit des Stoßes genannt.

Eine etwaige Abnahme der Energie infolge des Stoßes wird als negative Zunahme gerechnet. Die Arbeit eines Stoßes kann demnach positiv oder negativ sein.

719 **Folgerung.** Die Arbeit eines Stoßes ist das Zeitintegral

der Arbeit, welche diejenige Kraft leistet, deren Zeitintegral der Stoß ist.

Lehrsatz. Die Arbeit eines Stoßes ist gleich dem Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente des Mittelwertes der Anfangs- und der Endgeschwindigkeit des Systems. 720

Denn welches auch in Wahrheit der Verlauf der wirkenden Kraft während der Stoßzeit und die Bewegung des Systems während dieser Zeit ist, die schließliche Bewegung und also die Arbeit des Stoßes wird dieselbe sein, als wirkte die Kraft mit konstanter mittlerer Größe in der Richtung des Stoßes selber. Machen wir aber diese vereinfachende Voraussetzung, so wird erstens die Größe der wirkenden Kraft gleich der Größe des Stoßes dividiert durch die Stoßzeit. Zweitens geht die Geschwindigkeit gleichmäßig sich ändernd aus dem Anfangs- in den Endwert über, und ihr Mittelwert ist das arithmetische Mittel ihres Anfangs- und ihres Endwertes. Die Komponente der während des Stoßes zurückgelegten Bahnstrecke in Richtung des Stoßes ist aber gleich der Komponente jenes Mittelwertes, multipliziert mit der Stoßzeit. Berechnen wir nun nach **513** die von der Kraft während ihrer Dauer, also die vom Stoß geleistete Arbeit, so hebt sich die Stoßzeit heraus, und es folgt die Behauptung.

Anmerkung. Unter Benutzung der bisherigen Bezeichnung ist der analytische Ausdruck des Lehrsatzes die Aussage, daß die Arbeit des Stoßes gleich sei: 721

$$\frac{1}{2}\sum_{1}^{r}{}_{\varrho} J_{\varrho}(\dot{p}_{\varrho_1}+\dot{p}_{\varrho_0}) \quad .$$

Folgerung 1. Die Arbeit eines Stoßes ist gleich dem Produkt des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der ursprünglichen Geschwindigkeit, vermehrt um das halbe Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeitsänderung. 722

Der analytische Ausdruck hierfür ist die Aussage, es sei die Arbeit des Stoßes gleich:

$$\sum_1^r{}_\varrho J_\varrho \dot{p}_{\varrho_0} + \frac{1}{2}\sum_1^r{}_\varrho J_\varrho(\dot{p}_{\varrho_1} - \dot{p}_{\varrho_0}) \quad ,$$

welche Aussage mit **721** übereinstimmt.

723 **Folgerung 2.** Die Arbeit eines Stoßes, welcher ein ruhendes System in Bewegung setzt, ist gleich dem halben Produkt aus der Größe des Stoßes und der in seiner Richtung genommenen Komponente der durch ihn erzeugten Geschwindigkeit.

Denn sind die $\dot{p}_{\varrho_0}$ gleich Null, so ist die Arbeit des Stoßes gleich:

$$\frac{1}{2}\sum_1^r{}_\varrho J_\varrho \dot{p}_{\varrho_1} \quad .$$

724 **Lehrsatz.** Ein ruhendes System setzt sich unter dem Einfluß eines Stoßes in derjenigen Richtung in Bewegung, bei welcher der Stoß die meiste Arbeit leistet, d. h. bei welcher er mehr Arbeit leistet, als er leisten würde, wenn wir durch Vermehrung der Zusammenhänge des Systems eine andere Richtung erzwängen. (Sogenannter Satz von BERTRAND.)

