Gesammelte Werke

Die Prinzipien der Mechanik

Hertz, Heinrich

Leipzig, 1910

2. Geradeste Entfernung

Denn lassen wir die Verrückung $\delta\sigma$ des vorigen Beweises nach Richtung und Länge jetzt zusammenfallen mit dem Teil der senkrechten Trajektorie, welcher zwischen beiden Flächen liegt, so fällt $\delta\sigma$ zusammen mit dem betrachteten Abstand, der Winkel s,σ aber wird Null, und so folgt aus Gleichung **212c** die Behauptung.

Zusatz 2. Die in den Gleichungen der senkrechten Trajektorien auftretende Funktion f wird erhalten als Wurzel der Gleichung: 214

$$\frac{1}{f^2} = \sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt, wenn wir die Werte der r Richtungscosinus nach **212b** einsetzen in die Gleichung 88, welcher sie genügen müssen. Welche Wurzel zu wählen sei, hängt davon ab, ob wir die Richtung der Trajektorie nach wachsenden Werten von R oder nach abnehmenden als positiv rechnen.

2. Geradeste Entfernung.

Definition. Geradeste Entfernung zweier Lagen eines holonomen Systems heißt die Länge einer sie verbindenden geradesten Bahn. 215

Anmerkung. Zwei Lagen können mehr als eine geradeste Entfernung haben. Unter diesen finden sich die Längen der kürzesten Bahnen zwischen beiden Lagen, also auch die Länge der absolut kürzesten Bahn. Wenn von d e r geradesten Entfernung zweier Lagen als einer eindeutig bestimmten gesprochen wird, so soll von dieser letzteren die Rede sein. 216

Analytische Darstellung. Die geradeste Entfernung zweier Lagen kann als Funktion der Koordinaten dieser Lagen dargestellt werden. Diejenige Lage, welche als Ausgangslage betrachtet wird, werde dauernd mit 0, ihre Koordinaten mit $p_{\varrho 0}$ bezeichnet; diejenige Lage, welche als Endlage betrachtet 217 wird, werde dauernd mit 1, ihre Koordinaten mit p_{ϱ_1} bezeichnet, so daß die Richtung der geradesten Bahn stets positiv gerechnet ist von 0 gegen 1. Die geradeste Entfernung ist alsdann eine für alle Wertsysteme der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} definierte Funktion dieser $2r$. Größen. Den analytischen Ausdruck der geradesten Entfernung, ausgedrückt in eben diesen Variabelen, bezeichnen wir durch S, und nennen diesen analytischen Ausdruck auch kurz die geradeste Entfernung des Systems.

218 **Anmerkung 1.** Die Funktion S ist im allgemeinen eine mehrdeutige Funktion ihrer Unabhängigen. Von den Zweigen dieser Funktion verschwindet einer und nur einer zugleich mit verschwindendem Unterschiede zwischen den p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0}. Von diesem Zweig ist (**216**) die Rede in solchen Aussagen, in welchen von S als von einer eindeutig bestimmten Funktion gesprochen wird.

219 **Anmerkung 2.** Die Funktion S ist symmetrisch in Hinsicht der p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} in dem Sinne, daß S seinen Wert nicht ändert, wenn die p_{ϱ_1} und p_{ϱ_0} für alle Werte des ϱ gleichzeitig miteinander vertauscht werden.

Denn mit dieser Vertauschung vertauschen wir nur die Anfangs- und die Endlage.

220 **Bemerkung.** Wenn die geradeste Entfernung eines Systems in irgend welchen freien Koordinaten desselben gegeben ist, so sind damit die sämtlichen geradesten Bahnen des Systems in eben diesen Koordinaten gegeben, ohne daß eine weitere Kenntnis darüber nötig wäre, in welcher Weise die Lage der einzelnen materiellen Punkte des Systems von jenen Koordinaten abhängt.

