Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

Abschnitt 7. Kinematische Begriffe

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Abschnitt 7. Kinematische Begriffe.

I. Vektorgrößen in bezug auf ein System.

Definition. Vektorgröße in bezug auf ein System heißt jede Größe, welche zu dem System in Beziehung steht, und welche dieselbe Art der mathematischen Mannigfaltigkeit hat, wie eine denkbare Verrückung des Systems. 237

Bemerkungen dazu.

1. Eine Verrückung eines Systems ist selbst eine Vektorgröße in bezug auf das System. Jedes Produkt einer Verrückung des Systems mit irgend welchen nicht gerichteten Größen ist eine Vektorgröße in bezug auf das System. 238

2. Jede Vektorgröße in bezug auf ein System kann geometrisch dargestellt werden durch eine denkbare Verrückung des Systems. Die Richtung der sie darstellenden Verrückung nennen wir auch die Richtung der Vektorgröße. Der Maßstab der Darstellung kann und soll stets so gewählt werden, daß die darstellende Verrückung unendlich klein wird. Jeder Vektor in bezug auf ein System, welcher sich mit der Lage des Systems ändert, kann alsdann dargestellt werden als eine unendlich kleine Verrückung des Systems aus der Lage, zu welcher sein augenblicklicher Wert gehört. 239

3. Eine Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen materiellen Punkt ist ein Vektor im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Jeder Vektor in bezug auf einen Punkt kann dargestellt werden durch eine geometrische Verrückung des Punktes, insbesondere durch eine unendlich kleine Verrückung aus seiner gegenwärtigen Lage. 240

4. Unter Komponenten und reduzierten Komponenten eines Vektors sind diejenigen Vektoren gleicher Art verstanden, welche dargestellt sind durch die Komponenten und reduzierten 241

Komponenten derjenigen unendlich kleinen Verrückung, welche den ursprünglichen Vektor darstellt (**48**, **71**).

Die reduzierte Komponente eines bestimmten Vektors in Richtung einer Koordinate p_ϱ nennen wir wiederum kurz die Komponente des Vektors nach p_ϱ, oder noch kürzer den Vektor nach der Koordinate p_ϱ.

Wo es ohne Mißverständnis geschehen kann, wird mit Komponente oder reduzierte Komponente kurz die Größe dieser Komponenten bezeichnet.

242 **Aufgabe 1a.** Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den $3n$ rechtwinkligen Koordinaten die Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ abzuleiten.

Sind die $d\bar{x}_\nu$ die Komponenten nach den x_ν derjenigen Verrückung, welche die Vektorgröße darstellt, und sind die $d\bar{p}_\varrho$ die Komponenten derselben Verrückung nach den p_ϱ, so sind nach **80** die $d\bar{p}_\varrho$ durch die $d\bar{x}_\nu$ gegeben. Den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{x}_\nu$ aber sind die k_ϱ und h_ν beziehlich proportional, also ist

$$k_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho}\, h_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho}\, h_\nu \quad .$$

243 **Aufgabe 1b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponenten h_ν des Vektors nach den rechtwinkligen Koordinaten abzuleiten.

Die Gleichungen **242** geben nur r Gleichungen für die $3n$ Größen h_ν, aus welchen sich diese letzteren also nicht bestimmen lassen. In der Tat ist auch die Aufgabe im allgemeinen unbestimmt. Denn nicht alle denkbaren Lagen und Verrückungen eines Systems lassen sich durch die p_ϱ ausdrücken, sondern nur ein Teil derselben, unter diesen die möglichen Verrückungen.

Nur in dem Falle also, daß der gegebene Vektor einer Verrückung parallel ist, welche sich durch die p_ϱ und ihre Änderungen darstellen läßt, ist die Aufgabe lösbar; in diesem Falle aber ist nach **81**

$$h_\nu = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho}\, k_\varrho \quad .$$

Aufgabe 2a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors 244
nach den rechtwinkligen Koordinaten seine Größe h zu bestimmen.

