Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

1. Vektorgrößen in bezug auf ein System

urn:nbn:de:bsz:31-288857

Abschnitt 7. Kinematische Begriffe.

I. Vektorgrößen in bezug auf ein System.

Definition. Vektorgröße in bezug auf ein System heißt 237
jede Größe, welche zu dem System in Beziehung steht, und welche dieselbe Art der mathematischen Mannigfaltigkeit hat, wie eine denkbare Verrückung des Systems.

Bemerkungen dazu.

1. Eine Verrückung eines Systems ist selbst eine Vektor- 238
größe in bezug auf das System. Jedes Produkt einer Verrückung des Systems mit irgend welchen nicht gerichteten Größen ist eine Vektorgröße in bezug auf das System.

2. Jede Vektorgröße in bezug auf ein System kann 239
geometrisch dargestellt werden durch eine denkbare Verrückung des Systems. Die Richtung der sie darstellenden Verrückung nennen wir auch die Richtung der Vektorgröße. Der Maßstab der Darstellung kann und soll stets so gewählt werden, daß die darstellende Verrückung unendlich klein wird. Jeder Vektor in bezug auf ein System, welcher sich mit der Lage des Systems ändert, kann alsdann dargestellt werden als eine unendlich kleine Verrückung des Systems aus der Lage, zu welcher sein augenblicklicher Wert gehört.

3. Eine Vektorgröße in bezug auf einen einzelnen mate- 240
riellen Punkt ist ein Vektor im gewöhnlichen Sinne des Wortes. Jeder Vektor in bezug auf einen Punkt kann dargestellt werden durch eine geometrische Verrückung des Punktes, insbesondere durch eine unendlich kleine Verrückung aus seiner gegenwärtigen Lage.

4. Unter Komponenten und reduzierten Komponenten 241
eines Vektors sind diejenigen Vektoren gleicher Art verstanden, welche dargestellt sind durch die Komponenten und reduzierten

Komponenten derjenigen unendlich kleinen Verrückung, welche den ursprünglichen Vektor darstellt (**48**, **71**).

Die reduzierte Komponente eines bestimmten Vektors in Richtung einer Koordinate p_ϱ nennen wir wiederum kurz die Komponente des Vektors nach p_ϱ, oder noch kürzer den Vektor nach der Koordinate p_ϱ.

Wo es ohne Mißverständnis geschehen kann, wird mit Komponente oder reduzierte Komponente kurz die Größe dieser Komponenten bezeichnet.

242 **Aufgabe 1a.** Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den $3n$ rechtwinkligen Koordinaten die Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ abzuleiten.

Sind die $d\bar{x}_\nu$ die Komponenten nach den x_ν derjenigen Verrückung, welche die Vektorgröße darstellt, und sind die $d\bar{p}_\varrho$ die Komponenten derselben Verrückung nach den p_ϱ, so sind nach **80** die $d\bar{p}_\varrho$ durch die $d\bar{x}_\nu$ gegeben. Den $d\bar{p}_\varrho$ und $d\bar{x}_\nu$ aber sind die k_ϱ und h_ν beziehlich proportional, also ist

$$k_\varrho = \sum_1^{3n}{}_\nu\, \alpha_{\nu\varrho} h_\nu = \sum_1^{3n}{}_\nu \frac{\partial x_\nu}{\partial p_\varrho} h_\nu \quad .$$

243 **Aufgabe 1b.** Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den p_ϱ die Komponenten h_ν des Vektors nach den rechtwinkligen Koordinaten abzuleiten.

Die Gleichungen **242** geben nur r Gleichungen für die $3n$ Größen h_ν, aus welchen sich diese letzteren also nicht bestimmen lassen. In der Tat ist auch die Aufgabe im allgemeinen unbestimmt. Denn nicht alle denkbaren Lagen und Verrückungen eines Systems lassen sich durch die p_ϱ ausdrücken, sondern nur ein Teil derselben, unter diesen die möglichen Verrückungen.