Denn die geradeste Entfernung irgend zweier unendlich benachbarter Lagen des Systems ist zugleich die Länge der unendlich kleinen Verrückung zwischen ihnen; läßt sich aber diese letztere durch die gewählten Koordinaten darstellen, so trifft die Behauptung zu nach **163**.

221 **Aufgabe.** Aus der geradesten Entfernung eines Systems den Ausdruck für die Länge seiner unendlich kleinen Verrückungen abzuleiten.

In S setzen wir für die p_{ϱ_0} jetzt p_ϱ, für die p_{ϱ_1} jetzt $p_\varrho + dp_\varrho$, und lassen alsdann die dp_ϱ sehr klein werden. Wir wissen bereits (**57d**), daß sich alsdann die Entfernung der beiden Lagen als Quadratwurzel einer homogenen quadratischen Funktion der dp_ϱ darstellt. S selbst läßt sich also nicht in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen der dp_ϱ entwickeln, wohl aber S^2, und in dieser Entwickelung müssen die quadratischen Glieder die ersten sein, welche nicht verschwinden. Drücken wir also durch einen übergesetzten Strich aus, daß in der betreffenden Funktion die $p_{\varrho_0} = p_{\varrho_1} = p_\varrho$ gesetzt werden sollen, so erhalten wir für die Entfernung der beiden Lagen, also für die Größe der Verrückung:

$$ds^2 = \frac{1}{2} \sum_1^r {}_\varrho \sum_1^r {}_\sigma \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_1} \partial p_{\sigma_1}}} \, dp_\varrho \, dp_\sigma$$

und es wird also die Funktion $a_{\varrho\sigma}$:

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_1} \partial p_{\sigma_1}}} \quad .$$

Mit gleichem Rechte wird auch erhalten:

$$a_{\varrho\sigma} = \frac{1}{2} \overline{\frac{\partial^2 S^2}{\partial p_{\varrho_0} \partial p_{\sigma_0}}} \quad .$$

Diese Werte der $a_{\varrho\sigma}$ kann man benutzen, um indirekt von der Funktion S zu den geradesten Bahnen zu gelangen. Die folgenden Lehrsätze bieten einen direkteren Weg zu dem gleichen Ziele dar.

Lehrsatz. Eine Fläche, deren sämtliche Lagen gleiche 222
geradeste Entfernung haben von einer festen Lage, wird senkrecht durchschnitten von allen geradesten Bahnen, welche durch jene feste Lage gehen.

Es seien die p_{ϱ_0} die Koordinaten der festen Lage, die p_{ϱ_1} die Koordinaten einer Lage der Fläche. Wir gehen von der letzteren zu einer anderen Lage der Fläche über, für welche die p_{ϱ_1} sich geändert haben um dp_{ϱ_1}. Dabei hat sich die geradeste Entfernung von der festen Lage 0 nach der Voraussetzung um Nichts geändert; nach **199** aber hat sie sich geändert um $\sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} dp_{\varrho_1}$, wenn s,p_{ϱ_1} den Winkel bezeichnet, welchen die geradeste Bahn in 1 mit der Richtung von p_ϱ bildet. Es ist also:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} dp_{\varrho_1} = 0 \quad ,$$

und diese Gleichung sagt aus, daß die geradeste Bahn auf der Verrückung der dp_{ϱ_1} senkrecht steht (**85** und **78a**). Da dies gilt für jede beliebige Verrückung, welche in 1 der Fläche angehört, so folgt (**206**) die Behauptung.

223 **Folgerung 1.** Die geradesten Bahnen, welche durch eine feste Lage hindurch gehen, sind die senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche der Bedingung genügen, daß die sämtlichen Lagen einer jeden gleiche geradeste Entfernung von jener festen Lage haben.

224 **Folgerung 2.** Die sämtlichen geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage 0 hindurch gehen, genügen den r Gleichungen:

a) $$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} = \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \quad ,$$

in welchen die p_{ϱ_1} als die Koordinaten der variabelen Lage der Bahn und die $\cos s,p_{\varrho_1}$ als die Richtungscosinus der Bahn in dieser Lage zu betrachten sind.