Unter Benutzung von 83 erhält man:

$$h^2 = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \frac{m}{m_\nu} h_\nu \quad .$$

Aufgabe 2b. Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors 245
nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ seine Größe k zu bestimmen.

Die Aufgabe ist wiederum im allgemeinen unbestimmt wie 243.

Nur in dem Falle, daß außer den Komponenten k_ϱ noch die Tatsache bekannt gegeben ist, daß der fragliche Vektor einer durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung parallel ist, ist k durch die k_ϱ bestimmt, und in diesem Falle ist nach 82

$$k^2 = \sum_{1}^{r}{}_{\varrho} \sum_{1}^{r}{}_{\sigma} b_{\varrho\sigma} k_\varrho k_\sigma \quad .$$

Aufgabe 3a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors 246
nach den x_ν die Komponente des Vektors in Richtung einer beliebigen Verrückung ds zu finden.

Ist ds' die Länge, und sind die $d\bar{x}'_\nu$ die reduzierten Komponenten der Verrückung, durch welche wir den Vektor darstellen, so ist die Komponente dieser Verrückung in Richtung von ds nach 48 und 84:

$$ds' \cos s{,}s' = \frac{1}{ds} \sum_{1}^{3n}{}_{\nu} dx_\nu \, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Verhältnis zwischen der Größe des Vektors und der Länge der Verrückung, durch welche wir ihn darstellen, so erhalten wir links die gesuchte Komponente; rechts treten an Stelle der $d\bar{x}'_\nu$ die h_ν, und wir erhalten also als Lösung der Aufgabe die gesuchte Größe gleich:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu h_\nu \frac{dx_\nu}{ds}$$

oder nach **72** gleich:

$$\sum_1^{3n}{}_\nu \sqrt{\frac{m}{m_\nu}}\, h_\nu \cos s,x_\nu \quad .$$

247 **Aufgabe 3b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponente des Vektors in der Richtung einer beliebigen durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung ds zu bestimmen.

Wenden wir dieselbe Überlegung an, wie in der vorigen Aufgabe, so folgt nach **48** und **85** die gesuchte Größe gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho k_\varrho \frac{dp_\varrho}{ds}$$

oder nach **78** und **79** gleich:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho \sum_1^{r}{}_\sigma b_{\varrho\sigma} k_\varrho \sqrt{a_{\sigma\sigma}} \cos s,p_\sigma \quad .$$

248 **Anmerkung.** Obwohl also durch die Größen k_ϱ im allgemeinen nicht alle beliebigen Komponenten eines Vektors bestimmt sind, so sind doch durch jene Größen die Komponenten des Vektors in allen solchen Richtungen bestimmt, welche sich durch die p_ϱ darstellen lassen, also in jeder möglichen Richtung.

249 **Lehrsatz 1.** Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_ϱ die Größen k_ϱ sind, senkrecht stehe auf einer Verrückung, für welche die p_ϱ die Änderungen dp_ϱ erleiden, ist notwendige und hinreichende Bedingung die Erfüllung der Gleichung:

$$\sum_1^{r}{}_\varrho k_\varrho \, dp_\varrho = 0 \quad .$$

Dies folgt aus **85**, wenn wir die k_ϱ den $d\bar{p}'_\varrho$ proportional annehmen.

Lehrsatz 2. Damit der Vektor, dessen Komponenten 250
nach den p_ϱ die k_ϱ sind, senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems, ist notwendige und hinreichende Bedingung, daß sich die r Größen k_ϱ darstellen lassen in der Form:

$$k_\varrho = \sum_1^k{}^{\varkappa}\, p_{\varkappa\varrho}\,\gamma_\varkappa \quad ,$$

in welcher die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems entnommen (**130**) und die $\gamma_\varkappa$ k frei zu bestimmende Größen sind.

Dies folgt aus **148** und **150**, wenn wir die k_ϱ durch die $d\bar{p}_\varrho$ dargestellt annehmen.

Bemerkung 1. Vektoren in bezug auf ein und dasselbe 251
System können zusammengesetzt und zerlegt werden wie die denkbaren Verrückungen des Systems.

