Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

2. Bewegung der Systeme

2. Bewegung der Systeme.

Erläuterungen.

1. Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus 256
einer Anfangslage in eine Endlage, betrachtet unter Berücksichtigung der Zeit und der Art des Überganges, heißt eine Bewegung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage (vgl. **27**).

Bei einer jeden bestimmten Bewegung durchläuft also das System eine bestimmte Bahn, und zwar hat es in bestimmten Zeiten bestimmte Längen derselben durchlaufen.

2. Jede Bewegung eines Systems durch eine denkbare 257
Bahn heißt eine denkbare Bewegung eines Systems (**11**).

3. Jede Bewegung eines Systems durch eine mögliche 258
Bahn heißt eine mögliche Bewegung des Systems (**112**).

4. Die Kinematik oder reine Bewegungslehre handelt von 259
den denkbaren und den möglichen Bewegungen der Systeme.

Solange es sich um die Betrachtung gesetzmäßiger Systeme (**119**, **120**) handelt, fallen die Betrachtungen der Kinematik mit denen der Geometrie fast zusammen. Erst wenn es sich um ungesetzmäßige Systeme handelt und also die Zeit in die Bedingungsgleichungen der Systeme eintritt, gewinnt die Kinematik vor der Geometrie größere Mannigfaltigkeit. Wir haben indessen nicht nötig, auf eigentlich kinematische Betrachtungen einzugehen, sondern dürfen uns hier mit der Erörterung einer Anzahl von Grundbegriffen begnügen.

Analytische Darstellung. Die Bewegung eines Systems 260
wird analytisch dargestellt, indem bei Darstellung der beschriebenen Bahn die Zeit t als unabhängige Variabele benutzt wird, oder, was dasselbe ist, indem die Koordinaten der Lage des Systems als Funktionen der Zeit angegeben werden.

Die Differentialquotienten aller Größen nach der Zeit bezeichnen wir nach Newtons Weise durch übergesetzte Punkte.

Geschwindigkeit.

261 **Definition 1.** Die augenblickliche Bewegungsart eines Systems heißt die Geschwindigkeit des Systems.

Die Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Änderung, welche die Lage des Systems in einer unendlich kleinen Zeit erleidet und durch diese Zeit selbst. Sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

Lage und Geschwindigkeit eines Systems zusammen nennen wir den Zustand des Systems.

262 **Folgerung.** Die Geschwindigkeit eines Systems kann betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Die Richtung der Geschwindigkeit ist alsdann die Richtung des augenblicklichen Bahnelements, die Größe der Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten der zurückgelegten Bahnstrecke nach der Zeit.

Die Größe der Geschwindigkeit heißt auch die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, oder, wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, die Geschwindigkeit schlechthin.

263 **Definition 2.** Eine Bewegung eines Systems, bei welcher die Geschwindigkeit ihre Größe nicht ändert, heißt eine gleichförmige Bewegung.

264 **Anmerkung.** Gerade Bewegung eines Systems ist eine Bewegung in gerader Bahn. Bei einer solchen Bewegung ändert die Geschwindigkeit ihre Richtung nicht.

265 **Aufgabe 1.** Die Größe der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Die Größe v der Geschwindigkeit ist gegeben durch die positive Wurzel der Gleichung (55):

$$m v^2 = m \frac{ds^2}{dt^2} = \sum_1^{3n} {}_\nu \, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

Danach (**241**) sind die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der x_ν gleich

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\dot{x}_\nu \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in der gleichen Richtung, oder die Komponenten nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\,\dot{x}_\nu \quad .$$

Anmerkung. Die Größe der Geschwindigkeit eines Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Geschwindigkeiten aller seiner Massenteilchen. **266**

Aufgabe 2. Die Größe der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ dieser Koordinaten. **267**

Durch Transformation von **265** und **57** erhalten wir die Größe der Geschwindigkeit als positive Wurzel der Gleichung:

$$v^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\varrho\,\dot{p}_\sigma \quad .$$

Danach sind (**241**) die Komponenten in der Richtung der p_ϱ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}}} \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\sigma \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in derselben Richtung, oder die Komponenten nach den p_ϱ gleich:

$$\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\,\dot{p}_\sigma \quad .$$

Moment.

268 **Definition.** Das Produkt aus der Masse eines Systems in seine Geschwindigkeit heißt die Bewegungsgröße oder das Moment des Systems.