Denn die Gleichungen **a)** sind die Gleichungen der senkrechten Trajektorien einer Schar von Flächen, welche durch die Gleichung

b) $$S = \text{constans}$$

dargestellt wird. Wäre nämlich S eine beliebige Funktion der variabelen Koordinaten p_{ϱ_1}, so wären nach **212** die Gleichungen der senkrechten Trajektorien:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s, p_{\varrho_1} = f \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \quad , \tag{c)}$$

und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen wäre gleich fdS. Nach der besonderen Natur unserer Funktion S (**217**, **222**) ist aber dieser Abstand gleich dS selbst, also folgt

$$f = 1 \quad , \tag{d)}$$

und die allgemeinen Gleichungen **c)** nehmen die besondere Form **a)** an.

Anmerkung 1. Die Gleichungen **224a**, welche Differentialgleichungen erster Ordnung sind, können auch angesehen werden als die Gleichungen geradester Bahnen in endlicher Form, sobald wir nämlich in denselben die p_{ϱ_0} als die Variabelen, die $2r$ Größen p_{ϱ_1} und s,p_{ϱ_1} aber als Konstanten betrachten. 225

Denn bestimmen wir aus jenen Gleichungen eine Reihe von Lagen 0 in solcher Weise, daß bei festgehaltenen Werten der p_{ϱ_1} auch die Werte der s,p_{ϱ_1} unverändert bleiben, so erhalten wir solche Lagen 0, von welchen aus die nach der Lage 1 gezogenen geradesten Bahnen in dieser Lage 1 eine feste Richtung haben. Da nun aber nur eine einzige geradeste Bahn von dieser Eigenschaft möglich ist, so müssen alle so bestimmten Lagen 0 dieser einen Bahn angehören, ihre Gesamtheit bildet diese Bahn, und diese letztere wird also selbst dargestellt durch die Gleichungen **224a**.

Anmerkung 2. Im Beweise des Lehrsatzes **222** hätten wir mit gleichem Rechte die Lage 1 als die feste, die Lage 0 als die variabele Lage einführen können. Anstatt zu den Gleichungen **224a** wären wir alsdann gelangt zu den Gleichungen: 226

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s, p_{\varrho_0} = - \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \quad . \tag{a)}$$

Der Unterschied im Vorzeichen der rechten Seite erklärt sich daraus, daß nunmehr das Fortschreiten von der festen Lage aus nach **217** als Fortschreiten in negativer Richtung zu bezeichnen ist. Wie die Gleichungen **224a** stellen auch die Gleichungen **226a** geradeste Bahnen dar. Es sind Differentialgleichungen erster Ordnung aller geradesten Bahnen, welche durch die feste Lage der p_{ϱ_1} hindurchgehen, und zugleich die endlichen Gleichungen der einen bestimmten Bahn, welche durch die Lage der p_{ϱ_0} hindurchgeht und in dieser mit den Koordinaten die Winkel s,p_{ϱ_0} bildet.

227 **Folgerung 3.** Die geradeste Entfernung S eines Systems genügt als Funktion der p_{ϱ_0} der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

a)
$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_0} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_0}} = 1 \quad ,$$

und ebenso als Funktion der p_{ϱ_1} der partiellen Differentialgleichung erster Ordnung:

b)
$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma_1} \frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} \frac{\partial S}{\partial p_{\sigma_1}} = 1 \quad .$$

Denn beide Gleichungen folgen aus **214** und **224d**; sie werden auch unmittelbar erhalten, indem man die Richtungscosinus einer geradesten Bahn, ausgedrückt durch S nach **224a** oder **226a**, einsetzt in die Gleichung **88**, welcher die Winkel einer jeden beliebigen Richtung mit den Koordinaten genügen.