Nur in dem Falle also, daß der gegebene Vektor einer Verrückung parallel ist, welche sich durch die p_ϱ und ihre Änderungen darstellen läßt, ist die Aufgabe lösbar; in diesem Falle aber ist nach **81**

$$h_\nu = \sum_1^{r}{}_\varrho\, \beta_{\nu\varrho} k_\varrho \quad .$$

Aufgabe 2a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den rechtwinkligen Koordinaten seine Größe h zu bestimmen. 244

Unter Benutzung von 83 erhält man:

$$h^2 = \sum_1^{3n} {}_\nu \frac{m}{m_\nu} h_\nu \quad .$$

Aufgabe 2b. Aus den Komponenten k_ϱ eines Vektors nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ seine Größe k zu bestimmen. 245

Die Aufgabe ist wiederum im allgemeinen unbestimmt wie 243.

Nur in dem Falle, daß außer den Komponenten k_ϱ noch die Tatsache bekannt gegeben ist, daß der fragliche Vektor einer durch die p_ϱ ausdrückbaren Verrückung parallel ist, ist k durch die k_ϱ bestimmt, und in diesem Falle ist nach 82

$$k^2 = \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma b_{\varrho\sigma} k_\varrho k_\sigma \quad .$$

Aufgabe 3a. Aus den Komponenten h_ν eines Vektors nach den x_ν die Komponente des Vektors in Richtung einer beliebigen Verrückung ds zu finden. 246

Ist ds' die Länge, und sind die $d\bar{x}'_\nu$ die reduzierten Komponenten der Verrückung, durch welche wir den Vektor darstellen, so ist die Komponente dieser Verrückung in Richtung von ds nach 48 und 84:

$$ds' \cos s,s' = \frac{1}{ds} \sum_1^{3n} {}_\nu \, dx_\nu \, d\bar{x}'_\nu \quad .$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit dem Verhältnis zwischen der Größe des Vektors und der Länge der Verrückung, durch welche wir ihn darstellen, so erhalten wir links die gesuchte Komponente; rechts treten an Stelle der $d\bar{x}'_\nu$ die h_ν, und wir erhalten also als Lösung der Aufgabe die gesuchte Größe gleich:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu}\, h_{\nu} \frac{dx_{\nu}}{ds}$$

oder nach **72** gleich:

$$\sum_{1}^{3n}{}_{\nu} \sqrt{\frac{m}{m_{\nu}}}\, h_{\nu} \cos s{,}x_{\nu} \quad .$$

247 **Aufgabe 3b.** Aus den Komponenten k_{ϱ} eines Vektors nach den p_{ϱ} die Komponente des Vektors in der Richtung einer beliebigen durch die p_{ϱ} ausdrückbaren Verrückung ds zu bestimmen.

Wenden wir dieselbe Überlegung an, wie in der vorigen Aufgabe, so folgt nach **48** und **85** die gesuchte Größe gleich:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, k_{\varrho} \frac{dp_{\varrho}}{ds}$$

oder nach **78** und **79** gleich:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho} \sum_{1}^{r}{}_{\sigma}\, b_{\varrho\sigma}\, k_{\varrho} \sqrt{a_{\sigma\sigma}} \cos s{,}p_{\sigma} \quad .$$

248 **Anmerkung.** Obwohl also durch die Größen k_{ϱ} im allgemeinen nicht alle beliebigen Komponenten eines Vektors bestimmt sind, so sind doch durch jene Größen die Komponenten des Vektors in allen solchen Richtungen bestimmt, welche sich durch die p_{ϱ} darstellen lassen, also in jeder möglichen Richtung.

249 **Lehrsatz 1.** Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_{ϱ} die Größen k_{ϱ} sind, senkrecht stehe auf einer Verrückung, für welche die p_{ϱ} die Änderungen dp_{ϱ} erleiden, ist notwendige und hinreichende Bedingung die Erfüllung der Gleichung:

$$\sum_{1}^{r}{}_{\varrho}\, k_{\varrho}\, dp_{\varrho} = 0 \quad .$$

Dies folgt aus **85**, wenn wir die k_{ϱ} den $d\bar{p}'_{\varrho}$ proportional annehmen.