Die Zusammensetzung von Vektoren in bezug auf dasselbe System erfolgt also nach den Regeln der algebraischen Addition (**52**).

Bemerkung 2. Vektoren in bezug auf verschiedene Sy- 252
steme sind zu betrachten als Größen verschiedener Art; sie können nicht zusammengesetzt, noch addiert werden.

Bemerkung 3. Eine Vektorgröße in bezug auf ein ge- 253
wisses System kann betrachtet werden als eine Vektorgröße in bezug auf jedes größere System, von welchem das ursprüngliche einen Teil bildet.

Aufgabe 1. Dieselbe Vektorgröße werde einmal betrachtet 254
als Vektorgröße in bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröße in bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten h_ν nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν im ersten Falle sollen die Komponenten h'_ν nach den entsprechenden Koordinaten x'_ν im zweiten Falle berechnet werden.

Es sei die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Die Koordinaten x_ν des Teilsystems sind zugleich Koordinaten des vollständigen Systems, nur um der verschiedenen Auffassung willen sind sie als solche mit x'_ν bezeichnet. Erteilen wir daher dem Teilsystem eine beliebige

Verrückung, welche eo ipso zugleich eine Verrückung des vollständigen Systems ist, so ist $dx'_\nu = dx_\nu$ für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen $dx'_\nu = 0$ ist. Nun ist nach **73**: $m' d\bar{x}'_\nu = m_\nu dx'_\nu$ und $m\, d\bar{x}_\nu = m_\nu dx_\nu$, also ist $m' d\bar{x}'_\nu = m\, d\bar{x}_\nu$. Für einen Vektor, welcher durch jene Verrückung dargestellt wird, ist die Komponente nach x_ν mit $d\bar{x}_\nu$, die nach x'_ν mit $d\bar{x}'_\nu$ porportional. Als Lösung der Aufgabe erhalten wir also:

$$m' h'_\nu = m\, h_\nu$$

für diejenigen ν, welche beiden Systemen gemeinsam sind, während für die übrigen

$$h'_\nu = 0 \qquad \text{ist.}$$

255 **Aufgabe 2.** Dieselbe Vektorgröße werde einmal betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröße in bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ im ersten Falle die Komponenten k'_ϱ nach den entsprechenden Koordinaten p'_ϱ im zweiten zu bestimmen.

Es sei wieder die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Wir setzen voraus, daß die Koordinaten p_ϱ des Teilsystems zugleich Koordinaten des vollständigen Systems sind und nur um der verschiedenen Auffassung willen im letzteren Falle mit p'_ϱ bezeichnet werden. Von den nicht gemeinsamen p'_ϱ setzen wir voraus, daß sie nicht Koordinaten des Teilsystems seien. Unter diesen Voraussetzungen ergibt eine der vorigen (**254**) analoge Betrachtung als Lösung der Aufgabe:

$$m' k'_\varrho = m\, k_\varrho$$

für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen

$$k'_\varrho = 0 \qquad \text{ist.}$$

Ohne die gemachten Voraussetzungen aber ist die Aufgabe unbestimmt.

2. Bewegung der Systeme.

Erläuterungen.

1. Der Übergang eines Systems materieller Punkte aus 256
einer Anfangslage in eine Endlage, betrachtet unter Berücksichtigung der Zeit und der Art des Überganges, heißt eine Bewegung des Systems aus der Anfangs- in die Endlage (vgl. **27**).

Bei einer jeden bestimmten Bewegung durchläuft also das System eine bestimmte Bahn, und zwar hat es in bestimmten Zeiten bestimmte Längen derselben durchlaufen.