Denn ist J die Größe des Stoßes, v die Größe der erzeugten Geschwindigkeit, ε der Winkel zwischen beiden, so ist für jeden ursprünglichen oder auch vermehrten Zusammenhang nach **714**:

$$v = \frac{J}{m}\cos\varepsilon \quad ,$$

also die Arbeit des Stoßes nach **723** gleich:

$$\frac{1}{2}Jv\cos\varepsilon = \frac{J^2}{2m}\cos^2\varepsilon \quad .$$

Der Winkel ε aber nimmt für die natürliche Wirkung des Stoßes nach **710** den kleinsten mit dem ursprünglichen Zusammenhang verträglichen Wert an, ε kann also durch Vermehrung der Zusammenhänge nur vergrößert, $\cos^2\varepsilon$ also nur verkleinert werden, woraus die Behauptung folgt.

Folgerung. Die Energie, welche ein auf ein ruhendes System treffender Stoß in dem System erzeugt, fällt um so größer aus, je mehr Zusammenhänge des Systems wir auflösen. Der größte mögliche Wert jener Energie, welcher aber nur durch Auflösung aller Zusammenhänge erreicht wird, ist gleich dem Quadrat der Größe des Stoßes, dividiert durch die doppelte Masse des Systems. 725

Zusammenstoß zweier Systeme.

Erläuterungen.

1. Wir sagen, zwei Systeme stoßen zusammen, wenn sie sich so verhalten, als hätten sie während einer sehr kurzen Zeit eine Koppelung erfahren. Diese Koppelung nehmen wir als eine direkte an, indem wir geeignete Wahl der Koordinaten beider Systeme voraussetzen (**452**). 726

2. Eine solche vorübergehende Koppelung haben wir aufzufassen als eine dauernde Koppelung beider Systeme mit einem dritten, unbekannten System von solcher Beschaffenheit, daß es im allgemeinen keinen Einfluß hat auf die Bewegung jener, daß aber in unmittelbarer Nachbarschaft solcher Lagen, in welchen gewisse Koordinaten des einen Systems gewissen Koordinaten des anderen Systems gleich werden, es diese Koordinaten vorübergehend gleich zu bleiben zwingt. Diese vorübergehend gleichbleibenden Koordinaten nennen wir die gemeinsamen Koordinaten beider Systeme. 727

3. Vor und nach dem Zusammenstoße sind die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten eines jeden der beiden zusammenstoßenden Systeme lediglich den Bedingungsgleichungen ihres eigenen Systems unterworfen. Während des Stoßes aber sind die Änderungsgeschwindigkeiten der gemeinsamen Koordinaten auch an die Koppelungsgleichungen gebunden. Diese Änderungsgeschwindigkeiten müssen also, wie die Koordinaten selbst, während des Stoßes beziehlich gleich geworden und eine Zeitlang gleich geblieben sein. Die 728

Zeit aber, in welcher sich diese Vorgänge abspielen, betrachten wir als verschwindend klein, und die Vorgänge in ihr als gänzlich unbekannt. Wir betrachten die Systeme nur vor und nach dem Stoße, und erwarten, daß man von uns auch nur solche Aussagen über den Zusammenstoß verlange, welche sich ohne Kenntnis der Vorgänge während der Stoßzeit aussagen lassen.

729 **Aufgabe.** Die Bewegung zweier zusammenstoßender Systeme nach dem Stoße aus ihrer Bewegung vor dem Stoße so weit zu bestimmen, als es ohne Angabe der Vorgänge während der Stoßzeit möglich ist.

Es seien die p_ϱ die r Koordinaten des einen, die $\mathfrak{p}_\varrho$ die $\mathfrak{r}$ Koordinaten des anderen Systems. Die Zahl der gemeinsamen Koordinaten sei s. Beim Zusammenstoß erfährt jedes der beiden Systeme einen Stoß; es seien die Komponenten des Stoßes, welchen das erste System erfährt J_ϱ; die Komponenten des Stoßes, welchen das zweite System erfährt, seien $\mathfrak{J}_\varrho$. Die Größen vor und nach dem Stoße seien wieder durch die Indices 0 und 1 bezeichnet.