Lehrsatz 2. Damit der Vektor, dessen Komponenten nach den p_ϱ die k_ϱ sind, senkrecht stehe auf jeder möglichen Verrückung des Systems, ist notwendige und hinreichende Bedingung, daß sich die r Größen k_ϱ darstellen lassen in der Form: 250

$$k_\varrho = \sum_1^k {}_\varkappa \, p_{\varkappa\varrho} \gamma_\varkappa \quad ,$$

in welcher die $p_{\varkappa\varrho}$ den Bedingungsgleichungen des Systems entnommen (**130**) und die $\gamma_\varkappa$ k frei zu bestimmende Größen sind.

Dies folgt aus **148** und **150**, wenn wir die k_ϱ durch die $d\bar{p}_\varrho$ dargestellt annehmen.

Bemerkung 1. Vektoren in bezug auf ein und dasselbe System können zusammengesetzt und zerlegt werden wie die denkbaren Verrückungen des Systems. 251

Die Zusammensetzung von Vektoren in bezug auf dasselbe System erfolgt also nach den Regeln der algebraischen Addition (**52**).

Bemerkung 2. Vektoren in bezug auf verschiedene Systeme sind zu betrachten als Größen verschiedener Art; sie können nicht zusammengesetzt, noch addiert werden. 252

Bemerkung 3. Eine Vektorgröße in bezug auf ein gewisses System kann betrachtet werden als eine Vektorgröße in bezug auf jedes größere System, von welchem das ursprüngliche einen Teil bildet. 253

Aufgabe 1. Dieselbe Vektorgröße werde einmal betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröße in bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten h_ν nach den rechtwinkligen Koordinaten x_ν im ersten Falle sollen die Komponenten h'_ν nach den entsprechenden Koordinaten x'_ν im zweiten Falle berechnet werden. 254

Es sei die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Die Koordinaten x_ν des Teilsystems sind zugleich Koordinaten des vollständigen Systems, nur um der verschiedenen Auffassung willen sind sie als solche mit x'_ν bezeichnet. Erteilen wir daher dem Teilsystem eine beliebige

Verrückung, welche eo ipso zugleich eine Verrückung des vollständigen Systems ist, so ist $dx'_\nu = dx_\nu$ für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen $dx'_\nu = 0$ ist. Nun ist nach **73**: $m' d\bar{x}'_\nu = m_\nu dx'_\nu$ und $m d\bar{x}_\nu = m_\nu dx_\nu$, also ist $m' d\bar{x}'_\nu = m d\bar{x}_\nu$. Für einen Vektor, welcher durch jene Verrückung dargestellt wird, ist die Komponente nach x_ν mit $d\bar{x}_\nu$, die nach x'_ν mit $d\bar{x}'_\nu$ porportional. Als Lösung der Aufgabe erhalten wir also:

$$m' h'_\nu = m\, h_\nu$$

für diejenigen ν, welche beiden Systemen gemeinsam sind, während für die übrigen

$$h'_\nu = 0 \qquad \text{ist.}$$

255 **Aufgabe 2.** Dieselbe Vektorgröße werde einmal betrachtet als Vektorgröße in bezug auf ein Teilsystem, das andere Mal als Vektorgröße in bezug auf das vollständige System. Aus den Komponenten k_ϱ nach den allgemeinen Koordinaten p_ϱ im ersten Falle die Komponenten k'_ϱ nach den entsprechenden Koordinaten p'_ϱ im zweiten zu bestimmen.

Es sei wieder die Masse des Teilsystems m, die des vollständigen Systems m'. Wir setzen voraus, daß die Koordinaten p_ϱ des Teilsystems zugleich Koordinaten des vollständigen Systems sind und nur um der verschiedenen Auffassung willen im letzteren Falle mit p'_ϱ bezeichnet werden. Von den nicht gemeinsamen p'_ϱ setzen wir voraus, daß sie nicht Koordinaten des Teilsystems seien. Unter diesen Voraussetzungen ergibt eine der vorigen (**254**) analoge Betrachtung als Lösung der Aufgabe:

$$m' k'_\varrho = m\, k_\varrho$$

für die gemeinsamen Koordinaten, während für die übrigen

$$k'_\varrho = 0 \qquad \text{ist.}$$

Ohne die gemachten Voraussetzungen aber ist die Aufgabe unbestimmt.