2. Jede Bewegung eines Systems durch eine denkbare 257
Bahn heißt eine denkbare Bewegung eines Systems (**11**).

3. Jede Bewegung eines Systems durch eine mögliche 258
Bahn heißt eine mögliche Bewegung des Systems (**112**).

4. Die Kinematik oder reine Bewegungslehre handelt von 259
den denkbaren und den möglichen Bewegungen der Systeme.

Solange es sich um die Betrachtung gesetzmäßiger Systeme (**119**, **120**) handelt, fallen die Betrachtungen der Kinematik mit denen der Geometrie fast zusammen. Erst wenn es sich um ungesetzmäßige Systeme handelt und also die Zeit in die Bedingungsgleichungen der Systeme eintritt, gewinnt die Kinematik vor der Geometrie größere Mannigfaltigkeit. Wir haben indessen nicht nötig, auf eigentlich kinematische Betrachtungen einzugehen, sondern dürfen uns hier mit der Erörterung einer Anzahl von Grundbegriffen begnügen.

Analytische Darstellung. Die Bewegung eines Systems 260
wird analytisch dargestellt, indem bei Darstellung der beschriebenen Bahn die Zeit t als unabhängige Variabele benutzt wird, oder, was dasselbe ist, indem die Koordinaten der Lage des Systems als Funktionen der Zeit angegeben werden.

Die Differentialquotienten aller Größen nach der Zeit bezeichnen wir nach Newtons Weise durch übergesetzte Punkte.

Geschwindigkeit.

261 **Definition 1.** Die augenblickliche Bewegungsart eines Systems heißt die Geschwindigkeit des Systems.

Die Geschwindigkeit ist bestimmt durch die Änderung, welche die Lage des Systems in einer unendlich kleinen Zeit erleidet und durch diese Zeit selbst. Sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

Lage und Geschwindigkeit eines Systems zusammen nennen wir den Zustand des Systems.

262 **Folgerung.** Die Geschwindigkeit eines Systems kann betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Die Richtung der Geschwindigkeit ist alsdann die Richtung des augenblicklichen Bahnelements, die Größe der Geschwindigkeit ist gleich dem Differentialquotienten der zurückgelegten Bahnstrecke nach der Zeit.

Die Größe der Geschwindigkeit heißt auch die Geschwindigkeit des Systems in seiner Bahn, oder, wo Mißverständnisse ausgeschlossen sind, die Geschwindigkeit schlechthin.

263 **Definition 2.** Eine Bewegung eines Systems, bei welcher die Geschwindigkeit ihre Größe nicht ändert, heißt eine gleichförmige Bewegung.

264 **Anmerkung.** Gerade Bewegung eines Systems ist eine Bewegung in gerader Bahn. Bei einer solchen Bewegung ändert die Geschwindigkeit ihre Richtung nicht.

265 **Aufgabe 1.** Die Größe der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Die Größe v der Geschwindigkeit ist gegeben durch die positive Wurzel der Gleichung (55):

$$m v^2 = m \frac{ds^2}{dt^2} = \sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

Danach (**241**) sind die Komponenten der Geschwindigkeit in Richtung der x_ν gleich

$$\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\,\dot{x}_\nu \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in der gleichen Richtung, oder die Komponenten nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad .$$

Anmerkung. Die Größe der Geschwindigkeit eines Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Geschwindigkeiten aller seiner Massenteilchen. **266**

Aufgabe 2. Die Größe der Geschwindigkeit, ihre Komponenten und ihre reduzierten Komponenten in Richtung der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ dieser Koordinaten. **267**

Durch Transformation von **265** und **57** erhalten wir die Größe der Geschwindigkeit als positive Wurzel der Gleichung:

$$v^2 = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\dot{p}_\varrho\dot{p}_\sigma \quad .$$

Danach sind (**241**) die Komponenten in der Richtung der p_ϱ gleich

$$\frac{1}{\sqrt{a_{\varrho\varrho}}}\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\dot{p}_\sigma \quad ,$$

und die reduzierten Komponenten in derselben Richtung, oder die Komponenten nach den p_ϱ gleich:

$$\sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma}\dot{p}_\sigma \quad .$$

Moment.

268 **Definition.** Das Produkt aus der Masse eines Systems in seine Geschwindigkeit heißt die Bewegungsgröße oder das Moment des Systems.

Das Moment des Systems ist also eine Vektorgröße in bezug auf das System. Die Komponenten des Moments nach irgendwelchen Koordinaten werden gewöhnlich schlechthin die Momente des Systems nach diesen Koordinaten genannt. (**241**).