228 **Lehrsatz.** Errichtet man in allen Lagen einer beliebigen Fläche geradeste Bahnen senkrecht zur Fläche, und trägt auf allen die gleiche Länge ab, so wird die so erhaltene neue Fläche von jenen geradesten Bahnen ebenfalls senkrecht durchschnitten.

Die Lagen der ursprünglichen Fläche seien mit 0, die der neu konstruierten mit 1 bezeichnet. Es seien die s,p_{ϱ_0} bez. s,p_{ϱ_1} die Winkel, welche eine bestimmte der geradesten Bahnen an der ersten bez. an der zweiten Fläche mit den

Koordinaten bildet. Gehen wir von dieser geradesten Bahn zu irgend einer benachbarten über, so ändert sich die Länge der Bahn nach 199 um

$$\sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} \, dp_{\varrho_1} - \sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s,p_{\varrho_0} \, dp_{\varrho_0} \quad ,$$

wenn die dp_{ϱ_1} und dp_{ϱ_0} die Änderungen der p_ϱ in den Lagen 1 und 0 bezeichnen. Nach der Konstruktion ist aber diese Änderung gleich Null, und ebenso ist nach der Konstruktion

$$\sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_0}} \cos s,p_{\varrho_0} \, dp_{\varrho_0} = 0 \quad ,$$

da ja die Bahn auf der ursprünglichen Fläche senkrecht steht. Daher ist nun auch

$$\sum_1^r{}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho_1}} \cos s,p_{\varrho_1} \, dp_{\varrho_1} = 0 \quad ,$$

und da die dp_{ϱ_1} jede beliebige Verrückung in der Fläche der Lagen 1 bezeichnen können, so ist damit die Behauptung erwiesen.

Folgerung 1. Die senkrechten Trajektorien einer be- 229
liebigen Schar von Flächen, von welchen jede in allen ihren Lagen denselben senkrechten geradesten Abstand von ihren Nachbarflächen hat, sind geradeste Bahnen.

Folgerung 2. Ist R eine Funktion der r Koordinaten 230
p_ϱ von solcher Beschaffenheit, daß die Gleichung

$$R = \text{constans} \qquad \textbf{a)}$$

eine Schar von Flächen darstellt, deren jede von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand dR hat, so sind die Gleichungen:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s,p_\varrho = \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \qquad \textbf{b)}$$

die Gleichungen der senkrechten Trajektorien, also die Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind diese Gleichungen Differentialgleichungen erster Ordnung für jene Bahnen.

Denn wäre R eine ganz beliebige Funktion der p_ϱ, so stellten die Gleichungen **212b** die senkrechten Trajektorien der Schar **a)** vor, und es wäre nach **213** der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen gleich $f dR$. Nach unserer besonderen Voraussetzung ist aber dieser Abstand konstant und gleich dR, also ist $f = 1$, und es gehen daher die Gleichungen **212b** in die obigen Gleichungen **b)** über.

231 **Folgerung 3.** Stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, daß jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen den gleichen senkrechten geradesten Abstand dR hat, so genügt die Funktion R der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad .$$

Denn diese Gleichung folgt aus **214** und **230**; sie wird auch unmittelbar erhalten, wenn wir die Richtungscosinus einer geradesten Bahn nach **230b** einsetzen in die Gleichung 88, welcher die Winkel einer jeden Richtung mit den Koordinaten genügen.

232 **Lehrsatz 1.** (**Umkehrung von 231.**) Genügt die Funktion R der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma \, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

so stellt die Gleichung

$$R = \text{constans}$$

eine Schar von Flächen dar von solcher Beschaffenheit, daß jede unter ihnen von ihren Nachbarn in allen Lagen gleichen senkrechten geradesten Abstand hat, und zwar einen Abstand, welcher durch die Änderung von R gemessen wird.

Denn wäre R eine ganz beliebige Funktion, so wären die senkrechten Trajektorien der Schar gegeben durch Gleichungen der Form **212b**, und der senkrechte Abstand zweier Nachbarflächen in jeder Lage wäre $f dR$. Aus der besonderen Voraussetzung, welcher wir die Funktion R unterwarfen, folgt aber nach **214**: $f = 1$, und also die Behauptung.