Das Moment des Systems ist also eine Vektorgröße in bezug auf das System. Die Komponenten des Moments nach irgendwelchen Koordinaten werden gewöhnlich schlechthin die Momente des Systems nach diesen Koordinaten genannt. (**241**).

269 **Bezeichnung.** Die Momente eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ sollen dauernd mit q_ϱ bezeichnet werden.

270 **Aufgabe 1.** Die Momente q_ϱ eines Systems nach den p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Aus **268** und **267** erhalten wir:

$$q_\varrho = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad .$$

271 **Aufgabe 2.** Die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Momente des Systems nach diesen Koordinaten.

Durch Auflösung der vorigen Gleichungen erhalten wir:

$$\dot{p}_\varrho = \frac{1}{m} \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} q_\sigma \quad .$$

272 **Anmerkung.** Die Geschwindigkeit und die Bewegungsgröße eines Systems sind solche Vektoren in bezug auf das System, welche stets möglichen Verrückungen des Systems parallel sind (vergl. **243**, **245**).

Beschleunigung.

273 **Definition.** Die augenblickliche Veränderungsweise der Geschwindigkeit eines Systems heißt die Beschleunigung des Systems.

Die Beschleunigung ist bestimmt durch die Änderung, welche die Geschwindigkeit in unendlich kurzer Zeit erleidet und diese Zeit selbst; sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

Folgerung. Die Beschleunigung eines Systems kann be- 274
trachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Bilden wir von der gegenwärtigen Lage des Systems aus zwei Verrückungen, von welchen die eine die gegenwärtige Geschwindigkeit darstellt, die andere die Geschwindigkeit im nächsten Augenblick, so gibt die Differenz derselben eine neue Verrückung, deren Richtung die Richtung der Beschleunigung ist, während die Größe der Beschleunigung gleich ist dem Verhältnis der Länge jener neuen Verrückung zum Differentiale der Zeit.

Aufgabe 1. Die Größe f der Beschleunigung und ihre 275
Komponenten nach den rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Die Komponenten der Geschwindigkeit nach den x_ν, jetzt und nach der Zeit dt, sind (**265**):

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{und} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu + \frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt \quad ,$$

die Komponenten der Differenz beider also $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt$; das Verhältnis dieser zur Zeit dt gibt die Komponenten der Beschleunigung nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu \quad ,$$

woraus die Größe der Beschleunigung folgt als positive Wurzel der Gleichung (**244**):

$$mf^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_\nu^2 \quad .$$

276 **Anmerkung.** Die Größe der Beschleunigung eines materiellen Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Beschleunigungen seiner Massenteilchen.

277 **Aufgabe 2.** Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ darzustellen durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Nach **242** haben wir

$$f_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

und hierin ist einzusetzen, wie in **108**:

$$\ddot{x}_\nu = \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Indem wir dieselbe Umformung benutzen wie in **108**, erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$f_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

278 **Anmerkung 1.** Die Komponenten der Beschleunigung sind also im allgemeinen lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, quadratische Funktionen der ersten Differentialquotienten derselben, beliebig verwickelte Funktionen der Koordinaten selbst.

279 **Anmerkung 2.** Die Beschleunigung eines Systems ist nicht notwendig einer möglichen Verrückung des Systems parallel, noch auch einer Verrückung, welche sich durch die benutzten Koordinaten p_ϱ ausdrücken läßt.

Die Komponenten f_ϱ reichen daher im allgemeinen nicht aus, um die Größe der Beschleunigung, noch auch um ihre Komponenten nach sämtlichen rechtwinkligen Koordinaten zu bestimmen (**243**, **245**). Dagegen reichen die f_ϱ aus, um die Komponente der Beschleunigung in der Richtung einer jeden möglichen Bewegung des Systems zu bestimmen (**248**).

Aufgabe 3. Die Komponente der Beschleunigung in der Richtung der Bahn zu finden. 280

Die Richtungscosinus der Bahn sind nach **72** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$, also unter Berücksichtigung von **265** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$. Hieraus folgt nach **246** unter Benutzung von **275** für die gesuchte tangentiale Komponente f_t:

$$f_t = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad ,$$

unter s die laufende Länge der Bahn verstanden.