269 **Bezeichnung.** Die Momente eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ sollen dauernd mit q_ϱ bezeichnet werden.

270 **Aufgabe 1.** Die Momente q_ϱ eines Systems nach den p_ϱ auszudrücken durch die Änderungsgeschwindigkeiten dieser Koordinaten.

Aus **268** und **267** erhalten wir:

$$q_\varrho = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad .$$

271 **Aufgabe 2.** Die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten p_ϱ auszudrücken durch die Momente des Systems nach diesen Koordinaten.

Durch Auflösung der vorigen Gleichungen erhalten wir:

$$\dot{p}_\varrho = \frac{1}{m} \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} q_\sigma \quad .$$

272 **Anmerkung.** Die Geschwindigkeit und die Bewegungsgröße eines Systems sind solche Vektoren in bezug auf das System, welche stets möglichen Verrückungen des Systems parallel sind (vergl. **243**, **245**).

Beschleunigung.

273 **Definition.** Die augenblickliche Veränderungsweise der Geschwindigkeit eines Systems heißt die Beschleunigung des Systems.

Die Beschleunigung ist bestimmt durch die Änderung, welche die Geschwindigkeit in unendlich kurzer Zeit erleidet und diese Zeit selbst; sie wird gemessen durch das von dem absoluten Werte beider unabhängige Verhältnis dieser Größen.

274 **Folgerung.** Die Beschleunigung eines Systems kann betrachtet werden als Vektorgröße in bezug auf das System. Bilden wir von der gegenwärtigen Lage des Systems aus zwei Verrückungen, von welchen die eine die gegenwärtige Geschwindigkeit darstellt, die andere die Geschwindigkeit im nächsten Augenblick, so gibt die Differenz derselben eine neue Verrückung, deren Richtung die Richtung der Beschleunigung ist, während die Größe der Beschleunigung gleich ist dem Verhältnis der Länge jener neuen Verrückung zum Differentiale der Zeit.

275 **Aufgabe 1.** Die Größe f der Beschleunigung und ihre Komponenten nach den rechtwinkligen Koordinaten auszudrücken durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Die Komponenten der Geschwindigkeit nach den x_ν, jetzt und nach der Zeit dt, sind (**265**):

$$\frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu \quad \text{und} \quad \frac{m_\nu}{m}\dot{x}_\nu + \frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt \quad ,$$

die Komponenten der Differenz beider also $\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu\, dt$; das Verhältnis dieser zur Zeit dt gibt die Komponenten der Beschleunigung nach den x_ν gleich:

$$\frac{m_\nu}{m}\ddot{x}_\nu \quad ,$$

woraus die Größe der Beschleunigung folgt als positive Wurzel der Gleichung (**244**):

$$mf^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \ddot{x}_\nu^2 \quad .$$

276 **Anmerkung.** Die Größe der Beschleunigung eines materiellen Systems ist der quadratische Mittelwert aus der Größe der Beschleunigungen seiner Massenteilchen.

277 **Aufgabe 2.** Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ darzustellen durch die Differentialquotienten dieser Koordinaten nach der Zeit.

Nach **242** haben wir

$$f_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m} \alpha_{\nu\varrho} \ddot{x}_\nu \quad ,$$

und hierin ist einzusetzen, wie in **108**:

$$\ddot{x}_\nu = \sum_1^r{}_\sigma \alpha_{\nu\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \frac{\partial \alpha_{\nu\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Indem wir dieselbe Umformung benutzen wie in **108**, erhalten wir als Lösung der Aufgabe:

$$f_\varrho = \sum_1^r{}_\sigma a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + \sum_1^r{}_\sigma \sum_1^r{}_\tau \left(\frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} - \frac{1}{2} \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \right) \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

278 **Anmerkung 1.** Die Komponenten der Beschleunigung sind also im allgemeinen lineare Funktionen der zweiten Differentialquotienten der Koordinaten, quadratische Funktionen der ersten Differentialquotienten derselben, beliebig verwickelte Funktionen der Koordinaten selbst.