Lehrsatz 2. Ist die Funktion R der p_ϱ eine beliebige 233
Lösung der partiellen Differentialgleichung:

$$\sum_1^r{}^\varrho \sum_1^r{}^\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad , \qquad \text{a)}$$

so sind die Gleichungen

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s, p_\varrho = \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \qquad \text{b)}$$

Gleichungen geradester Bahnen. Und zwar sind es Differentialgleichungen erster Ordnung der durch sie dargestellten geradesten Bahnen.

Der Satz folgt unmittelbar aus **230** und **232**.

Anmerkung. Obwohl jede Bahn, welche durch die Gleich- 234
ungen **233b** dargestellt wird, eine geradeste ist, so läßt sich doch nicht umgekehrt allgemein jede geradeste Bahn in dieser Form darstellen. Die Mannigfaltigkeit der geradesten Bahnen, welche in der gegebenen Form enthalten sind, hängt vielmehr ab von der Mannigfaltigkeit, welche die Funktion R als Lösung der Differentialgleichung besitzt, d. h. von der Zahl ihrer willkürlichen Konstanten.

Ist aber im besondern R eine vollständige Lösung, enthält also R r willkürliche Konstanten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots . \alpha_{r-1}$, von welchen die erste die notwendig vorhandene additive Konstante bezeichne, so lassen sich alle geradesten Bahnen des Systems in der Form **233b** darstellen. Denn die rechten Seiten dieser r Gleichungen (von welchen nur $r-1$ unabhängig voneinander sind) enthalten dann $r-1$ Konstanten, welche hinreichen, um der dargestellten Bahn in einer willkürlichen Lage eine durch $r-1$ unabhängige Richtungscosinus bestimmte willkürliche Richtung zu erteilen. Können wir aber eine Lage der dargestellten Bahn und ihre Richtung in dieser Lage willkürlich wählen, so können wir alle geradesten Bahnen darstellen.

235 **Lehrsatz 3.** (Jacobis Satz.) Es bezeichne R eine vollständige Lösung der Differentialgleichung

a) $$\sum_1^r{}_\varrho \sum_1^r{}_\sigma b_{\varrho\sigma} \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \frac{\partial R}{\partial p_\sigma} = 1 \quad ,$$

und es seien ihre willkürlichen Konstanten, von der additiven abgesehen, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_{r-1}$. Es geben alsdann die $r-1$ Gleichungen

b) $$\frac{\partial R}{\partial \alpha_\tau} = \beta_\tau \quad ,$$

in welchen die β_τ $r-1$ neue willkürliche Konstanten sind, die Gleichungen der geradesten Bahnen des Systems in endlicher Form.

Zum Beweise zeigen wir, daß die Bahnen, welche durch die Gleichungen **b)** dargestellt werden, senkrechte Trajektorien der Schar

c) $$R = \text{constans}$$

sind; alsdann folgt die Behauptung nach **232** und **229**.

Um nun erstens die Richtung der dargestellten Bahn zu finden, differentiieren wir die Gleichungen **b)** in Richtung derselben, d. h. wir bilden jene Gleichungen für zwei um ds entfernte Lagen der Bahn, in welchen sich die p_ϱ um die dp_ϱ unterscheiden, subtrahieren, und dividieren durch ds. Wir erhalten so $r-1$ Gleichungen der Form:

$$\sum_1^r{}_\sigma \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} \frac{dp_\sigma}{ds} = 0 \quad ,$$

oder, wenn wir in dieselben nach **79** und **78** die Richtungs- (235)
cosinus des betrachteten Bahnelementes einführen:

$$\sum_1^r {}_\varrho \sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \qquad \textbf{d)}$$

welche Gleichungen nunmehr $r-1$ nicht homogene, lineare Gleichungen für die $r-1$ Verhältnisse der Richtungscosinus untereinander bleiben.