Nun gelten erstens für alle Koordinaten des ersten Systems Gleichungen von der Form **689e** und für alle Koordinaten des zweiten Systems die entsprechenden Gleichungen. Zweitens stehen die Stöße, welche die beiden Systeme erhalten, im Verhältnis von Stoß und Gegenstoß, also ist für alle gemeinsamen Koordinaten nach **682** und **683**:

$$J_\varrho = -\mathfrak{J}_\varrho$$

und für alle nicht gemeinsamen Koordinaten beider Systeme:

$$J_\varrho = 0 \quad , \qquad \mathfrak{J}_\varrho = 0 \quad .$$

Verbinden wir beide Beziehungen miteinander, so erhalten wir für die s gemeinsamen Koordinaten s Gleichungen von der Form:

a) $$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k{}_\varkappa\, p_{\varkappa\varrho} J_\varkappa = -\, \mathfrak{q}_{\varrho_1} + \mathfrak{q}_{\varrho_0} - \sum_1^{\mathfrak{k}}{}_\varkappa\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{J}_\varkappa \quad ,$$

während wir für die $(r-s)+(\mathfrak{r}-s)$ nicht gemeinsamen Koordinaten $r-s$ Gleichungen von der Form:

$$q_{\varrho_1} - q_{\varrho_0} + \sum_1^k {}_{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho} J_{\varkappa} = 0 \qquad \textbf{b)}$$

und $\mathfrak{r}-s$ Gleichungen der Form:

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1} - \mathfrak{q}_{\varrho_0} + \sum_1^{\mathfrak{k}} {}_{\varkappa}\, \mathfrak{p}_{\varkappa\varrho} \mathfrak{J}_{\varkappa} = 0 \qquad \textbf{c)}$$

erhalten. Die Gleichungen **a) b) c)**, zusammen mit den $k+\mathfrak{k}$ Bedingungsgleichungen beider Systeme dürfen wir auffassen als Gleichungen für die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $\dot{\mathfrak{p}}_{\varrho_1}$, welche die Bewegung des Systems nach dem Stoße bestimmen, und für die Hilfsgrößen $J_{\varkappa}$ und $\mathfrak{J}_{\varkappa}$. Wir haben also im ganzen $r+\mathfrak{r}-s+k+\mathfrak{k}$ nicht homogene, lineare Gleichungen, welchen die $r+\mathfrak{r}+k+\mathfrak{k}$ Unbekannten genügen müssen, und welche diejenigen Aussagen enthalten, welche die Aufgabe verlangte.

Anmerkung. Sind die Koordinaten p_{ϱ} und $\mathfrak{p}_{\varrho}$ freie Koor- 730
dinaten ihrer Systeme, so können die Gleichungen des Zusammenstoßes in einfacherer Form geschrieben werden. Es werden nämlich erhalten durch Berücksichtigung der gemeinsamen Koordinaten s Gleichungen der Form:

$$q_{\varrho_1} + \mathfrak{q}_{\varrho_1} = q_{\varrho_0} + \mathfrak{q}_{\varrho_0} \quad , \qquad \textbf{a)}$$

durch Berücksichtigung der nicht gemeinsamen Koordinaten des ersten Systems $r-s$ Gleichungen der Form:

$$q_{\varrho_1} = q_{\varrho_0} \quad , \qquad \textbf{b)}$$

durch Berücksichtigung der nicht gemeinsamen Koordinaten des zweiten Systems $\mathfrak{r}-s$ Gleichungen der Form:

$$\mathfrak{q}_{\varrho_1} = \mathfrak{q}_{\varrho_0} \quad , \qquad \textbf{c)}$$

zusammen also $r+\mathfrak{r}-s$ Gleichungen für die zu bestimmenden $r+\mathfrak{r}$ Unbekannten $\dot{p}_{\varrho_1}$ und $\dot{\mathfrak{p}}_{\varrho_1}$.

731 **Folgerung 1.** Die Bewegung zweier Systeme nach ihrem Zusammenstoß ist durch ihre Bewegung vor dem Zusammenstoß und durch die allgemeinen Gesetze der Mechanik noch nicht vollständig bestimmt, sondern es erfordert ihre Bestimmung noch die Angabe weiterer, aus anderen Quellen geschöpfter Beziehungen. Die Zahl dieser weiteren notwendigen Beziehungen ist gleich der Zahl der gemeinsamen Koordinaten, welche beim Zusammenstoß auftreten.

