Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Beschleunigung

Moment.

268 **Definition.** Das Produkt aus der Masse eines Systems in seine Geschwindigkeit heißt die Bewegungsgröße oder das Moment des Systems.

Das Moment des Systems ist also eine Vektorgröße in bezug auf das System. Die Komponenten des Moments nach irgendwelchen Koordinaten werden gewöhnlich schlechthin die Momente des Systems nach diesen Koordinaten genannt. (**241**).

269 **Bezeichnung.** Die Momente eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ sollen dauernd mit q_ϱ bezeichnet werden.

270 **Aufgabe 1.** Die Momente q_ϱ eines Systems nach den p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Aus **268** und **267** erhalten wir:

$$q_\varrho = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad .$$

271 **Aufgabe 2.** Die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Momente des Systems nach diesen Koordinaten.

Durch Auflösung der vorigen Gleichungen erhalten wir:

$$\dot{p}_\varrho = \frac{1}{m} \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} q_\sigma \quad .$$

272 **Anmerkung.** Die Geschwindigkeit und die Bewegungsgröße eines Systems sind solche Vektoren in bezug auf das System, welche stets möglichen Verrückungen des Systems parallel sind (vergl. **243**, **245**).

Beschleunigung.

273 **Definition.** Die augenblickliche Veränderungsweise der Geschwindigkeit eines Systems heißt die Beschleunigung des Systems.

Die Beschleunigung ist bestimmt durch die Änderung, welche die Geschwindigkeit in unendlich kurzer Zeit erleidet und diese Zeit selbst; sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

Folgerung. Die Beschleunigung eines Systems kann be- 274
trachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Bilden wir von der gegenwärtigen Lage des Systems aus zwei Verrückungen, von welchen die eine die gegenwärtige Geschwindigkeit darstellt, die andere die Geschwindigkeit im nächsten Augenblick, so gibt die Differenz derselben eine neue Verrückung, deren Richtung die Richtung der Beschleunigung ist, während die Größe der Beschleunigung gleich ist dem Verhältnis der Länge jener neuen Verrückung zum Differentiale der Zeit.

Aufgabe 1. Die Größe f der Beschleunigung und ihre 275
Komponenten nach den rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Die Komponenten der Geschwindigkeit nach den x_ν, jetzt und nach der Zeit dt, sind (**265**):

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{und} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu + \frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt \quad ,$$

die Komponenten der Differenz beider also $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt$; das Verhältnis dieser zur Zeit dt gibt die Komponenten der Beschleunigung nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu \quad ,$$

woraus die Größe der Beschleunigung folgt als positive Wurzel der Gleichung (**244**):

$$mf^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_\nu^2 \quad .$$

276 **Anmerkung.** Die Größe der Beschleunigung eines materiellen Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Beschleunigungen seiner Massenteilchen.

277 **Aufgabe 2.** Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ darzustellen durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Nach **242** haben wir

$$f_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

und hierin ist einzusetzen, wie in **108**:

$$\ddot{x}_\nu = \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Indem wir dieselbe Umformung benutzen wie in **108**, erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$f_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

278 **Anmerkung 1.** Die Komponenten der Beschleunigung sind also im allgemeinen lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, quadratische Funktionen der ersten Differentialquotienten derselben, beliebig verwickelte Funktionen der Koordinaten selbst.

279 **Anmerkung 2.** Die Beschleunigung eines Systems ist nicht notwendig einer möglichen Verrückung des Systems parallel, noch auch einer Verrückung, welche sich durch die benutzten Koordinaten p_ϱ ausdrücken läßt.

Die Komponenten f_ϱ reichen daher im allgemeinen nicht aus, um die Größe der Beschleunigung, noch auch um ihre Komponenten nach sämtlichen rechtwinkligen Koordinaten zu bestimmen (**243**, **245**). Dagegen reichen die f_ϱ aus, um die Komponente der Beschleunigung in der Richtung einer jeden möglichen Bewegung des Systems zu bestimmen (**248**).

Aufgabe 3. Die Komponente der Beschleunigung in der Richtung der Bahn zu finden. 280

Die Richtungscosinus der Bahn sind nach **72** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$, also unter Berücksichtigung von **265** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$. Hieraus folgt nach **246** unter Benutzung von **275** für die gesuchte tangentiale Komponente f_t:

$$f_t = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad ,$$

unter s die laufende Länge der Bahn verstanden.

Bemerkung. Zerlegen wir die Beschleunigung eines Systems in zwei Komponenten, von denen die eine die Richtung der Bahn hat, die andere auf der Bahn senkrecht steht, so ist die Größe der letzteren gleich dem Produkt aus der Krümmung der Bahn in das Quadrat der Geschwindigkeit des Systems in der Bahn. 281

Indem wir in Gleichung **107c** die Zeit t als unabhängige Variabele nehmen, erhalten wir:

$$m\, v^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\, \ddot{s}^2 \quad ,$$

also unter Benutzung von **275** und **280**:

$$v^4 c^2 = f^2 - f_t^2 \quad .$$

Nennen wir nun die zweite, radiale oder centrifugale Komponente der Beschleunigung f_r, so ist, da f_r und f_t senkrecht zueinander sein sollen: $f^2 = f_r^2 + f_t^2$, also:

$$f_r = c\, v^2 \quad ,$$

welches die Behauptung ist.