Zweitens bemerken wir, daß die Gleichung **a)** für alle Werte der Konstanten α_τ gilt; wir können sie also nach diesen Größen differentiieren, und indem wir dies tun, erhalten wir $r-1$ Gleichungen, welche sich schreiben lassen in der Form:

$$\sum_1^r {}_\varrho \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \sum_1^r {}_\sigma\, b_{\varrho\sigma} \frac{\partial^2 R}{\partial p_\sigma \partial \alpha_\tau} = 0 \quad , \qquad \textbf{e)}$$

und welche Beziehungen darstellen, welchen die partiellen Differentialquotienten von R zufolge unserer besonderen Voraussetzungen über diese Funktion genügen müssen.

Stellen wir nun die Gleichungen **b)** für die gerade betrachteten Werte der α_τ und β_τ überhaupt eine bestimmte Bahn vor, so müssen aus den Gleichungen **d)** eindeutig bestimmte Werte für die Verhältnisse der Richtungscosinus zu einem unter ihnen folgen. Ganz dieselben eindeutig bestimmten Werte müssen dann aber auch aus den Gleichungen **e)** für die Verhältnisse der Größen $\partial R / \partial p_\varrho$ zu einer unter ihnen sich ergeben. Ist also f ein noch zu bestimmender Faktor, so muß sein:

$$\sqrt{a_{\varrho\varrho}} \cos s{,}p_\varrho = f \frac{\partial R}{\partial p_\varrho} \quad .$$

Demnach ist nach **212** die betrachtete Bahn die senkrechte Trajektorie der Schar **c)**, was wir beweisen wollten. Der Faktor f wird gleich der Einheit gefunden.

Die Voraussetzung, daß die $r-1$ Gleichungen **b)** für bestimmte Werte der α_τ und β_τ eine bestimmte Bahn bezeichnen, würde nur dann nicht zutreffen, wenn diese Gleichungen nicht unabhängig voneinander wären. Dann aber wären auch die willkürlichen Konstanten nicht voneinander unabhängig und die Lösung wäre keine vollständige Lösung, was wir doch voraussetzten.

236 **Aufgabe.** Aus einer beliebigen vollständigen Lösung R der Differentialgleichung **235a** die geradeste Entfernung S des Systems zu ermitteln.

Unter S ist also wieder zu verstehen die geradeste Entfernung zweier Lagen 0 und 1 mit den Koordinaten p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1}. In den $r-1$ Gleichungen **235b** setzen wir für die p_ϱ das eine Mal die p_{ϱ_0}, das andere Mal die p_{ϱ_1}. Aus den entstehenden $2r-2$ Gleichungen eliminieren wir die β_τ und stellen die α_τ als Funktionen der p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} dar. Diese Funktionen werden symmetrisch in bezug auf p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1}, sie geben diejenigen Werte, welche die α_τ haben müssen, damit die durch sie bezeichneten Bahnen durch bestimmte Lagen 0 und 1 hindurchgehen.

Wir haben nun erstens für irgend eine Lage 1 nach **224a** und **233b**:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_1}} = \left(\frac{\partial R}{\partial p_\varrho}\right)_1$$

und zweitens für irgend eine Lage 0 nach **226a** und **233b**:

$$\frac{\partial S}{\partial p_{\varrho_0}} = -\left(\frac{\partial R}{\partial p_\varrho}\right)_0 .$$

Setzen wir in den rechten Seiten dieser Gleichungen für die α_τ ihre Werte in den p_{ϱ_0} und p_{ϱ_1} ein, und die p_ϱ selbst in der ersten gleich p_{ϱ_1}, in der zweiten gleich p_{ϱ_0}, so erhalten wir die ersten Differentialquotienten von S nach den sämtlichen unabhängigen Variabelen ausgedrückt als Funktionen dieser Variabelen. S kann also dann durch einfache Integrationen gefunden werden.