Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Benutzung partieller Differentialquotienten

Benutzung partieller Differentialquotienten.

Bezeichnung. (Vergl. 90.) Mit $\partial_p E$ soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und deren Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286a**). 288

Mit $\partial_q E$ dagegen soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und die Momente q_ϱ nach diesen Koordinaten als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286c**).

Eine jede der beiden Annahmen schließt die andere aus. Mit ∂E werde, wie gewöhnlich, bezeichnet irgend eine Art des partiellen Differentials von E, also die erste Art oder die zweite, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, oder auch irgend eine dritte Art.

Bemerkung 1. Die Momente q_ϱ eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten. 289

Denn es ist nach Gleichung **286a** und **270**: (vergl. 91)

$$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 2. Die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ der Koordinaten p_ϱ eines Systems lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Momenten. 290

Denn es ist nach Gleichung **286c** und **271**: (vergl. 94)

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 3. Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen durch partielle Differentialquotienten der Energie. 291

Denn nach Gleichung **286a** ist erstens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad ,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad ,$$

und nach derselben Gleichung zweitens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = \frac{1}{2} m \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vergleichung mit **277** folgt:

a) $$m f_\varrho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

wofür auch geschrieben werden kann unter Berücksichtigung von **289**:

b) $$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

292 **Bemerkung 4.** Ändern wir eine Koordinate p_τ eines Systems zweimal um denselben unendlich kleinen Betrag, indem wir das eine Mal den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal den Momenten nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte lassen, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung.

Denn multipliziert man die Gleichung **95a** mit mds und dividiert durch dt^2, so liefert sie:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = - \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Lehrsatz. Erleidet die Lage eines Systems zweimal dieselbe unendlich kleine Änderung, während das eine Mal die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal die Momente nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte behalten, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung. 293

Denn die Änderung der Energie ist im ersten Falle:

$$\delta_p E = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau$$

und im zweiten Falle:

$$\delta_q E = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad ,$$

also ist nach Bemerkung 4:

$$\delta_p E = -\delta_q E \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung. Die Komponenten der Beschleunigung eines Systems nach seinen Koordinaten p_ϱ lassen sich auch darstellen in der Form: (nach **291b** und **292**) 294

$$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Schlußbemerkung zum ersten Buch.

Wie bereits in der Vorbemerkung (1) ausgesprochen wurde, ist den Überlegungen dieses Buches die Erfahrung völlig fern geblieben. Wenn wir also den gewonnenen Beziehungen in der Folge wieder begegnen, so werden wir 295