Bemerkung. Zerlegen wir die Beschleunigung eines Systems in zwei Komponenten, von denen die eine die Richtung der Bahn hat, die andere auf der Bahn senkrecht steht, so ist die Größe der letzteren gleich dem Produkt aus der Krümmung der Bahn in das Quadrat der Geschwindigkeit des Systems in der Bahn. 281

Indem wir in Gleichung **107c** die Zeit t als unabhängige Variabele nehmen, erhalten wir:

$$m\, v^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\,\ddot{s}^2 \quad ,$$

also unter Benutzung von **275** und **280**:

$$v^4 c^2 = f^2 - f_t^2 \quad .$$

Nennen wir nun die zweite, radiale oder centrifugale Komponente der Beschleunigung f_r, so ist, da f_r und f_t senkrecht zueinander sein sollen: $f^2 = f_r^2 + f_t^2$, also:

$$f_r = c\, v^2 \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Energie.

282 **Definition.** Das halbe Produkt aus der Masse eines Systems in das Quadrat der Größe seiner Geschwindigkeit heißt die Energie des Systems.

283 **Aufgabe 1.** Die Energie E eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Es ist nach **265**:

$$E = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

284 **Folgerung 1.** Die Energie eines Systems ist die Summe der Energieen seiner Massenteilchen.

285 **Folgerung 2.** Bilden mehrere Systeme zusammen ein größeres System, so ist die Energie des letzteren die Summe der Energieen der ersteren.

286 **Aufgabe 2.** Die Energie eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten des Systems und durch die Momente nach diesen Koordinaten.

Unter Benutzung von **267**, **270** und **271** folgt nacheinander:

a) $$E = \frac{1}{2} m \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\, \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma$$

b) $$= \frac{1}{2} \sum_1^r{}_\varrho\, q_\varrho \dot{p}_\varrho$$

c) $$= \frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma}\, q_\varrho q_\sigma \quad .$$

287 **Anmerkung** (zu **261** bis **286**). Die Geschwindigkeit, das Moment, die Beschleunigung, die Energie eines Systems sind definiert unabhängig von der analytischen Darstellung, insbesondere also auch unabhängig von der Wahl der Koordinaten des Systems.

Benutzung partieller Differentialquotienten.

Bezeichnung. (Vergl. 90.) Mit $\partial_p E$ soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und deren Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286a**). 288

Mit $\partial_q E$ dagegen soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und die Momente q_ϱ nach diesen Koordinaten als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286c**).

Eine jede der beiden Annahmen schließt die andere aus. Mit ∂E werde, wie gewöhnlich, bezeichnet irgend eine Art des partiellen Differentials von E, also die erste Art oder die zweite, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, oder auch irgend eine dritte Art.

Bemerkung 1. Die Momente q_ϱ eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten. 289

Denn es ist nach Gleichung **286a** und **270**: (vergl. 91)

$$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 2. Die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ der Koordinaten p_ϱ eines Systems lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Momenten. 290

Denn es ist nach Gleichung **286c** und **271**: (vergl. 94)

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 3. Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen durch partielle Differentialquotienten der Energie. 291

Denn nach Gleichung **286a** ist erstens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} = m \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad ,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) = m \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad ,$$

und nach derselben Gleichung zweitens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = \frac{1}{2} m \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vergleichung mit **277** folgt:

a) $$m f_\varrho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

wofür auch geschrieben werden kann unter Berücksichtigung von **289**:

b) $$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

292 **Bemerkung 4.** Ändern wir eine Koordinate p_τ eines Systems zweimal um denselben unendlich kleinen Betrag, indem wir das eine Mal den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal den Momenten nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte lassen, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung.

Denn multipliziert man die Gleichung **95a** mit $m ds$ und dividiert durch dt^2, so liefert sie:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = - \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Lehrsatz. Erleidet die Lage eines Systems zweimal dieselbe unendlich kleine Änderung, während das eine Mal die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal die Momente nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte behalten, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung. 293

Denn die Änderung der Energie ist im ersten Falle:

$$\delta_p E = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau$$

und im zweiten Falle:

$$\delta_q E = \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad ,$$

also ist nach Bemerkung 4:

$$\delta_p E = -\delta_q E \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung. Die Komponenten der Beschleunigung eines Systems nach seinen Koordinaten p_ϱ lassen sich auch darstellen in der Form: (nach **291b** und **292**) 294

$$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Schlußbemerkung zum ersten Buch.

Wie bereits in der Vorbemerkung (**1**) ausgesprochen wurde, ist den Überlegungen dieses Buches die Erfahrung völlig fern geblieben. Wenn wir also den gewonnenen Beziehungen in der Folge wieder begegnen, so werden wir 295