279 **Anmerkung 2.** Die Beschleunigung eines Systems ist nicht notwendig einer möglichen Verrückung des Systems parallel, noch auch einer Verrückung, welche sich durch die benutzten Koordinaten p_ϱ ausdrücken läßt.

Die Komponenten f_ϱ reichen daher im allgemeinen nicht aus, um die Größe der Beschleunigung, noch auch um ihre Komponenten nach sämtlichen rechtwinkligen Koordinaten zu bestimmen (**243**, **245**). Dagegen reichen die f_ϱ aus, um die Komponente der Beschleunigung in der Richtung einer jeden möglichen Bewegung des Systems zu bestimmen (**248**).

Aufgabe 3. Die Komponente der Beschleunigung in der 280
Richtung der Bahn zu finden.

Die Richtungscosinus der Bahn sind nach **72** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{dx_\nu}{ds}$, also unter Berücksichtigung von **265** gleich $\sqrt{\frac{m_\nu}{m}}\frac{\dot{x}_\nu}{v}$. Hieraus folgt nach **246** unter Benutzung von **275** für die gesuchte tangentiale Komponente f_t:

$$f_t = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{m_\nu}{m}\frac{\dot{x}_\nu \ddot{x}_\nu}{v} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} \quad ,$$

unter s die laufende Länge der Bahn verstanden.

Bemerkung. Zerlegen wir die Beschleunigung eines Systems 281
in zwei Komponenten, von denen die eine die Richtung der Bahn hat, die andere auf der Bahn senkrecht steht, so ist die Größe der letzteren gleich dem Produkt aus der Krümmung der Bahn in das Quadrat der Geschwindigkeit des Systems in der Bahn.

Indem wir in Gleichung **107c** die Zeit t als unabhängige Variabele nehmen, erhalten wir:

$$m\, v^4 c^2 = \sum_1^{3n}{}_\nu m_\nu \ddot{x}_\nu^2 - m\, \ddot{s}^2 \quad ,$$

also unter Benutzung von **275** und **280**:

$$v^4 c^2 = f^2 - f_t^2 \quad .$$

Nennen wir nun die zweite, radiale oder centrifugale Komponente der Beschleunigung f_r, so ist, da f_r und f_t senkrecht zueinander sein sollen: $f^2 = f_r^2 + f_t^2$, also:

$$f_r = c\, v^2 \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Energie.

282 **Definition.** Das halbe Produkt aus der Masse eines Systems in das Quadrat der Größe seiner Geschwindigkeit heißt die Energie des Systems.

283 **Aufgabe 1.** Die Energie E eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten seiner rechtwinkligen Koordinaten.

Es ist nach **265**:

$$E = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \sum_1^{3n}{}_\nu\, m_\nu \dot{x}_\nu^2 \quad .$$

284 **Folgerung 1.** Die Energie eines Systems ist die Summe der Energieen seiner Massenteilchen.

285 **Folgerung 2.** Bilden mehrere Systeme zusammen ein größeres System, so ist die Energie des letzteren die Summe der Energieen der ersteren.

286 **Aufgabe 2.** Die Energie eines Systems darzustellen durch die Änderungsgeschwindigkeiten der allgemeinen Koordinaten des Systems und durch die Momente nach diesen Koordinaten.

Unter Benutzung von **267**, **270** und **271** folgt nacheinander:

$$\text{a)} \quad E = \frac{1}{2} m \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\varrho \dot{p}_\sigma$$

$$\text{b)} \quad = \frac{1}{2} \sum_1^r{}_\varrho\, q_\varrho \dot{p}_\varrho$$

$$\text{c)} \quad = \frac{1}{2m} \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} q_\varrho q_\sigma \quad .$$

287 **Anmerkung** (zu **261** bis **286**). Die Geschwindigkeit, das Moment, die Beschleunigung, die Energie eines Systems sind definiert unabhängig von der analytischen Darstellung, insbesondere also auch unabhängig von der Wahl der Koordinaten des Systems.

Benutzung partieller Differentialquotienten.