732 **Folgerung 2.** Ist es bei einem Zusammenstoß möglich, neben den Beziehungen, welche aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik folgen, noch so viele lineare Gleichungen für die Geschwindigkeitskomponenten nach dem Stoße anzugeben, als gemeinsame Koordinaten auftreten, so ist die Bewegung nach dem Zusammenstoß durch die Bewegung vor demselben eindeutig bestimmt.

733 **Anmerkung.** Die besonderen Beziehungen, welche zur Bestimmung der Bewegung beim Zusammenstoß notwendig sind, und welche nicht aus den allgemeinen Gesetzen der Mechanik folgen, hängen ab von der besonderen Natur desjenigen Systems, welches die Koppelung bewirkt, und dessen Eigentümlichkeiten im einzelnen uns verborgen sind. Dies verborgene System ist es auch, welches die Energie aufnimmt, welche etwa aus den zusammenstoßenden Systemen verschwindet, oder welches die Energie liefert, welche in den zusammenstoßenden Systemen etwa gewonnen wird. Der erste Fall tritt z. B. ein beim unelastischen Stoße, bei welchem die unmittelbare Nachbarschaft des Stoßpunktes als das koppelnde System anzusehen ist. Der zweite Fall tritt z. B. ein bei Stößen, welche Explosionen auslösen. Die Einzelbetrachtung dieser besonderen Verhältnisse aber gehört nicht mehr in die allgemeine Mechanik.

Schlußbemerkung zum zweiten Buch.

734 In diesem zweiten Buche wollten wir nicht mehr denknotwendige Beziehungen zwischen den Schöpfungen unseres eigenen Geistes erörtern, sondern wir wollten erfahrungsmäßige Zusammenhänge zwischen Gegenständen der äußeren

Beobachtung betrachten. Es war deshalb unumgänglich, daß sich unsere Betrachtung stütze nicht allein auf die Gesetze unseres Geistes, sondern auch auf die Ergebnisse früherer Erfahrung. Als notwendigen Beitrag der Erfahrung entnahmen wir daher unserer Beobachtung der Natur das Grundgesetz.

Es mußte freilich zunächst scheinen, als sei das Grund- 735
gesetz bei weitem nicht hinreichend, um die ganze Fülle der Tatsachen zu umspannen, welche die Natur uns darbietet, und deren Darstellung die bestehende Mechanik auch bereits leistet. Denn während das Grundgesetz stetige und gesetzmäßige Zusammenhänge voraussetzt, trägt uns die tägliche Anwendung auch unstetige und ungesetzmäßige Zusammenhänge entgegen. Und während das Grundgesetz ausdrücklich nur von freien Systemen redet, sind wir gezwungen, auch unfreie Systeme zu behandeln. Selbst die gesetzmäßigen, stetigen, freien Systeme der Natur fügen sich nicht alle ohne weiteres dem Grundgesetz, sondern scheinen ihm zum Teil zu widerstreiten. Wir sahen nun aber, daß wir auch ungesetzmäßige und unstetige Systeme behandeln konnten, indem wir ihre Ungesetzmäßigkeiten und Unstetigkeiten als scheinbare ansahen; daß wir auch die Bewegung der unfreien Systeme verfolgen konnten, indem wir sie als Teile von freien Systemen auffaßten; daß endlich auch die dem Grundgesetz scheinbar widerstreitenden Systeme ihm unterworfen werden konnten, wenn wir die Möglichkeit verborgener Massen in ihnen zuließen. Obwohl wir neben dem Grundgesetz weder andere Erfahrungstatsachen, noch irgend willkürliche Annahmen zuließen, konnten wir uns doch über das ganze Gebiet verbreiten, welches die Mechanik überhaupt beherrscht. Unsere besondere Hypothese hindert uns auch nicht, zu verstehen, daß sich die Mechanik so entwickeln konnte und entwickeln mußte, wie sie sich tatsächlich entwickelt hat.

Insofern also können wir am Schlusse behaupten, daß 736
das Grundgesetz nicht nur notwendig, sondern daß es auch hinreichend sei, um den Anteil der Erfahrung an den allgemeinen Gesetzen der Mechanik erschöpfend darzustellen.