Bezeichnung. (Vergl. 90.) Mit $\partial_p E$ soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und deren Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286a**). 288

Mit $\partial_q E$ dagegen soll bezeichnet werden das partielle Differential der Energie E dann und nur dann, wenn wir die Koordinaten p_ϱ und die Momente q_ϱ nach diesen Koordinaten als die unabhängig voneinander veränderlichen Bestimmungsstücke der Energie betrachten (**286c**).

Eine jede der beiden Annahmen schließt die andere aus. Mit ∂E werde, wie gewöhnlich, bezeichnet irgend eine Art des partiellen Differentials von E, also die erste Art oder die zweite, wo ein Mißverständnis ausgeschlossen ist, oder auch irgend eine dritte Art.

Bemerkung 1. Die Momente q_ϱ eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten. 289

Denn es ist nach Gleichung **286a** und **270**: (vergl. 91)

$$q_\varrho = \frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 2. Die Änderungsgeschwindigkeiten $\dot{p}_\varrho$ der Koordinaten p_ϱ eines Systems lassen sich darstellen als partielle Differentialquotienten der Energie des Systems nach den Momenten. 290

Denn es ist nach Gleichung **286c** und **271**: (vergl. 94)

$$\dot{p}_\varrho = \frac{\partial_q E}{\partial q_\varrho} \quad .$$

Bemerkung 3. Die Komponenten f_ϱ der Beschleunigung eines Systems nach den Koordinaten p_ϱ lassen sich darstellen durch partielle Differentialquotienten der Energie. 291

Denn nach Gleichung **286a** ist erstens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho} = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \dot{p}_\sigma \quad ,$$

also:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) = m \sum_1^r {}_\sigma\, a_{\varrho\sigma} \ddot{p}_\sigma + m \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\varrho\sigma}}{\partial p_\tau} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad ,$$

und nach derselben Gleichung zweitens:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} = \frac{1}{2} m \sum_1^r {}_\sigma \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial a_{\sigma\tau}}{\partial p_\varrho} \dot{p}_\sigma \dot{p}_\tau \quad .$$

Durch Subtraktion der zweiten Gleichung von der ersten und Vergleichung mit **277** folgt:

a) $$m f_\varrho = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial_p E}{\partial \dot{p}_\varrho}\right) - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad ,$$

wofür auch geschrieben werden kann unter Berücksichtigung von **289**:

b) $$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho - \frac{\partial_p E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

292 **Bemerkung 4.** Ändern wir eine Koordinate p_τ eines Systems zweimal um denselben unendlich kleinen Betrag, indem wir das eine Mal den Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal den Momenten nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte lassen, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung.

Denn multipliziert man die Gleichung **95a** mit mds und dividiert durch dt^2, so liefert sie:

$$\frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} = -\frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Lehrsatz. Erleidet die Lage eines Systems zweimal dieselbe unendlich kleine Änderung, während das eine Mal die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten, das andere Mal die Momente nach den Koordinaten ihre ursprünglichen Werte behalten, so erleidet die Energie des Systems in beiden Fällen entgegengesetzt gleiche Änderung. 293

Denn die Änderung der Energie ist im ersten Falle:

$$\delta_p E = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_p E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau$$

und im zweiten Falle:

$$\delta_q E = \sum_1^r {}_\tau \frac{\partial_q E}{\partial p_\tau} \delta p_\tau \quad ,$$

also ist nach Bemerkung 4:

$$\delta_p E = -\delta_q E \quad ,$$

welches die Behauptung ist.

Folgerung. Die Komponenten der Beschleunigung eines Systems nach seinen Koordinaten p_ϱ lassen sich auch darstellen in der Form: (nach **291b** und **292**) 294

$$m f_\varrho = \dot{q}_\varrho + \frac{\partial_q E}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Schlußbemerkung zum ersten Buch.

Wie bereits in der Vorbemerkung (**1**) ausgesprochen wurde, ist den Überlegungen dieses Buches die Erfahrung völlig fern geblieben. Wenn wir also den gewonnenen Beziehungen in der Folge wieder begegnen, so werden wir 295